

# MATHEMATIK

FÜR INGENIEURE

NATURWISSENSCHAFTLER

ÖKONOMEN

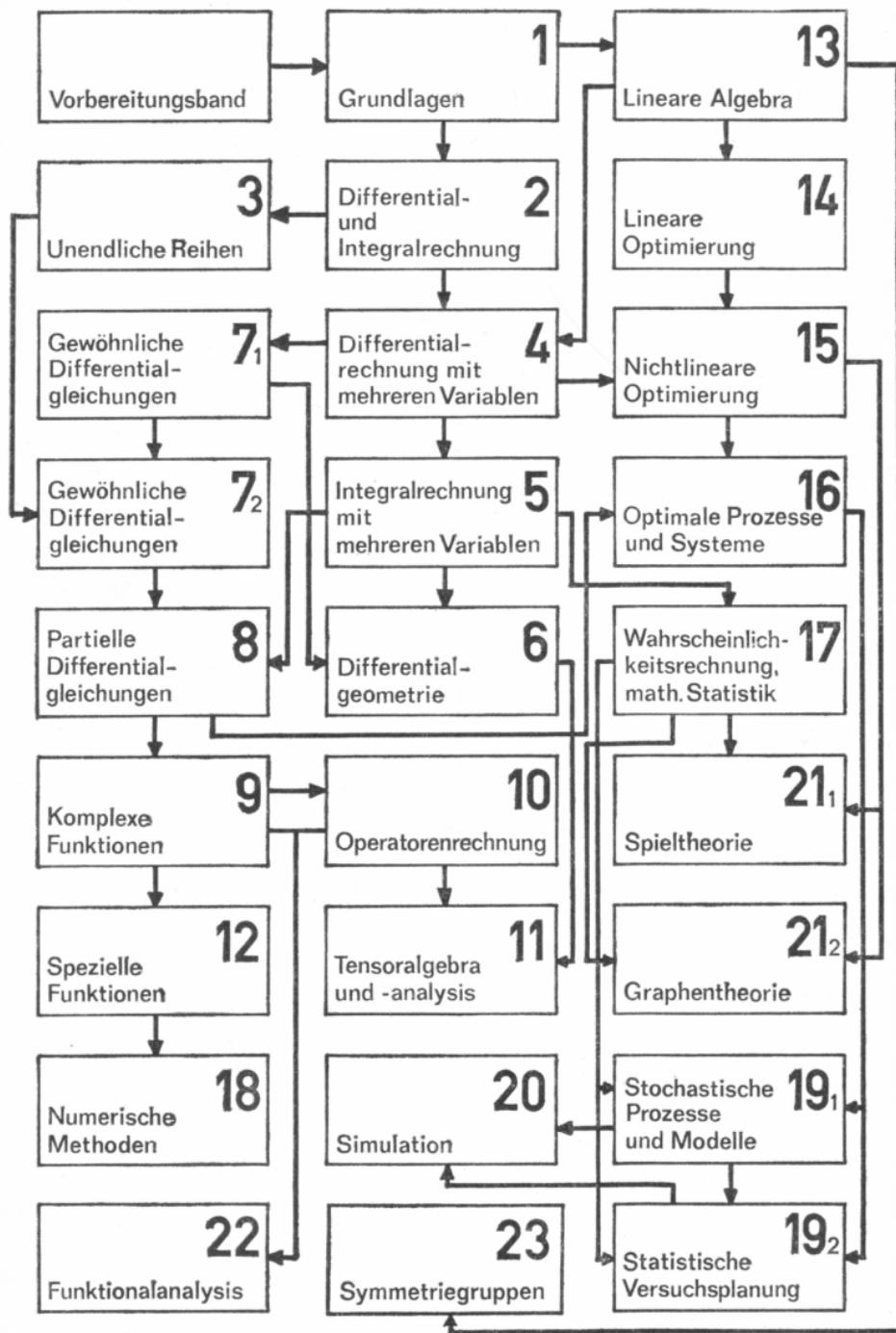
LANDWIRTE

5

KÖRBER · PFORR

Integralrechnung für Funktionen  
mit mehreren Variablen

# Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER  
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 5

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg  
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden  
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

---

PROF. DR. K. H. KÖRBER  
DOZ. DR. E. A. PFORR

Integralrechnung  
für Funktionen  
mit mehreren Variablen



BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

1986

Verantwortlicher Herausgeber:

Dr. sc. nat. Karl Manteuffel, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule  
„Otto von Guericke“ Magdeburg

Autor der Kapitel 1—4:

Dr. sc. nat. Ernst-Adam Pforr, Dozent an der Technischen Universität Dresden

Autor der Kapitel 5—7:

Dr. rer. nat. habil. Karl-Heinz Körber, ordentlicher Professor  
an der Technischen Universität Dresden

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, August 1986

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der 1. Auflage 1974.

Körber, Karl-Heinz:

Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen /

Karl-Heinz Körber; Ernst-Adam Pforr. – 6. Aufl. –

160 S. : 91 Abb.

(Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen  
und Landwirte ; 5)

NE: Pforr, Ernst-Adam ; GT

ISBN 3-322-00365-5

Math. Ing. Nat.wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 5

ISSN 0138-1318

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1974

6. Auflage

VLN 294-375/45/87 · LSV 1034

Lektor: Dorothea Ziegler

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,

Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Bestell-Nr. 665 714 7

01000

## Vorwort

Im vorliegenden Band 5 wird die Integralrechnung weiter ausgebaut. Die Grundlagen hierfür wurden bereits in Band 2 behandelt. Problemstellungen, die diese Erweiterung erforderlich machen, sind z. B. die Bestimmung des Flächeninhaltes von ebenen und räumlich gekrümmten Flächen, die Bestimmung des Volumens von Körpern und der Länge von Raumkurven sowie die Berechnung des Schwerpunktes der angeführten geometrischen Gebilde.

In Abhängigkeit von der Dimension der betrachteten geometrischen Gebilde kommen wir zu unterschiedlichen Erweiterungen des Integralbegriffes, die zwar ihre Besonderheiten haben, sich aber letztlich mit den in Band 2 behandelten Methoden für gewöhnliche Integrale berechnen lassen. Gerade für die Anwendungen der Integralrechnung in Naturwissenschaften und Technik ist es sehr zweckmäßig, solche Begriffe wie „Kurvenintegral“ und „Bereichsintegral“ zur Hand zu haben. Sie erleichtern das Aufstellen mathematischer Modelle außerordentlich. Erweiterungen des Integralbegriffes finden u. a. auch in der Theorie der Differentialgleichungen und in der Wahrscheinlichkeitstheorie Verwendung.

Die historischen Wurzeln der Bereichsintegrale sind bereits im Altertum zu suchen. Die grundsätzliche Vorgehensweise, mit der Archimedes (287?–212 v. u. Z.) die Flächeninhalts- und Volumenbestimmung handelte, ist von der der Bereichs- bzw. Raumintegrale nicht verschieden. Aus älterer Zeit liegen auch Ergebnisse vor (Näherungsformeln für den Kreisinhalt, Volumen des Pyramidenstumpfes), die auf ähnliche Kenntnisse schließen lassen. Die vollständige Lösung war aber erst möglich, nachdem Newton und Leibniz die in Band 2 behandelte Differential- und Integralrechnung entwickelt hatten und die Schreibweise von Leibniz sich durchgesetzt hatte. (Siehe hierzu auch den historischen Überblick in Band 2.) Das Doppelintegral in unserer heutigen Form gebrauchte als erster Euler (1779), das dreifache Integral Lagrange (1773). Letzterer verwendete auch als erster krummlinige Koordinaten. Viele Zusammenhänge wurden schon im 17. Jahrhundert erkannt.

Im vorliegenden Band sind von diesen Entdeckungen erwähnt: daß Prinzip von Cavalieri (1598?–1647) und die Regeln von Guldin (1577–1643). Letztere waren schon Pappos (um 320 u. Z.) bekannt.

In seinem Werk über die Figur der Erde (1743) benutzte Clairaut (1713–1765) erstmalig ein Kurvenintegral 2. Art. Die Ergründung der Zusammenhänge zwischen Kurven- und Oberflächenintegralen sowie zwischen Oberflächen- und Bereichsintegralen ist vor allem verbunden mit den Namen C. F. Gauß (1777–1855), G. Green (1793–1841) und G. G. Stokes (1819–1903).

Neben den Bereichsintegralen ( $n = 2$ ) und Raumintegralen ( $n = 3$ ) werden im vorliegenden Band auch allgemein die  $n$ -dimensionalen Integrale kurz behandelt. Verschiedene Verallgemeinerungen des hier verwendeten klassischen Integralbegriffs, die im 19. und 20. Jahrhundert erfolgten, sind dagegen nicht mehr Gegenstand der Be trachtungen in diesem Band.

Den Autoren ist es ein Bedürfnis, sich für zahlreiche wertvolle Hinweise der Mitarbeiter des Hochschulfernstudiums zu bedanken, die in dieser Auflage zu einem größeren Teil realisiert werden konnten. Besonderer Dank gebührt den Herren Dr. W. Denz und Dipl.-Math. H. Ebmeyer (Dresden).

Dem verantwortlichen Herausgeber und dem Verlag danken wir für die gute Zusammenarbeit.

# Inhalt

1.	Parameterintegrale und Doppelintegrale .....	5
1.1.	Begriff des Parameterintegrals .....	5
1.2.	Differentiation von Parameterintegralen .....	8
1.3.	Doppelintegrale (Integration von Parameterintegralen) .....	12
1.4.	Uneigentliche Parameterintegrale .....	17
1.5.	Die Gammafunktion .....	23
2.	Integrale über ebene Bereiche .....	26
2.1.	Der Begriff des Bereichsintegrals .....	26
2.2.	Existenz und elementare Eigenschaften des Bereichsintegrals .....	29
2.3.	Berechnung von Bereichsintegralen mit Hilfe von Doppelintegralen .....	31
2.4.	Anwendungen des Bereichsintegrals .....	33
2.5.	Uneigentliche Bereichsintegrale .....	39
3.	Integrale über räumliche Bereiche .....	44
3.1.	Der Begriff des Raumintegrals und des $n$ -dimensionalen Integrals .....	44
3.2.	Anwendungen des Raumintegrals .....	53
4.	Transformation mehrdimensionaler Integrale .....	61
4.1.	Allgemeine krummlinige Koordinaten .....	61
4.2.	Die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale .....	67
4.3.	Anwendungen der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale .....	77
5.	Kurvenintegrale .....	84
5.1.	Begriff der Kurvenintegrale 1. und 2. Art .....	84
5.2.	Berechnung von Kurvenintegralen .....	88
5.3.	Eigenschaften von Kurvenintegralen .....	93
5.4.	Integration totaler Differentiale .....	96
5.5.	Kurvenintegrale anderer Art .....	103
6.	Oberflächenintegrale .....	105
6.1.	Definition und Berechnung des Inhalts krummer Flächenstücke .....	105
6.2.	Parameterdarstellung von Flächenstücken .....	109
6.3.	Definition und Berechnung von Oberflächenintegralen .....	114
7.	Integralsätze .....	121
7.1.	Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene .....	121
7.2.	Der Gaußsche Integralsatz im Raum .....	127
7.3.	Koordinatenfreie Darstellung der Divergenz .....	130
7.4.	Die Greenschen Formeln .....	132
7.5.	Der Stokessche Integralsatz .....	136
7.6.	Koordinatenfreie Darstellung der Rotation .....	142
	Lösungen der Aufgaben .....	144
	Literatur .....	158
	Namen- und Sachregister .....	159

# 1. Parameterintegrale und Doppelintegrale

## 1.1. Begriff des Parameterintegrals

Wir führen zunächst sogenannte Normalbereiche ein; diese Normalbereiche sind für alle folgenden Ausführungen von grundsätzlicher Bedeutung (s. Bd. 4).

**Definition 1.1:** Eine Punktmenge (einen Bereich)  $B$  der  $x,y$ -Ebene, die „seitlich“ durch zwei Parallelen zur  $y$ -Achse ( $x = x_1, x = x_2; x_1 < x_2$ ) und „nach unten“ bzw. „nach oben“ durch stetige Kurven ( $y = y_1(x), y = y_2(x); y_1(x) \leqq y_2(x)$  für alle  $x \in [x_1, x_2]$ ) begrenzt wird, nennt man einen ebenen Normalbereich (Fundamentalbereich) bezüglich der  $x$ -Achse (s. Bild 1.1). Es gilt also:

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \end{cases}.$$

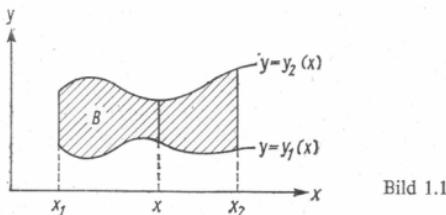


Bild 1.1

Vertauscht man die Rolle von  $x$  und  $y$ , so erhält man einen ebenen Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse (s. Bild 1.2). Er ist eine Punktmenge  $B$  der  $x,y$ -Ebene, die „nach unten“ bzw. „nach oben“ durch zwei Parallelen zur  $x$ -Achse ( $y = y_1, y = y_2; y_1 < y_2$ ) und „seitlich“ durch stetige Kurven ( $x = x_1(y), x = x_2(y); x_1(y) \leqq x_2(y)$  für alle  $y \in [y_1, y_2]$ ) begrenzt wird.

Es gilt also:

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 \leqq y \leqq y_2 \\ x_1(y) \leqq x \leqq x_2(y) \end{cases}.$$

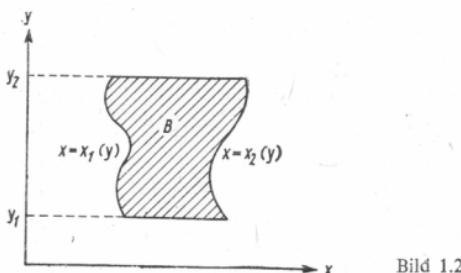


Bild 1.2

*Beispiel 1.1:* Der in Bild 1.3 dargestellte Bereich ist ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse. Es gilt  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$ ,  $y_1(x) = -\frac{x}{2}$ ,  $y_2(x) = \frac{3}{4}x$  ( $y = -\frac{x}{2}$  ist die Gleichung der durch die Punkte  $(0, 0)$  und  $(4, -2)$  hindurchgehenden Geraden;  $y = \frac{3}{4}x$  ist die Gleichung der durch die Punkte  $(0, 0)$  und  $(4, 3)$  hindurchgehenden Geraden).

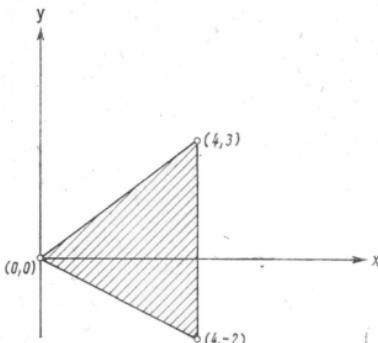


Bild 1.3

*Bemerkung 1.1:* Der in diesem Beispiel betrachtete Bereich ist auch ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse.

Es gilt:

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 3, \quad x_1(y) = \begin{cases} -2y, & -2 \leq y \leq 0 \\ \frac{4}{3}y, & 0 \leq y \leq 3 \end{cases}, \quad x_2(y) = 4.$$

Die „linken“ Kurve  $x = x_1(y)$  (es handelt sich um eine stetige Kurve!) kann aber hier nicht durch eine einzige Gleichung beschrieben werden. Man muß bei irgendwelchen Rechnungen die Intervalle  $-2 \leq y \leq 0$  und  $0 \leq y \leq 3$  getrennt betrachten. Das führt in der Praxis zu einer Zerlegung des Bereiches in zwei Teilbereiche. Bei dem hier vorliegenden Beispiel würde man den Bereich  $B$  in zwei Dreiecksbereiche  $B_1$  und  $B_2$  zerlegen – falls man mit Normalbereichen bezüglich der  $y$ -Achse arbeiten möchte.  $B_1$  bzw.  $B_2$  ist der unterhalb bzw. oberhalb der  $x$ -Achse liegende Teil von  $B$ .

*Beispiel 1.2:* Der in Bild 1.4 dargestellte Bereich (Kreisscheibe vom Radius 2 mit dem Mittelpunkt in  $(3, 0)$ ) kann sowohl als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse als auch als Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse angesehen werden.  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$  ist

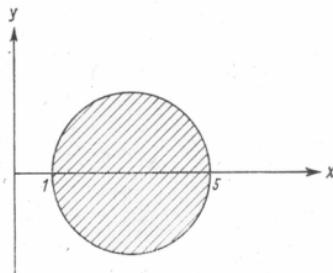


Bild 1.4

die Gleichung des Kreises. Nach  $y$  aufgelöst, erhalten wir:  $y = \pm \sqrt{4 - (x - 3)^2}$ . Das Vorzeichen „+“ liefert die obere Kreishälfte, das Vorzeichen „-“ die untere Kreishälfte. Nach  $x$  aufgelöst, erhalten wir:  $x = 3 \pm \sqrt{4 - y^2}$ . Das Vorzeichen „+“ liefert bei dieser Darstellung die rechte Kreishälfte, das Vorzeichen „-“ die linke Kreishälfte. Für die Kreisscheibe – als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse aufgefaßt – gilt:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ ,  $y_1(x) = -\sqrt{4 - (x - 3)^2}$ ,  $y_2(x) = \sqrt{4 - (x - 3)^2}$ . Faßt man die Kreisscheibe als Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse auf, so gilt:  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 2$ ,  $x_1(y) = 3 - \sqrt{4 - y^2}$ ,  $x_2(y) = 3 + \sqrt{4 - y^2}$ .

Vorgegeben sei ein Normalbereich  $B$  bezüglich der  $x$ -Achse (s. Bild 1.1) und eine Funktion  $f(x, y)$  der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$ . Von der Funktion  $f(x, y)$  setzen wir voraus, daß sie mindestens in allen Punkten  $(x, y) \in B$  definiert und stetig ist. Unter dieser Voraussetzung ist für jedes feste  $x \in [x_1, x_2]$  die nun allein von  $y$  abhängige Funktion  $f(x, y)$  (s. Bild 1.1) eine auf dem Intervall  $[y_1(x), y_2(x)]$  stetige Funktion. Da jede stetige Funktion auch integrierbar ist, kann man das folgende Integral bilden:

$$F(x) := \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

**Definition 1.2:** Das Integral (1.1), das natürlich von der Wahl der Größe  $x$  (des Parameters  $x$ ) abhängt, nennt man ein **Parameterintegral mit dem Parameter  $x$** ; der Parameter  $x$  (eine im Intervall  $[x_1, x_2]$  willkürlich wählbare Größe) kommt außer im Integranden auch noch in den Integrationsgrenzen vor. Man sagt in diesem Zusammenhang, daß die durch Formel (1.1) eingeführte Funktion  $F(x)$  durch ein **Integral dargestellt wird**.

**Beispiel 1.3:** Vorgegeben sei eine Kreisscheibe  $B$  vom Radius 1 mit dem Mittelpunkt im Ursprungspunkt  $O$  des zugrunde gelegten  $x, y$ -Koordinatensystems und eine Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Man berechne für ein beliebiges, aber festes  $x \in [-1, 1]$  das entsprechende Parameterintegral. Für die Punkte der Kreisscheibe  $B$  gilt:

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

(s. Bild 1.5).

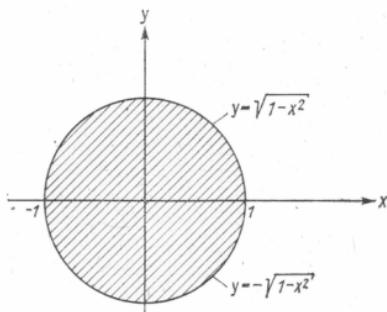


Bild 1.5

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy = \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} (2x^2 + 1). \end{aligned}$$

( $x$  ist ein fester Wert aus dem Intervall  $[-1, 1]$ ; bei der Integration nach  $y$  wird er daher wie eine Konstante behandelt.)

*Ergänzung zur Definition 1.2:* Neben Parameterintegralen von der in Formel (1.1) angegebenen Form hat man noch *Parameterintegrale mit dem Parameter  $y$* :

$$G(y) := \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

Ausgangspunkt für diese Parameterintegrale sind Normalbereiche bezüglich der  $y$ -Achse. Der Parameter  $y$  ist eine (im Intervall  $[y_1, y_2]$ ) willkürlich wählbare Größe.

- \* *Aufgabe 1.1:* Man berechne das Parameterintegral  $\int_{-x}^{2x} x(y+1) dy$ . (Auf welchem Intervall verläuft die Kurve  $y = y_1(x) = -x$  unterhalb der Kurve  $y = y_2(x) = 2x$ ?)

## 1.2. Differentiation von Parameterintegralen

Parameterintegrale (Darstellungen von Funktionen durch bestimmte Integrale) – siehe Formel (1.1) bzw. (1.2) – begegnen uns in den Anwendungen sehr oft. Die erste Frage, die sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkt von Interesse ist, ist die folgende: Unter welchen Voraussetzungen ist eine durch ein Integral dargestellte Funktion

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{bzw.} \quad G(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

stetig und differenzierbar in dem jeweiligen Definitionsbereich? Bezuglich der Frage der Stetigkeit von  $F(x)$  wird man erwarten, daß die Stetigkeit der Funktion  $f(x, y)$  auf  $B$  und der Funktionen  $y_1(x), y_2(x)$  auf  $[x_1, x_2]$  die Stetigkeit von  $F(x)$  zur Folge haben wird. Bezuglich der Differenzierbarkeit ist der Sachverhalt ein wenig komplizierter. Sicher wird man zunächst einmal verlangen müssen, daß die Funktionen  $y_1(x), y_2(x)$  auf  $[x_1, x_2]$  differenzierbar sind. Darüber hinaus muß selbstverständlich auch die Funktion  $f(x, y)$  irgendeine Differenzierbarkeitsforderung auf  $B$  erfüllen: Die Differenzierbarkeit von  $F(x)$  nach  $x$  verlangt die Existenz der partiellen Ableitung von  $f(x, y)$  nach  $x$ .

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir nun den Satz formulieren, der Auskunft auf die oben formulierte Frage gibt.

**Satz 1.1:** *B sei ein Normalbereich bezüglich der x-Achse (s. Bild 1.1). Wenn die Funktionen  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  auf  $[x_1, x_2]$  und  $f(x, y)$  auf B stetig sind, dann ist auch die durch ein Integral dargestellte Funktion*

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

*auf  $[x_1, x_2]$  stetig. Sind überdies die Funktionen  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  auf  $[x_1, x_2]$  differenzierbar und besitzt die Funktion  $f(x, y)$  eine stetige partielle Ableitung  $f_x(x, y)$  (auf einem B ganz im Innern enthaltenden Bereich), so ist auch die Funktion  $F(x)$  auf dem Intervall  $[x_1, x_2]$  differenzierbar, und es gilt die Gleichung*

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f_x(x, y) dy - y_1'(x) f(x, y_1(x)) + y_2'(x) f(x, y_2(x)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Wir führen den Beweis lediglich für die Gültigkeit der Formel (1.3) mit Hilfe eines von uns unbewiesenen Hilfssatzes durch und verweisen für die restlichen Behauptungen auf [3], Bd. II, und [4], Bd. III.

**Hilfssatz:** Ein Parameterintegral der Art (1.1) mit festen Grenzen  $y_1 = c_1$ ,  $y_2 = c_2$ , dessen Integrand  $f$  stetig differenzierbar vom Parameter  $x$  abhängt, wird nach dem Parameter  $x$  differenziert, indem man unter dem Integralzeichen partiell nach  $x$  differenziert, d.h.

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} f_x(x, y) dy. \quad (*)$$

Aus Band 2, Satz 10.8, ist bekannt, daß die Differentiation eines Integrals (mit stetigem Integrand  $f(t)$ ) nach variabler oberer Grenze  $y$  den Integrand  $f(t)$  an der oberen Grenze  $t = y$  ergibt, und dieses Resultat bleibt natürlich gültig, wenn der Integrand  $f$  auch noch von einem Parameter  $x$  abhängt, der während der Differentiation unveränderlich ist:

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(x, t) dt = f(x, y) \quad (x \text{ fest}). \quad (**)$$

Aus

$$\Phi(x, u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} f(x, y) dy$$

erhalten wir (1.1), wenn wir

$$u_1 = y_1(x), \quad u_2 = y_2(x)$$

setzen.

Dann ist

$$\Phi(x, u_1(x), u_2(x)) = F(x)$$

eine Funktion der unabhängigen Variablen  $x$ , für deren Ableitung bezüglich  $x$  wir nach der verallgemeinerten Kettenregel (Band 4; 3.6.2.)

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \frac{d}{dx} \Phi(x, u_1(x), u_2(x)) \\ &= \Phi_x + \Phi_{u_1} \frac{du_1}{dx} + \Phi_{u_2} \frac{du_2}{dx}\end{aligned}\quad (***)$$

erhalten.  $\Phi_{u_i}$  ( $i = 1, 2$ ) lässt sich nach (\*\*) berechnen, da während der partiellen Differentiation von  $\Phi(x, u_1, u_2)$  nach  $u_i$  stets  $x$  als fest angesehen wird.

Wir haben

$$\Phi_{u_2} = f(x, u_2) = f(x, y_2(x))$$

und wegen

$$\begin{aligned}\int_y^a f(x, t) dt &= - \int_a^y f(x, t) dt \\ \Phi_{u_1} &= -f(x, u_1) = -f(x, y_1(x)).\end{aligned}$$

Beachten wir noch das Resultat des Hilfssatzes, so folgt aus (\*\*\*)) die Formel (1.3). ■

*Hinweis:* Die Differentiation von (1.1) mit Hilfe der Kettenregel ist eine gute Merkhilfe für (1.3).

Sind die Funktionen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  konstant, etwa  $y_1(x) = c$ ,  $y_2(x) = d$ , so vereinfacht sich – wegen  $y_1'(x) = 0$  und  $y_2'(x) = 0$  – die Formel (1.3) wesentlich:

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy. \quad (1.4)$$

Im Falle  $y_1(x) = c$ ,  $y_2(x) = d$  spricht man von einem *Parameterintegral mit festen Grenzen*. Der zugehörige Normalbereich  $B$  ist in diesem Fall ein Rechteckbereich (s. Bild 1.6);  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ; obere und untere Begrenzungskurve sind in diesem Fall Parallelen zur  $x$ -Achse. Formel (1.4) ist mit der im Hilfssatz angegebenen Formel (\*) identisch.

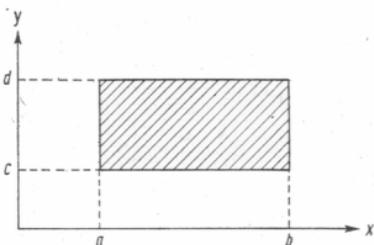


Bild 1.6

*Beispiel 1.4:* Das Parameterintegral  $F(x) = \int_0^1 \frac{x \, dy}{\sqrt{1-x^2y^2}}$  soll auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersucht werden! Der Normalbereich ist in diesem Fall durch die Geraden  $y_1(x) = 0$ ,  $y_2(x) = 1$  begrenzt. In welchem Intervall darf sich  $x$  bewegen, damit die Funktion  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$  zunächst einmal überhaupt definiert ist?

Damit der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist, muß man – wegen  $0 \leq y \leq 1$  – die Variable  $x$  auf das offene Intervall  $-1 < x < 1$  beschränken. ( $x = 1$  bzw.  $-1$  darf nicht zugelassen werden, denn dann wäre für  $y = 1$  der Ausdruck  $1 - x^2y^2$  gleich null.) Die Funktion  $f(x, y)$  ist also sicherlich für alle Punkte  $(x, y)$  des Rechteckbereichs

$$B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -1 < a < b < 1\}$$

definiert. Auf Grund des einfachen Aufbaus der Funktion  $f(x, y)$  – im Zähler steht eine rationale Funktion, im Nenner die Wurzel aus einer rationalen Funktion – ist in diesem Bereich die Funktion  $f(x, y)$  auch stetig und besitzt stetige partielle Ableitungen (s. Bd. 4). Aus Satz 1.1 folgt dann:  $F(x) = \int_0^1 \frac{x \, dy}{\sqrt{1-x^2y^2}}$  ist für alle  $x \in (-1, 1)$  stetig und differenzierbar. Für die Ableitung  $F'(x)$  erhält man nach Formel (1.4):

$$F'(x) = \int_0^1 f_x(x, y) \, dy = \int_0^1 (1-x^2y^2)^{-\frac{3}{2}} \, dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Das Nachprüfen der letzten Umformung betrachte man als eine kleine Übungsaufgabe: Zunächst kann man das unbestimmte Integral  $\int (1-x^2y^2)^{-\frac{3}{2}} \, dy$  durch die Substitution  $xy = u$  ( $x \, dy = du$ ;  $x$  wird bei der Integration nach  $y$  als konstant betrachtet) auf das Integral  $\frac{1}{x} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$  zurückführen. Das letzte Integral entnehmen wir einer Formelsammlung (s. z. B. [1]):  $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ . Rücktransformation und Einsetzen der Grenzen liefern die oben angegebene Beziehung.

Man hätte natürlich auch  $F'(x)$  dadurch bekommen können, daß man zunächst das rechts stehende Integral ausrechnet und anschließend nach  $x$  differenziert. Das wollen wir bei diesem Beispiel einmal durchführen, zumal das Ausrechnen des Parameterintegrals zusätzlich ein interessantes Ergebnis liefert. Die Substitution  $xy = u$  ( $x \, dy = du$ ) ergibt:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x \, dy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \Big|_{u=0}^{u=x} = \arcsin x.$$

Es gilt also

$$\int \frac{x \, dy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \arcsin x.$$

Die Funktion  $\arcsin x$  wird also durch das links stehende Parameterintegral dargestellt. Von der Funktion  $\arcsin x$  wissen wir aber, daß  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  gilt.

*Beispiel 1.5:* Man berechne das Parameterintegral  $\int_0^1 y^x dy$ ! (Voraussetzung für den Parameter  $x: x \geq 0$ . Für  $x$ -Werte zwischen  $-1$  und  $0$  erhält man uneigentliche Integrale; im Falle  $x = -\frac{1}{2}$  zum Beispiel ergibt sich  $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt[4]{y}}$ . Das Integral  $\int_0^1 y^x dy$  stellt für  $x$ -Werte mit  $-1 < x < 0$  ein sog. uneigentliches Parameterintegral dar, auf das wir in Abschnitt 1.4. näher eingehen werden.)  $y^x$  ist (für jedes konstante  $x \geq 0$ ) eine auf dem Intervall  $0 \leq y \leq 1$  stetige Funktion der Variablen  $y$  und daher auf  $[0, 1]$  integrierbar:

$$\int_0^1 y^x dy = \left[ \frac{y^{x+1}}{x+1} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x+1}.$$

*Bemerkung 1.2:* Die Formel (1.3) bzw. (1.4) wird vor allem bei theoretischen Untersuchungen benötigt. Oft hat sie aber auch eine praktische Bedeutung, und zwar dann, wenn das Integral  $\int f_x(x, y) dy$  einfacher zu lösen ist als das Integral  $\int f(x, y) dy$ .

\* *Aufgabe 1.2:* Von der durch ein Parameterintegral dargestellten differenzierbaren Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sin(xy) dy$$

berechne man die Ableitung  $F'(x)$  auf zwei Arten:

- indem man das Parameterintegral ausrechnet und das Ergebnis anschließend differenziert,
- mit Hilfe der Formel (1.3).

