Setzen wir $a = p \geqq 0$, ganz, so wird aus der Formel (6.21):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{p+\nu}{\nu} = \binom{p+1+n}{n}.$$

Nach Eigenschaft 2. ist andererseits $\binom{p+\nu}{\nu} = \binom{p+\nu}{p+\nu-\nu} = \binom{p+\nu}{p}$, also wird

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{p+\nu}{p} = \binom{p+1+n}{p+1}.$$

Setzen wir noch $p + n = m$, so erhalten wir die Beziehung

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{m}{p} = \binom{m+1}{p+1}. \tag{6.22}$$

Für $p = 1$ ergibt sich die bekannte Summe

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Satz 6.8 *(binomischer Lehrsatz): Es seien a, b reelle Zahlen und $n \geqq 1$, ganz. Dann gilt* **S.6.8**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \tag{6.23}$$

Mit dem Summensymbol wird diese Formel einfacher geschrieben:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}b^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu a^{n-\nu}b^\nu. \tag{6.24}$$

Beispiele 6.9:

1. Setzen wir in Formel (6.23) $a = b = 1$, so wird

$$2^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Setzen wir in (6.23) $a = 1$ und $b = -1$, so ergibt sich

$$0 = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-1)^\nu = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \pm \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

2. Die *Moivresche Formel* (5.12) lautet:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi, \qquad n > 0, \text{ ganz}.$$

Entwickeln wir die linke Seite der Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz (6.23) und setzen ferner die Real- bzw. Imaginärteile beider Seiten gleich, so erhalten wir

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi \pm \ldots$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi \pm \ldots$$