Häufig wird der Zahl z auch die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}$ als Pfeil oder Vektor zugeordnet und umgekehrt. Die Lage von $-z$, $\bar{z}$ und $-\bar{z}$ wird durch Bild 5.8 verdeutlicht. Die geometrischen Größen in Bild 5.7

r, Länge der Strecke $\overrightarrow{OP}$ oder Abstand des Punktes P vom Ursprung und

φ, Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke $\overrightarrow{OP}$,

legen den Punkt P in der Ebene ebenfalls eindeutig fest. Dabei wird der Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn entgegen dem Uhrzeigensinn gemessen, und man wählt in der Regel $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Man nennt r und φ die *Polarkoordinaten* von P. Sie werden zu einer weiteren Darstellung der komplexen Zahlen verwendet.

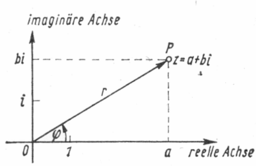

Bild 5.7.
$z = a + bi$

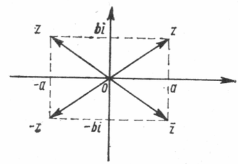

Bild 5.8.
Lage von z, $\bar{z}$, $-z$, $-\bar{z}$

Mit

$$a = r \cdot \cos\varphi \quad \text{und} \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

folgt

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{5.8}$$

Dies ist die *trigonometrische Darstellung* von z. Dabei wird

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ der *absolute Betrag* von z und der Winkel φ das *Argument* von z genannt. Man schreibt auch $\varphi = \arg z$.

Den Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ ermittelt man für $r \neq 0$, d. h. für alle von 0 verschiedenen komplexen Zahlen, eindeutig aus

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{r}.$$

Durch Division der beiden Formeln erhält man

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Diese Formel ist zwar einfacher, aber sie hat auch gewisse Nachteile. Sie versagt für $a = 0$, also für die Punkte der imaginären Achse der Gaußschen Zahlenebene. Weiterhin ist durch sie allein der Winkel φ mit $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ nicht eindeutig festgelegt. Der Quadrant für z muß zusätzlich aus den Vorzeichen von a und b bestimmt werden.

Es soll noch eine weitere Darstellung komplexer Zahlen behandelt werden. Mit Hilfe der *Eulerschen Formel*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, \tag{5.9}$$