### 1.3. Doppelintegrale (Integration von Parameterintegralen)

Unter den in Satz 1.1 angegebenen Voraussetzungen (Stetigkeit der Funktionen  $f(x, y)$ ,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  auf den entsprechenden Bereichen) ist die durch das Parameterintegral  $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$  dargestellte Funktion  $F(x)$  eine (auf dem Intervall  $[x_1, x_2]$ ) stetige Funktion. Da jede stetige Funktion auch integrierbar ist, muß das Integral von  $F(x)$  über dem Intervall  $[x_1, x_2]$  existieren:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left( \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

#### D.1.3 Definition 1.3: Den Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (I)$$

– für den man abkürzend auch  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$  schreibt – nennt man **Doppelintegral**.

(An Stelle von Doppelintegral sagt man auch „zweifaches Integral“ oder „iteriertes Integral“.) Den durch die Kurven  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ,  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  begrenzten Bereich (s. Bild 1.1) nennt man den zu diesem Doppelintegral gehörigen Normalbereich.

Wenn man von einem Parameterintegral der Form  $G(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$  ausgeht (s. Formel (1.2)) und  $G(y)$  nach  $y$  integriert, erhält man ein Doppelintegral der Form

$$\int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_{y=y_1}^{y_2} \left( \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (\text{II})$$

In der abkürzenden Schreibweise läßt man dann wieder die (um  $G(y)$  gesetzten) Klammern weg.

Erläuterung zur Definition 1.3: Bei einem Doppelintegral vom Typ (I) wird die Funktion  $f(x, y)$  zunächst unbestimmt nach  $y$  integriert – wobei  $x$  wie eine Konstante behandelt wird –, anschließend werden für  $y$  die Grenzen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  eingesetzt, und zum Schluß wird der erhaltene Ausdruck nach  $x$  integriert. Bei einem Doppelintegral vom Typ (II) geht man analog vor; hier wird die Funktion  $f(x, y)$  zunächst unbestimmt nach  $x$  integriert, wobei  $y$  wie eine Konstante behandelt wird.

**Beispiel 1.6:** Man berechne das Doppelintegral  $D = \int_0^3 \int_0^{x^2} xy dy dx$ ! Es handelt sich um ein Doppelintegral vom Typ (I) (s. Definition 1.3) mit  $f(x, y) = xy$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $y_1(x) = 0$ ,  $y_2(x) = x^2$ . Wir berechnen zunächst das „innere“ Integral:

$$\int_0^{x^2} xy dy = \int_{y=0}^{x^2} xy dy = \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x^2} = \frac{x^5}{2}$$

Hieraus folgt:  $D = \int_1^3 \frac{x^5}{2} dx = \frac{x^6}{12} \Big|_1^3 = \frac{728}{12} = 60,66 \dots$ . Der zu dem Doppelintegral gehörige Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse wird durch die Kurven  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^2$  begrenzt (s. Bild 1.7).

**Beispiel 1.7:**  $D = \int_{-4}^{-2} \int_y^{-y} (x+y) dx dy$  ist ein Doppelintegral vom Typ (II) mit  $y_1 = -4$ ,  $y_2 = -2$ ,  $x_1(y) = y$ ,  $x_2(y) = -y$  und  $f(x, y) = x + y$  (s. Definition 1.3).

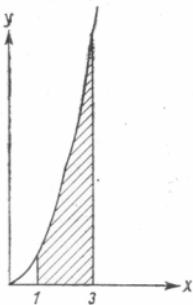


Bild 1.7

Es erfolgt zunächst wieder die Berechnung des „inneren Integrals“:

$$\int_y^{-y} (x+y) dx = \int_{x=y}^{-y} (x+y) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + yx \right]_{x=y}^{x=-y} = \frac{(-y)^2}{2} + y(-y) - \left( \frac{y^2}{2} + y^2 \right) = -2y^2.$$

Hieraus folgt

$$D = \int_{-4}^{-2} (-2y^2) dy = -\frac{2}{3} y^3 \Big|_{-4}^{-2} = -\frac{2}{3} ((-2)^3 - (-4)^3) = -\frac{112}{3}.$$

Der zu diesem Doppelintegral gehörige Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse wird durch die Kurven  $y = -4$ ,  $y = -2$ ,  $x = y$ ,  $x = -y$  begrenzt (s. Bild 1.8). Man beachte: Für alle  $y$  mit  $-4 = y_1 \leq y \leq y_2 = -2$  gilt  $y = x_1(y) \leq x_2(y) = -y$ .

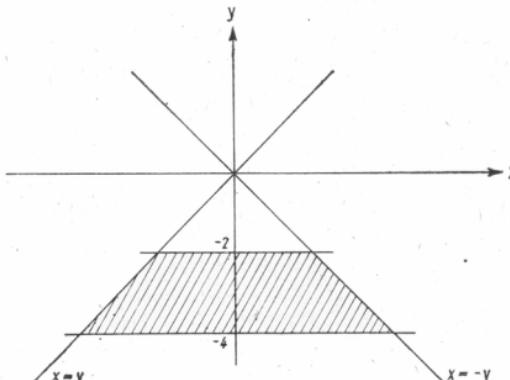


Bild 1.8

Im allgemeinen darf man bei einem Doppelintegral die Reihenfolge der Integrationen nicht vertauschen! Es wäre ein schwerer Fehler, wenn man z.B. für das in Beispiel 1.7 behandelte Doppelintegral schreiben würde:  $\int_{y=-4}^{-y=2} \int_{x=a}^b (x+y) dx dy$ . Nur bei einem Doppelintegral mit konstanten Grenzen – der zugehörige Normalbereich ist in diesem Falle ein den Koordinatenachsen paralleler Rechteckbereich – ist die Reihenfolge der Integrationen vertauschbar, wie der folgende Satz zeigt.

**S.1.2 Satz 1.2:** Ist  $f(x, y)$  eine auf dem Rechteckbereich  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  (s. Bild 1.6) stetige Funktion, so gilt:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Auf den Beweis dieses Satzes, den man z. B. in [4], Bd. III, finden kann, verzichten wir. Wir werden uns an keiner Stelle auf diesen Satz beziehen.

Wir kommen nun zur geometrischen Veranschaulichung des Doppelintegrals. Erinnern wir uns zunächst an die geometrische Veranschaulichung eines gewöhn-

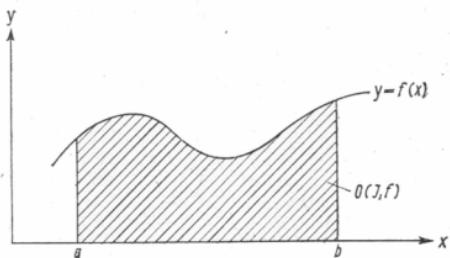


Bild 1.9

lichen (bestimmten) Integrals. Unter der Voraussetzung, daß die Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig und nirgends negativ ist, liefert das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  den Flächeninhalt des durch die Kurven  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  und  $y = f(x)$  begrenzten ebenen Bereichs (s. Bd. 2).  $\int_a^b f(x) dx$  liefert also den Inhalt des zwischen dem „Integrationsintervall“  $J = [a, b]$  und der Kurve  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , liegenden ebenen Bereichs, der sog. *Ordinatenmenge*  $O(J, f)$  (s. Bild 1.9). Man wird erwarten, daß man bei einem Doppelintegral  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$  – unter der Voraussetzung, daß die Funktion  $f(x, y)$  auf dem zugehörigen Normalbereich  $B$  stetig und nirgends negativ ist – ebenfalls eine einfache geometrische Deutung vornehmen kann. In Analogie zur Ordinatenmenge  $O(J, f)$ , die wir beim gewöhnlichen Integral eingeführt haben, betrachten wir hier die Ordinatenmenge  $O(B, f)$ . Die Ordinatenmenge  $O(B, f)$  besteht aus der Menge aller zwischen dem Normalbereich  $B = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$  und der Fläche  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in B$ , liegenden Punkte  $(x, y, z)$  (s. Bild 1.10).

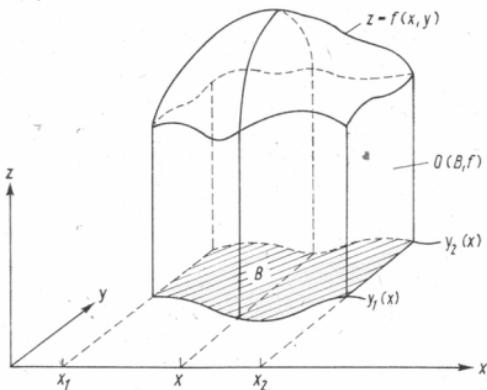


Bild 1.10

Es gilt also:

**Definition 1.4:**  $(x, y, z) \in O(B, f) \Leftrightarrow \{(x, y) \in B \text{ und } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ .  $O(B, f)$  heißt **D.1.4** die zu  $B$  und  $f(x, y)$  gehörige Ordinatenmenge.

**Satz 1.3:** Ist  $B = \{(x, y) \mid x_1 \leqq x \leqq x_2, y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x)\}$  der zu dem Doppelintegral  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$  gehörige Normalbereich,  $O(B, f)$  die zu  $B$  und  $f(x, y)$  gehörige Ordinatenmenge, so gilt für das Volumen  $V$  von  $O(B, f)$ :

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (1.5)$$

(Voraussetzungen:  $f(x, y) \geqq 0$  für alle  $(x, y) \in B, f(x, y)$  stetig auf  $B$ .)

Beim Beweis zu Satz 1.3 berufen wir uns auf das Prinzip von Cavalieri, welches wir in Band 2 kennengelernten. Ist  $x$  irgendeine zwischen  $x_1$  und  $x_2$  gelegener Wert, so gilt für die durch die Ebene  $E_x$  aus  $O(B, f)$  ausgeschnittene Fläche

$$q(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

$E_x$  ist die durch den Punkt  $(x, 0, 0)$  gehende und parallel zur  $y, z$ -Ebene verlaufende Ebene. Für das Volumen  $V$  von  $O(B, f)$  gilt dann (vgl. Band 2, Satz 10.20)

$$V = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Die Voraussetzung für Satz 10.20 –  $q(x)$  stetig – ist wegen der Stetigkeit der Funktionen  $y_1(x), y_2(x), f(x, y)$  erfüllt (vgl. Satz 1.1). ■

**Beispiel 1.8:** Von dem durch die Flächen  $z = 0, y = 0, x = 0, 3x + 4y = 12$  und  $z = x^2 + y^2$  begrenzten räumlichen Bereich  $B^*$  berechne man das Volumen  $V$ .

Wir verschaffen uns zunächst eine anschauliche Vorstellung von dem räumlichen Bereich  $B^*$ :  $B^*$  wird „nach unten“ von der  $x, y$ -Ebene ( $z = 0$ ), „seitlich“ durch die  $x, z$ -Ebene ( $y = 0$ ), die  $y, z$ -Ebene ( $x = 0$ ), die auf der  $x, y$ -Ebene senkrecht stehende Ebene  $3x + 4y = 12$  und „nach oben“ durch das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2$  begrenzt. (Die Menge aller Punkte  $(x, y)$ , die der Gleichung  $3x + 4y = 12$  genügen, ist eine Gerade  $g$  in der  $x, y$ -Ebene. Die Menge aller Punkte  $(x, y, z)$ , die dieser Gleichung genügen ( $z$  beliebig!), ist eine Ebene  $E$  im  $x, y, z$ -Raum.  $E$  steht auf der  $x, y$ -Ebene senkrecht und schneidet die  $x, y$ -Ebene in  $g$ . Das Rotationsparaboloid entsteht durch Rotation der in der  $x, z$ -Ebene gelegenen Parabel  $z = x^2$  um die  $z$ -Achse!) Der räumliche Bereich  $B^*$  ist also eine Ordinatenmenge  $O(B, f)$  mit  $B = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 4, 0 \leqq y \leqq 3 - \frac{3}{4}x\}$  (s. Bild 1.11) und  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Bild

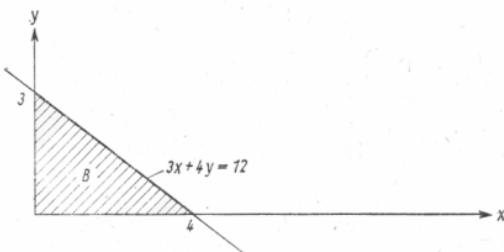


Bild 1.11

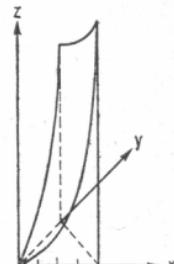


Bild 1.12

1.12 liefert eine anschauliche Vorstellung vom räumlichen Bereich  $B^*$ . Der ebene Bereich  $B$  ist der Grundriß des räumlichen Bereiches  $B^*$ ! Nach Satz 1.3 ergibt sich für das Volumen  $V$  von  $B^*$ :

$$V = \int_0^4 \int_0^{3 - 3/x} (x^2 + y^2) dy dx.$$

Für das innere Integral erhält man:

$$\left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=3-3/x} = 9 - \frac{27}{4} x + \frac{75}{16} x^2 - \frac{57}{64} x^3.$$

$$\text{Also ist } V = \left[ 9x - \frac{27}{8} x^2 + \frac{25}{16} x^3 - \frac{57}{256} x^4 \right]_0^4 = 25.$$

*Aufgabe 1.3:* Von dem durch die Flächen  $z = 0, y = 0, x = 0, x + y = 3$  sowie  $z = -x - 2y + 6$  begrenzten räumlichen Bereich  $B^*$  berechne man das Volumen  $V$ . (Man skizziere  $B^*$ !)

*Aufgabe 1.4:* Zu berechnen ist das Volumen des (im 1. Oktanten des  $x,y,z$ -Raumes gelegenen) \* Körpers  $B^*$ , der nach unten durch die  $x,y$ -Ebene, nach oben durch die Sattelfläche  $z = xy$  und seitlich durch die Kreiszylinderfläche  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$  begrenzt wird. (Man zeichne den Grundriß  $B$  von  $B^*$ !) (1. Oktant: Menge aller Punkte  $(x, y, z)$  mit  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .)

## 1.4. Uneigentliche Parameterintegrale

In Band 2, Abschnitt 11, wurden die uneigentlichen Integrale behandelt: a) uneigentliche Integrale mit wenigstens einer unendlichen Grenze, b) uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkter Funktion. (Natürlich können auch „gemischte“ uneigentliche Integrale auftreten, die sowohl bezüglich einer Grenze als auch der Funktion (nichtbeschränkt!) uneigentlich sind!) Beim Übergang von uneigentlichen Integralen zu uneigentlichen Parameterintegralen betrachten wir von den vielen Typen, die es bei uneigentlichen Integralen gibt, hier nur den Typ

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Die Übertragung der Problematik auf die anderen Typen bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Wenn nun bei dem hier vorgegebenen uneigentlichen Integral der Integrand noch von einer anderen veränderlichen (von  $x$  unabhängigen) Größe  $y$  abhängt – man spricht dann in diesem Zusammenhang vom *Parameter*  $y$  –, so erhält man ein uneigentliches Integral von der Form

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx,$$

ein sog. uneigentliches Parameterintegral. Allgemein definiert man:

**Definition 1.5:** Ein uneigentliches Parameterintegral ist ein uneigentliches Integral, dessen Integrand neben der Integrationsvariablen  $x$  noch von einem Parameter  $y$  abhängt.

Bei oberflächlicher Betrachtung dieser Definition könnte man der Meinung sein, daß sich bei einem uneigentlichen Parameterintegral  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  gegenüber dem „eigentlichen“ Parameterintegral  $\int_a^b f(x, y) dx$  (s. Abschnitt 1.2.) keine wesentlich neuen Gesichtspunkte ergeben. Das ist leider nicht der Fall! Im Rahmen dieses Buches können wir auf keinen Fall alle mit uneigentlichen Parameterintegralen zusammenhängenden Fragen untersuchen. Wir müssen uns auf die Darstellung einiger grundlegender Zusammenhänge beschränken; weiterführende Betrachtungen und sehr viele Beispiele über uneigentliche Parameterintegrale findet man in [3], Band II (Abschnitt „Integrale, die von einem Parameter abhängen“).

Betrachten wir zunächst das den beiden Integralen

$$\int_a^b f(x, y) dx = G(y) \quad (1.6)$$

und

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = F(y) \quad (1.7)$$

Gemeinsame! Wenn das Integral (1.6) bzw. (1.7) für alle  $y$  aus einem Intervall  $J$  existiert, so stellt es eine Funktion  $G(y)$  bzw.  $F(y)$  dar, die mindestens für alle  $y \in J$  definiert ist. Man sagt, daß  $G(y)$  eine durch ein *eigentliches Integral*,  $F(y)$  eine durch ein *uneigentliches Integral dargestellte Funktion* ist.

Existenz (Konvergenz) des Integrals (1.7) für alle  $y \in J$  heißt nach Definition der uneigentlichen Integrale: Für jedes  $y \in J$  existiert der Grenzwert

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x, y) dx.$$

Der wesentliche Unterschied zwischen den Integralen (1.6) und (1.7) liegt in den folgenden Aussagen begründet:

Ist die Funktion  $f(x, y)$  auf dem Bereich  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y \in J\}$  stetig, so ist die durch das eigentliche Integral (1.6) dargestellte Funktion  $G(y)$  stetig (vgl. Satz 1.1 in Abschnitt 1.2.). Die hierzu analoge Aussage gilt für die durch das un-eigentliche Integral (1.7) dargestellte Funktion  $F(y)$  im allgemeinen nicht! Es kann

also vorkommen, daß das Integral  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx (= F(y))$  für jedes  $y \in J$  existiert (konvergiert),  $f(x, y)$  auf dem Bereich  $B = \{(x, y) \mid a \leq x < \infty, y \in J\}$  stetig ist und trotzdem die durch das uneigentliche Integral (1.7) dargestellte Funktion  $F(y)$  auf  $J$  unstetig sein kann. Hierzu ein Beispiel!

*Beispiel 1.9:* Für welche  $y$ -Werte ist das uneigentliche Parameterintegral

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$$

definiert (konvergent), und welchen Wert hat es?

Bei der Beantwortung dieser Fragen setzen wir als bekannt voraus:

$$\text{I)} \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{II)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{für alle } (x, y) \text{ mit } x \neq 0 \\ y & \text{für alle } (x, y) \text{ mit } x = 0 \end{cases}$$

ist eine auf der gesamten  $x, y$ -Ebene stetige Funktion.

Bemerkung zur Voraussetzung I: Der Nachweis der Existenz (Konvergenz) dieses uneigentlichen Integrals ist einfach (s. z.B. [4], Band III, bzw. [3], Band II). Dagegen ist die Berechnung dieses uneigentlichen Integrals schwierig; eine relativ übersichtliche Berechnung (unter Ausnutzung von Gesetzmäßigkeiten über unendliche Reihen!) findet man in [3], Band II.

Bemerkung zur Voraussetzung II: Die Funktion  $\frac{\sin xy}{x}$  (als Funktion der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$  betrachtet) ist auf Grund allgemeiner Gesetzmäßigkeiten für Funktionen von mehreren Veränderlichen (s. Band 4) in allen Punkten  $(x, y)$  mit  $x \neq 0$  stetig. Für alle Punkte  $(x, y)$  mit  $x = 0$  (das sind alle Punkte der  $y$ -Achse!) ist zwar  $\frac{\sin xy}{x}$  nicht erklärt, aber es handelt sich um sog. *hebbare Unstetigkeiten*. Für jeden Punkt  $(0, y_0)$  der  $y$ -Achse gilt nämlich:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{\sin xy}{x} = y_0$$

(s. Aufgabe 1.5). Daher die Festsetzung  $f(0, y) = y$ .

Wir kommen nun zur Beantwortung der in Beispiel 1.9 gestellten Fragen. Für jeden festen  $y$ -Wert ist  $\frac{\sin xy}{x} = \varphi(x)$  eine für alle  $x$ -Werte erklärte stetige Funktion, wenn man für die „Unstetigkeitsstelle“  $x = 0$  (Nenner gleich null!) nachträglich festlegt:  $\varphi(0) = y$ . Nach der l'Hospitalschen Regel gilt nämlich:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos xy)y}{1} = y.$$

Durch die Substitution  $t = xy$ ,  $dt = y dx$  ( $y$  konstant!) geht  $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx$  über in

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (*) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad (**),$$

je nachdem, ob  $y > 0$  oder  $y < 0$  ist. Das Integral  $(**)$  kann man wie folgt umformen:

$$\int_0^{-\infty} \frac{\sin(-t)}{-t} dt = - \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \quad (\text{Substitution: } \tau = -t).$$

Im Falle  $y = 0$  ist  $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx = 0$  (\*\*). Unter Berücksichtigung der Voraussetzung I folgt aus den Feststellungen (\*), (\*\*) und (\*\*\*):

$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx$  existiert (konvergiert) für jedes  $y$ , und es gilt

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{für } y < 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

(s. Bild 1.13).

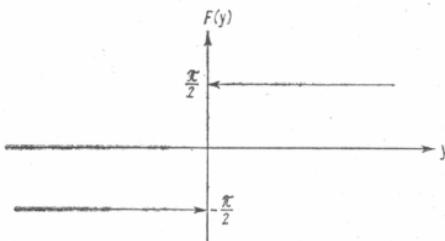


Bild 1.13

Fassen wir die Ergebnisse zusammen! Obwohl das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx$  für alle  $y$  existiert (konvergiert) und die Funktion  $\frac{\sin xy}{x}$  auf dem entsprechenden Bereich  $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty\}$  stetig ist, ist die durch das uneigentliche Integral dargestellte Funktion  $F(y)$  unstetig. Um zu garantieren, daß die durch  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  dargestellte Funktion  $F(y)$  auf dem Intervall  $J$  stetig ist, muß man neben der Stetigkeit der Funktion  $f(x, y)$  auf dem Bereich  $B = \{(x, y) \mid a \leq x < \infty, y \in J\}$  die sogenannte gleichmäßige Konvergenz des uneigentlichen Parameterintegrals auf  $J$  voraussetzen. Auf diesen Begriff werden wir jetzt eingehen! Zuvor soll aber noch eine Aufgabe formuliert werden, auf die wir im Beispiel 1.9 bereits hingewiesen haben.

- \* **Aufgabe 1.5:** Man beweise, daß für jede durch den Punkt  $(0, y_0)$  gehende differenzierbare Kurve  $y = f(x)$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin xf(x)}{x} = y_0.$$

Ist damit die Aussage  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{\sin xy}{x} = y_0$  bewiesen?

**Definition 1.6:** Das uneigentliche Parameterintegral

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

heißt gleichmäßig konvergent auf dem Intervall  $J$ , wenn es

- a) für jedes  $y \in J$  existiert (konvergiert) und
- b) zu jedem (noch so kleinen)  $\varepsilon > 0$  eine von  $y$  unabhängige Zahl  $B (> a)$  existiert, so daß die Ungleichung

$$\left| \int_A^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

für alle  $y \in J$  erfüllt ist, sobald  $A > B$  ist.

*Erläuterung zur Definition 1.6:* Für jedes feste  $y \in J$  ist  $f(x, y)$  eine Funktion von  $x$ , für welche das Integral  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  existiert (s. Bild 1.14). Das „Restintegral“

$$\int_A^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx$$

kann für alle  $y \in J$  absolut genommen beliebig klein gemacht werden, wenn nur  $A$  rechts von einem hinreichend groß gewählten  $B$  liegt. (Wenn bei vorgegebenem  $y$  die Funktion  $f(x, y) \geq 0$  ist für alle  $x$ , so liefert der Flächeninhalt des in Bild 1.14 schraffierte eingezeichneten Bereiches den Wert des zu  $A$  gehörigen Restintegrals.)

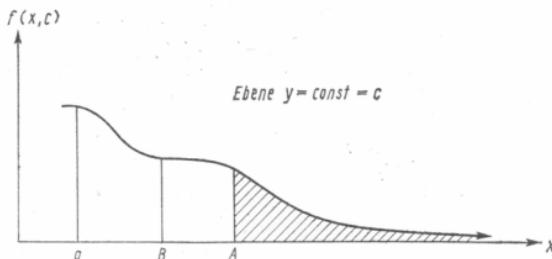


Bild 1.14

Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz gelten für die durch ein uneigentliches Integral dargestellte Funktion  $F(y)$  die folgenden Sätze bezüglich Stetigkeit, Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit. (Beweise s. [3], Band II, bzw. [4], Bd. III.)

**Satz 1.4:** Ist das Integral

$$F(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

gleichmäßig konvergent auf dem Intervall  $J$ , die Funktion  $f(x, y)$  stetig auf dem Bereich  $B = \{(x, y) \mid x \geq a, y \in J\}$ , so ist  $F(y)$  stetig auf  $J$ .

**S.1.5 Satz 1.5:** Wenn die in Satz 1.4 angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind, ist  $F(y)$  auf jedem in  $J$  enthaltenen Intervall  $[c, d]$  integrierbar, und es gilt

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

*Bemerkung zu Satz 1.5:* Die Integrierbarkeit von  $F(y)$  ist schon durch Satz 1.4 gesichert, weil aus der Stetigkeit die Integrierbarkeit der Funktion folgt. Die eigentliche Aussage des Satzes 1.5 besteht in der Möglichkeit, die Reihenfolge der Integrationen auch bei einem uneigentlichen Parameterintegral zu vertauschen. Satz 1.5 kann in diesem Sinne als eine Verallgemeinerung des Satzes 1.2 angesehen werden.

**S.1.6 Satz 1.6:** Die Funktionen  $f(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  seien auf dem Bereich  $B = \{(x, y) | x \geq a, y \in J\}$  stetig. Außerdem existiere (konvergiere) das uneigentliche Parameterintegral  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  für alle  $y \in J$ , und das uneigentliche Parameterintegral  $\int_a^\infty f_y(x, y) dx$  konvergiere gleichmäßig auf  $J$ . Unter diesen Voraussetzungen ist  $F(y)$  für jedes  $y \in J$  differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dy} F(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty f_y(x, y) dx. \quad (1.8)$$

*Bemerkung zu Satz 1.6:* Die angegebene Formel ist eine Erweiterung der Formel (1.4) in Abschnitt 1.2. auf uneigentliche Parameterintegrale.

Bei der Anwendung der in den Sätzen 1.5 und 1.6 angegebenen Formeln muß die Stetigkeit von  $f(x, y)$  sowie  $f_y(x, y)$  und die gleichmäßige Konvergenz der dort auftretenden uneigentlichen Parameterintegrale gesichert sein. Der Nachweis der Stetigkeit bereitet im allgemeinen keine Schwierigkeiten; in vielen Fällen kann man schon aus der äußeren Form der Funktion ersehen, an welchen Stellen die Funktion stetig bzw. unstetig ist. Dagegen ist der Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz meistens nicht einfach! Unter den Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz wollen wir dasjenige auswählen, welches für die Untersuchung einer konkret vorgegebenen Funktion praktisch gute Dienste leistet. Es handelt sich wieder um ein Majorantenkriterium. In Band 2, S. 233, wurde das Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale behandelt, mit dessen Hilfe man uneigentliche Integrale auf Konvergenz untersuchen konnte. Mit dem folgenden Majorantenkriterium für uneigentliche Parameterintegrale werden uneigentliche Parameterintegrale auf gleichmäßige Konvergenz untersucht.

**S.1.7 Satz 1.7 (Majorantenkriterium für uneigentliche Parameterintegrale):** Das uneigentliche Parameterintegral  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  ist auf dem Intervall  $J$  gleichmäßig konvergent, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\int_a^b f(x, y) dx$  existiert für jedes  $b > a$  und jedes  $y \in J$ .
2. Es gibt eine auf  $[a, \infty)$  integrierbare Funktion  $g(x)$  – d. h.  $\int_a^\infty g(x) dx$  existiert –, für die für alle  $x \geq a$  und jedes  $y \in J$  gilt  
 $|f(x, y)| \leq g(x).$

**Beweisskizze:** Wir haben zu zeigen, daß die Bedingungen a) und b) von Definition 1.6 erfüllt sind. Aus der Existenz von  $\int_a^b g(x) dx$  folgt – wegen  $\int_a^\infty g(x) dx = \int_a^A g(x) dx + \int_A^\infty g(x) dx$  – sofort die Existenz von  $\int_A^\infty g(x) dx$  für jedes  $A > a$  und die Beziehung

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^\infty g(x) dx = 0. \quad (*)$$

Aus (\*) folgt nun weiter, daß auch die Bedingung b) von Definition 1.6 erfüllt ist.

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $B (> a)$  mit  $\int_B^\infty g(x) dx < \varepsilon$  für jedes  $A > B$ . Wegen  $|f(x, y)| \leq g(x)$  (für alle  $x \geq A$  und  $y \in J$ ) und der für jede auf  $[a, b]$  integrierbaren Funktion geltenden Beziehung  $\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx$  muß dann auch

$$\left| \int_A^\infty f(x, y) dx \right| \leq \int_A^\infty |f(x, y)| dx \leq \int_A^\infty g(x) dx < \varepsilon$$

für alle  $y \in J$  sein. Bedingung b) ist also erfüllt. Bedingung a) ergibt sich aus der Existenz von  $\int_A^\infty f(x, y) dx$  und der Voraussetzung 1. ■

## 1.5. Die Gammafunktion

Ein wichtiges Beispiel für eine durch ein uneigentliches Integral dargestellte Funktion ist die sogenannte Gammafunktion, auf die man durch folgende Fragestellung geführt wurde: Das Zeichen  $n!$  ( $n$ -Fakultät) ist bekanntlich nur für die nichtnegativen ganzen Zahlen erklärt. Bei der Suche nach einer stetigen Funktion  $f(x)$ , die für alle reellen positiven  $x$ -Werte erklärt ist und für ganzzählige positive Werte  $x = n$  mit  $n!$  übereinstimmt – d.h.  $f(n) = n!$  für jede positive ganze Zahl  $n$  –, wurde man auf die folgende Funktion  $\Gamma(x)$  geführt.

**Definition 1.7:** Die durch das uneigentliche Parameterintegral  $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  dargestellte **D.1.7 Funktion**

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

heißt **Eulersche Gammafunktion<sup>1)</sup>** ( $\Gamma$ -Funktion).

(Hinweis: Die Funktion  $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}$  wird nach  $t$  integriert,  $x$  ist der Parameter; s. Definition 1.5)

Das in Definition 1.7 betrachtete Integral ist in doppelter Hinsicht uneigentlich; es gehört sowohl zu den uneigentlichen Integralen mit unendlichen Grenzen (obere Grenze gleich  $\infty$ ) als auch zu den uneigentlichen Integralen mit nichtbeschränkter

<sup>1)</sup> Leonhard Euler (1707–1783).

Funktion (der Integrand besitzt eine Unendlichkeitsstelle<sup>1)</sup> bei  $t = 0$ , falls  $0 < x < 1$  gilt). Bei der Untersuchung eines solchen „doppelt“ uneigentlichen Integrals erfolgt eine Aufspaltung in zwei „einfache“ uneigentliche Integrale:

$$J = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = J_1 + J_2 = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

$J_1$  ist ein uneigentliches Parameterintegral mit nicht beschränkter Funktion.  $J_2$  gehört zu dem in 1.4. behandelten Typ  $\int_a^\infty f(x, y) dx$ :  $J_2 = \int_1^\infty f(t, x) dt$ . Der Nachweis, daß das Ausgangsintegral  $J$  eine bestimmte Eigenschaft hat – z.B. gleichmäßig konvergent zu sein –, wird dadurch erbracht, daß man die betreffende Eigenschaft getrennt für die Integrale  $J_1$  und  $J_2$  nachweist. Anwendung dieses Gedankengangs auf das bei der Gammafunktion auftretende uneigentliche Parameterintegral liefert die folgende Aussage über die Existenz und Differenzierbarkeit der Gammafunktion  $\Gamma(x)$ . (Einen ausführlichen Beweis findet man in [3], Band II, bzw. [4], Band III.)

