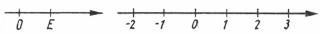

Bild 5.1.
Zahlengerade

Die ganzen Zahlen ordnen wir nun wie bei einer Thermometerskala den so gewonnenen Punkten zu. Dabei entspricht der Zahl Null der Punkt O und der Zahl 1 der Punkt E usf. Diese Zuordnung kann auf jede rationale Zahl $r = \frac{a}{b}$ (a, b ganz und $b > 0$) erweitert werden, wie wir der Konstruktion aus Bild 5.2 entnehmen.

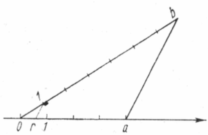

Bild 5.2.
Geometrische Konstruktionen von $r = \frac{a}{b}$

Bei Anwendung des Strahlensatzes verhält sich $a : r = b : 1$, also $r = \frac{a}{b}$. In der Abbildung ist $r = \frac{4}{7}$. Jede rationale Zahl wird damit auf einen Punkt der Zahlengeraden abgebildet, den wir als einen rationalen Punkt bezeichnen.

Wir wollen jetzt eine Eigenschaft über die Verteilung dieser Zahlen auf der Geraden angeben:

Satz 5.3: *Die rationalen Zahlen liegen dicht geordnet auf der Zahlengeraden, das heißt zwischen irgend zwei rationalen Punkten gibt es stets einen weiteren.* **S.5.3**

Für zwei Zahlen a und b mit $a < b$ gibt es stets eine dritte Zahl c mit $a < c < b$. Beispielsweise ist $m = \frac{a + b}{2}$ eine solche Zahl. Denn aus $a < b$ folgt $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$, und wenn auf beiden Seiten $\frac{a}{2}$ oder $\frac{b}{2}$ addiert wird, so folgt $a < m < b$. Mit diesem Verfahren können wir sogar unendlich viele rationale Zahlen zwischen a und b unterbringen.

5.1.3. Reelle Zahlen

Irrationale Zahlen

Obwohl die rationalen Zahlen beliebig dicht geordnet auf der Zahlengeraden liegen, können wir nicht sagen, daß jeder Punkt dieser Geraden auch ein rationaler ist, das heißt, es läßt sich umgekehrt nicht jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zuordnen. An dieser Stelle wird die Veranschaulichung sicher problematisch, denn diese „Lücken" lassen sich auch nicht mit einem Elektronenmikroskop finden.

Es gibt beispielsweise keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist oder geometrisch ausgedrückt: Der Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 entspricht auf der Zahlengeraden kein rationaler Punkt (Bild 5.3). Der Beweis dafür ist im Abschnitt 4.2.2. geführt worden.