**S.1.8 Satz 1.8:** Die in Definition 1.7 eingeführte Gammafunktion  $\Gamma(x)$  ist für alle  $x > 0$  definiert und differenzierbar. Für die 1. Ableitung von  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  gilt:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t dt.$$

Die Gleichung für  $\Gamma'(x)$  ergibt sich durch Anwendung der Formel (1.8) auf das uneigentliche Parameterintegral  $\Gamma(x) = \int_0^\infty f(t, x) dt$ :

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \frac{d}{dx} \Gamma(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty f(t, x) dt = \int_0^\infty f_x(t, x) dt \\ &= \int_0^\infty (e^{-t} t^{x-1})_x dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t dt. \end{aligned}$$

(Man beachte die Differentiationsregel  $(a^x)' = a^x \ln a$ .)

Wir kommen nun zu zwei für die Gammafunktion besonders wichtigen Eigenchaften!

**S.1.9 Satz 1.9: a)** Für jede positive Zahl  $x$  gilt  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ , **Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion.**

b) Für jede nichtnegative ganze Zahl  $n$  gilt  $\Gamma(n+1) = n!$

---

<sup>1)</sup> Wegen  $0 < x < 1$  ist  $x-1 < 0$  und  $1-x > 0$ . Also gilt  $\lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} t^{x-1} = \lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} \frac{1}{t^{1-x}} = \infty$ .

*Beweis:* a) Durch partielle Integration ergibt sich zunächst

$$\int e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} e^{-t} + \int \frac{t^x}{x} e^{-t} dt.$$

Hieraus folgt

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

(*Hinweis:* Mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel kann man leicht zeigen, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0$  ist.)

b) Aus  $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$  und  $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$  für alle  $n = 1, 2, \dots$  (vgl. a)) folgt:  $\Gamma(2) = 1 = 1!$ ,  $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$ ,  $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$ , ..., allgemein:  $\Gamma(n+1) = n!$ . ■

*Bemerkung 1.3:* Mit Hilfe der Gammafunktion  $\Gamma(x)$ , bei der  $\Gamma(n) = (n-1)!$  für alle  $n = 1, 2, \dots$  gilt, kann man sofort eine Funktion  $\Gamma^*(x)$  konstruieren, für welche die Gleichung  $\Gamma^*(n) = n!$  für alle  $n = 1, 2, \dots$  erfüllt ist. Für  $\Gamma^*(x) := x \cdot \Gamma(x)$  gilt  $\Gamma^*(n) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$ . Die Funktion  $\Gamma^*(x) = \Gamma(x+1)$  kann also als eine natürliche Verallgemeinerung der Funktion  $n!$  ( $n$ -Fakultät), die nur für nichtnegative ganze Zahlen definiert ist, angesehen werden. Beim praktischen Rechnen mit der Gammafunktion wird man sich auf vorliegende Tabellen stützen. Eine kleine, aber für viele Zwecke schon ausreichende Tabelle der Gammafunktion findet man in [1].

*Aufgabe 1.6:* Aus der Tabelle der  $\Gamma$ -Funktion entnehmen wir die folgenden Werte

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\Gamma(x)$	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,886
x	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
$\Gamma(x)$	0,893	0,909	0,931	0,962	1,000	

Mit Hilfe der in Satz 1.9 angegebenen Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion berechne man  $\Gamma(x)$  für  $x = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$  und  $x = 2,1; 2,2; \dots; 3,0$ . Welchen Verlauf nimmt  $\Gamma(x)$ ?

## 2. Integrale über ebene Bereiche

### 2.1. Der Begriff des Bereichsintegrals

In Band 2 lernten wir das bestimmte Integral der Funktion  $f(x)$  über dem Intervall  $[a, b]$  kennen. Es gibt nun viele Möglichkeiten, diesen Integralbegriff auf mehrdimensionale Bereiche zu erweitern. Wenn zum Beispiel an Stelle des Intervalls  $[a, b]$  (1-dim. Bereich) und der Funktion  $f(x)$  ein ebener Bereich  $B$  (2-dim. Bereich) und eine Funktion  $f(x, y)$  gewählt werden, so führt der beim bestimmten Integral kennengelernte Gedankengang zum Begriff des Bereichsintegrals. Mit diesem Integral und seinen Anwendungen werden wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung derjenigen Begriffe, die man bei der Definition des Bereichsintegrals benötigt.

**D.2.1 Definition 2.1:**  *$B$  sei ein ebener Bereich<sup>1)</sup>. Ein System von (endlich vielen) Teilmengen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  von  $B$  nennt man eine Zerlegung von  $B$ , wenn die Vereinigung der Teilmengen  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) den Bereich  $B$  ergibt und je zwei verschiedene Teilmengen  $B_i, B_k$  höchstens Randpunkte gemeinsam haben (s. Bild 2.1).*

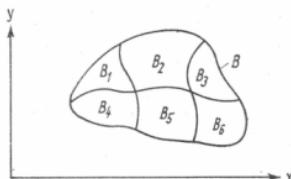


Bild 2.1

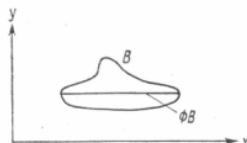


Bild 2.2

**D.2.2 Definition 2.2:**  *$B$  sei ein ebener, beschränkter Bereich. Unter dem Durchmesser von  $B$  – in Zeichen  $\varnothing B$  – versteht man die obere Grenze der Abstände  $\overline{XY}$  je zweier Punkte  $X \in B, Y \in B$  (s. Bild 2.2).*

Der Durchmesser von  $B$  ist also – anschaulich gesehen – die größte Ausdehnung von  $B$ . Anstelle von *obere Grenze* (= kleinste obere Schranke) ist auch *Supremum* (Abkürzung: sup) gebräuchlich. Für den Durchmesser von  $B$  kann man daher schreiben:

$$\varnothing B = \sup_{X \in B, Y \in B} \overline{XY}.$$

**D.2.3 Definition 2.3:**  *$Z = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  sei eine Zerlegung von  $B$ .*

$$\delta := \max_{i=1, \dots, n} \varnothing B_i$$

<sup>1)</sup> d. h.:  $B$  ist Teilmenge einer gewissen Ebene  $E$ . Führt man in der Ebene  $E$  ein rechtwinklig-kartesisches  $x, y$ -Koordinatensystem ein, so ist die Sprechweise üblich, daß  $B$  ein Bereich in der  $x, y$ -Ebene ist. Die Schreibweise  $P(x, y)$  bedeutet: Der Punkt  $P \in E$  hat bezüglich des eingeführten Koordinatensystems die Koordinaten  $x, y$ .

nennit man das **Feinheitsmaß der Zerlegung  $Z$** . Eine Folge von Zerlegungen  $Z_1, Z_2, \dots$  des Bereiches  $B$  heißt eine Folge von unbegrenzt feiner werdenden Zerlegungen von  $B$ , wenn die entsprechenden Feinheitsmaße  $\delta_1, \delta_2, \dots$  gegen null streben, d. h. wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Die Definition des Bereichsintegrals erfolgt nun in völliger Analogie zu der des bestimmten Integrals. (Man vergleiche die entsprechenden Ausführungen in Band 2, Abschnitt 10.1.)

Vorgegeben ist ein ebener Bereich  $B$  und eine reellwertige Funktion  $f(P)$ , die mindestens für alle Punkte  $P \in B$  definiert ist.

Über  $B$  und  $f(P)$  setzen wir zunächst lediglich voraus:

- a)  $B$  ist beschränkt und meßbar,
- b)  $f(P)$  ist auf  $B$  beschränkt.

Genaueres über die Begriffe *beschränkt* (anschaulich: wächst nicht über alle Grenzen) und *meßbar* (anschaulich: besitzt einen Flächeninhalt) findet man in Band 1 bzw. Band 2.

$f(P)$  ist eine auf  $B$  definierte *skalare Punktfunction*, weil jedem Punkt  $P \in B$  eine reelle Zahl (ein Skalar)  $f(P)$  zugeordnet wird. Ist  $B$  ein Bereich in der  $x,y$ -Ebene, so kann man anstelle von  $f(P)$  auch  $f(x, y)$  schreiben, wenn  $(x, y)$  die Koordinaten von  $P$  bezüglich des eingeführten  $x,y$ -Koordinatensystems sind. In diesem Sinne kann dann  $f(P) = f(x, y)$  als eine Funktion der beiden Veränderlichen  $x$  und  $y$  angesehen werden. Wir werden bei allgemeinen Ausführungen immer die neutrale, vom Koordinatensystem unabhängige Schreibweise  $f(P)$  benutzen.

Über skalare Punktfunctionen (skalare Felder) wurde bereits ausführlich in Band 4 gesprochen. Ein Beispiel für ein ebenes skalares Feld erhält man, wenn ein ebener Bereich  $B$  der  $x,y$ -Ebene mit einer bestimmten Massenbelegung versehen wird. Jeder Punkt  $P \in B$  hat dann eine bestimmte Flächendichte  $\varrho = \varrho(P) = \varrho(x, y)$ , d.h.:  $\varrho(P)$  ist eine skalare Punktfunction.

Ausgangspunkt bei der Einführung des Bereichsintegrals ist die zu einer Zerlegung  $Z$  von  $B$  gehörige Integralsumme. Jede Integralsumme stellt eine Näherung des entsprechenden Bereichsintegrals dar; den genauen Wert des Bereichsintegrals erhält man, wenn man die Zerlegung  $Z$  immer feiner werden läßt. Präzisieren wir diese Bemerkungen!

**Definition 2.4:** Ist  $Z = \{B_1, \dots, B_n\}$  eine Zerlegung von  $B$ ,  $P_i$  ein beliebig gewählter Punkt aus  $B_i$  und  $\Delta B_i$  der Flächeninhalt von  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), so nennt man die Summe

$$S(Z) := \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta B_i \tag{2.1}$$

die zu der Zerlegung  $Z$  gehörige Integralsumme.

Anstelle von Integralsumme sagt man auch *Zwischensumme* oder *Zerlegungs- summe*. In Definition 2.4 muß natürlich vorausgesetzt werden, daß der Flächeninhalt  $\Delta B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) existiert, d.h. alle  $B_i$  meßbar sind.

$Z_1, Z_2, \dots$  sei eine Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen von  $B$  und  $S(Z_1), S(Z_2), \dots$  die zugehörige Folge der Integralsummen. Wenn nun diese Folge von Integralsummen gegen einen bestimmten Wert  $G$  konvergiert – und zwar unabhängig von der Wahl der Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen und unabhängig von der Wahl der zu der jeweiligen Zerlegung gehörigen Punkte  $P_i$  (s. Definition 2.4) –, so wollen wir diesen Grenzwert  $G$  mit dem Symbol

$$\lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i \quad (*)$$

bezeichnen. Damit haben wir schon das Bereichsintegral!:

**D.2.5 Definition 2.5:** *f(P) sei eine auf dem ebenen Bereich B definierte reellwertige Funktion. Unter dem **Bereichsintegral** der Funktion f(P) über dem Bereich B versteht man den Grenzwert (\*) und bezeichnet es mit  $\iint_B f(P) db$ . Es gilt also*

$$\iint_B f(P) db = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i. \quad (2.2)$$

*Bemerkungen zur Definition 2.5:* Anstelle von Bereichsintegral sagt man auch *Flächenintegral* bzw. *Gebietsintegral*. Die Bezeichnung (das Symbol) für das Bereichsintegral ist ebenfalls unterschiedlich. Am Ende des Abschnittes 2.3. werden wir etwas ausführlicher die unterschiedliche Bezeichnungsweise beim Bereichsintegral darstellen und die Gründe dafür angeben. – Für  $\iint_B f(P) db$  kann man  $\iint_B f(x, y) db$  schreiben,

falls  $B$  ein Bereich in der  $x, y$ -Ebene ist.

Wenn das Bereichsintegral der Funktion  $f(P)$  über dem Bereich  $B$  existiert, so sagt man, die Funktion  $f(P)$  ist über dem Bereich  $B$  (im Riemannschen Sinne) integrierbar.

Bevor wir auf die Fragen nach der Existenz und den Eigenschaften des Bereichsintegrals eingehen, wollen wir eine wichtige Anwendung kennenlernen.

Von einem speziellen räumlichen Bereich, der Ordinatenmenge  $M = O(B, f)$ , haben wir in Satz 1.3 mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri das Volumen  $V$  berechnet. Ausgangspunkt für die Berechnung des Volumens mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri (vgl. Band 2, Satz 10.20) ist eine Zerlegung des räumlichen Bereiches  $M$  in „Scheiben“. Im folgenden Beispiel soll das Volumen  $V$  von  $M$  nach einem anderen Prinzip berechnet werden. Man zerlegt den räumlichen Bereich  $M$  in zylindrische Säulen  $S_i$  und berechnet von diesen Säulen näherungsweise das Volumen  $V_i$ . Summation aller  $V_i$  ergibt eine Näherung für das gesuchte Volumen  $V$  von  $M$ . Den genauen Wert von  $V$  erhält man, indem man die Säulen immer „feiner“ („dünner“) werden lässt. Dieser Grenzprozeß führt dann automatisch auf ein Bereichsintegral.

*Beispiel 2.1:*  $B$  sei ein Bereich in der  $x, y$ -Ebene, auf dem eine nichtnegative Funktion  $z = f(x, y) = f(P)$  definiert ist. Von der Ordinatenmenge  $M = O(B, f)$  (s. Definition 1.4 und Bild 1.10) ermitte man mit Hilfe des eben beschriebenen *Prinzips der Säulenzerlegung* das Volumen  $V$ . (Von dem ebenen Bereich  $B$  wird nicht vorausgesetzt, daß es sich um einen Normalbereich im Sinne von Definition 1.1 handelt.)

Der ebene Bereich  $B$  wird in Teilmengen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zerlegt. Außerdem wird in jeder Teilmenge  $B_i$  ein Punkt  $P_i$  ausgewählt. Die Zerlegung von  $B$  bewirkt eine Zerlegung des räumlichen Bereiches  $M$  in zylindrische Säulen  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , wobei

$B_i$  der Grundriß von dem jeweiligen  $S_i$  ist (s. Bild 2.3). Für das Volumen  $V_i$  von  $S_i$  gilt:  $V_i \approx \Delta B_i \cdot f(P_i)$  (= (Flächeninhalt von  $B_i$ ) mal (Höhe der Säule in  $P_i$ )). Hieraus folgt:  $V = \sum_i V_i \approx \sum_i f(P_i) \Delta B_i$ . Je feiner die Zerlegung von  $B$  ist, um so feiner ist auch die Zerlegung von  $M$  in Säulen. Den genauen Wert von  $V$  erhält man durch unbegrenzte Verfeinerung der Zerlegung von  $B$ , d.h.:  $V = \lim_{\sigma B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i$ . Damit haben wir nach Definition 2.5 das Schlußergebnis:  $V = \iint_B f(P) db$ . Wegen der Wichtigkeit fassen wir Fragestellung und Ergebnis noch einmal in einem Satz zusammen.

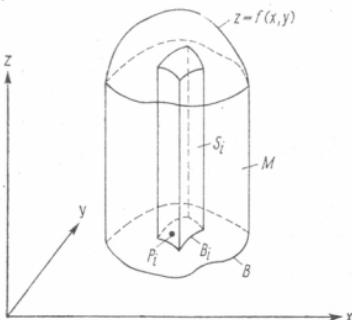


Bild 2.3

**Satz 2.1:** Ist  $z = f(x, y) = f(P)$  eine auf dem in der  $x, y$ -Ebene gelegenen Bereich  $B$  definierte nichtnegative Funktion, so kann man das Volumen  $V = V_M$  der zu  $B$  und  $f$  gehörigen Ordinatenmenge  $M$  (s. Bild 2.3) durch ein Bereichsintegral berechnen. Es gilt

$$V = \iint_B f(P) db. \quad (2.3)$$

**Folgerung:** Ist  $f(P) \equiv 1$  für alle  $P \in B$ , so liefert  $\iint_B f(P) db = \iint_B 1 db = \iint_B db$  das Volumen  $V = V_{M_0}$  eines allgemeinen Zylinders  $M_0$  mit der Grundfläche  $B$  und der Höhe  $h = 1$ . Wegen  $V_{M_0} = A_B \cdot 1$  (Grundfläche mal Höhe) gilt für den Flächeninhalt  $A = A_B$  des ebenen Bereiches  $B$

$$A = \iint_B db. \quad (2.4)$$

$\left( \iint_B db \text{ ist eine Kurzschreibweise für } \iint_B 1 db; f(P) \equiv 1. \right)$

## 2.2. Existenz und elementare Eigenschaften des Bereichsintegrals

Bei den in Beispiel 2.1 angestellten Überlegungen haben wir die Existenz des Bereichsintegrals  $\iint_B f(P) db$ , d.h. des Grenzwertes  $\lim_{\sigma B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i$ , als anschaulich gesichert angesehen. Der folgende Satz bestätigt, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen – die bei den Anwendungen fast immer erfüllt sind – das Bereichsintegral existiert.

**S.2.2 Satz 2.2:** Das Bereichsintegral  $\iint_B f(P) \, db$  existiert, falls bezüglich des ebenen Bereichs  $B$  und der auf  $B$  definierten Funktion  $f(P)$  folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- $B$  ist ein beschränkter, meßbarer und abgeschlossener Bereich,
- $f(P)$  ist auf  $B$  stetig.

Für die uns interessierenden Anwendungen genügt es zu wissen, daß die Voraussetzung a) für jeden Normalbereich (s. Definition 1.1) und jeden aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzten Bereich erfüllt ist. (Bild 2.4 zeigt einen Bereich  $B$ , der durch die Gerade  $x = x_0$  in drei Normalbereiche  $B_1, B_2, B_3$  bezüglich der  $x$ -Achse zerlegt wird.)

*Hinweis:* In Satz 2.2 (einen Beweis zu diesem Satz findet man z. B. in [4], Bd. III) hätten wir auf die Formulierung „ $B$  ist beschränkt und meßbar“ verzichten können, da wir in Abschnitt 2.1. das Erfülltsein dieser Bedingung generell verlangt haben. Die andere, in Abschnitt 2.1. noch angegebene Voraussetzung „ $f(P)$  ist auf  $B$  beschränkt“ ist nach den in Satz 2.2 angegebenen Voraussetzungen automatisch erfüllt. Es gilt nämlich: Jede auf einer abgeschlossenen, beschränkten Punktmenge  $B$  stetige Funktion  $f(P)$  ist auf  $B$  beschränkt (vgl. Band 4, Satz 2.6).

Aus der Definition 2.5 des Bereichsintegrals ergeben sich leicht einige wichtige Eigenschaften, die wir in einem Satz zusammenfassen wollen.

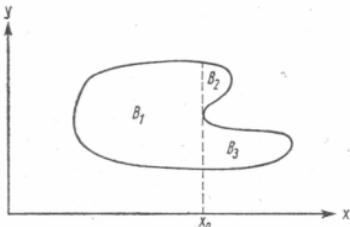


Bild 2.4

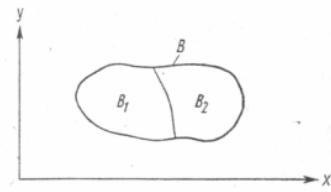


Bild 2.5

**S.2.3 Satz 2.3:** Wenn für die im folgenden auftretenden Funktionen ( $f(P), g(P)$ ) und Bereiche ( $B, B_1, B_2$ ) die in Satz 2.2 genannten Voraussetzungen erfüllt sind, so gilt

- Für jede Konstante  $c$  ist

$$\iint_B cf(P) \, db = c \iint_B f(P) \, db.$$

$$b) \iint_B (f(P) + g(P)) \, db = \iint_B f(P) \, db + \iint_B g(P) \, db.$$

- Ist  $\{B_1, B_2\}$  eine Zerlegung von  $B$  (s. Bild 2.5), so gilt

$$\iint_B f(P) \, db = \iint_{B_1} f(P) \, db + \iint_{B_2} f(P) \, db.$$

- (Mittelwertsatz für Bereichsintegrale) Es gibt einen Punkt  $P_0 \in B$ , so daß für den Flächeninhalt  $A$  von  $B$  gilt

$$\iint_B f(P) \, db = f(P_0) \cdot A.$$

Alle Beweise werden dadurch erbracht, daß man zunächst Integralsummen betrachtet und anschließend einen Grenzübergang durchführt. Als Beispiel geben wir eine Beweisskizze für die Aussage b) des Satzes 2.3:

$$\begin{aligned} \iint_B (f(P) + g(P)) \, db &= \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i (f(P_i) + g(P_i)) \Delta B_i \\ &= \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \left[ \sum_i f(P_i) \Delta B_i + \sum_i g(P_i) \Delta B_i \right] \\ &= \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i + \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i g(P_i) \Delta B'_i \\ &= \iint_B f(P) \, db + \iint_B g(P) \, db \quad (\text{vgl. Definition 2.5}). \end{aligned}$$

Auf die Aussage c) des Satzes 2.3 werden wir oft zurückgreifen. Vom geometrischen Standpunkt ist die in c) angegebene Gleichung im Falle  $f(P) \geq 0$  (für alle  $P \in B$ ) sofort einleuchtend; sie ist nach Satz 2.1 äquivalent mit Volumen von  $O(B, f) = \text{Volumen von } O(B_1, f) + \text{Volumen von } O(B_2, f)$ , d.h.: das Volumen der oberhalb von  $B$  gelegenen Ordinatenmenge ist die Summe aus den Volumina der oberhalb von  $B_1$  und  $B_2$  gelegenen Ordinatenmengen.

### 2.3. Berechnung von Bereichsintegralen mit Hilfe von Doppelintegralen

Die Berechnung von Bereichsintegralen nach der in Definition 2.5 angegebenen Vorschrift  $\left( \iint_B f(P) \, db = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i \right)$  ist so kompliziert, daß man damit schon

bei einfachsten Beispielen große Schwierigkeiten zu überwinden hat. Definition 2.5 scheidet daher als eine praktisch brauchbare Berechnungsmethode aus. Im folgenden Satz lernen wir den Weg kennen, auf dem man auf einfache Weise den Wert eines Bereichsintegrals berechnen kann. Die Einschränkung, daß es sich bei dem Integrationsbereich  $B$  um einen Normalbereich im Sinne von Definition 1.1 handeln muß, ist nicht wesentlich. In allen praktisch vorkommenden Fällen kann man den Bereich  $B$  in (endlich viele) Normalbereiche zerlegen und anschließend die in Satz 2.3, c), angegebene Zerlegungsformel anwenden. Kommen wir nun zur Formulierung dieses wichtigen Satzes!

**Satz 2.4:** Ist  $B: \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \end{array} \right\}$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse (vgl. S.2.4)

Definition 1.1) und  $f(P) = f(x, y)$  eine auf  $B$  stetige Funktion, so gilt

$$\iint_B f(P) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \quad (2.5)$$

Ist  $B: \left\{ \begin{array}{l} y_1 \leqq y \leqq y_2 \\ x_1(y) \leqq x \leqq x_2(y) \end{array} \right\}$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse (vgl. Def. 1.1) und  $f(P) = f(x, y)$  eine auf  $B$  stetige Funktion, so gilt

$$\iint_B f(P) \, db = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (2.6)$$

Jedes Bereichsintegral kann also mit Hilfe eines Doppelintegrals berechnet werden, falls der Integrationsbereich ein Normalbereich ist. Über Doppelintegrale haben wir ausführlich im Abschnitt 1.3. gesprochen, durch Satz 2.4 beherrschen wir damit auch die Berechnung von Bereichsintegralen. Einen vollständigen Beweis für Satz 2.4 wollen wir hier nicht geben. Wir begnügen uns mit der Feststellung, daß im Falle  $f(P) \geq 0$  für alle  $P \in B$  der Satz sicher richtig ist, wie man durch einen Vergleich der Formeln (2.3) und (1.5) (aus Abschnitt 2.1. bzw. 1.3.) sofort sieht: Sowohl die linke als auch die rechte Seite in Formel (2.5) sind gleich dem Volumen der zu  $B$  und  $f$  gehörigen Ordinatenmenge.

*Beispiel 2.2:* Vorgegeben sei der in Bild 2.6 dargestellte Bereich  $B$  der  $x,y$ -Ebene und die Funktion  $f(P) = f(x, y) = 2x - y$ . Man berechne das Bereichsintegral  $\iint_B f(P) db$ .

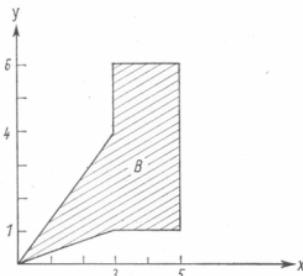


Bild 2.6

Wir zerlegen den Bereich  $B$  zunächst in den dreieckigen Bereich  $B_1$  (mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(3, 1)$  und  $(3, 4)$ ) und den Rechteckbereich  $B_2$  (mit den Ecken  $(3, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 6)$  und  $(3, 6)$ ). Nach Satz 2.3 c) gilt

$$\iint_B f(P) db = \iint_{B_1} f(P) db + \iint_{B_2} f(P) db. \quad (*)$$

Auf die rechts stehenden Bereichsintegrale können wir Formel (2.5) anwenden.

$$B_1: \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 3 \\ \frac{x}{3} \leqq y \leqq \frac{4x}{3} \end{cases} \quad \text{und} \quad B_2: \begin{cases} 3 \leqq x \leqq 5 \\ 1 \leqq y \leqq 6 \end{cases}$$

sind Normalbereiche bezüglich der  $x$ -Achse, und die Funktion  $f(P) = f(x, y) = 2x - y$  ist überall stetig. Aus (\*) folgt dann:

$$\begin{aligned} \iint_B f(P) db &= \int_0^3 \int_{\frac{x}{3}}^{\frac{4x}{3}} (2x - y) dy dx + \int_3^5 \int_1^6 (2x - y) dy dx \\ &= \int_0^3 \left[ 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\frac{x}{3}}^{y=\frac{4x}{3}} dx + \int_3^5 \left[ 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=6} dx \\ &= \int_0^3 \frac{7}{6}x^2 dx + \int_3^5 \left( 10x - \frac{35}{2} \right) dx = \frac{21}{2} + 45 = \frac{111}{2} = 55,5. \end{aligned}$$

*Aufgabe 2.1:* Man berechne das Bereichsintegral der Funktion  $f(P) = f(x, y) = xy$  über dem in Bild 2.7 dargestellten Bereich  $B$ . ( $B$  wird begrenzt durch die Parabel  $y = x^2$ , die  $x$ -Achse und die durch die Punkte  $(6, 0)$  und  $(2, 4)$  hindurchgehende Gerade.) \*

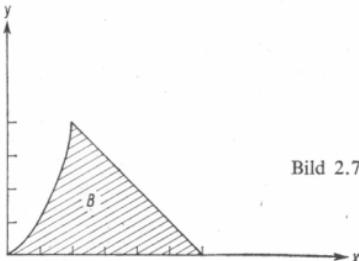


Bild 2.7

Bevor wir im nächsten Abschnitt 2.4. auf Anwendungen eingehen, soll zunächst noch etwas über die sehr unterschiedliche Bezeichnungsweise bei Bereichsintegralen gesagt werden. Wir haben bereits erwähnt, daß man an Stelle von Bereichsintegral auch vom Flächenintegral bzw. Gebietsintegral spricht. Etwas verwirrend dürfte aber der Umstand sein, daß man oft an Stelle von Bereichsintegral einfach *Doppelintegral* sagt. Diese Bezeichnungsweise erklärt sich aus dem engen Zusammenhang zwischen Bereichsintegralen und Doppelintegralen: Jedes Bereichsintegral läßt sich mit Hilfe eines Doppelintegrals berechnen, falls der Integrationsbereich  $B$  des Bereichsintegrals ein Normalbereich ist (vgl. Satz 2.4). Auch das Symbol zur Bezeichnung eines Bereichsintegrals ist recht unterschiedlich. Neben solchen Symbolen wie  $\iint_B f(P) d\omega$  oder  $\iint_{(a)} f(N) d\sigma$  oder  $\iint_D f(P) ds$  oder  $\iint_{(P)} f(x, y) dP$ , die nur wenig von unserem Symbol  $\iint_B f(P) db$  abweichen, findet man auch Symbole mit nur einem Integralzeichen, z.B.  $\int_M f(P) d\tau$  oder  $\iint_S f(x, y) db$  oder  $\int_S f(x, y) dS$ . Wir haben uns wegen des in Satz 2.4 beschriebenen Zusammenhangs zwischen Bereichsintegralen und Doppelintegralen für das Symbol mit zwei Integralzeichen entschieden. An Stelle von  $\iint_B f(x, y) db$  schreibt man gelegentlich auch  $\iint_B f(x, y) dx dy$ .

## 2.4. Anwendungen des Bereichsintegrals

Wir beginnen mit einer einfachen physikalischen Fragestellung! Vorgegeben sei ein ebener Bereich  $B$ , den man sich mit einer *Massenbelegung* versehen denkt. Jedem Punkt  $P \in B$  ist dann eine bestimmte *Flächendichte*  $\varrho = \varrho(P)$  zugeordnet. Die Flächendichte  $\varrho(P)$  im Punkte  $P$  ist wie folgt definiert: Ist  $D$  ein kleiner Teilbereich von  $B$ , der den Punkt  $P$  enthält,  $m(D)$  die Masse von  $D$ ,  $A(D)$  der Flächeninhalt von  $D$ , so ist der Quotient  $\frac{m(D)}{A(D)}$  eine Näherung für  $\varrho(P)$ . Den genauen Wert von  $\varrho(P)$  erhält man, wenn sich  $D$  auf den Punkt  $P$  zusammenzieht:

$$\varrho(P) = \lim_{\varnothing D \rightarrow 0} \frac{m(D)}{A(D)}.$$

Beim Grenzprozeß durchläuft  $D$  eine Folge  $D_1, D_2, \dots$  von  $P$  enthaltenden Teillbereichen, deren Durchmesser gegen null konvergiert. Ist die Flächendichte  $\varrho$  kon-

stant, d.h.  $\varrho(P) = \varrho_0 = \text{const}$  für alle  $P \in B$ , so ergibt sich für die Gesamtmasse  $m$  des mit Masse belegten Bereiches  $B$ :

$$m = \varrho_0 A. \quad (2.7)$$

$A$  ist der Flächeninhalt von  $B$ .

(Beispiel:  $\varrho = \varrho_0 = 0,5 \text{ g cm}^{-2}$ ,  $A = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow m = 12,5 \text{ g}.$ )

Es erhebt sich nun die Frage, wie man zur Gesamtmasse von  $B$  kommt, wenn die Flächendichte nicht konstant, sondern eine sich i.allg. von Punkt zu Punkt ändernde stetige Größe  $\varrho = \varrho(P)$  ist? ( $\varrho = \varrho(P)$  ist also eine auf  $B$  definierte stetige Funktion!) Zerlegt man  $B$  in kleine Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots$ , so wird sich innerhalb eines Teilbereiches  $B_i$  die Flächendichte nur wenig ändern. Ist  $P_i$  irgendein Punkt aus  $B_i$ ,  $\Delta B_i$  der Flächeninhalt von  $B_i$ , so gilt für die Masse  $m_i$  von  $B_i$  die Beziehung  $m_i \approx \varrho(P_i) \Delta B_i$  (vgl. Formel (2.7)), und für die Gesamtmasse  $m$  von  $B$  erhält man:  $m = \sum_i m_i \approx \sum_i \varrho(P_i) \Delta B_i$ . Diese Näherung wird um so genauer sein, je feiner die Zerlegung von  $B$  ist; den genauen Wert erhält man durch den in Definition 2.5 beschriebenen Grenzprozeß  $\varrho B_i \rightarrow 0$ . Es gilt also:  $m = \lim_{\varrho B_i \rightarrow 0} \sum_i \varrho(P_i) \Delta B_i$ . Der rechts stehende Grenzwert ist aber gleich dem Bereichsintegral<sup>1</sup> der Funktion  $\varrho(P)$  über dem Bereich  $B$  (vgl. Def. 2.5). Zusammengefaßt erhalten wir den

**S.2.5 Satz 2.5:** Für die Gesamtmasse  $m$  eines mit Masse belegten ebenen Bereichs  $B$  gilt

$$m = \iint_B \varrho \, db.$$

Hierbei ist  $\varrho = \varrho(P)$  die Flächendichte, von der man voraussetzt, daß es sich um eine auf  $B$  stetige Funktion handelt.

**Bemerkung:** Die Formel (2.7) ist ein Spezialfall der in Satz 2.5 angegebenen Formel. Ist nämlich  $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$ , so gilt:  $m = \iint_B \varrho \, db = \iint_B \varrho_0 \, db = \varrho_0 \iint_B db = \varrho_0 \cdot A$  (vgl. Formel (2.4)).

**Beispiel 2.3:** Vorgegeben sei der in Bild 2.8 dargestellte ebene Bereich  $B$ , den man sich mit einer Massenbelegung versehen denkt. Für die Flächendichte möge gelten:  $\varrho = \varrho(P) = \varrho(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)$ . Man berechne die Gesamtmasse  $m$  von  $B$ .



Bild 2.8

Nach den Sätzen 2.5 und 2.4 gilt:

$$\begin{aligned} m &= \iint_B \varrho \, db = \int_0^4 \int_0^{4-x} \frac{1}{2} (x+y) \, dy \, dx = \int_0^4 \left[ \frac{1}{2} \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \right]_{y=0}^{y=4-x} \, dx \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} \left( 8 - \frac{x^2}{2} \right) \, dx = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Auf jeder Geraden  $x+y=c$ , das sind die zur Begrenzungsgeraden  $x+y=4$  parallelen Geraden, ist die Flächendichte konstant. Für die Punkte der Geraden  $x+y=2$  gilt zum Beispiel  $\varrho=1$ .)

Wir kommen zu einer weiteren wichtigen Anwendung des Bereichsintegrals, nämlich der *Bestimmung des Schwerpunktes eines (mit Masse belegten) ebenen Bereiches B mit der Flächendichte  $\varrho=\varrho(P)$* . In Band 2, 10.4.2., wurden bereits Formeln für die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes von  $B$  hergeleitet. Es mußte die Voraussetzung  $\varrho=\text{const}$  für alle Punkte von  $B$  erfüllt sein. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. Aus Band 2 übernehmen wir folgenden Sachverhalt: Für den Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  eines Systems von Massenpunkten  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$  mit den Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  gelten die Formeln

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \quad \bar{y} = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

(vgl. Band 2, 10.4.2.). Bei der Herleitung der Formeln für die Koordinaten  $x_S, y_S$  des Schwerpunktes  $S$  eines ebenen Bereiches  $B$  wenden wir dasselbe Prinzip an, wie bei der Herleitung der Formel für die Gesamtmasse von  $B$ . Der (mit Masse belegte) Bereich  $B$  wird in kleine Teilebereiche  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zerlegt, und jeder Teilebereich  $B_i$  wird durch einen Massenpunkt  $P_i \in B_i$  mit der Masse  $m_i = m(B_i) = \text{Masse von } B_i$  ersetzt. Von diesem System von Massenpunkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$  bestimmen wir nach den oben angegebenen Formeln den Schwerpunkt  $\bar{x}, \bar{y}$ . Setzt man zur Abkürzung  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  ( $= \text{Gesamtmasse von } B$ ) und berücksichtigt die Näherungsbeziehung  $m(B_i) \approx \varrho(P_i) \cdot \Delta B_i$  (s. Herleitung zum Satz 2.5), so erhält man

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{m} \sum_i m(B_i) \cdot x(P_i) \approx \frac{1}{m} \sum_i \varrho(P_i) \Delta B_i \cdot x(P_i).$$

Es gilt also  $\bar{x} \approx \frac{1}{m} \sum_i [x\varrho](P_i) \cdot \Delta B_i$  und analog  $\bar{y} \approx \frac{1}{m} \sum_i [y\varrho](P_i) \cdot \Delta B_i$ . (Die Schreibweise  $[x\varrho](P_i)$  bzw.  $[y\varrho](P_i)$  bringt zum Ausdruck, daß man das Produkt aus  $x$  ( $x$ -Koordinate) und  $\varrho$  (Flächendichte) für den Punkt  $P_i$  bilden soll.) Der Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  ist eine Näherung für den gesuchten Schwerpunkt  $(x_S, y_S)$  von  $B$ . Den genauen Wert erhält man wieder durch den Grenzprozeß  $\emptyset B_i \rightarrow 0$ :

$$x_S = \lim_{\emptyset B_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{m} \sum_i [x\varrho](P_i) \cdot \Delta B_i \right\},$$

$$y_S = \lim_{\emptyset B_i \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{m} \sum_i [y\varrho](P_i) \cdot \Delta B_i \right\}.$$

Den konstanten Faktor  $\frac{1}{m}$  kann man vor das Limeszeichen setzen, und aus Definition 2.5 folgt der

**S.2.6 Satz 2.6:**

$$x_S = \frac{1}{m} \iint_B x \varrho \, db,$$

$$y_S = \frac{1}{m} \iint_B y \varrho \, db$$

sind die Koordinaten des Schwerpunktes eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Flächen-dichte  $\varrho = \varrho(P)$ .

*Bemerkung:* Die Gesamtmasse  $m$  von  $B$  wird nach der in Satz 2.5 angegebenen Formel berechnet. Ist  $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$  für alle  $P \in B$ , so kann  $\varrho$  vor das Integralzeichen gesetzt werden. Unter Beachtung der Formel (2.7) erhält man dann für den sogenannten geometrischen Schwerpunkt von  $B$ :

$$x_0 = \frac{1}{A} \iint_B x \, db,$$

$$y_0 = \frac{1}{A} \iint_B y \, db.$$

Der Flächeninhalt  $A$  von  $B$  kann nach Formel  $A = \iint_B db$  berechnet werden, falls keine elementargeometrischen Formeln zur Verfügung stehen.

*Beispiel 2.4:* Von dem in Beispiel 2.3 angegebenen Bereich  $B$  mit  $\varrho = \frac{1}{2}(x+y)$  ermittle man den Schwerpunkt  $S$ . Man berechne außerdem den geometrischen Schwerpunkt  $S_0$  von  $B$  und vergleiche  $S_0$  mit  $S$ .

Für  $S$  erhält man nach Satz 2.6:

$$x_S = \frac{3}{32} \int_0^4 \int_0^{4-x} x \cdot \frac{1}{2}(x+y) \, dy \, dx,$$

$$y_S = \frac{3}{32} \int_0^4 \int_0^{4-x} y \cdot \frac{1}{2}(x+y) \, dy \, dx.$$

Die mit ein wenig Rechnung verbundene Auswertung der Doppelintegrale liefert die Werte  $x_S = \frac{3}{2}$  und  $y_S = \frac{3}{2}$ . Für die Koordinaten  $x_0, y_0$  des geometrischen Schwerpunktes von  $B$  erhält man:

$$x_0 = \frac{1}{8} \int_0^4 \int_0^{4-x} x \, dy \, dx = \frac{4}{3}$$

und

$$y_0 = \frac{1}{8} \int_0^4 \int_0^{4-x} y \, dy \, dx = \frac{4}{3}.$$

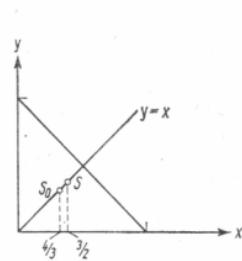


Bild 2.9

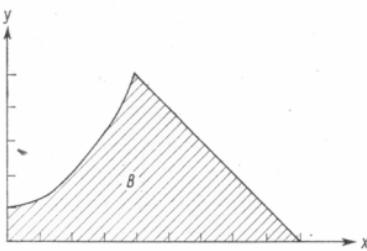


Bild 2.10

Bezüglich der Lage von  $S$  und  $S_0$ : siehe Bild 2.9 (Warum liegen  $S$  und  $S_0$  beide auf der Geraden  $y = x$ ? Warum muß  $S_0$  etwas unterhalb von  $S$  liegen?)

**Aufgabe 2.2:** Der durch die Kurven  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ,  $y = 9 - x$ ,  $x = 0$  und  $y = 0$  begrenzte Bereich  $B$  \* (s. Bild 2.10) sei mit einer Massenbelegung der Flächendichte  $\varrho = \varrho(x, y) = xy$  versehen. Man berechne den Schwerpunkt von  $B$ .

Eng mit dem Begriff des Schwerpunktes hängt der Begriff des statischen Moments von  $B$  bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse zusammen. Man denkt sich die Gesamtmasse  $m$  des (mit Masse belegten) Bereiches  $B$  im Schwerpunkt  $(x_S, y_S)$  vereinigt. Das statische Moment des Massenpunktes  $S$  mit der Masse  $m$  ist dann gleich dem statischen Moment von  $B$ .

**Definition 2.6:** Ist  $m$  die Gesamtmasse und  $(x_S, y_S)$  der Schwerpunkt des Bereiches  $B$ , D.2.6 so heißt das Produkt  $M_y = m \cdot x_S$  das statische Moment von  $B$  bezüglich der  $y$ -Achse („Gesamtmasse“ mal „Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der  $y$ -Achse“). Analog ist  $M_x = m \cdot y_S$  das statische Moment von  $B$  bezüglich der  $x$ -Achse (s. Bild 2.11).

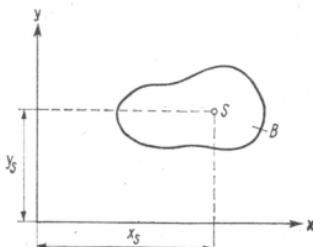


Bild 2.11

Aus Satz 2.6 ergibt sich dann sofort der

**Satz 2.7:** Für die statischen Momente  $M_x$  und  $M_y$  von  $B$  bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse S.2.7 gelten die Formeln

$$M_x = \iint_B y \varrho \, db,$$

$$M_y = \iint_B x \varrho \, db.$$

Den Themenkreis *Masse, Schwerpunkt, statisches Moment* wollen wir mit dem Begriff *Trägheitsmoment* abschließen.

**D.2.7 Definition 2.7:** Unter dem Trägheitsmoment eines Massenpunktes  $P_0(x_0, y_0)$  mit der Masse  $m_0$  bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse versteht man das Produkt  $m_0 \cdot y_0^2$  bzw.  $m_0 \cdot x_0^2$  („Masse“ mal „Quadrat des Abstands von der betreffenden Achse“). Hat man ein System von Massenpunkten  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$  mit den Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , so summiert man über die Trägheitsmomente aller Massenpunkte:  $\sum_i m_i y_i^2$  bzw.  $\sum_i m_i x_i^2$  ist das Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse.

Derselbe Gedankengang wie bei der Herleitung der Sätze 2.5 und 2.6 (Zerlegung des Bereiches  $B$  in endlich viele Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots$ ; Ersetzung der Teilbereiche durch ein System von Massenpunkten  $P_1, P_2, \dots$ ; Berechnung des Trägheitsmomentes dieses Systems von Massenpunkten nach der in Definition 2.7 angegebenen Formel; Grenzprozeß  $\emptyset B_i \rightarrow 0$ ) führt bei einem ebenen Bereich  $B$  mit der Flächendichte  $\varrho = \varrho(P)$  zum

**S.2.8 Satz 2.8:** Für die Trägheitsmomente  $J_x$  und  $J_y$  von  $B$  bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse gelten die Formeln

$$J_x = \iint_B y^2 \varrho \, db,$$

$$J_y = \iint_B x^2 \varrho \, db.$$

**Beispiel 2.5:**  $B$  sei der durch die Kurven  $y = 4 - x^2$  und  $y = 0$  begrenzte Bereich (s. Bild 2.12). Für die Massenbelegung von  $B$  gelte  $\varrho = x^2 + y$ . Man berechne das Trägheitsmoment von  $B$  bezüglich der  $y$ -Achse.

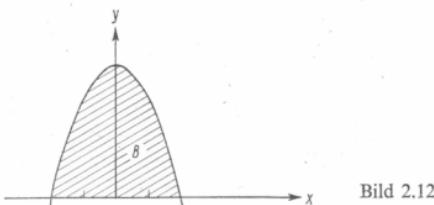


Bild 2.12

Nach den Sätzen 2.8 und 2.4 ( $B$  wird als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse angesehen) gilt:  $J_y = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} x^2(x^2 + y) \, dy \, dx$ . Für das innere Integral erhält man

$$x^2 \left( x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=4-x^2} = 8x^2 - \frac{1}{2} x^6.$$

$$\text{Hieraus folgt } J_y = \int_{-2}^2 \left( 8x^2 - \frac{1}{2} x^6 \right) \, dx = \frac{2^9}{21} = \frac{512}{21} \approx 24,4.$$

(Die einfachen Zwischenrechnungen wurden weggelassen!)

- \* **Aufgabe 2.3:** Von dem in Beispiel 2.5 beschriebenen Bereich  $B$  berechne man das Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ -Achse.

## 2.5. Uneigentliche Bereichsintegrale

In Analogie zur Erweiterung der einfachen Integrale, d.h. der bestimmten Riemannschen Integrale, auf uneigentliche Integrale (s. Band 2) soll jetzt auch der Begriff des Bereichsintegrals auf uneigentliche Bereichsintegrale erweitert werden. Bei der Definition des Bereichsintegrals

$$\iint_B f(P) \, db$$

gingen wir von der Vorstellung aus, daß

- a) der Bereich  $B$  beschränkt und
- b) die Funktion  $f(P)$  auf  $B$  definiert und beschränkt ist.

(Man vergleiche hierzu auch Satz 2.2.) Unser Ziel ist es, dem Symbol  $\iint_B f(P) \, db$  auch

dann einen Sinn zu geben, wenn eine der beiden Voraussetzungen a), b) nicht erfüllt ist. Der Weg, der zur Definition der uneigentlichen Bereichsintegrale führt, ist wieder ein geeigneter Grenzprozeß. Bevor wir auf diese Problematik eingehen, soll an einem Beispiel das Nichterfülltsein der Bedingungen a) und b) demonstriert werden.

*Beispiel 2.6:* a) Der durch den Hyperbelast  $y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ), die positive  $x$ -Achse und die positive  $y$ -Achse begrenzte Bereich  $B$  (s. Bild 2.13) ist nicht beschränkt; der Bereich  $B$  erstreckt sich ins Unendliche.

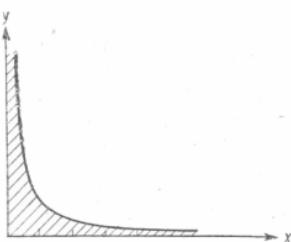


Bild 2.13

b) Die Funktion  $f(P) = f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  ist für  $(x, y) = (0, 0)$  nicht definiert, für alle anderen Punkte ist sie definiert und stetig. Die Funktion  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  ist auf jeder *punktierten Umgebung* des Punktes  $(x, y) = (0, 0)$  unbeschränkt, ihre Funktionswerte überspringen jede noch so große Schranke. (Eine *punktierte Umgebung* von  $P$  ist eine Umgebung von  $P$ , aus der man den Punkt  $P$  herausgenommen hat.)

Wir kommen nun zur ersten Frage:  $B$  sei ein nichtbeschränkter Bereich;  $f(P)$  eine reellwertige Funktion, die mindestens für alle Punkte  $P \in B$  definiert ist. Was soll man in diesem Fall unter dem Bereichsintegral von  $f(P)$  über  $B$  verstehen? Die Antwort findet man nach dem schon bei den gewöhnlichen uneigentlichen Integralen kennengelernten Prinzip. Der nichtbeschränkte Bereich  $B$  wird durch eine Folge  $B_1, B_2, \dots$  beschränkter, aber immer größer werdender Teilmengen von  $B$  aufgefüllt.

**D.2.8 Definition 2.8:** Ist  $B$  ein nichtbeschränkter (ebener) Bereich, so nennt man jede Folge beschränkter, aber immer größer werdender Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots$  von  $B$  (d.h.:  $B_1 < B_2 < B_3 \dots < B$ ), die in ihrer Gesamtheit den nichtbeschränkten Bereich  $B$  ausfüllen (d.h.: zu jeder beschränkten Teilmenge  $M < B$  gibt es ein  $B_n$  mit  $M < B_n$ ), eine Folge von  $B$  ausfüllenden (ausschöpfenden) Teilbereichen (s. Bild 2.14).

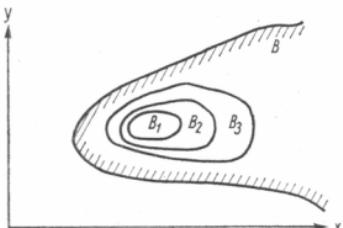


Bild 2.14

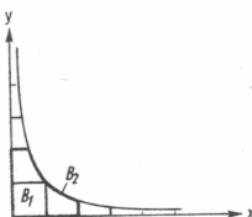


Bild 2.15

Bei dem durch Bild 2.13 dargestellten nichtbeschränkten Bereich  $B$  könnte eine solche Folge  $B_1, B_2, \dots$  wie folgt gewonnen werden: Durch die Geraden  $x = n$ ,  $y = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) wird von dem nichtbeschränkten Bereich  $B$  ein beschränkter Teilbereich  $B_n$  abgeschnitten (s. Bild 2.15).  $B_1, B_2, \dots$  ist dann eine Folge von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen. Für jedes  $B_n$  kann man das Flächenintegral  $\iint_{B_n} f(P) db$  im gewöhnlichen Sinn bilden. Falls nun die Folge der Integralwerte  $\iint_{B_n} f(P) db$  konvergiert, so wird man den Grenzwert als uneigentliches Bereichsintegral von  $f(P)$  über dem nichtbeschränkten Bereich bezeichnen.

Die bisherigen – an einem Beispiel orientierten – Überlegungen wollen wir in allgemeiner Form in der folgenden Definition zusammenfassen.

**D.2.9 Definition 2.9:**  $B$  sei ein nichtbeschränkter Bereich, auf der die reellwertige Funktion  $f(P)$  definiert ist. Wenn für jede Folge  $B_1, B_2, \dots$  von  $B$  ausfüllenden (meßbaren) Teilbereichen (vgl. Def. 2.8) der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db$  existiert und immer den gleichen

Wert hat, so nennt man diesen Grenzwert das **uneigentliche Bereichsintegral** der Funktion  $f(P)$  über dem nichtbeschränkten Bereich  $B$ . Das uneigentliche Bereichsintegral wird – ebenso wie das gewöhnliche Bereichsintegral – mit dem Symbol  $\iint_B f(P) db$  bezeichnet.

Auch bei den uneigentlichen Bereichsintegralen ist die Sprechweise üblich, daß das **uneigentliche Bereichsintegral konvergiert bzw. divergiert**, je nachdem, ob der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db$  (im vorhin angegebenen Sinn!) existiert oder nicht. Die Entscheidung, ob ein uneigentliches Bereichsintegral konvergiert oder nicht, ist nach Definition 2.9 mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Selbst wenn man für eine Folge  $B_1, B_2, \dots$  von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen den Grenzwert  $G = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db$  ermittelt hat, so ist damit natürlich noch nicht gesichert, daß das **uneigentliche Be-**

reichsintegral konvergiert. Erst wenn man weiß, daß *jede* andere Folge von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen zum selben Grenzwert  $G$  führt, ist die Frage nach der Konvergenz des uneigentlichen Bereichsintegrals eindeutig entschieden. Glücklicherweise ist es so, daß man in vielen Fällen mit der Ermittlung des Grenzwertes  $G$  für eine einzige Folge von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen das Problem gelöst hat, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.9:** Ist die Funktion  $f(P)$  auf dem nichtbeschränkten Bereich  $B$  nirgends negativ (d.h.  $f(P) \geq 0$  für alle  $P \in B$ ), so ist die Konvergenz des uneigentlichen Bereichsintegrals gesichert, falls bei einer einzigen Folge  $B_1, B_2, \dots$  von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db$  existiert. Es gilt dann: S.2.9

$$\iint_B f(P) db = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db.$$

*Beweis:* Es sei  $B_1, B_2, \dots$  eine Folge von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen, für die gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) db = G. \quad (*)$$

Zu zeigen ist, daß für jede andere Folge  $B'_1, B'_2, \dots$  von  $B$  ausfüllenden Teilbereichen ebenfalls gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{B'_m} f(P) db = G. \quad (**)$$

Wir zeigen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $m_0$  gibt, so daß für alle  $m \geq m_0$  die Ungleichung  $G - \varepsilon < \iint_{B'_m} f(P) db \leq G$  erfüllt ist. Damit ist dann  $(**)$  bewiesen. Nach Definition 2.8 gibt es zu jedem  $B'_m$  ein  $B_l$  mit  $B'_m \subset B_l$ . Hieraus und aus  $(*)$  folgt dann

$$\iint_{B'_m} f(P) db \leq \iint_{B_l} f(P) db \leq G, \text{ also}$$

$$\iint_{B'_m} f(P) db \leq G. \quad (I)$$

Aus  $(*)$  liest man ab, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  mit  $\iint_{B_{n_0}} f(P) db > G - \varepsilon$  geben muß. Falls  $m$  hinreichend groß ist, muß nach Definition 2.8 der Bereich  $B'_m$  den Bereich  $B_{n_0}$  umfassen:  $B'_m \supset B_{n_0}$  für alle  $m \geq m_0$ . Hieraus folgt

$$\iint_{B_m} f(P) db \geq \iint_{B_{n_0}} f(P) db > G - \varepsilon. \quad (II)$$

Aus (I) und (II) folgt  $G - \varepsilon < \iint_{B'_m} f(P) db \leq G$  für alle  $m \geq m_0$ . ■

**Beispiel 2.7:** Es sei  $B$  die ganze  $x, y$ -Ebene und  $f(P) = f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ . Man prüfe, ob das uneigentliche Bereichsintegral  $\iint_B f(P) db$  konvergent ist.

Weil die vorgegebene Funktion  $f(P)$  stets  $\geq 0$  ist, braucht nur von einer einzigen Folge  $B_1, B_2, \dots$  nachgewiesen zu werden, daß der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) d\mu$  existiert – dann ist die Konvergenz des Bereichsintegrals gesichert.  $B_n$  soll der folgende quadratische Bereich sein:  $B_n = \{(x, y) \mid -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$  (s. Bild 2.16). Die Folge  $B_1, B_2, \dots$  füllt dann die ganze  $x, y$ -Ebene aus.

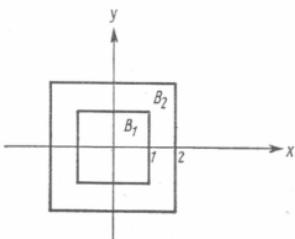


Bild 2.16

Wegen

$$\begin{aligned}\iint_{B_n} f(P) d\mu &= \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \int_{-n}^n \left[ e^{-x^2} \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right] dx = \left( \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right) \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left( \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left( 2 \cdot \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2\end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B_n} f(P) d\mu = \left( 2 \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Der Wert des rechts stehenden gewöhnlichen uneigentlichen Integrals ist gleich  $\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ . (Einen Beweis für diese tiefliegende Aussage findet man z.B. in [2].) Das vorgegebene uneigentliche Bereichsintegral ist also konvergent und hat den Wert  $(2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi})^2 = \pi$ . – Wesentlich einfacher würde man zum Ziel kommen, wenn man die  $x, y$ -Ebene durch eine Folge immer größer werdender Kreisscheiben  $B_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$  ausfüllen würde und bei der Berechnung der Bereichsintegrale über  $B_n$  von kartesischen Koordinaten  $x, y$  zu Polarkoordinaten  $r, \varphi$  übergehen würde. Da die Transformation mehrfacher Integrale erst im Abschnitt 4. behandelt wird, konnte dieser Weg jetzt noch nicht beschritten werden. Wir werden in Abschnitt 4. noch einmal auf dieses Beispiel zurückkommen.

Wenn die Funktion  $f(P)$  auf dem nichtbeschränkten Bereich  $B$  auch negative Werte annimmt, so betrachtet man die Funktion  $\varphi(P) := |f(P)|$ . Auf  $|f(P)|$  kann man Satz 2.9 anwenden.

Analog dem bei gewöhnlichen uneigentlichen Integralen festgestellten Sachverhalt gilt auch bei uneigentlichen Bereichsintegralen der folgende

**Satz 2.10:** Aus der Konvergenz des uneigentlichen Bereichsintegrals  $\iint_B |f(P)| \, db$  über S.2.10 dem nichtbeschränkten Bereich  $B$  folgt die Konvergenz des uneigentlichen Bereichsintegrals  $\iint_B f(P) \, db$ .

Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwierig; man findet ihn z.B. in [3], Band III.

Nach der Behandlung der uneigentlichen Bereichsintegrale über einem nichtbeschränkten Bereich kommen wir nun zu den uneigentlichen Bereichsintegralen mit nichtbeschränkter Funktion (vgl. Beispiel 2.6).

**Definition 2.10:** Auf dem beschränkten Bereich  $B$  sei eine Funktion  $f(P)$  gegeben, die D.2.10 in der Umgebung des Punktes  $P_0$  nichtbeschränkt ist. (Den Ausnahmepunkt  $P_0$  nennt man in diesem Zusammenhang auch singulären Punkt.) Die Funktion  $f(P)$  soll aber auf der Menge  $B \setminus U(P_0)$  – wobei  $U(P_0)$  jede beliebige Umgebung von  $P_0$  sein kann – beschränkt sein (s. Bild 2.17). Wenn nun für jede Folge  $U_1, U_2, \dots$  von Umgebungen des Punktes  $P_0$ , deren Durchmesser gegen null konvergieren, der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{B \setminus U_n} f(P) \, db$$

existiert und immer den gleichen Wert hat, so nennt man diesen Grenzwert das uneigentliche Bereichsintegral der nichtbeschränkten Funktion  $f(P)$  über dem Bereich  $B$ .

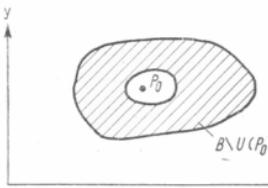


Bild 2.17

Die Sätze 2.9 und 2.10 gelten – in entsprechend abgewandelter Form – auch für uneigentliche Bereichsintegrale mit nichtbeschränkter Funktion. – Ist die Funktion  $f(P)$  in der Umgebung mehrerer Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_k$  nichtbeschränkt, so muß bei der Untersuchung des obigen Grenzwertes an Stelle einer Umgebung  $U$  von  $P_0$  ein System von Umgebungen  $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(k)}$  der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_k$  betrachtet werden. – Hat man an Stelle eines oder mehrerer singulärer Punkte eine singuläre Kurve, so ändert sich im Prinzip an den Formulierungen der Definition 2.10 nichts;  $U_1, U_2, \dots$  muß jetzt eine Folge von Umgebungen der Kurve sein, die sich auf diese Kurve zusammenziehen.

**Aufgabe 2.4:** Es sei  $B$  der durch die Geraden  $x = 0, x = \sqrt{8}, y = 0, y = 4$  begrenzte Rechteckbereich und  $f(P) = f(x, y) = y \cdot x^{-\frac{1}{3}}$ . Man prüfe, ob das uneigentliche Bereichsintegral  $\iint_B f(P) \, db$  konvergent ist. (Hinweis: Das zwischen  $y = 0$  und  $y = 4$  gelegene Stück der  $y$ -Achse ist ein singuläres Kurvenstück.) \*

### 3. Integrale über räumliche Bereiche

#### 3.1. Der Begriff des Raumintegrals und des $n$ -dimensionalen Integrals

Bei der Definition des Raumintegrals kann man fast wörtlich die bei der Einführung des Bereichsintegrals im Abschnitt 2. verwendete Formulierung übernehmen. Es kommt im Prinzip kein neuer Gedanke hinzu; eine Begriffsbildung wird von der (2-dimensionalen) Ebene auf den (3-dimensionalen) Raum übertragen. Anstelle eines ebenen Bereichs  $B$  (i. allg. stellt man sich  $B$  als Teilmenge einer  $x,y$ -Ebene vor) mit einer darauf definierten Funktion  $f(P) = f(x, y)$  hat man jetzt einen räumlichen Bereich  $B$  (eine Teilmenge des  $x,y,z$ -Raumes) mit einer darauf definierten Funktion  $f(P) = f(x, y, z)$ . Wir können uns daher bei der Einführung des Raumintegrals sehr kurz fassen.

Die Definitionen 2.1, 2.2 und 2.3 können wir wörtlich auf räumliche Bereiche übertragen; es ist lediglich die Formulierung,  $B$  sei ein ebener Bereich, durch die Formulierung,  $B$  sei ein räumlicher Bereich (eine Teilmenge des Raumes), zu ersetzen. Wesentlich ist, daß man alle Erklärungen mit einer entsprechenden räumlichen Vorstellung verbindet. In Bild 3.1 wird bei einem speziellen räumlichen Bereich  $B$  (einem Würfel) eine Zerlegung in 8 Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots, B_8$  vorgenommen.

Bei der Übertragung der Definition 2.4 auf räumliche Bereiche ist selbstverständlich unter  $\Delta B_i$  der Rauminhalt von  $B_i$  zu verstehen. Auch Definition 2.5 bedarf – einschließlich der entsprechenden Vorbetrachtungen – keiner großen Abänderung. Diese letzte, aber entscheidende Definition wollen wir hier aber noch einmal extra formulieren.

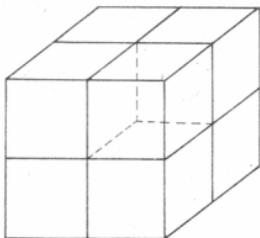


Bild 3.1

**D.3.1 Definition 3.1:**  $f(P)$  sei eine auf dem räumlichen Bereich  $B$  definierte reellwertige Funktion. (Legt man ein rechtwinklig kartesisches  $x,y,z$ -Koordinatensystem zugrunde, so gilt  $f(P) = f(x, y, z)$ .) Falls der Grenzwert der Integralsummen

$$G = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i$$

existiert, so nennt man diesen Grenzwert das **Raumintegral** der Funktion  $f(P)$  über dem Bereich  $B$  und bezeichnet es mit dem Symbol

$$\iiint_B f(P) \, d\mathbf{b}.$$

Die genaue Bedeutung des hier benutzten Grenzwertes entnehme man den Vorbetrachtungen zu Definition 2.5.

Es gilt also

$$\iiint_B f(P) \, db = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i. \quad (3.1)$$

Vergleicht man die beiden Definitionen 2.5 und 3.1 für das Bereichsintegral bzw. das Raumintegral, so stellt man fest, daß sie in ihrer äußereren Form vollkommen übereinstimmen:

$$\iint_B f(P) \, db = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i, \quad (I)$$

$$\iiint_B f(P) \, db = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta B_i. \quad (II)$$

In (I) bilden die  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine Zerlegung des ebenen Bereichs  $B$ ,  $P_i$  ist ein Punkt aus der ebenen Teilmenge  $B_i$ ,  $\Delta B_i$  der Flächeninhalt von  $B_i$ ,  $f(P)$  ( $= f(x, y)$ ) eine auf dem ebenen Bereich  $B$  definierte Funktion. In (II) ist  $f(P)$  ( $= f(x, y, z)$ ) eine auf dem räumlichen Bereich  $B$  definierte Funktion, die  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sind räumliche Teilmengen,  $\Delta B_i$  ist der Rauminhalt von  $B_i$ . Ähnlich wie beim Bereichsintegral ist auch beim Raumintegral die Bezeichnungsweise sehr uneinheitlich; wir werden auf diesen Sachverhalt am Ende des Abschnittes 3.1. etwas ausführlicher eingehen.

Das Bereichsintegral konnten wir im Falle einer nichtnegativen Funktion  $f(P) = f(x, y)$  als Volumen eines gewissen Bereiches im  $R^3$  interpretieren (vgl. Satz 2.1). Auch beim Raumintegral mit nichtnegativer Funktion  $f(P) = f(x, y, z)$  ist es möglich, dasselbe als „Volumen“ (Riemann-Inhalt) eines gewissen Bereichs im  $R^4$  anzusehen. Von einer „Veranschaulichung“ im  $R^4$  kann natürlich keine Rede mehr sein. (Eine kleine Einführung in den mit dem Riemann-Inhalt zusammenhängenden Fragenkreis findet man in Band 2, 10.5.)

Bevor wir zur Berechnung von Raumintegralen kommen, wollen wir ein einfaches, aber wichtiges Anwendungsbeispiel für Raumintegrale kennenlernen.

*Beispiel 3.1 (Masse und Volumen eines Körpers):*  $B$  sei ein räumlicher Bereich (Körper) mit der Dichte  $\varrho = \varrho(P)$  ( $= \varrho(x, y, z)$ ). Masse  $m$  und Volumen  $V$  von  $B$  sollen mit Hilfe eines Raumintegrals dargestellt werden.

Ist  $B$  ein homogener Bereich, d.h. ein Bereich mit konstanter Dichte  $\varrho = \varrho_0$ , so gilt natürlich  $m = \varrho_0 V$  oder anders ausgedrückt:  $\frac{m}{V} = \varrho_0$ . Ist die Dichte  $\varrho$  nicht konstant, so kann man die Masse  $m$  von  $B$  durch folgenden Grenzprozeß gewinnen:  $B$  wird in (möglichst kleine) Teilbereiche  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zerlegt. Ist  $P_i$  irgendein Punkt aus  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\Delta B_i$  das Volumen von  $B_i$ , so ist das Produkt  $\varrho(P_i) \cdot \Delta B_i$  näherungsweise gleich der Masse  $m_i$  von  $B_i$  (vorausgesetzt, daß die Dichtefunktion  $\varrho = \varrho(P)$  stetig ist!). Für die Masse  $m$  von  $B$  gilt daher:  $m = \sum_i m_i \approx \sum_i \varrho(P_i) \Delta B_i$ .

Diese Näherung für  $m$  ist umso genauer, je „feiner“ die Zerlegung  $B_1, B_2, \dots, B_n$  von  $B$  ist; den genauen Wert von  $m$  erhält man durch den uns nun schon hinreichend bekannten Grenzprozeß  $\varnothing B_i \rightarrow 0$ , d.h.:

$$m = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i \varrho(P_i) \Delta B_i.$$

Nach der Definition des Raumintegrals (vgl. Formel (3.1)) ist also

$$m = \iiint_B \varrho \, db. \quad (3.2)$$

Hierbei ist  $\varrho$  eine Funktion von  $P$ , d.h.  $\varrho = \varrho(P)$ . Ist im Spezialfall  $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$ , so kann man den konstanten Faktor  $\varrho_0$  vor das Integral setzen und erhält  $m = \varrho_0 \iiint_B db$ .

Hieraus folgt – wegen  $\frac{m}{\varrho_0} = V$  – die Beziehung

$$V = \iiint_B db. \quad (3.3)$$

Auch hier möchten wir wieder darauf hinweisen, daß  $\iiint_B db$  eine Kurzschreibweise für  $\iiint_B 1 \, db$  ist.

Die Aussagen bezüglich Existenz und Eigenschaften bei Bereichsintegralen (s. Abschnitt 2.2.) kann man sinngemäß auf Raumintegrale übertragen. Beispielsweise hat man anstelle von Formel c) in Satz 2.3 jetzt zu schreiben:

$$\iiint_B f(P) \, db = \iiint_{B_1} f(P) \, db + \iiint_{B_2} f(P) \, db. \quad (3.4)$$

Hierbei wurde der räumliche Bereich  $B$  in die beiden Teilbereiche  $B_1, B_2$  zerlegt.

Wir kommen nun zur Berechnung von Raumintegralen. Die in Definition 3.1 angegebene Methode zur Ermittlung des Wertes eines Raumintegrals scheitert wegen ihrer Kompliziertheit als eine praktisch brauchbare Berechnungsmethode aus. Bereichsintegrale wurden mit Hilfe von Doppelintegralen (zweifachen Integralen) berechnet, falls der Bereich  $B$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse war (vgl. Satz 2.4). Einen ähnlichen Zusammenhang hat man bei den Raumintegralen: Raumintegrale werden mit Hilfe von *dreifachen Integralen* berechnet, falls der Integrationsbereich  $B$  ein *räumlicher Normalbereich* ist. Während es sich bei zweifachen Integralen um zwei nacheinander auszuführende einfache Integrationen handelt, müssen bei einem dreifachen Integral drei einfache Integrationen nacheinander ausgeführt werden.

Was sind nun räumliche Normalbereiche?

**D.3.2 Definition 3.2:** Unter einem *räumlichen Normalbereich* bezüglich der  $x,y$ -Ebene versteht man einen räumlichen Bereich  $B$ , der „nach unten“ und „nach oben“ durch stetige Flächen  $z = z_1(x, y)$ ,  $z = z_2(x, y)$  und „seitlich“ durch einen allgemeinen auf der  $x,y$ -Ebene senkrecht stehenden Zylinder<sup>1)</sup> begrenzt wird. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Projektion  $B_{x,y}$  von  $B$  auf die  $x,y$ -Ebene ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse ist (vgl. Definition 1.1) und die Fläche  $z = z_1(x, y)$  stets unterhalb der Fläche  $z = z_2(x, y)$  verläuft (für alle  $(x, y) \in B_{x,y}$ ). Analog definiert man *räumliche Normalbereiche* bezüglich der beiden anderen Koordinatenebenen, der  $y,z$ -Ebene bzw.  $x,z$ -Ebene.

<sup>1)</sup> Ist  $C$  eine in der Ebene  $E$  gelegene geschlossene, doppelpunktfreie Kurve, so bilden die in den Punkten von  $C$  errichteten Normalen auf  $E$  die Mantelfläche eines allgemeinen Zylinders. Ist speziell  $C$  ein Kreis, so erhält man den bekannten Kreiszylinder.

**Beispiel 3.2:** Ist  $B_{x,y}$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse, d.h.  $B_x = \{(x, y) \mid x_1 \leqq x \leqq x_2, y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x)\}$ , so wird der räumliche Normalbereich  $B$  durch folgende Ungleichungen beschrieben:

$$(x, y, z) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leqq z \leqq z_2(x, y). \end{cases}$$

(Vor.:  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  stetig und  $z_1(x, y) \leqq z_2(x, y)$  für alle  $(x, y) \in B_{x,y}$ .) Wählt man speziell  $x_1 = 2, x_2 = 6, y_1(x) = -x, y_2(x) = x, z_1(x, y) = -x - \frac{1}{3}y, z_2(x, y) = x - \frac{1}{2}y$ , so ist  $B$  ein räumlicher Normalbereich bezüglich der  $x, y$ -Ebene, der nach unten durch die Ebene  $z = -x - \frac{1}{3}y$ , nach oben durch die Ebene  $z = x - \frac{1}{2}y$  begrenzt wird und dessen Projektion  $B_{x,y}$  auf die  $x, y$ -Ebene ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse ist (s. Bild 3.2). Ausgehend von Bild 3.2 versuche man sich eine genaue Vorstellung von dem Bereich  $B$  zu verschaffen! (Von welchen 6 Ebenen wird  $B$  begrenzt? Wie sieht der allgemeine Zylinder in diesem Fall aus? Wie sieht die Projektion  $B_{x,z}$  von  $B$  auf die  $x, z$ -Ebene aus?  $B_{x,y}$  ist der Grundriß von  $B$ ,  $B_{x,z}$  ein Seitenriß von  $B$ .)

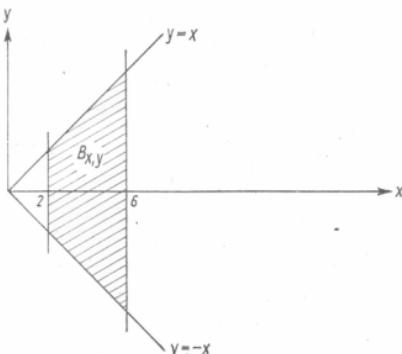


Bild 3.2

**Aufgabe 3.1:** Von dem räumlichen Normalbereich

$$B: \begin{cases} 1 \leqq x \leqq 4 \\ -x + 1 \leqq y \leqq x - 1 \\ -3 \leqq z \leqq \frac{2}{3}(x + y + 2) \end{cases}$$

bestimme man die Projektionen  $B_{x,y}$  und  $B_{x,z}$  von  $B$  auf die  $x, y$ -Ebene bzw.  $x, z$ -Ebene. Von wieviel Ebenen wird  $B$  begrenzt? Wie lauten die Gleichungen dieser Begrenzungsebenen?

Nach Definition 3.2 gibt es zwei Typen von räumlichen Normalbereichen bezüglich der  $x, y$ -Ebene (beim 1. Typ ist  $B_{x,y}$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse, beim 2. Typ ist  $B_{x,y}$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse). Analog gibt es je zwei Typen bezüglich der  $y, z$ -Ebene und der  $x, z$ -Ebene. Insgesamt hat man also 6 verschiedene Typen von räumlichen Normalbereichen. Von einem dieser 6 Typen

haben wir zu Beginn des Beispiels 3.2 die allgemeine Beschreibung (Ungleichungen für  $x, y, z$ ) angegeben. Die anderen 5 Typen wurden explizit nicht behandelt.

- \* **Aufgabe 3.2:** Von den restlichen – in Beispiel 3.2 nicht behandelten – 5 Typen von räumlichen Normalbereichen gebe man die allgemeine Beschreibung an.

**Hinweis:** Das vollständige Durchdenken der mit der Aufgabe 3.2 zusammenhängenden Problematik ist sehr zu empfehlen! Insbesondere sollte man sich von jedem Normalbereich eine räumliche Vorstellung verschaffen. Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist das Fundament bei der Berechnung eines jeden Raumintegrals.

Zu jedem der 6 Typen von räumlichen Normalbereichen gibt es ein dreifaches Integral.

### D.3.3 Definition 3.3: Unter dem zu dem Normalbereich

$$B: \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leqq z \leqq z_2(x, y) \end{cases}$$

gehörigen **dreifachen Integral** der Funktion  $f(x, y, z)$  versteht man folgenden Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx = \int_{x=x_1}^{x_2} \left( \int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z=z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Analog definiert man die 5 anderen Typen von dreifachen Integralen.

Zu dem in Definition 3.3 angegebenen Ausdruck müssen wir noch eine Erläuterung hinzufügen, da es sich hierbei bereits um eine abkürzende Schreibweise für drei nacheinander auszuführende einfache Integrationen handelt. Zunächst wird  $f(x, y, z)$  nach  $z$  integriert (wobei  $x$  und  $y$  wie Konstanten behandelt werden), anschließend wird für  $z$  in der bekannten Weise die obere und untere Grenze ( $z_2(x, y)$  bzw.  $z_1(x, y)$ ) eingesetzt und die Differenz gebildet. Im zweiten Schritt wird der erhaltene Ausdruck nach  $y$  integriert (wobei  $x$  wie eine Konstante behandelt wird), und für  $y$  werden die Grenzen  $y_2(x)$  und  $y_1(x)$  eingesetzt. Der nunmehr vorliegende Ausdruck wird im dritten Schritt nach  $x$  integriert, anschließend werden für die einzige noch vorkommende Variable  $x$  die Grenzen eingesetzt.

**Beispiel 3.3:** Man berechne das dreifache Integral

$$J = \int_1^2 \int_x^3 \int_0^{xy} xyz dz dy dx.$$

Es gilt:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ;  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = 3x$ ;  $z_1(x, y) = 0$ ,  $z_2(x, y) = xy$ ;  $f(x, y, z) = xyz$  (vgl. Definition 3.3).

Beim 1. Schritt berechnen wir das innere Integral

$$J_1 = \int_0^{xy} xyz dz = \int_{z=0}^{xy} xyz dz = \left[ xy \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=xy} = \frac{1}{2} (xy)^3.$$

Beim 2. Schritt wird das mittlere Integral berechnet

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_x^{3x} J_1 dy = \int\limits_{y=x}^{3x} \frac{1}{2} (xy)^3 dy = [\frac{1}{2} x^3 \cdot \frac{1}{4} y^4]_{y=x}^{y=3x} \\ &= \frac{1}{8} x^3 (81x^4 - x^4) = \frac{1}{8} x^3 \cdot 80x^4 = 10x^7. \end{aligned}$$

Äußeres Integral:

$$J = J_3 = \int\limits_1^2 J_2 dx = \int\limits_1^2 10x^7 dx = \left[ \frac{5}{4} x^8 \right]_1^2 = 318,75.$$

*Hinweis:* Der zu diesem dreifachen Integral gehörige Normalbereich  $B$  wird „nach unten“ durch die  $x,y$ -Ebene ( $z = 0$ ), „nach oben“ durch die Sattelfläche  $z = xy$  und „seitlich“ durch die vier auf der  $x,y$ -Ebene senkrecht stehenden Ebenen  $y = x$ ,  $y = 3x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  begrenzt.

*Aufgabe 3.3:* Man berechne das dreifache Integral

$$\int\limits_0^{\frac{x}{2}+3} \int\limits_{x-1}^8 \int\limits_0^{x+y+4} (x + y + z) dz dy dx.$$

(Durch welche Flächen wird der zugehörige Normalbereich  $B$  begrenzt?)

*Aufgabe 3.4:* Man bestimme zu allen 6 Typen von Normalbereichen das entsprechende dreifache Integral (vgl. Lösung zu Aufgabe 3.2 und Definition 3.3).

*Aufgabe 3.5:* Man berechne das dreifache Integral

$$\int\limits_0^5 \int\limits_0^{z+2} \int\limits_0^{x+3z} xyz dz dy dx.$$

(Durch welche Flächen wird der zugehörige Normalbereich  $B$  begrenzt?)

Nach all diesen Vorbereitungen können wir nun den zum Satz 2.4 (Berechnung der Bereichsintegrale mit Hilfe von zweifachen Integralen) analogen Satz für Raumintegrale formulieren.

**Satz 3.1:** Ist  $B$  ein räumlicher Normalbereich und  $f(P) = f(x, y, z)$  eine auf  $B$  stetige Funktion, so ist der Wert des Raumintegrals von  $f(P)$  über  $B$  gleich dem Wert des zu  $B$  gehörigen dreifachen Integrals von  $f(x, y, z)$  (vgl. Definitionen 3.2 und 3.3).

Bei einem räumlichen Normalbereich vom Typ

$$B: \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leqq z \leqq z_2(x, y) \end{cases}$$

lautet die entsprechende Formel:

$$\iiint_B f(P) db = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (3.5)$$

Analoge Formeln erhält man bei räumlichen Normalbereichen der anderen 5 Typen (vgl. Lösung zu Aufgabe 3.4).

Satz 3.1 wollen wir nicht beweisen. Eine Näherungsrechnung soll uns aber die Aussage des Satzes verständlich machen. Wir setzen voraus, daß der räumliche Bereich  $B$  ein Quader ist. Es gelte

$$B: \begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \\ e \leqq z \leqq g. \end{cases}$$

Ist  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  bzw.  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$  bzw.  $e = z_0 < z_1 < \dots < z_l = g$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  bzw.  $[c, d]$  bzw.  $[e, g]$ , so ist

$$B_{ijk}: \begin{cases} x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_j \\ z_{k-1} \leqq z \leqq z_k \end{cases}$$

eine Teilmenge von  $B$  und die Gesamtheit der  $B_{ijk}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ;  $k = 1, \dots, l$ ) bildet eine Zerlegung von  $B$ . Ist  $P_{ijk}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  ein beliebiger Punkt aus  $B_{ijk}$ , so gilt nach Definition 3.1

$$\iiint_B f(P) \, db \approx \sum_{i,j,k} f(P_{ijk}) \cdot \Delta B_{ijk} = \sum_{i,j,k} f(P_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \quad (3.6)$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}).$$

Für das dreifache Integral  $\iiint_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$  erhält man die gleiche Näherungsdarstellung, wenn man von der Definition für das bestimmte Integral ausgeht  $\left( \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum f(\xi_i) \Delta x_i \right)$ . Der besseren Übersicht wegen führen wir einige Abkürzungen ein.

$$F(x, y) := \int_e^g f(x, y, z) \, dz \approx \sum_k f(x, y, \zeta_k) \Delta z_k.$$

$$G(x) := \int_c^d F(x, y) \, dy \approx \sum_j F(x, \eta_j) \Delta y_j.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \iint_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx &= \int_a^b G(x) \, dx \approx \sum_i G(\xi_i) \Delta x_i \\ &\approx \sum_i \left[ \sum_j F(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right] \Delta x_i \approx \sum_i \left[ \sum_j \left( \sum_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta z_k \right) \Delta y_j \right] \Delta x_i. \end{aligned}$$

Damit haben wir für das dreifache Integral die gewünschte Näherungsdarstellung

$$\iint_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \approx \sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \quad (3.7)$$

Der Vergleich der Formeln (3.6) und (3.7) macht uns die Gültigkeit der in Satz 3.1 formulierten Aussage verständlich.

*Hinweis:* Ist  $B$  kein räumlicher Normalbereich, so zerlegt man zunächst  $B$  in Normalbereiche  $B_1, \dots, B_n$  und wendet die Zerlegungsformel (3.4) an.

Die Formel (3.4) wird man auch dann heranziehen, wenn die Funktion  $f(P)$  auf dem

Bereich  $B$  nur „stückweise stetig“ ist. Dabei wollen wir im Verallgemeinerung zum Begriff der stückweisen Stetigkeit bei Funktionen einer Variablen (siehe Band 2) eine auf dem räumlichen Bereich  $B$  definierte Funktion  $f(P)$  stückweise stetig nennen, wenn es eine Zerlegung von  $B$  in abgeschlossene Teilmengen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  gibt, so daß die Funktion  $f(P)$  auf jedem Teilbereich  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stetig ist.

**Beispiel 3.4:** Von dem „nach unten“ durch die  $x,y$ -Ebene ( $z = 0$ ), „nach oben“ durch die Ebene  $8x + 3y + 12z = 36$  und „seitlich“ durch den auf der  $x,y$ -Ebene senkrecht stehenden Kreiszylinder  $x^2 + y^2 = 4$  begrenzten räumlichen Bereich  $B$  berechne man das Volumen  $V$ .

$B$  ist ein räumlicher Normalbereich vom Typ  $B_1$  (vgl. Lösungen zu Aufgabe 3.2). Die Projektion  $B_{x,y}$  von  $B$  auf die  $x,y$ -Ebene ist eine Kreisscheibe (s. Bild 3.3). Es gilt:

$$B: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq 3 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y. \end{cases}$$

(Man könnte  $B$  natürlich auch als einen räumlichen Normalbereich vom Typ  $B_2$  ansehen.) Nach den Formeln (3.3) und (3.5) erhält man

$$V = \iiint_B db = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{3 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y} dz dy dx.$$

Die Integrationsgrenzen für die Variablen  $x$  und  $y$  können aus der Skizze des Bereiches  $B_{x,y}$  abgelesen werden (siehe Bild 3.3). Man beachte auch hier, daß die Gleichung  $x^2 + y^2 = 4$  in der  $x,y$ -Ebene einen Kreis, aber im  $x,y,z$ -Raum ( $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z$  beliebig) einen Kreiszylinder beschreibt.

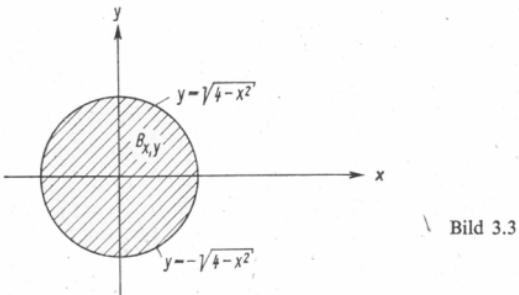


Bild 3.3

Das rechts stehende dreifache Integral berechnen wir wieder schrittweise:

$$J_1 = \int_0^{3 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y} dz = 3 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y.$$

$$J_2 = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} J_1 dy = [3y - \frac{3}{8}xy - \frac{1}{8}y^2]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} = 6\sqrt{4-x^2} - \frac{3}{8}x\sqrt{4-x^2}.$$

$$J_3 = \int_{-2}^2 J_2 dx = \int_{-2}^2 (6\sqrt{4-x^2} - \frac{3}{8}x\sqrt{4-x^2}) dx = 12\pi.$$

Ergebnis:  $V = 12 \cdot \pi$  (Volumeneinheiten).

Die Integrale für  $\sqrt{4 - x^2}$  und  $x \sqrt{4 - x^2}$  wurden einer Formelsammlung entnommen (s. z. B. [1]).

Wie im Anschluß an Definition 3.1 bereits angekündigt wurde, sollen zum Schluß der Ausführungen über Raumintegrale noch einige Bemerkungen zur unterschiedlichen Bezeichnungsweise bei Raumintegralen folgen. Auf Grund des in Satz 3.1 beschriebenen engen Zusammenhangs zwischen Raumintegralen und dreifachen Integralen ist es verständlich, daß man oft an Stelle von Raumintegral auch die Bezeichnung dreifaches Integral benutzt. Beim Symbol für das Raumintegral gibt es — von kleineren Unterschieden einmal abgesehen — zwei Typen: Das Symbol mit drei Integralzeichen (wie wir es benutzt haben) und das Symbol mit einem Integralzeichen. Neben solchen Symbolen wie

$$\iiint_B f(P) d\mathbf{b} \text{ oder } {}^{(B)}\iiint f(x, y, z) d\mathbf{b} \text{ oder } \iiint f(x, y, z) dV \text{ oder}$$

$$\iiint_V f(P) d\mathbf{v} \text{ oder } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

findet man auch die Schreibweise

$${}^{(B)}\int f(x, y, z) db \text{ oder } \int_V f(x, y, z) dV \text{ oder } \int_V \varphi(P) d\tau.$$

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir noch kurz auf die Verallgemeinerung des bei Bereichs- und Raumintegralen kennengelernten Integralbegriffs auf den Fall von mehr als drei Dimensionen eingehen. Bei einem Bereichsintegral ist ein ebener Bereich  $B$  (eine Teilmenge des  $R^2$ ) und eine darauf definierte Funktion  $f(P) = f(x_1, x_2)$  gegeben. (An Stelle von  $x, y$  wurde hier die für Verallgemeinerungen zweckmäßige Schreibweise  $x_1, x_2$  benutzt.) Analog ist bei einem Raumintegral ein räumlicher Bereich  $B$  (eine Teilmenge des  $R^3$ ) und eine darauf definierte Funktion  $f(P) = f(x_1, x_2, x_3)$  vorgegeben. Um eine für alle Dimensionen einheitliche Sprechweise zu ermöglichen, wollen wir bei unseren jetzigen auf Verallgemeinerung gerichteten Betrachtungen die Bereichsintegrale als *zweidimensionale Integrale* und die Raumintegrale als *drei-dimensionale Integrale* bezeichnen. Integrale über  $n$ -dimensionale Bereiche heißen dann  *$n$ -dimensionale Integrale*.

Bei einem  $n$ -dimensionalen Integral ist ein  $n$ -dimensionaler Bereich  $B$  (eine Teilmenge des  $R^n$ ) und eine darauf definierte Funktion  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  vorgegeben. (Wesentliche im  $R^n$  geltende Zusammenhänge wurden im Band 4 behandelt.) Die Definition des  $n$ -dimensionalen Integrals unterscheidet sich äußerlich kaum von den entsprechenden Definitionen 2.5 und 3.1 für Bereichsintegrale (2-dim. Integrale) bzw. Raumintegrale (3-dim. Integrale). In Analogie zu den Formeln (2.2) und (3.1) hat man bei  $n$ -dimensionalen Integralen die Formel

$$\overbrace{\iint \cdots \int}_B f(P) d\mathbf{b} = \lim_{\sigma B_i \rightarrow 0} \sum f(P_i) \Delta B_i. \quad (3.8)$$

Hierbei ist natürlich jetzt  $B_1, B_2, \dots, B_n$  eine Zerlegung des  $n$ -dim. Bereiches  $B$  in  $n$ -dim. Teilbereiche, und unter  $\Delta B_i$  ist das  *$n$ -dimensionale Volumen* (der Riemannsche Inhalt) von  $B_i$  zu verstehen. Auf den Inhaltsbegriff (Maßbegriff) im  $R^n$  gehen wir hier nicht ein. Wir verweisen auf die zu dieser Thematik gemachten Bemerkungen in Band 2, Abschnitt 10.5.1., und auf [5], Bd. II, bzw. [4], Bd. III. Die Begriffe *Abstand* und *Durchmesser* im  $R^n$  wurden in Band 4 erläutert.

Für die Berechnung des  $n$ -dim. Integrals ist wesentlich, daß auch für  $n$ -dim. Bereiche der zu den Sätzen 2.4 und 3.1 analoge Satz im  $R^n$  gilt.

**Satz 3.2:** Ist  $B$  ein Normalbereich des  $R^n$  und  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine auf  $B$  definierte stetige Funktion, so ist der Wert des  $n$ -dimensionalen Integrals (vgl. (3.8)) gleich dem Wert des zu  $B$  gehörigen  $n$ -fachen Integrals von  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . S.3.2

Was man unter einem *Normalbereich des  $R^n$*  und dem zugehörigen  *$n$ -fachen Integral* versteht, soll an einem Beispiel im  $R^4$  demonstriert werden.

$$B: \begin{cases} g_1 \leqq x_1 \leqq G_1 \\ g_2(x_1) \leqq x_2 \leqq G_2(x_1) \\ g_3(x_1, x_2) \leqq x_3 \leqq G_3(x_1, x_2) \\ g_4(x_1, x_2, x_3) \leqq x_4 \leqq G_4(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

ist ein solcher Normalbereich. Das 4-dimensionale Integral von  $f(P) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  über  $B$  ist dann gleich dem zu  $B$  gehörigen 4-fachen Integral von  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Das heißt:

$$\iiint_B f(P) db = \int_{g_1}^{G_1} \int_{g_2(x_1)}^{G_2(x_1)} \int_{g_3(x_1, x_2)}^{G_3(x_1, x_2)} \int_{g_4(x_1, x_2, x_3)}^{G_4(x_1, x_2, x_3)} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1.$$

Es gibt insgesamt  $4! = 24$  verschiedene Typen von 4-fachen Integralen. Bei 3-fachen Integralen gibt es insgesamt  $3! = 6$  verschiedene Typen (vgl. Lösung zu Aufgabe 3.4). Allgemein kann man feststellen, daß es  $n!$  verschiedene Typen von  $n$ -fachen Integralen gibt.

### 3.2. Anwendungen des Raumintegrals

Ein erstes Anwendungsbeispiel haben wir schon in Abschnitt 3.1. kennengelernt. Für die Gesamtmasse  $m$  des räumlichen Bereichs  $B$  mit der (ortsabhängigen) Dichte  $\varrho = \varrho(P)$  gilt

$$m = \iiint_B \varrho db.$$

Benutzt man für das Raumintegral das Symbol mit einem Integralzeichen – wie es z.B. auch in der Physik sehr oft gebraucht wird –, so lautet die Formel für die Gesamtmasse

$$m = \int \varrho db.$$

Auf die Angabe des Integrationsbereiches  $B$  haben wir hier ausnahmsweise verzichtet, da dies in den Anwendungen auch oft der Fall ist; selbstverständlich muß dann aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, über welchen Bereich  $B$  man integriert. Schließlich kann man an Stelle von  $m = \int \varrho db$  noch die ganz kurze Schreibweise

$$m = \int dm$$

finden. Diese Schreibweise entspricht der folgenden physikalischen Vorstellung: Man zerlegt den räumlichen Bereich  $B$  in kleine Raumeite mit dem Volumen  $db$ . Multipliziert man das *Volumenelement*  $db$  mit der Dichte  $\varrho$  ( $\varrho$  = Dichte in einem beliebigen

Punkt des Raumteiles), so erhält man näherungsweise die Masse  $dm$  des Volumenelements:  $dm = \varrho db$ . Die Summierung (Integration) über die Massenelemente  $dm$  ergibt die Gesamtmasse  $m$

$$m = \int dm = \int \varrho db.$$

(Es ist sehr instruktiv, diese „physikalischen“ Formulierungen mit den Ausführungen bei der Herleitung der Formel (3.2) zu vergleichen!)

Für den Schwerpunkt, das statische Moment und das Trägheitsmoment im Raum erhält man Formeln, die mit den entsprechenden Formeln in der Ebene (vgl. Abschnitt 2.4.) übereinstimmen, wenn man in den Formeln für die Ebene das Bereichsintegralsymbol durch das Raumintegralsymbol ersetzt. Für den Schwerpunkt gilt der folgende

**Satz 3.3:**  *$B$  sei ein räumlicher Bereich mit der (ortsabhängigen) stetigen Dichte  $\varrho = \varrho(P) = \varrho(x, y, z)$ . Für den Schwerpunkt  $S(x_s, y_s, z_s)$  gilt dann*

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m} \iiint_B x \varrho db, \\ y_s &= \frac{1}{m} \iiint_B y \varrho db, \\ z_s &= \frac{1}{m} \iiint_B z \varrho db. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Gesamtmasse  $m$  von  $B$  wird dabei nach der Formel

$$m = \iiint_B \varrho db$$

berechnet.

Bei der Herleitung dieser drei Formeln lässt man sich vom gleichen Gedankengang leiten, wie bei der Herleitung der entsprechenden Formeln für den Schwerpunkt eines ebenen Bereichs. Bei der Skizzierung des Beweises für Satz 3.3 können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Formel für  $x_s$  konzentrieren. Als bekannt setzen wir wieder die Formeln für den Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  eines Systems von Massenpunkten  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  mit den Massen  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) voraus:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_i x_i m_i.$$

Analog für  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$ .  $B$  wird in (kleine) Teilmengen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zerlegt, und jede Teilmenge  $B_i$  durch einen Massenpunkt  $P_i \in B_i$  mit der Masse  $m_i = m(B_i) = \text{Masse von } B_i$  ersetzt. Es gilt  $m_i \approx \varrho(P_i) \Delta B_i$ ; hierbei ist wieder  $\Delta B_i$  das Volumen von  $B_i$  und  $\varrho(P_i)$  die Dichte im Punkte  $P_i$ . Von diesem System von Massenpunkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$  mit den Massen  $m_1, m_2, \dots, m_n$  bestimmen wir nach den bekannten Formeln den Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , der eine Näherung für den gesuchten Schwerpunkt  $(x_s, y_s, z_s)$  des Bereiches  $B$  darstellt. Es gilt also:  $\bar{x} \approx x_s, \bar{y} \approx y_s, \bar{z} \approx z_s$ . Den genauen Wert von  $x_s, y_s, z_s$  erhält man durch den bekannten Grenzprozeß  $\emptyset B_i \rightarrow 0$ .

Diese Überlegungen ergeben formelmäßig:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{m} \sum_i x(P_i) \cdot m_i \approx \frac{1}{m} \sum_i x(P_i) \varrho(P_i) \Delta B_i, \\ x_S &= \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \bar{x} = \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \frac{1}{m} \sum_i x(P_i) \varrho(P_i) \Delta B_i \\ &= \frac{1}{m} \lim_{\varnothing B_i \rightarrow 0} \sum_i [x\varrho](P_i) \Delta B_i = \frac{1}{m} \iiint_B x\varrho \, db.\end{aligned}$$

(Zu der letzten Umformung vergleiche man Formel (3.1).)

*Hinweis:* Die in Satz 3.3 angegebene Formel für  $x_S$  wird wegen der vorhin beschriebenen physikalischen Beziehung  $\varrho \, db = dm$  auch in der Form

$$x_S = \frac{1}{m} \iiint_B x \, dm$$

bzw. – bei Benutzung des Symbols mit einem Integralzeichen –

$$x_S = \frac{1}{m} \int x \, dm$$

geschrieben. Die drei Gleichungen  $x_S = \frac{1}{m} \int x \, dm$ ,  $y_S = \frac{1}{m} \int y \, dm$ ,  $z_S = \frac{1}{m} \int z \, dm$  können schließlich noch in einer Vektorgleichung zusammengefaßt werden:

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{x}_S = \frac{1}{m} \int \mathbf{x} \, dm = \frac{1}{m} \int \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \, dm.$$

Den Schwerpunkt eines homogenen Bereiches  $B$  ( $\varrho = \text{const}$ ) bezeichnet man als *geometrischen Schwerpunkt*. Ist  $\varrho = \varrho_0 = \text{const}$ , so kann man in den Formeln des Satzes 3.3 den Faktor  $\varrho_0$  vor das Integral setzen und erhält wegen  $\frac{m}{V} = \varrho_0$  den

**Satz 3.4:** Für den geometrischen Schwerpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  des räumlichen Bereiches  $B$  gilt S.3.4

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{V} \iiint_B x \, db, \\ y_0 &= \frac{1}{V} \iiint_B y \, db, \\ z_0 &= \frac{1}{V} \iiint_B z \, db.\end{aligned}\tag{3.10}$$

$V$  wird nach der Formel  $V = \iiint_B db$  berechnet (vgl. (3.3)).

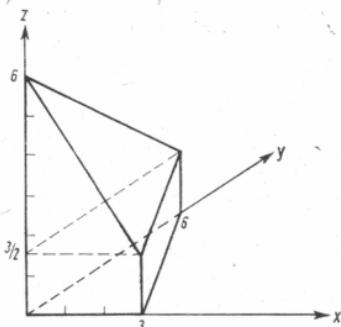


Bild 3.4

**Beispiel 3.5:** Von dem durch die Koordinatenebenen  $x = 0, y = 0, z = 0$  ( $y, z$ -Ebene,  $x, z$ -Ebene,  $x, y$ -Ebene) sowie den Ebenen  $2x + y = 6$  und  $6x + 3y + 4z = 24$  begrenzten räumlichen Bereich  $B$  (s. Bild 3.4) bestimme man den geometrischen Schwerpunkt.

Wir berechnen zunächst das Volumen  $V$  von  $B$  nach der Formel  $V = \iiint_B db$ . Da  $B$  ein räumlicher Normalbereich vom Typ  $B_1$  ist (vgl. Lösung zu Aufgabe 3.2), kann man das Raumintegral mit Hilfe eines dreifachen Integrals berechnen (vgl. Formel (3.5)). Wegen

$$B: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 6 - 2x \\ 0 \leq z \leq 6 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y \end{cases}$$

gilt:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B db = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{6-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dz dy dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{6-2x} (6 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y) dy dx = \int_0^3 [6y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{8}y^2]_{y=0}^{y=6-2x} dx \\ &= \int_0^3 \left( \frac{45}{2} - 12x + \frac{3}{2}x^2 \right) dx = 27. \end{aligned}$$

Von den Koordinaten des geometrischen Schwerpunkts berechnen wir nur die  $x$ -Koordinate  $x_0$ . (Bei  $y_0$  und  $z_0$  ergeben sich keine neuen Gesichtspunkte.) Nach Satz 3.4 gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{V} \iiint_B x db = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{6-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} x dz dy dx \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^{6-2x} x \left( 6 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy dx \\ &= \frac{1}{27} \int_0^3 \left( \frac{45}{2}x - 12x^2 + \frac{3}{2}x^3 \right) dx = \frac{1}{27} \cdot \frac{9}{8} \cdot 21 = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

*Aufgabe 3.6:* B sei ein räumlicher Bereich, der nach unten durch die x,y-Ebene, nach oben durch das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2 + 2$  und seitlich durch die auf der x,y-Ebene senkrecht stehenden Ebenen  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 1$ ,  $y = 4$  begrenzt wird. (In Bild 3.5 ist die Projektion von B auf die x,y-Ebene eingezeichnet.) Man berechne die x-Koordinate des geometrischen Schwerpunkts von B.

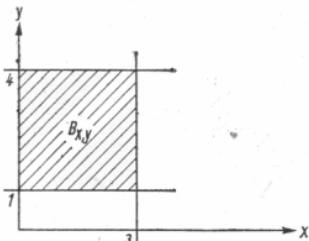


Bild 3.5

Ist B ein räumlicher Bereich mit dem Schwerpunkt  $S(x_s, y_s, z_s)$  und der Gesamtmasse m, so versteht man unter dem *statischen Moment von B bezüglich der x,y-Ebene* das Produkt  $M_{xy} := m \cdot z_s$  (Gesamtmasse von B mal Abstand des Schwerpunktes von der x,y-Ebene). Analog definiert man die statischen Momente von B bezüglich der beiden anderen Koordinatenebenen. Nach Satz 3.3 kann man die statischen Momente von B wieder durch Raumintegrale darstellen.

Satz 3.5:

S.3.5

$$M_{xy} = m \cdot z_s = \iiint_B z \varrho \, db \quad (3.11)$$

ist das **statische Moment** von dem räumlichen Bereich B (mit der Dichte  $\varrho = \varrho(P)$ ) bezüglich der x,y-Ebene.

Ebenfalls durch Raumintegrale kann man den Begriff des Trägheitsmomentes beschreiben. Unter dem *Trägheitsmoment eines Massenpunktes*  $P(x, y, z)$  mit der Masse m bezüglich einer Ebene  $E_0$  bzw. einer Geraden  $g_0$  bzw. eines Punktes  $P_0$  versteht man das Produkt  $m \cdot r^2 = \text{Masse} \cdot \text{Quadrat des Abstandes } r \text{ des Punktes } P \text{ von } E_0 \text{ bzw. } g_0 \text{ bzw. } P_0$ . Das Trägheitsmoment  $J_{E_0}$  bzw.  $J_{g_0}$  bzw.  $J_{P_0}$  bezüglich einer Ebene  $E_0$  bzw. einer Geraden (Achse)  $g_0$  bzw. eines Punktes (Pols)  $P_0$  bezeichnet man als *planares* bzw. *axiales* bzw. *polares Trägheitsmoment*.

Hat man ein System von Massenpunkten  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  mit den Massen  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), so summiert man über die Trägheitsmomente der einzelnen Massenpunkte und erhält das *Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten*:

$$J = \sum m_i r_i^2. \quad (3.12)$$

Hierbei ist  $r_i$  der Abstand des Punktes  $P_i$  von  $E_0$  bzw.  $g_0$  bzw.  $P_0$ , je nachdem, ob es sich um ein planares, axiales oder polares Trägheitsmoment handelt.

Auf dem nun schon hinreichend bekannten Weg (Zerlegung des Bereiches B in kleine Teilmengen  $B_1, \dots, B_n$  usw.; vgl. die Ausführungen zum Satz 3.3) gelangt man von der Formel (3.12) zu einer Formel für das *Trägheitsmoment eines räumlichen Bereichs (eines Körpers)* B.

Es gilt der

- S.3.6 Satz 3.6:** Das Trägheitsmoment  $J (= J_{E_0} \text{ bzw. } J_{g_0} \text{ bzw. } J_{P_0})$  eines räumlichen Bereiches  $B$  mit der (ortsabhängigen) Dichte  $\varrho = \varrho(P) = \varrho(x, y, z)$  berechnet man nach der Formel

$$J = \iiint_B r^2 \varrho \, db. \quad (3.13)$$

Hierbei ist  $r$  der Abstand des (variablen) Punktes  $P(x, y, z)$  von  $E_0$  bzw.  $P_0$ , je nachdem, ob es sich um das planare, axiale oder polare Trägheitsmoment  $J = J_{E_0}$  bzw.  $J = J_{g_0}$  bzw.  $J = J_{P_0}$  handelt.

Bei der Berechnung des Abstandes  $r$  (Abstand Punkt-Ebene, Abstand Punkt-Gerade, Abstand Punkt-Punkt) geht es um einfache geometrische Grundaufgaben (vgl. Band 13; 1.4.5. und 1.4.6.) In einigen wichtigen Spezialfällen kann man  $r$  bzw.  $r^2$  sofort angeben:

$$\begin{aligned} E_0 = x, y \text{-Ebene} &\Rightarrow r^2 = z^2, \\ g_0 = x\text{-Achse} &\Rightarrow r^2 = y^2 + z^2, \\ P_0 = 0 &\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ (O = \text{Koordinatenursprung}). \end{aligned}$$

Die Formel (3.13) wird auch in der Form

$$J = \iiint r^2 \, dm \quad \text{bzw.} \quad J = \int r^2 \, dm$$

angegeben.

**Beispiel 3.6:** Von dem in Bild 3.6 dargestellten räumlichen Bereich  $B$  (Quader) mit  $\varrho \equiv 1$  berechne man das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse.

Ist  $g_0$  die  $z$ -Achse, so gilt für den Abstand  $r$  des variablen Punktes  $P(x, y, z)$  von der  $z$ -Achse  $r^2 = x^2 + y^2$ . Für das gesuchte Trägheitsmoment  $J_z$  gilt daher nach Formel (3.13)

$$J_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \, db.$$

Da  $B$  ein räumlicher Normalbereich ist, kann das Raumintegral sofort durch ein dreifaches Integral ersetzt werden (vgl. Satz 3.1):

$$J_z = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^4 (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx = 104 \text{ [g} \cdot \text{cm}^2\text{].}$$

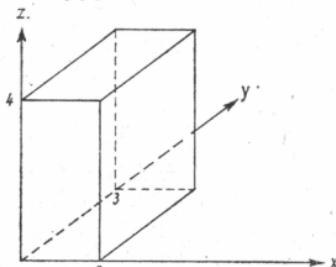


Bild 3.6

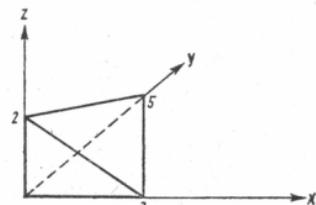


Bild 3.7

*Aufgabe 3.7:*  $B$  sei der in Bild 3.7 dargestellte räumliche Bereich (*Vierflach*) mit der Dichte  $\varrho = x + 1$ . \*  
Man berechne das Trägheitsmoment von  $B$  bezüglich der  $y$ -Achse.

Bei der Berechnung des Trägheitsmoments ist ein Satz von Bedeutung, mit dessen Hilfe man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich irgendeiner Achse ermitteln kann, wenn man die Trägheitsmomente dieses Körpers bezüglich der durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Achsen kennt. Es handelt sich um den

**Satz 3.7 (Steiner):**  $B$  sei ein Körper mit der Dichte  $\varrho = \varrho(P)$  und der Gesamtmasse  $m$ . S.3.7  
Ist  $g$  eine beliebige Achse,  $g_S$  eine zu  $g$  parallel verlaufende Schwerpunktachse ( $g \parallel g_S$ ,  $S \in g_S$ ,  $S$  Schwerpunkt von  $B$ ),  $a$  der Abstand dieser beiden Achsen, so gilt für das Trägheitsmoment  $J$  bzw.  $J_S$  des Körpers bezüglich  $g$  bzw.  $g_S$  die Gleichung

$$J = J_S + ma^2.$$

*Beweis:* Wir führen ein rechtwinklig-kartesisches Koordinatensystem ein, dessen  $z$ -Achse mit der Achse  $g$  zusammenfällt und dessen  $x,y$ -Ebene die Achse  $g_S$  enthält. Wegen  $g \parallel g_S$  ist das möglich! Legt man nun durch den beliebig vorgegebenen Punkt  $P(x, y, z)$  eine auf  $g$  senkrecht stehende Ebene  $E_P$  (wegen „ $g \equiv z$ -Achse“ muß  $E_P$  parallel zur  $x,y$ -Ebene verlaufen!), so ergibt sich bezüglich der drei Größen  $r_1$  = Abstand ( $P, g$ ),  $r_2$  = Abstand ( $P, g_S$ ),  $a$  = Abstand ( $g, g_S$ ) der in Bild 3.8 darge-

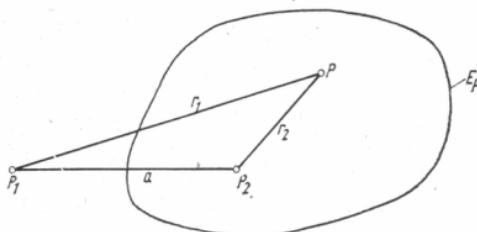


Bild 3.8

stellte Zusammenhang; dabei ist  $P_1$  bzw.  $P_2$  der Schnittpunkt der Ebene  $E_P$  mit  $g$  bzw.  $g_S$ . Für die Vektoren  $\mathbf{r}_1 = \vec{P_1P}$ ,  $\mathbf{a} = \vec{P_1P_2}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \vec{P_2P}$  gelten die Beziehungen:

- I)  $|\mathbf{r}_1| = r_1$ ,  $|\mathbf{a}| = a$ ,  $|\mathbf{r}_2| = r_2$ ;
- II)  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{r}_2$ ;
- III)  $(x, y, 0)$ : Koordinaten des Vektors  $\mathbf{r}_1$ ,
- $(a, 0, 0)$ : Koordinaten des Vektors  $\mathbf{a}$ ,
- $(x - a, y, 0)$ : Koordinaten des Vektors  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}$  (bezüglich des eingeführten Koordinatensystems).

Für die Trägheitsmomente  $J$  bzw.  $J_S$  gilt nach Satz 3.6:

$$J = \iiint_B r_1^2 \varrho \, db, \quad J_S = \iiint_B r_2^2 \varrho \, db.$$

Es ist nun zu zeigen:  $J = J_S + ma^2$ :

$$\begin{aligned}
 J_S &= \iiint_B r_2^2 \varrho \, db = \iiint_B r_2^2 \varrho \, db = \iiint_B [(x - a)^2 + y^2] \varrho \, db \\
 &= \iiint_B (x^2 + y^2) \varrho \, db - \iiint_B 2ax \varrho \, db + \iiint_B a^2 \varrho \, db \\
 &= \iiint_B r_1^2 \varrho \, db - 2a \iiint_B x \varrho \, db + a^2 \iiint_B \varrho \, db \\
 &= J - 2a \cdot x_S m + a^2 m. \quad (\text{Vgl. Satz 3.3})
 \end{aligned}$$

Da der Schwerpunkt  $S$  auf  $g_S$  liegt, muß für die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts ( $x_S$ ) bezüglich des eingeführten Koordinatensystems die Gleichung  $x_S = a$  gelten. Wegen  $J_S = J - 2a^2 m + a^2 m = J - a^2 m$  ist damit der Satz von Steiner bewiesen.

*Hinweis:* Am Schluß des Beweises wurden die Faktoren  $2a$  und  $a^2$  vor das jeweilige Raumintegral gesetzt. Das ist möglich, weil diese Faktoren konstant sind. Den Faktor  $\varrho$  dagegen darf man i.allg. nicht vor das Raumintegral setzen; dies wäre lediglich im Falle eines homogenen Bereichs erlaubt ( $\varrho = \text{const}$ ).

An dieser Stelle wollen wir zunächst einmal die Reihe der Anwendungen des Raumintegrals abbrechen. Im Abschnitt 4. lernen wir aber noch weitere Anwendungsbeispiele kennen. Die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale, die im Abschnitt 4.2. behandelt wird, gestattet eine wesentlich bessere Beherrschung der mehrfachen Integrale, als das nach unseren bisherigen Kenntnissen möglich ist.

## 4. Transformation mehrdimensionaler Integrale

### 4.1. Allgemeine krummlinige Koordinaten

In Band 4 (Abschn. 2.6.) wurden krummlinige Koordinaten in der Ebene und im Raum eingeführt. Der wesentliche Grund, von den rechtwinklig-kartesischen  $x,y$ -Koordinaten in der Ebene [bzw.  $x,y,z$ -Koordinaten im Raum] zu krummlinigen  $u,v$ -Koordinaten [bzw.  $u,v,w$ -Koordinaten], überzugehen, liegt in der Tatsache begründet, daß eine ganze Reihe von ebenen [bzw. räumlichen] Bereichen durch geeignete krummlinige Koordinaten wesentlich einfacher beschrieben werden können, als durch die im allgemeinen verwendeten rechtwinklig-kartesischen Koordinaten. Das folgende einfache Beispiel wird zeigen, daß die eben getroffene Feststellung vor allem auch bei Bereichs- und Raumintegrale unbedingt beachtet werden muß! Ungünstige Wahl der Koordinatenart führt fast immer zu komplizierteren Rechnungen bei den zugehörigen zweifachen bzw. dreifachen Integralen – in vielen Fällen kann es sogar zu einem mit den üblichen Mitteln nicht mehr lösbarer Problem führen.

*Beispiel 4.1:* Das Volumen  $V$  einer Kugel vom Radius  $a$  soll mit Hilfe eines Raumintegrals berechnet werden.

Wir führen ein rechtwinklig-kartesisches  $x,y,z$ -Koordinatensystem ein, dessen Koordinatenanfangspunkt  $O$  mit dem Mittelpunkt  $M$  der Kugel zusammenfallen soll (s. Bild 4.1). Der durch die Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  begrenzte räumliche Bereich  $B$  ist ein Normalbereich vom Typ  $B_1$  (vgl. Lösungen zur Aufgabe 3.2;  $B$  kann in diesem Fall auch als Normalbereich vom Typ  $B_2, \dots, B_6$  angesehen werden). Es gilt

$$B: \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \\ -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

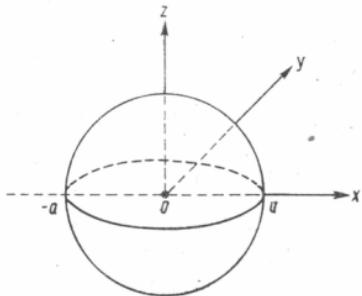


Bild 4.1

Diese Ungleichungen ergeben sich aus folgenden Umformungen: Aus  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  folgt  $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , wobei „+“ die obere und „-“ die untere Kugelhälfte liefert. Die Projektion  $B_{x,y}$  (von  $B$  auf die  $x,y$ -Ebene) ist die durch den Kreis  $x^2 + y^2 = a^2$  begrenzte Kreisscheibe mit den Begrenzungskurven  $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ .

Nach den Formeln (3.3) und (3.5) erhalten wir dann

$$V = \iiint_B db = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz dy dx.$$

Dieses dreifache Integral ist natürlich noch lösbar (für  $V$  erhält man den bekannten Wert  $\frac{4}{3}\pi a^3$ ), aber äußerlich sieht es doch schon relativ kompliziert aus. Daß bei diesem einfachen Bereich (Kugel) das zugehörige dreifache Integral die angegebenen, von  $x$  und  $y$  abhängigen Grenzen hat, liegt an der für diesen Bereich ungünstigen Koordinatenwahl. Wenn man dagegen Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  einführt, wird der Bereich  $B$  durch den folgenden Bereich  $B'$  des  $r, \vartheta, \varphi$ -Raumes charakterisiert:

$$B': \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Wir wissen aber im Augenblick noch nicht, wie sich das Raumintegral beim Übergang von den  $x, y, z$ -Koordinaten zu den  $r, \vartheta, \varphi$ -Koordinaten verhält. Auf diese Frage werden wir im Abschnitt 4.2. (*Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale*) eine Antwort geben. An dieser Stelle möchten wir aber schon darauf hinweisen, daß die äußerlich naheliegende Umformung

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a dr d\vartheta d\varphi$$

nicht richtig ist. Dann würde man nämlich für  $V$  den Werte  $2\pi^2 a$  erhalten.

Als Vorbereitung für den Abschnitt 4.2. sollen in diesem Abschnitt alle wesentlichen Eigenschaften über krummlinige Koordinaten zusammengestellt und erläutert werden. Es handelt sich zum großen Teil um eine Wiederholung der bereits im Band 4 behandelten Thematik.

Bei *krummlinigen Koordinaten in der  $x, y$ -Ebene* (im  $R^2$ ) wird durch eine eindeutige Abbildung (Transformation)

$$T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (4.1)$$

aus der  $u, v$ -Ebene auf die  $x, y$ -Ebene gewährleistet, daß es zu jedem Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  (mindestens) ein Paar  $(u_0, v_0)$  gibt mit

$$x_0 = x(u_0, v_0),$$

$$y_0 = y(u_0, v_0).$$

Diese Zahlen  $u_0, v_0$  heißen *krummlinige Koordinaten des Punktes  $P_0(x_0, y_0)$*  bezüglich des durch Formel (4.1) festgelegten krummlinigen Koordinatensystems.

Die am meisten gebrauchten krummlinigen Koordinaten in der  $x, y$ -Ebene sind die *Polarkoordinaten  $r, \varphi$*  (s. Bild 4.2). Formel (4.1) hat in diesem Spezialfall die Gestalt

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \quad (= x(r, \varphi)), \\ y &= r \cdot \sin \varphi \quad (= y(r, \varphi)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

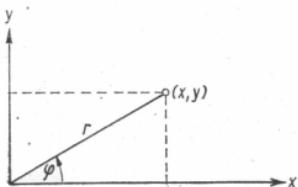


Bild 4.2

Zu jedem  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  gibt es im Bereich  $0 < r < \infty, -\pi < \varphi \leq \pi$  genau ein Paar  $(r_0, \varphi_0)$  mit

$$x_0 = r_0 \cdot \cos \varphi_0,$$

$$y_0 = r_0 \cdot \sin \varphi_0.$$

*Hinweis:* In Band 4 wurde für die in Formel (4.1) auftretenden Gleichungen meistens die Schreibweise  $x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$  benutzt.

Bei *krummlinigen Koordinaten im x,y,z-Raum* (im  $R^3$ ) hat man an Stelle der Formel (4.1) die Beziehung

$$T: \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w). \end{cases} \quad (4.3)$$

Es wird wieder vorausgesetzt, daß durch (4.3) eine eindeutige Abbildung aus dem  $u, v, w$ -Raum auf den  $x, y, z$ -Raum definiert ist.

Die bekanntesten krummlinigen Koordinaten im  $x, y, z$ -Raum sind die Zylinderkoordinaten und die Kugelkoordinaten. Bei *Zylinderkoordinaten*  $r, \varphi, z^*$  nimmt die Formel (4.3) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \quad (= x(r, \varphi, z^*)), \\ y &= r \cdot \sin \varphi \quad (= y(r, \varphi, z^*)), \\ z &= z^* \quad (= z(r, \varphi, z^*)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Zu jedem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  mit  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  gibt es im Bereich  $0 < r < \infty, -\pi < \varphi \leq \pi, -\infty < z^* < \infty$  genau ein Tripel  $(r_0, \varphi_0, z_0^*)$  mit  $x_0 = r_0 \cdot \cos \varphi_0, y_0 = r_0 \cdot \sin \varphi_0, z_0 = z_0^*$  (s. Bild 4.3).

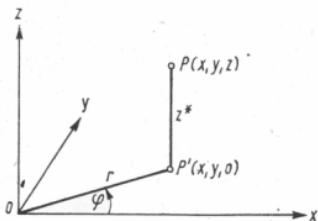


Bild 4.3

*Hinweis:* Da die dritte kartesische Koordinate  $z$  mit der dritten Zylinderkoordinate  $z^*$  übereinstimmt, werden in der Regel die Zylinderkoordinaten mit  $r, \varphi, z$  bezeichnet.

In der Einführung empfiehlt es sich aber, diese beiden Koordinaten in der Bezeichnung zu unterscheiden; man vermeidet dann die etwas unglückliche Schreibweise  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ .

Für Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  erhält die Formel (4.3) die spezielle Gestalt

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \vartheta \quad (= x(r, \vartheta, \varphi)), \\ y &= r \sin \varphi \sin \vartheta \quad (= y(r, \vartheta, \varphi)), \\ z &= r \cos \vartheta \quad (= z(r, \vartheta, \varphi)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die durch die Formel (4.5) gegebene Abbildung bildet den Bereich  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$  des  $r, \vartheta, \varphi$ -Raumes auf den gesamten  $x, y, z$ -Raum ab (s. Bild 4.4).

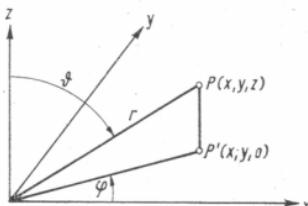


Bild 4.4

Den im  $R^2$  und  $R^3$  eingeführten Begriff der krummlinigen Koordinaten kann man sofort auf den  $R^n$  übertragen. *Krummlinige Koordinaten im  $x_1, \dots, x_n$ -Raum* (im  $R^n$ ) werden durch eine eindeutige Abbildung

$$T: \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, \dots, u_n) \end{cases} \tag{4.6}$$

aus dem  $u_1, \dots, u_n$ -Raum auf den  $x_1, \dots, x_n$ -Raum festgelegt.

Ein wesentliches Hilfsmittel für die Beherrschung des Zusammenhangs zwischen den (kartesischen)  $x_1, \dots, x_n$ -Koordinaten und den krummlinigen  $u_1, \dots, u_n$ -Koordinaten ist die *Funktionaldeterminante* der Abbildung  $T$ . Diese Funktionaldeterminante wird mit dem Symbol  $\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)}$  bezeichnet und durch die folgende Gleichung definiert

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Für die Existenz der Funktionaldeterminante (in einem gewissen Bereich  $B'$  des  $u_1, \dots, u_n$ -Raumes) ist natürlich erforderlich, daß sämtliche partiellen Ableitungen (1. Ordnung) der Funktionen  $x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n)$  von  $T$  (in  $B'$ ) existieren.

Bei krummlinigen Koordinaten im  $R^2$  bzw.  $R^3$  erhält man als Spezialfall der Formel (4.7) die Formeln

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

und

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Anwendung der Formel (4.8) bzw. (4.9) auf Polarkoordinaten bzw. Zylinder- und Kugelkoordinaten liefert die Beziehungen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = r, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = r, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\vartheta & x_\varphi \\ y_r & y_\vartheta & y_\varphi \\ z_r & z_\vartheta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta \quad (4.12)$$

(vgl. Band 4, Abschnitt 3.8.3.).

*Beispiel 4.2:* Der in Bild 4.5 dargestellte räumliche Bereich  $B$  (Kreiskegel mit dem Radius  $R = 2$  und der Höhe  $H = 3$ ) soll

- durch kartesische Koordinaten  $x, y, z$  und
- durch Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  beschrieben werden.

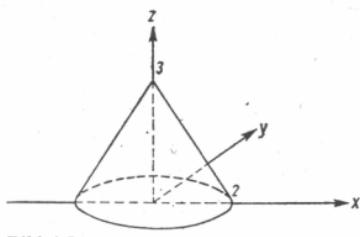


Bild 4.5

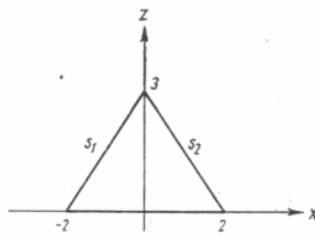


Bild 4.6

Zu a): Schneidet man  $B$  längs der  $x, z$ -Ebene auf, so erhält man ein Dreieck (s. Bild 4.6). Die Strecken  $s_1$  und  $s_2$  werden beide durch die Gleichung  $z = -\frac{3}{2}|x| + 3 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2} + 3$  beschrieben.

$z = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + 3$  ist auf alle Fälle eine Rotationsfläche, denn alle Punkte  $(x, y)$  eines Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$  haben den gleichen  $z$ -Wert  $z = -\frac{3}{2}r + 3$ . Der Schnitt dieser Fläche mit der  $x, z$ -Ebene ( $y = 0$ ) liefert  $z = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2} + 3$ . (Über Rotationsflächen, Kegelflächen und Zylinderflächen kann man sich auch in [1] informieren.) Der Mantel des Kreiskegels entsteht durch Rotation von  $s_2$  um die  $z$ -Achse und wird durch die Gleichung  $z = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + 3$  ( $x^2 + y^2 \leq 4$ ) beschrieben.  $B$  ist ein räumlicher Normalbereich vom Typ  $B_1$  (vgl. Lösungen zur Aufgabe 3.2), der nach oben durch die Kegelmantelfläche und nach unten durch die in der  $x, y$ -Ebene ( $z = 0$ ) liegende Kreisscheibe  $x^2 + y^2 \leq 4$  begrenzt wird. Es gilt daher:

$$B: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ 0 \leq z \leq -\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2} + 3. \end{cases}$$

Zu b): Wegen  $x^2 + y^2 = r^2$  (vgl. Formel (4.4)) und  $z = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 + y^2} + 3$  gilt für alle Punkte  $(r, \varphi, z)$  der Mantelfläche des Kegels:  $z = -\frac{3}{2}r + 3$ . (Auf Grund der Rotationssymmetrie von  $B$  ist es auch geometrisch unmittelbar einleuchtend, daß  $z$  nur von  $r$  und nicht von  $\varphi$  abhängt.) Bezuglich Zylinderkoordinaten wird daher der Bereich  $B$  durch folgende Ungleichungen beschrieben (s. Bild 4.5):

$$B': \begin{cases} -\pi < \varphi \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq -\frac{3}{2}r + 3. \end{cases}$$

Ein Vergleich von a) und b) zeigt, daß der hier vorgegebene räumliche Bereich (Kreiskegel) durch Zylinderkoordinaten wesentlich einfacher zu beschreiben ist, als durch kartesische Koordinaten. Der durch die obigen Ungleichungen für  $r, \varphi, z$  beschriebene Bereich  $B'$  ist ein *Normalbereich im  $r, \varphi, z$ -Raum* vom Typ

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

$$r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi),$$

$$z_1(r, \varphi) \leq z \leq z_2(r, \varphi).$$

Auf diese allgemein gültigen Prinzipien bei der Beschreibung von Normalbereichen wurde bereits in der Lösung zur Aufgabe 3.2 hingewiesen. (Wie sehen die 6 Typen von Normalbereichen im  $r, \varphi, z$ -Raum aus?)

*Aufgabe 4.1:* Man beschreibe den in Beispiel 4.2 angegebenen räumlichen Bereich durch einen \* Normalbereich im  $r, \varphi, z$ -Raum vom Typ

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\leq \varphi \leq \varphi_2, \\ z_1(\varphi) &\leq z \leq z_2(\varphi), \\ r_1(\varphi, z) &\leq r \leq r_2(\varphi, z).\end{aligned}$$

*Aufgabe 4.2:* Von dem in Bild 4.7 dargestellten räumlichen Bereich  $B$  (Halbkugel mit dem Radius  $R$ ) \* soll eine Darstellung als Normalbereich angegeben werden, und zwar

- bezüglich kartesischer Koordinaten und
- bezüglich Kugelkoordinaten.

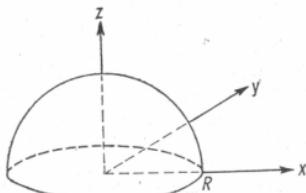


Bild 4.7

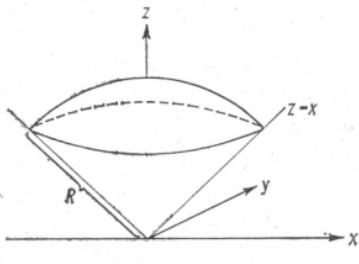


Bild 4.8

*Aufgabe 4.3:* Läßt man die in der  $x, z$ -Ebene liegende Gerade  $z = x$  ( $x \geq 0$ ) um die  $z$ -Achse rotieren \* so schneidet sie aus der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  einen Kugelausschnitt aus (s. Bild 4.8). Dieser Kugelausschnitt ( $B$ ) soll

- durch Kugelkoordinaten,
- durch Zylinderkoordinaten beschrieben werden.

*Hinweis:* Wir empfehlen, die Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 mit großer Sorgfalt zu lösen. Die Bestimmung der Grenzen eines Bereiches bezüglich krummliniger Koordinaten ist die entscheidende Grundlage für die Berechnung von Bereichs- und Raumintegrale mit Hilfe krummliniger Koordinaten. Im Abschnitt 4.3. (Anwendungen der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale) werden keine wesentlichen Schwierigkeiten auftreten, wenn die mit Beispiel 4.2 und den Aufgaben 4.1, 4.2, 4.3 zusammenhängende Problematik voll verstanden worden ist.

## 4.2. Die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale

Im Abschnitt 4.1. (Beispiel 4.1) wurde bereits darauf hingewiesen, daß es in vielen Fällen nicht günstig ist, ein vorgegebenes Bereichs- bzw. Raumintegral (zweidimensionales bzw. dreidimensionales Integral)  $\iint_B f(P) \, db$  bzw.  $\iiint_B f(P) \, db$  mittels kartesischer Koordinaten  $x, y$  bzw.  $x, y, z$  zu berechnen.

Bei einem Kreis bzw. Kreisausschnitt ist es vorteilhafter, an Stelle von kartesischen  $x, y$ -Koordinaten mit Polarkoordinaten  $r, \varphi$  zu rechnen. Die „natürlichen“ Koordinaten für die Beschreibung einer Kugel bzw. eines Kugelausschnittes sind die Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ . Für Kreiszylinder, Kreiskegel und daraus zusammengesetzte Bereiche sind die Zylinderkoordinaten die günstigsten Koordinaten zur Beschreibung dieser Bereiche.

Wir kommen nun zu den Überlegungen und Fragestellungen, die uns auf die Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale führen werden:

Jedes Bereichsintegral  $\iint_B f(P) db$  [bzw. Raumintegral  $\iiint_B f(P) db$ ] kann nach

Formel (2.5) [bzw. Formel (3.5)] durch Doppelintegrale [bzw. dreifache Integrale] der Form  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx$  [bzw.  $\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$ ] berechnet werden – sofern die Grenzen bei den Doppelintegralen [bzw. dreifachen Integralen] und der Integrand  $f(x, y)$  [bzw.  $f(x, y, z)$ ] nicht so kompliziert sind, daß man bei den nacheinander auszuführenden zwei [bzw. drei] einfachen Integrationen auf sehr große Schwierigkeiten stößt. Treten solche Schwierigkeiten auf, wird man versuchen, von den alten (kartesischen) Koordinaten  $x, y$  [bzw.  $x, y, z$ ] zu neuen (krummlinigen) Koordinaten  $u, v$  [bzw.  $u, v, w$ ] überzugehen, die dem Problem besser angepaßt sind. „Dem Problem besser angepaßt“ heißt in diesem Zusammenhang, daß die Grenzen des Bereiches  $B$  und die Funktion  $f(P)$  bezüglich der neuen Koordinaten eine einfachere Gestalt haben. Wir erinnern an dieser Stelle an das besonders anschauliche Beispiel einer Kreisscheibe vom Radius  $R$ .

*Beispiel 4.3:* Legt man durch den Mittelpunkt der Kreisscheibe ein  $x, y$ -Koordinatensystem, so wird die Kreisscheibe in der  $x, y$ -Ebene wie folgt beschrieben:

$$B: \begin{cases} -R \leq x \leq R \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}. \end{cases}$$

Der Übergang von den kartesischen Koordinaten  $x, y$  zu Polarkoordinaten  $r, \varphi$  bewirkt, daß dieselbe Kreisscheibe in der  $r, \varphi$ -Ebene wesentlich einfacher beschrieben werden kann:

$$B': \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ -\pi < \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

Anders ausgedrückt heißt das (s. Bild 4.9): Durch die Abbildung

$$T: \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

wird der Bereich  $B'$  der  $r, \varphi$ -Ebene (abgesehen von den Punkten mit  $r = 0$ ) umkehrbar eindeutig auf den Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene abgebildet. (An Stelle von  $-\pi < \varphi \leq \pi$  könnte in  $B'$  auch  $0 \leq \varphi < 2\pi$  oder jedes andere Intervall der Länge  $2\pi$  gewählt werden.)

Die folgenden Sätze geben nun darüber Auskunft, wie ein Bereichs- bzw. Raumintegral bezüglich krummliniger Koordinaten beschrieben wird.

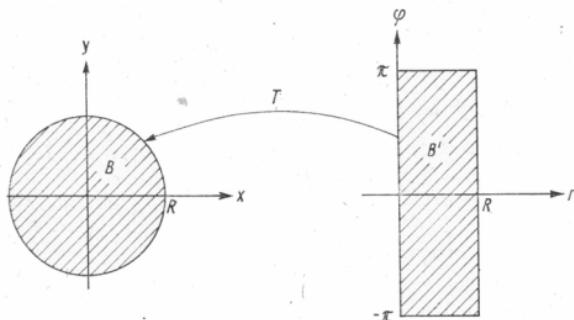


Bild 4.9

**Satz 4.1:** Vorgegeben sei ein Bereichsintegral  $\iint_B f(P) \, db = \iint_B f(x, y) \, db$ .  $u, v$  seien S.4.1 krummlinige Koordinaten der  $x, y$ -Ebene, die mit den  $x, y$ -Koordinaten durch die Gleichungen  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  verknüpft sein mögen. Ist nun  $B'$  ein Bereich der  $u, v$ -Ebene, der durch die Abbildung (Transformation)

$$T: x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

mit in  $B'$  stetigen partiellen Ableitungen und positiver Funktionaldeterminante umkehrbar eindeutig auf den vorgegebenen Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene abgebildet wird (s. Bild 4.10), so kann das Bereichsintegral mit Hilfe der neuen  $u, v$ -Koordinaten nach der folgenden Formel ermittelt werden

$$\iint_B f(x, y) \, db = \iint_{B'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, db'. \quad (4.13)$$

Diese Formel nennt man **Transformationsformel für Bereichsintegrale**.

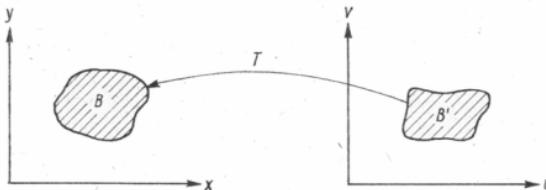


Bild 4.10

Die Formel (4.13) ist eine Verallgemeinerung der bekannten Transformationsformel für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{a'}^{b'} f(x(u)) \frac{dx}{du} \, du$$

(vgl. „Substitutionsmethode bei bestimmten Integralen“ in Band 2, Satz 10.11). Hierbei ist  $a$  bzw.  $b$  das Bild von  $a'$  bzw.  $b'$  bei der Transformation  $x = x(u)$ ; das

Intervall  $[a', b']$  wird durch die Transformation  $x = x(u)$  auf das Intervall  $[a, b]$  abgebildet.

Zum Satz 4.1 sind noch einige Hinweise und Ergänzungen erforderlich:

a) Die Voraussetzung „ $T$  ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung“ braucht für die Randpunkte von  $B'$  nicht unbedingt erfüllt zu sein. Im Beispiel 4.3 werden sämtliche Punkte  $(r, \varphi)$  von  $B'$  mit  $r = 0$  auf den Punkt  $(x, y) = (0, 0)$  von  $B$  abgebildet.

b) Es genügt vorauszusetzen, daß die Funktionaldeterminante  $D$  im Inneren des angegebenen Bereichs nicht verschwindet. Im Falle  $D < 0$  kann wegen  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, u)}$  durch Vertauschung von  $u$  und  $v$  das Vorzeichen geändert werden. Im Beispiel 4.3 ist die Funktionaldeterminante  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$  für alle auf dem linken Rand von  $B'$  liegenden Punkte ( $r = 0$ ) gleich null.

c) Der in Formel (4.13) auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist das Bereichsintegral der Funktion  $\Phi(P) = \Phi(u, v) := f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  über dem in der  $u, v$ -Ebene liegenden Bereich  $B'$ :  $\iint_{B'} \Phi(u, v) db'$  (vgl. Definition 2.5 im Abschnitt 2.1.).

Formel (4.13) kann in eine für die praktische Berechnung sofort brauchbare Form gebracht werden, wenn der Bereich  $B'$  ein Normalbereich in der  $u, v$ -Ebene ist. Ist zum Beispiel  $B'$  ein Normalbereich vom Typ

$$\begin{cases} u_1 \leqq u \leqq u_2 \\ v_1(u) \leqq v \leqq v_2(u) \end{cases}$$

so geht die Formel (4.13) in die folgende Formel über:

$$\iint_B f(x, y) db = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dv du \quad (4.14)$$

(vgl. Satz 2.4 im Abschnitt 2.3.).

Die Transformationsformel (4.13) bzw. (4.14) nimmt für den Fall, daß es sich bei den krummlinigen Koordinaten  $u, v$  um die Polarkoordinaten  $r, \varphi$  handelt, die folgende spezielle Gestalt an

$$\iint_B f(x, y) db = \iint_{B'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r db' \quad (4.15)$$

bzw.

$$\iint_B f(x, y) db = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r d\varphi dr. \quad (4.16)$$

Formel (4.16) gilt, wenn  $B'$  ein Normalbereich in der  $r, \varphi$ -Ebene vom Typ

$$\begin{cases} r_1 \leq r \leq r_2 \\ \varphi_1(r) \leq \varphi \leq \varphi_2(r) \end{cases}$$

ist.

Als Beispiel wählen wir ein Flächenintegral, welches in einem anderen Zusammenhang bereits einmal auftauchte (vgl. Beispiel 2.7 in Abschnitt 2.5.).

*Beispiel 4.4:*  $B$  sei eine Kreisscheibe vom Radius  $R$  mit dem Mittelpunkt im Ursprungspunkt der  $x, y$ -Ebene. Außerdem sei die Funktion  $f(P) = f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  vorgegeben. Das Bereichsintegral  $\iint_B f(P) db$  soll mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnet werden.

Bezüglich  $x, y$ -Koordinaten gilt (vgl. (2.5))

$$\iint_B f(P) db = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx.$$

Bezüglich Polarkoordinaten gilt (vgl. Formel (4.16) und Bild 4.9)

$$\iint_B f(P) db = \iint_B f(x, y) db = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr.$$

Das rechts stehende Doppelintegral kann ohne Schwierigkeiten berechnet werden (Substitution beim äußeren Integral:  $r^2 = t$ )

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr &= \int_0^R 2\pi e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{R^2} \frac{1}{2} e^{-t} dt \\ &= \pi(-e^{-t}) \Big|_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

(Im Zusammenhang mit der im Beispiel 2.7 des Abschnittes 2.5. behandelten Fragestellung möchten wir darauf hinweisen, daß das hier betrachtete Bereichsintegral für  $R \rightarrow \infty$  gegen den Wert  $\pi$  konvergiert.)

*Aufgabe 4.4:* Von dem in Bild 4.11 dargestellten ebenen Bereich  $B$  (Viertelkreis) berechne man den geometrischen Schwerpunkt mit Hilfe von Polarkoordinaten.

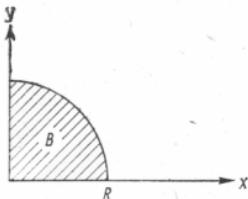


Bild 4.11

- \* Aufgabe 4.5:  $B$  sei der in Bild 4.12 dargestellte Bereich (Halbkreis vom Radius 2). Man berechne das Trägheitsmoment  $J_x$  von  $B$  bezüglich der  $x$ -Achse. Die Flächendichte  $\varrho$  sei identisch gleich 1. (Anleitung: Man gehe vom  $x,y$ -System zum  $x',y'$ -System über.)

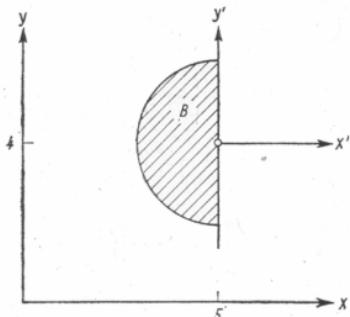


Bild 4.12

Es ist nicht beabsichtigt, einen Beweis zum Satz 4.1 zu bringen, da das mit allen Feinheiten einen erheblichen Aufwand bedeuten würde. Wir können uns aber ohne größere Schwierigkeiten durch eine grobe Näherungsrechnung die Formel (4.13) verständlich machen. Ausgangspunkt bei unseren vergleichenden Betrachtungen ist die für Bereichsintegrale gültige Näherungsformel:

$$\iint_B f(P) \, db \approx \sum_i f(P_i) \Delta B_i. \quad (*)$$

Hierbei ist  $B_1, B_2, \dots, B_n$  eine möglichst „feine“ Zerlegung von  $B$ ,  $P_i$  ein beliebig gewählter Punkt aus  $B_i$  und  $\Delta B_i$  der Flächeninhalt von  $B_i$  (vgl. Definitionen 2.4 und 2.5 im Abschnitt 2.1.).

Durch die Geraden  $u = u_i$  und  $v = v_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) wird der Bereich  $B'$  in Teilbereiche zerlegt.  $B'_i$  sei der durch die Geraden  $u = u_{i+1}, u = u_i, v = v_i, v = v_{i+1}$  begrenzte Bereich (s. Bild 4.13). Wir berücksichtigen bei den weiteren Ausführungen nur diejenigen Bereiche  $B'_i$ , die ganz in  $B'$  enthalten sind. Bei genügend feiner Zerlegung von  $B'$  liefern die „Randbereiche“  $B'_i$  nur einen geringen Beitrag zu der in (\*) auftretenden Summe, sie können bei unserer Näherungsrechnung unberücksichtigt bleiben. Die  $B'_i$  bilden eine Zerlegung von  $B'$  und wir können zunächst einmal festhalten:

$$\iint_{B'} \Phi(u, v) \, db' \approx \sum_i \Phi(u_i, v_i) \Delta u_i \Delta v_i \quad (**)$$

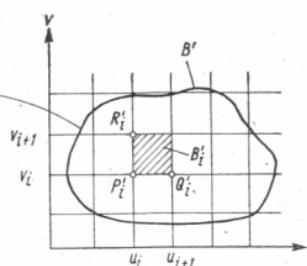
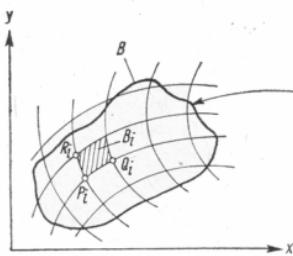


Bild 4.13

$(\Phi(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)})$ . Hierbei wurde zur Abkürzung  $u_{i+1} - u_i = \Delta u_i$  und  $v_{i+1} - v_i = \Delta v_i$  gesetzt;  $\Delta u_i \Delta v_i$  ist dann der Flächeninhalt von  $B'_i$ .

Durch die Transformation  $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$  werden die Bereiche  $B_i'$  auf Bereiche  $B_i$  von  $B$  abgebildet ( $B_i = T(B_i')$ ). Weil  $T$  umkehrbar eindeutig ist, bilden die  $B_i$  eine Zerlegung von  $B$ , von einer kleinen Randzone abgesehen. Die Punkte  $P_i'(u_i, v_i), Q_i'(u_i + \Delta u_i, v_i), R_i'(u_i, v_i + \Delta v_i)$  der  $u, v$ -Ebene werden dabei auf die Punkte  $P_i, Q_i, R_i$  der  $x, y$ -Ebene abgebildet ( $P_i = T(P_i')$ ,  $Q_i = T(Q_i')$ ,  $R_i = T(R_i')$ ). Die Punkte  $P_i, Q_i, R_i$  haben die Koordinaten:

$$P_i: x(u_i, v_i), y(u_i, v_i) = x_1, y_1,$$

$$Q_i: x(u_i + \Delta u_i, v_i), y(u_i + \Delta u_i, v_i) = x_2, y_2,$$

$$R_i: x(u_i, v_i + \Delta v_i), y(u_i, v_i + \Delta v_i) = x_3, y_3.$$

Nach Formel (\*) gilt dann

$$\iint_B f(P) \, db \approx \sum_i f(P_i) \Delta B_i = \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i)) \Delta B_i. \quad (***)$$

Dabei ist  $\Delta B_i$  der Flächeninhalt von  $B_i = T(B_i')$ .

Ein Vergleich der Formeln (\*\*) und (\*\*\*)) führt uns auf die Vermutung

$$\Delta B_i \approx \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{u=u_i, v=v_i} \Delta u_i \Delta v_i. \quad (****)$$

Wenn wir uns von der Gültigkeit dieser Formel überzeugt haben, sind wir sicher, daß die Beziehung

$$\iint_B f(x, y) \, db \approx \iint_{B'} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, db'$$

gilt. Formel (\*\*\*\*) wird wie folgt bewiesen: Für eine genügend feine Zerlegung ist der Flächeninhalt  $\Delta B_i$  der krummlinig begrenzten *Masche*  $B_i$  ungefähr gleich dem durch die Vektoren  $\overrightarrow{P_i Q_i}$  und  $\overrightarrow{P_i R_i}$  aufgespannten Parallelogramm  $B_i^*$  (s. Bild 4.14). Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie und der Funktionen mit mehreren Variablen (vgl. Band 4, Abschn. 3.8.1.) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta B_i &\approx \Delta B_i^* = \left| \begin{array}{c} x_2 - x_1, x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1, y_3 - y_1 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{c} x(u_i + \Delta u_i, v_i) - x(u_i, v_i), x(u_i, v_i + \Delta v_i) - x(u_i, v_i) \\ y(u_i + \Delta u_i, v_i) - y(u_i, v_i), y(u_i, v_i + \Delta v_i) - y(u_i, v_i) \end{array} \right| \\ &\approx \left| \begin{array}{c} x_u(u_i, v_i) \cdot \Delta u_i, x_v(u_i, v_i) \cdot \Delta v_i \\ y_u(u_i, v_i) \cdot \Delta u_i, y_v(u_i, v_i) \cdot \Delta v_i \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{c} x_u(u_i, v_i), x_v(u_i, v_i) \\ y_u(u_i, v_i), y_v(u_i, v_i) \end{array} \right| \cdot \Delta u_i \Delta v_i = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{u=u_i, v=v_i} \Delta u_i \Delta v_i. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Gültigkeit der Beziehung (\*\*\*\*) nachgewiesen und sind am Ende unserer Näherungsbetrachtungen angelangt.

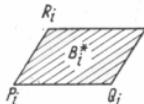


Bild 4.14

Die Ausführungen über die Transformationsformel für Bereichsintegrale wollen wir mit einigen Überlegungen abschließen, die die *geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante* betreffen.

Bezeichnet man den Flächeninhalt des kleinen „Flächenelements“  $B_i$  bzw.  $B'_i$  mit  $db$  bzw.  $db' = du \cdot dv$  ( $du \cdot dv \triangleq \Delta u_i \cdot \Delta v_i$ ), so erhalten wir nach (\*\*\*\*):

$$db \approx \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} db' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \cdot dv.$$

Den rechts stehenden Ausdruck

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \cdot dv$$

nennen man das *Flächenelement in krummlinigen Koordinaten*. Für das Flächenelement in Polarkoordinaten erhält man nach Formel (4.10)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} dr \cdot d\varphi = r dr \cdot d\varphi.$$

Die Näherungsformel  $\frac{db}{db'} \approx \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  geht in eine Gleichung über, wenn der Flächeninhalt  $db'$  gegen null konvergiert:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \lim_{db' \rightarrow 0} \frac{db}{db'}.$$

(Beweis: siehe Duschek, Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. II.) Diese Gleichung kann geometrisch wie folgt interpretiert werden: Ein „infinitesimal“ kleines Rechteck der  $u, v$ -Ebene, dessen linker unterer Eckpunkt die Koordinaten  $(u_0, v_0)$  haben möge, wird durch die Transformation

$$T: x = x(u, v), y = y(u, v)$$

auf ein krummliniges Viereck abgebildet (vgl. Bild 4.13; man setze dort für unsere jetzigen Überlegungen  $u_i, v_i$  durch  $u_0, v_0$ ). Es sei

$$\lambda = \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{u=u_0, v=v_0}.$$

Der Flächeninhalt des krummlinigen Vierecks ( $db$ ) ist dann in guter Näherung gleich dem  $\lambda$ -fachen des Flächeninhalts des Rechtecks ( $db'$ ):  $db \approx \lambda \cdot db'$ .

(Vor.: In  $db' = du \cdot dv$  sind beide Faktoren  $du$  und  $dv$  „infinitesimal“ klein.) Dieser Zusammenhang zwischen  $db'$  und  $db$  gibt zu der Sprechweise Anlaß, daß die Funktionaldeterminante der *Verzerrungsfaktor* für den Flächeninhalt von infinitesimal kleinen Bereichen sei.

Nach der ausführlichen Beschäftigung mit der Transformationsformel für Bereichsintegrale kommen wir nun zu der entsprechenden Formel für Raumintegrale. Die Übertragung des Satzes 4.1 auf den Raum ergibt den

**S.4.2 Satz 4.2:** Ist  $B'$  ein solcher Bereich des  $u, v, w$ -Raumes, der durch die Abbildung

$$T: x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

mit in  $B'$  stetigen partiellen Ableitungen und positiver Funktionaldeterminante (vgl. Formel (4.9)) umkehrbar eindeutig auf den Bereich  $B$  des  $x, y, z$ -Raumes abgebildet wird (s. Bild 4.15), so kann das Raumintegral mit Hilfe der krummlinigen  $u, v, w$ -Koordinaten nach der Formel

$$\left| \iiint_B f(x, y, z) db = \iiint_{B'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} db' \right| \quad (4.17)$$

ermittelt werden. Formel (4.17) heißt **Transformationsformel für Raumintegrale**.

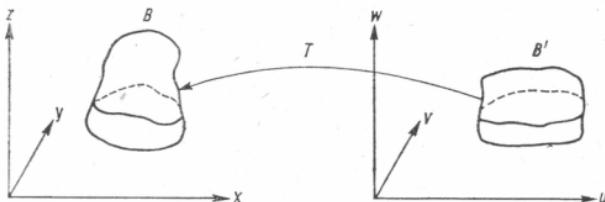


Bild 4.15

Auch bei diesem Satz sind die im Anschluß an Satz 4.1 gegebenen Hinweise zu beachten, insbesondere genügt es, daß für alle inneren Punkte von  $B'$  die Funktionaldeterminante  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  nicht verschwindet.

Das auf der rechten Seite der Formel (4.17) stehende Raumintegral kann durch ein dreifaches Integral dargestellt werden, falls  $B'$  ein räumlicher Normalbereich im  $u, v, w$ -Raum ist (vgl. Lösung zur Aufgabe 3.2). Ist z.B.  $B'$  ein Normalbereich vom Typ

$$\begin{aligned} u_1 &\leqq u \leqq u_2, \\ v_1(u) &\leqq v \leqq v_2(u), \\ w_1(u, v) &\leqq w \leqq w_2(u, v), \end{aligned}$$

so geht die Formel (4.17) in die Formel

$$\iiint_B f(x, y, z) db = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u, v)}^{w_2(u, v)} F(u, v, w) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} dw dv du \quad (4.18)$$

über (vgl. Satz 3.1). In dieser Gleichung ist  $F(u, v, w)$  eine Abkürzung für die Funktion  $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ ;  $F(u, v, w)$  ist dieselbe Funktion wie  $f(x, y, z)$  – dargestellt in den neuen Koordinaten  $u, v, w$ .

Führt man die speziellen krummlinigen Koordinaten  $r, \varphi, z$  (Zylinderkoordinaten) bzw.  $r, \vartheta, \varphi$  (Kugelkoordinaten) ein, so erhält man an Stelle der Formel (4.17) die Formel

$$\iiint_B f(x, y, z) db = \iiint_{B'} F(r, \varphi, z) r db' \quad (4.19)$$

bzw.

$$\iiint_B f(x, y, z) db = \iiint_{B'} F(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta db' \quad (4.20)$$

(vgl. Formeln (4.11) und (4.12)). Auf eine Übertragung der Formel (4.18) auf den Fall von Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten verzichten wir; es ist klar, wie das zu geschehen hat.

Wir kommen jetzt auf die in Beispiel 4.1 behandelte Fragestellung zurück!

**Beispiel 4.5:** Das Volumen einer Kugel vom Radius  $a$  soll mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnet werden.

### Das Innere des Bereichs

$$B': \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

des  $r, \vartheta, \varphi$ -Raumes wird durch die Abbildung

$$T: x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

umkehrbar eindeutig auf den Bereich

$$B: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

des  $x, y, z$ -Raumes abgebildet. Hinweis: Die Punkte von  $B'$  mit  $r = 0$  – Randpunkte von  $B'$  – werden alle auf den Punkt  $(0, 0, 0)$  von  $B$  abgebildet. Die Voraussetzung „ $T$  ist umkehrbar eindeutig“ braucht nur für die inneren Punkte von  $B'$  erfüllt zu sein. Nach Formel (4.20) erhält man dann für das Volumen dieser Kugel:

$$V = \iiint_B db = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \vartheta \ dr \ d\vartheta \ d\varphi.$$

Das rechts stehende dreifache Integral bereitet keine Schwierigkeiten; es ergibt sich:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^3}{3} \sin \vartheta \ d\vartheta \ d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 \ d\varphi = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

- \* Aufgabe 4.6: Von dem im Beispiel 4.2 beschriebenen Kreiskegel soll mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen berechnet werden.

(Hinweis: Das Ergebnis könnten wir sofort hinschreiben, denn für das Volumen eines Kegels gilt  $V = \frac{1}{3} Fh$ . Es kommt uns also bei dieser Aufgabe nur auf die richtige Anwendung der Transformationsformel für Raumintegrale an.)

- \* Aufgabe 4.7:  $B$  sei derjenige räumliche Bereich, der „nach unten“ durch die  $x, y$ -Ebene, „nach oben“ durch das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2 + 4$  und „seitlich“ durch den auf der  $x, y$ -Ebene senkrecht stehenden Kreiszylinder  $x^2 + y^2 = 9$  begrenzt wird. Man berechne mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen  $V$  von  $B$ .

Im  $R^n$  erhält man in Analogie zu den Sätzen 4.1 und 4.2 den folgenden

### S.4.3 Satz 4.3: Durch die Abbildung

$$T: \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

mit in  $B'$  stetigen partiellen Ableitungen und nicht verschwindender Funktionaldeterminante werde der Bereich  $B'$  des  $u_1, u_2, \dots, u_n$ -Raumes umkehrbar eindeutig auf den Bereich  $B$  des  $x_1, x_2, \dots, x_n$ -Raumes abgebildet. Mit Hilfe der krummlinigen Koordinaten  $u_1, \dots, u_n$  kann das  $n$ -dimensionale Integral der Funktion  $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  über dem Bereich  $B$  wie folgt berechnet werden

$$\int\int\cdots\int_B^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) db = \int\int\cdots\int_{B'}^n F(u_1, u_2, \dots, u_n) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} db' \quad (4.21)$$

(vgl. Ausführungen am Ende des Abschnitts 3.1. und die Formeln (4.6), (4.7)). Formel (4.21) heißt *Transformationsformel für  $n$ -dimensionale Integrale*. Für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  erhält man die Transformationsformel für Bereichsintegrale bzw. Raumintegrale (Formel (4.13) bzw. (4.17)).

#### 4.3. Anwendungen der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale

In diesem Abschnitt sollen einige Anwendungsaufgaben behandelt werden, die typisch für die Berechnung von Bereichs- und Raumintegralen mit Hilfe von krummlinigen Koordinaten sind. Wir beginnen mit einer einfachen Schwerpunktermittlung.

*Beispiel 4.6:* Gesucht ist der geometrische Schwerpunkt einer Halbkugel vom Radius  $R$  (s. Satz 3.4 in Abschnitt 3.2.).

Wir führen ein rechtwinklig-kartesisches  $x, y, z$ -Koordinatensystem ein (s. Bild 4.16). Aus Symmetriegründen ist ersichtlich, daß der geometrische Schwerpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$  dieser Halbkugel auf der  $z$ -Achse liegen muß; d.h.:  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Wir brauchen daher nur  $z_0$  zu berechnen. Führt man Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  ein, so erhält man nach der Transformationsformel (4.20) (vgl. auch Aufgabe 4.2)

$$z_0 = \frac{1}{V} \iiint_B z db = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

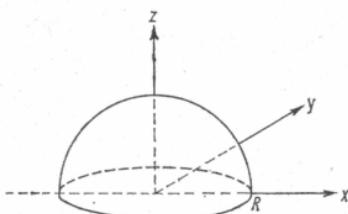


Bild 4.16

Die Berechnung des rechts stehenden dreifachen Integrals erfolgt in drei Teilschritten

$$\text{Inneres Integral: } \int_0^R r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, dr = \frac{R^4}{4} \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{8} R^4 \sin 2\vartheta.$$

$$\text{Mittleres Integral: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} R^4 \sin 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{R^4}{8}.$$

$$\text{Äußeres Integral: } \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{8} \, d\varphi = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Hieraus folgt  $z_0 = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R$ . Für den geometrischen Schwerpunkt der vorgegebenen Halbkugel vom Radius  $R$  gilt also:  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{3}{8} R)$ .

**Beispiel 4.7:** Vorgegeben sei eine Kugel vom Radius  $R$  mit der Dichte  $\rho = 1$ . Wie groß ist das Trägheitsmoment  $J$  dieser Kugel bezüglich einer beliebigen durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse?

Aus Symmetriegründen ist das Trägheitsmoment der Kugel ( $\rho = \text{const}$ ) bezüglich jeder durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse gleich. Führt man ein rechtwinklig-kartesisches  $x,y,z$ -Koordinatensystem ein, dessen Ursprung  $O$  mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, so gilt:  $J = J_x = J_y = J_z$  ( $J_x, J_y, J_z$ : Trägheitsmoment bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ - bzw.  $z$ -Achse). Für die einzelnen Trägheitsmomente erhält man nach Satz 3.6 (Abschnitt 3.2.)

$$J_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \, db, \quad J_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \, db, \quad J_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \, db.$$

Hieraus ergibt sich für das gesuchte Trägheitsmoment  $J$  die Beziehung

$$3J = J_x + J_y + J_z = \iiint_B 2(x^2 + y^2 + z^2) \, db.$$

(An dieser Stelle wurde der Satz  $\iiint_B f(P) \, db + \iiint_B g(P) \, db = \iiint_B (f(P) + g(P)) \, db$  verwendet, der – in entsprechend abgewandelter Form – für alle Integraltypen gilt.) Transformiert man jetzt auf Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  (vgl. Formel (4.20)), so erhält man – wegen  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  – die Gleichung

$$3J = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R 2r^2(r^2 \sin \vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Für das rechts stehende dreifache Integral erhält man nach kurzer Zwischenrechnung den Wert  $\frac{8}{15} \pi R^5$ . Ergebnis: Das Trägheitsmoment einer Kugel vom Radius  $R$  (mit der Dichte  $\rho = 1$ ) bezüglich einer beliebigen durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Achse hat den Wert

$$J = \frac{8}{15} \pi R^5.$$

**Hinweis:** Der kleine Kunstgriff  $J = \frac{1}{3}(J_x + J_y + J_z)$  hat uns die Rechenarbeit wesentlich erleichtert. Würde man z. B.  $J_x$  nach der vorhin angegebenen Formel berechnen, so wäre das mit wesentlich größerer Mühe verbunden. Fast unerträglich würde die Rechenarbeit werden, wenn man das Trägheitsmoment bezüglich einer von den Koordinatenachsen verschiedenen durch  $O$  gehenden Achse – z. B. die durch  $O$  und den Punkt  $(3, 4, 2)$  gehende Gerade – bestimmen wollte.

**Aufgabe 4.8:** Von einem Kugelausschnitt  $B$  mit  $R = 4$  und  $a = 2$  (s. Bild 4.17) berechne man mit Hilfe von Raumintegralen das Volumen und den geometrischen Schwerpunkt. (**Hinweis:** Man orientiere sich an Aufgabe 4.3 und Beispiel 4.6.) \*

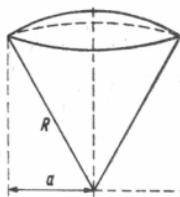


Bild 4.17

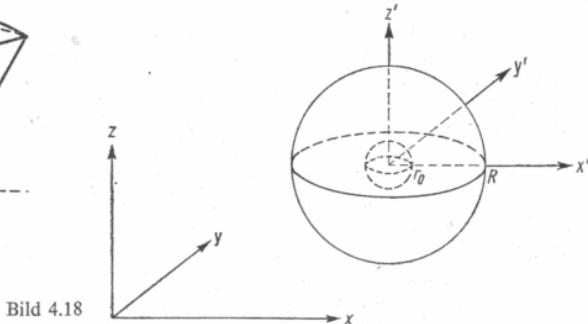


Bild 4.18

**Beispiel 4.8:** Im  $x, y, z$ -Raum sei eine Kugel  $B$  vom Radius  $R$  mit dem Mittelpunkt  $(a, b, c)$  gegeben. Gesucht ist der Wert des Raumintegrals der Funktion

$$f(P) = f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

über dem Kugelbereich  $B$ . (**Hinweis:** Der im Nenner von  $f(x, y, z)$  stehende Ausdruck ist der Abstand des variablen Punktes  $P(x, y, z)$  von dem festen Punkt  $P_0(a, b, c)$ .)

Die Funktion  $f(x, y, z)$  ist in der Umgebung des Punktes  $(a, b, c)$  nicht beschränkt. (Nenner wird für  $(x, y, z) = (a, b, c)$  gleich null!) Es handelt sich um ein sog. *uneigentliches Raumintegral*. Die Definition der uneigentlichen Raumintegrale stimmt genau mit der entsprechenden Definition für Bereichsintegrale überein (vgl. Definition 2.10), wobei jetzt selbstverständlich unter  $U(P_0)$  eine räumliche Umgebung (z.B. eine kugelförmige Umgebung) des singulären Punktes  $P_0$  zu verstehen ist. Unter der Voraussetzung, daß das uneigentliche Raumintegral existiert<sup>1)</sup>, kann der Wert desselben wie folgt ermittelt werden: Man nimmt zunächst die Punkte aus einer kleinen Kugelumgebung des Punktes  $P_0(a, b, c)$  vom Radius  $r_0$  heraus, integriert über die verbleibende Hohlkugel  $B_0$  (äußerer Radius  $R$ , innerer Radius  $r_0$ ) und läßt anschließend  $r_0 \rightarrow 0$  gehen (s. Bild 4.18). Die Art der vorgegebenen Funktion und

<sup>1)</sup> Die Existenz des uneigentlichen Integrals ist bei einer nichtnegativen Funktion gesichert, wenn für eine einzige Folge  $U_1, U_2, \dots$  von Umgebungen des singulären Punktes  $P_0(a, b, c)$  mit  $\varnothing U_n \rightarrow 0$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{B \setminus U_n} f(P) dP$  existiert. Satz 2.9 gilt in entsprechend abgewandelter Form auch für uneigentliche Raumintegrale mit nichtbeschränkter Funktion.

des vorgegebenen Bereiches legen es nahe, vom  $x, y, z$ -System zum  $x', y', z'$ -System und anschließend zu Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  bezüglich des  $x', y', z'$ -Systems überzugehen:

$$T_1: \begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \\ z = z' + c \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} = 1,$$

$$T_2: \begin{cases} x' = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y' = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z' = r \cos \vartheta \end{cases} \quad \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta.$$

Für das Raumintegral (über die Hohlkugel  $B_0$ ) erhalten wir nach den Formeln (4.17) bzw. (4.20):

$$\iiint_B f(x, y, z) db = \iiint_{B'_0} \frac{db'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \iiint_{B'_0} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin \vartheta db'' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_0}^R r \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Für das am Ende der Umformung stehende dreifache Integral erhält man nach kurzer Zwischenrechnung den Wert  $2\pi(R^2 - r_0^2)$ . Damit können wir schon das Schlußergebnis formulieren:

$$\iiint_B f(x, y, z) db = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \iiint_{B'_0} f(x, y, z) db = \lim_{r_0 \rightarrow 0} 2\pi(R^2 - r_0^2) = 2\pi R^2.$$

In Vorbereitung auf das nächste Beispiel sollen einige zum Begriff *Potential anziehender Massen* gehörige Relationen zusammengestellt werden.

$B$  sei ein Körper (räumlicher Bereich) im  $x, y, z$ -Raum mit der Dichte  $\varrho = \varrho(P) = \varrho(x, y, z)$ .  $\mathbf{F}$  sei der Vektor der *Anziehungskraft*, die von dem Körper  $B$  auf einen bestimmten Massenpunkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mit der Masse  $m_0 = 1$  ausgeübt wird. Für die Koordinaten (Komponenten)  $F_1, F_2, F_3$  von  $\mathbf{F}$  gilt dann

$$F_1 = \iiint_B \frac{(x - x_0) \varrho}{r^3} db, \quad F_2 = \iiint_B \frac{(y - y_0) \varrho}{r^3} db, \quad F_3 = \iiint_B \frac{(z - z_0) \varrho}{r^3} db$$

$(F_i = F_i(x_0, y_0, z_0), i = 1, 2, 3)$ . Hierbei ist

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

der Abstand des (variablen) Punktes  $P(x, y, z)$  vom (festen) *Aufpunkt*  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . (Die Gravitationskonstante wurde gleich 1 gesetzt.)

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_B \frac{\varrho}{r} db$$

nennt man *Potential der Massenanziehung des Körpers B auf den Punkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$* . Es gelten die drei Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = F_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y_0} = F_2, \quad \frac{\partial U}{\partial z_0} = F_3,$$

welche man mit Hilfe des Gradientenbegriffs zu einer Vektorgleichung zusammenfassen kann:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U.$$

Um mit den hier eingeführten Größen noch ein wenig vertrauter zu werden, wollen wir die Gleichung  $\partial U / \partial x_0 = F_1$  beweisen. Dabei stützen wir uns auf den Satz, daß man bei einem mehrdimensionalen Integral, dessen Integrand von einem Parameter  $\alpha$  abhängig ist, die Ableitung des Integrals nach  $\alpha$  durch Differentiation unter dem Integralzeichen erhält. (Für einfache Integrale ist das die Formel (1.4) in Abschnitt 1.2.) Wir erhalten also:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} \iiint_B \frac{\varrho}{r} db = \iiint_B \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\varrho}{r} \right) db. \quad (*)$$

Wegen  $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho(x, y, z)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\varrho}{r} \right) = \left( \frac{\varrho}{r} \right)_{x_0} = \varrho \cdot \left( \frac{1}{r} \right)_{x_0} = \varrho \cdot \frac{(-r_{x_0})}{r^2} = -\frac{\varrho}{r^2} \cdot \frac{-2(x - x_0)}{2r} = \frac{\varrho(x - x_0)}{r^3}.$$

Diese Beziehung in (\*) eingesetzt liefert uns das Ergebnis:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = \iiint_B \frac{\varrho(x - x_0)}{r^3} db = F_1.$$

*Beispiel 4.9:* Wie groß ist die Anziehungskraft, die ein kugelförmiger Körper  $B$  mit dem Radius  $R$  und der konstanten Dichte  $\varrho$  auf einen außerhalb der Kugel sich befindenden Massenpunkt  $P_0$  der Masse 1 ausübt?

Um das Problem möglichst gut rechnerisch erfassen zu können, führen wir ein rechtwinklig-kartesisches  $x, y, z$ -Koordinatensystem ein, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt der Kugel  $B$  zusammenfällt und dessen positive  $z$ -Achse durch den Punkt  $P_0$  geht (s. Bild 4.19). Für die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  von  $P_0$  gilt dann:  $x_0 = 0$ ,

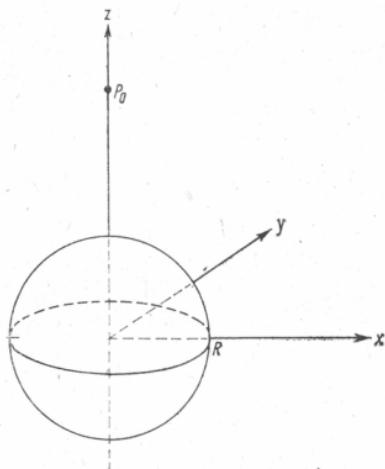


Bild 4.19

$y_0 = 0$  und  $z_0 > R > 0$ . Die 3. Koordinate der Anziehungskraft ergibt sich aus der Gleichung

$$F_3 = \varrho \iiint_B \frac{z - z_0}{(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2})^3} db.$$

(Den konstanten Faktor  $\varrho$  haben wir gleich vor das Integralzeichen gesetzt.) Es erhebt sich nun die Frage, mit welchen Koordinaten man das Raumintegral berechnen soll. Naheliegend wäre es, auf Kugelkoordinaten zu transformieren. Die Gestalt des Integranden bezüglich Kugelkoordinaten bereitet uns aber bei der Integration außerordentliche Schwierigkeiten – obwohl die Integrationsgrenzen bezüglich Kugelkoordinaten sehr einfach sind ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). Führt man dagegen Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  ein, so werden die Integrationsgrenzen zwar ein wenig komplizierter, aber die Gestalt des Integranden wird einfacher – und die Integration des entsprechenden dreifachen Integrals gelingt. (Die  $z$ -Achse ist Symmetrieachse für den Integrationsbereich und den Integranden! In einem solchen Fall ist es am günstigsten, mit Zylinderkoordinaten zu arbeiten.)

Der vorgegebene Kugelbereich wird bezüglich Zylinderkoordinaten beschrieben durch

$$B': \begin{cases} -R \leq z \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2}. \end{cases}$$

Erläuterung zur 3. Ungleichung: Aus  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  folgt (wegen  $x^2 + y^2 = r^2$ )  $r^2 \leq R^2 - z^2$ . Bei vorgegebenem  $z$  (und  $\varphi$ ) kann also  $r$  die Werte von 0 bis  $\sqrt{R^2 - z^2}$  durchlaufen. Berücksichtigt man die Transformationsformel (4.19), so erhält man

$$F_3 = \varrho \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{z - z_0}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}^3} r dr d\varphi dz.$$

Bei der Berechnung dieses dreifachen Integrals muß man ein wenig Geduld aufbringen.

Das innere Integral  $J_1$  ist ein Integral vom Typ  $\int \frac{x dx}{(\sqrt{a^2 + x^2})^3}$  (vgl. [1]); man erhält

$$J_1 = \frac{z_0 - z}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 z}} - 1.$$

Das mittlere Integral  $J_2$  ist dann

$$J_2 = \int_0^{2\pi} J_1 d\varphi = 2\pi J_1.$$

( $J_1$  ist nicht von  $\varphi$  abhängig!). Schließlich kann man mit Hilfe der Substitution  $t = \sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0 z}$  ( $t dt = -z_0 dz$ ,  $(z - z_0) 2z_0 = R^2 - z_0^2 - t^2$ ) auch das äußere Integral  $J_3$  berechnen:

$$J_3 = \int_{-R}^R J_2 dz = -\frac{4}{3z_0^2} \pi R^3.$$

Ergebnis:  $F_3 = \varrho J_3 = -\frac{4}{3} \pi R^3 \varrho \cdot \frac{1}{z_0^2}$ .

Die 1. und 2. Koordinate des Vektors  $\mathbf{F}$  der Anziehungskraft brauchen wir nicht zu berechnen. Es muß offensichtlich der Vektor  $\mathbf{F}$  dieselbe Richtung wie die  $z$ -Achse haben, d.h. aber, daß  $F_1 = 0$  und  $F_2 = 0$  gelten muß.

*Hinweis:*  $\frac{4}{3} \pi R^3 \varrho$  ist die Gesamtmasse  $m$  einer homogenen Kugel ( $\varrho = \text{const}$ ) vom Radius  $R$ .  $z_0$  ist der Abstand des Punktes  $P_0$  vom Mittelpunkt der Kugel. Die Gleichung  $F_3 = \frac{m \cdot 1}{z_0^2}$  kann dann wie folgt gedeutet werden: Die Anziehungskraft, die von einer homogenen Kugel auf einen außerhalb der Kugel sich befindenden Massenpunkt der Masse 1 ausgeübt wird, ist genau so groß, wie diejenige des Mittelpunktes der Kugel, in der man die Gesamtmasse der Kugel konzentriert hat.

## 5. Kurvenintegrale

### 5.1. Begriff der Kurvenintegrale 1. und 2. Art

Die in diesem Abschnitt untersuchten Kurvenintegrale sind sehr nützlich bei der Gewinnung von mathematischen Modellen für Prozesse aus Natur oder Technik, z.B. bei der Bestimmung der Arbeit, die beim Bewegen einer Masse in einem Kraftfeld aufgebracht werden muß. Sie erweisen sich darüber hinaus bei der Behandlung gewisser mathematischer Modelle als zweckmäßiges Hilfsmittel, z.B. bei der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Im Zusammenhang mit dem Gaußschen Integralsatz gestatten sie die numerische Berechnung von ebenen Bereichsintegralen mit den bekannten Methoden der numerischen Integration.

Die Kurvenintegrale unterscheiden sich dabei in ihrer Definition im Prinzip nicht von den bestimmten Integralen der Form  $\int_a^b f(x) dx$ . Bei der Definition von  $\int_a^b f(x) dx$  gingen wir von ausgezeichneten Folgen von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  aus (s. Band 2, Def. 10.2) und bildeten für jede Zerlegung Summen der Form  $\sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$ .

Hierbei war  $\Delta x_i$  die Länge des  $i$ -ten Teilintervall von  $[a, b]$  und  $\xi_i$  ein beliebiger Punkt aus diesem Teilintervall. Streben nun für jede ausgezeichnete Folge von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  die oben angeführten Summen bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte  $\xi_i$  mit wachsender Zahl der Teilintervalle gegen ein und denselben

Grenzwert, so nannten wir diesen Grenzwert  $\int_a^b f(x) dx$  und die Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  integrierbar. Beim Kurvenintegral 1. Art ersetzen wir nun nur die Teilstrecke der  $x$ -Achse von  $a$  bis  $b$  durch eine zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  verlaufende Kurve  $\mathfrak{K}$  des Raumes. Die zu integrierende Funktion muß dann natürlich auf  $\mathfrak{K}$  definiert sein. Der Zerlegung von  $[a, b]$  in Teilintervalle mit den Teilungspunkten  $x_i$  entspricht die Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  in Teilkurven  $\mathfrak{K}_i$  mit den Teilungspunkten  $P_i$ , der Länge  $\Delta x_i$  der Teilintervalle entspricht die Bogenlänge  $\Delta s_i$  von  $\mathfrak{K}_i$ , und den Zwischenpunkten  $\xi_i$  entsprechen auf  $\mathfrak{K}_i$  gelegene Punkte  $Q_i$ .

Ehe wir zur Definition des Kurvenintegrals kommen, wollen wir die nötigen Begriffe zusammenstellen (s. auch Bd. 4, 2.6.4., oder Bd. 6, 2.1.).

**D.5.1 Definition 5.1:** Ist  $I = [a, b]$  ein Intervall ( $a < b$ ) und sind auf  $I$  drei stetige und wenigstens stückweise stetig differenzierbare Funktionen  $g_1(t), g_2(t), g_3(t)$  mit  $\dot{g}_1^2(t) + \dot{g}_2^2(t) + \dot{g}_3^2(t) > 0$  für alle  $t$  aus  $I$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gegeben, so heißt die Menge  $\mathfrak{K}$  aller Punkte  $(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$  des  $R^3$ , wobei  $t$  das ganze Intervall  $I$  durchläuft, eine orientierte Kurve<sup>1</sup>).  $A = (g_1(a), g_2(a), g_3(a))$  heißt der Anfangspunkt,  $B = (g_1(b), g_2(b), g_3(b))$  der Endpunkt von  $\mathfrak{K}$ .  $(g_1(t), g_2(t), g_3(t)), t \in I$ , nennen wir eine Parameterdarstellung oder auch kurz Darstellung der Kurve.

**Beispiel 5.1:** Es sei  $I = [-r, r]$  und  $g_1(t) = -t, g_2(t) = \sqrt{r^2 - t^2}, g_3(t) = 0$  für alle  $t \in I$  ( $0 < r$ ). Wegen  $z = g_3(t) = 0$  für alle  $t \in I$  liegt  $\mathfrak{K}$  ganz in der  $x, y$ -Ebene ( $\mathfrak{K}$  ist

<sup>1</sup>) Den Zusatz „orientierte“ lassen wir gelegentlich weg, da in Kap. 5. nur orientierte Kurven betrachtet werden.

eine ebene Kurve).  $\mathfrak{K}$  ist der in Bild 5.1. dargestellte Halbkreis mit dem Anfangspunkt  $A = (r, 0, 0)$  und dem Endpunkt  $B = (-r, 0, 0)$ . Die gleiche orientierte Kurve  $\mathfrak{K}$  wird auch durch  $I^* = [0, \pi]$ ,  $g_1^*(t) = r \cos t$ ,  $g_2^*(t) = r \sin t$ ,  $g_3^*(t) = 0$  für alle  $t \in I^*$  dargestellt. Die Darstellung einer orientierten Kurve ist nicht eindeutig bestimmt. Es gibt zu jeder orientierten Kurve sogar beliebig viele Darstellungen.

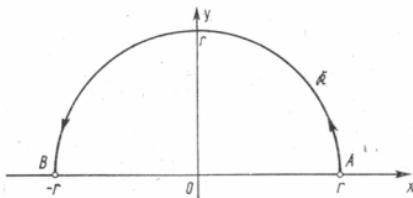
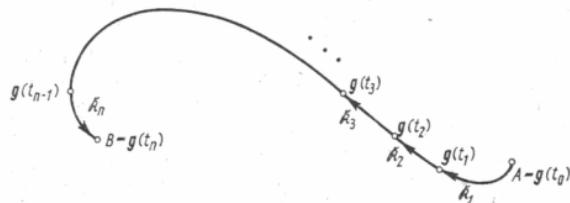


Bild 5.1

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir zur Darstellung orientierter Kurven auch Vektorfunktionen  $\mathbf{g}$  mit  $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$  benutzen.<sup>1)</sup> An Stelle von  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in I$ , wird häufig die Schreibweise  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in I$ , oder  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in I$ , verwendet.

**Definition 5.2:** Ist  $\mathfrak{K}$  eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$ , und  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ , so nennen wir  $Z$ , gegeben durch die Teilungspunkte  $\mathbf{g}(t_0), \mathbf{g}(t_1), \mathbf{g}(t_2), \dots, \mathbf{g}(t_n)$ , eine Zerlegung von  $\mathfrak{K}$  (in die Teilkurven  $\mathfrak{K}_i$  mit den Darstellungen  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in I_i = [t_{i-1}, t_i]$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ ) (s. Bild 5.2).

Bild 5.2. Zerlegung  $Z$  von  $\mathfrak{K}$  in die Teilkurven  $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_n$ 

**Definition 5.3:** Eine Folge  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  von Zerlegungen einer orientierten Kurve  $\mathfrak{K}$  D.5.3 heißt ausgezeichnet, wenn für jedes  $n = 1, 2, \dots$  die Teilkurven der Zerlegung  $Z_{n+1}$  durch Zerlegung der Teilkurven von  $Z_n$  entstehen (nicht jede Teilkurve von  $Z_n$  muß dabei sofort weiter zerlegt worden sein), und wenn für das Maximum  $\lambda_n$  der Bogenlängen der Teilkurven von  $Z_n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  gilt.

**Beispiel 5.2:** Es sei  $\mathfrak{K}$  die orientierte Kurve aus Beispiel 5.1. Als Parameterdarstellung wählen wir

$$\mathbf{g}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0), t \in [0, \pi].$$

$Z_1$  habe als Teilungspunkte  $\mathbf{g}(0), \mathbf{g}(\pi/2), \mathbf{g}(\pi)$ . Jede weitere Zerlegung der Folge  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  entstehe durch Halbierung der Teilkurven der vorangegangenen Zerlegung (s. Bild 5.3).  $Z_k$  zerlegt  $\mathfrak{K}$  in die  $2^k$  Teilkurven  $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_{2^k}$ .  $\mathfrak{K}_i$  hat dabei die

<sup>1)</sup> Aus drucktechnischen Gründen schreiben wir die Komponentendarstellung eines Vektors stets horizontal, also  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

Darstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in \left[ \frac{i-1}{2^k} \pi, \frac{i}{2^k} \pi \right]$ . Die Bogenlänge einer jeden Teilkurve  $\mathfrak{K}_i$  ist  $\frac{\pi}{2^k}$ .

Dieser Wert ist auch das Maximum der Bogenlängen aller Teilkurven von  $Z_k$ :  $\lambda_k = \frac{\pi}{2^k}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$  ist  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$ .

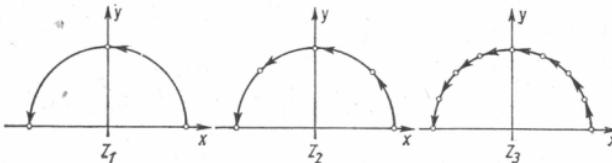


Bild 5.3

Wir kommen nun zur grundlegenden Definition des Kurvenintegrals 1. Art:

**D.5.4 Definition 5.4:** Gegeben sei eine Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in I$ , und eine mindestens auf  $\mathfrak{K}$  definierte Funktion  $f$ . Ist  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$  und zerlegt  $Z_n$   $\mathfrak{K}$  in die Teilkurven  $\mathfrak{K}_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, k_n$ ) mit den Bogenlängen  $\Delta s_{ni}$ , so wählen wir aus jeder Teilkurve  $\mathfrak{K}_{ni}$  einen beliebigen Punkt  $Q_{ni}$  und bilden die Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} f(Q_{ni}) \Delta s_{ni}. \quad (5.1)$$

Haben nun die Summen (5.1) bei jeder Wahl der  $Q_{ni}$  und für jede beliebige ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$  stets den gleichen Grenzwert

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad (5.2)$$

so nennen wir  $S$  das **Kurvenintegral 1. Art** von  $f$  über  $\mathfrak{K}$  und schreiben dafür

$$S = \int_{\mathfrak{K}} f(P) ds.$$

$f$  nennen wir über  $\mathfrak{K}$  integrierbar.

Ist  $f$  auf einem Gebiet  $M$  des Raumes definiert, das  $\mathfrak{K}$  als Teil enthält, und sind die Werte von  $f$  auf  $M$  durch eine Gleichung  $w = f(x, y, z)$ ,  $((x, y, z) \in M)$  erklärt, so schreiben wir auch  $S = \int_{\mathfrak{K}} f(x, y, z) ds$  oder in Vektorschreibweise mit  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  auch  $S = \int_{\mathfrak{K}} f(\mathbf{x}) ds$ .

Die Kurve  $\mathfrak{K}$  ist keinen Einschränkungen unterworfen. Insbesondere darf  $\mathfrak{K}$  Doppelpunkte haben. Das sind Punkte, für die bei verschiedenen  $t_1$  und  $t_2$  aus  $I$  der Wert von  $\mathbf{g}$  gleich ist:  $\mathbf{g}(t_1) = \mathbf{g}(t_2)$  (s. Bild 5.4). Ebenso darf  $\mathfrak{K}$  geschlossen sein, d.h. der Anfangspunkt  $A$  und der Endpunkt  $B$  fallen zusammen:  $A = B$  (s. Bild 5.5). Im Falle einer geschlossenen orientierten Kurve  $\mathfrak{K}$  schreiben wir für das Kurvenintegral  $S$  auch

$$S = \oint_{\mathfrak{K}} f(P) ds = \oint_{\mathfrak{K}} f(x, y, z) ds = \oint_{\mathfrak{K}} f(\mathbf{x}) ds.$$

**Beispiel 5.3:** Es sei  $\mathfrak{K}$  der orientierte Halbkreis aus Beispiel 5.1 und  $f(x, y, z) = 1$  für jeden Punkt  $(x, y, z)$  des Raumes. Für die Summen (5.1) gilt dann stets

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} 1 \cdot \Delta s_{ni} = r\pi,$$

denn die Summe aller Längen  $\Delta s_{ni}$  der Teilkurven ist ja gleich der Länge  $r\pi$  von  $\mathfrak{K}$ . Damit haben wir dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = r\pi = \int_{\mathfrak{K}} ds.$$

Man kann jedoch auch allgemeinere Mengen, bei denen nicht alle Bedingungen aus Definition 5.1 erfüllt sind, als Kurven einführen. Dann muß aber die Bogenlänge  $\int_{\mathfrak{K}} ds$  nicht unbedingt existieren.

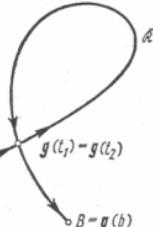


Bild 5.4

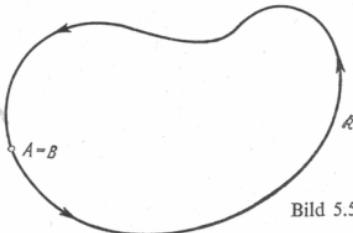


Bild 5.5

Wir kommen jetzt zur Definition der Kurvenintegrale 2. Art. In der Definition 5.4 wird dabei in den Summen (5.1) die Länge  $\Delta s_{ni}$  des Teilbogens  $\mathfrak{K}_{ni}$  durch die Projektion der Verbindungsstrecke zwischen Anfangspunkt  $P_{n,i-1}$  und Endpunkt  $P_{n,i}$  auf eine der Koordinatenachsen ersetzt (s. Bild 5.6). Die Projektionen bezeichnen wir durch  $\Delta x_{ni}, \Delta y_{ni}$  bzw.  $\Delta z_{ni}$ .

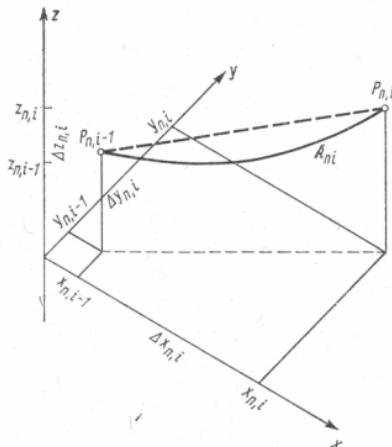


Bild 5.6

**Definition 5.5:** Gegeben sei eine Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $g(t), t \in I$ , und eine mindestens auf  $\mathfrak{K}$  definierte Funktion  $f$ . Ist  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$  und wird  $\mathfrak{K}$  durch  $Z_n$  in die Teilkurven  $\mathfrak{K}_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, k_n$ ) mit den Anfangspunkten  $P_{n,i-1}$  und den Endpunkten  $P_{n,i}$  zerlegt ( $P_{nj} = (g_1(t_{nj}), g_2(t_{nj}), g_3(t_{nj}))$ ), so setzen wir

$$\Delta x_{ni} = g_1(t_{ni}) - g_1(t_{n,i-1}),$$

wählen aus jeder Teilkurve  $\mathfrak{K}_{ni}$  einen beliebigen Punkt  $Q_{ni}$  und bilden die Summe

$$L_n = \sum_{i=1}^{k_n} f(Q_{ni}) \Delta x_{ni}. \quad (5.3)$$

Haben nun die Summen (5.3) bei jeder Wahl der  $Q_{ni}$  und für jede beliebige ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$  stets den gleichen Grenzwert

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

so nennen wir  $L$  Kurvenintegral 2. Art von  $f$  über  $\mathfrak{K}$  und schreiben dafür

$$L = \int_{\mathfrak{K}} f(P) dx \quad (5.4)$$

oder mit  $P = (x, y, z)$  bzw.  $x = (x, y, z)$  auch  $\int_{\mathfrak{K}} f(x, y, z) dx$  bzw.  $\int_{\mathfrak{K}} f(x) dx$ .

In analoger Weise werden mit

$$\Delta y_{ni} = g_2(t_{ni}) - g_2(t_{n, i-1}) \\ \text{bzw.}$$

$$\Delta z_{ni} = g_3(t_{ni}) - g_3(t_{n, i-1})$$

an Stelle von  $\Delta x_{ni}$  in (5.3) die Kurvenintegrale 2. Art

$$\int_{\mathfrak{K}} f(P) dy \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathfrak{K}} f(P) dz$$

erklärt. Eine Summe

$$\int_{\mathfrak{K}} f_1(P) dx + \int_{\mathfrak{K}} f_2(P) dy + \int_{\mathfrak{K}} f_3(P) dz$$

solcher Kurvenintegrale (mit verschiedenen Integranden  $f_1, f_2, f_3$  an Stelle von  $f$ ) nennen wir allgemeines Kurvenintegral 2. Art und schreiben dafür kürzer

$$\int [f_1(P) dx + f_2(P) dy + f_3(P) dz].$$

Ehe wir Beispiele für die Anwendung der Kurvenintegrale 1. und 2. Art bringen, wollen wir zeigen, wie die Berechnung der Kurvenintegrale auf die Berechnung bestimmter Integrale zurückzuführen ist.

## 5.2. Berechnung von Kurvenintegralen

In der Definition des Kurvenintegrals 1. Art (s. Def. 5.4) spielte die Bogenlänge  $\Delta s_{ni}$  der Teilkurven  $\mathfrak{K}_{ni}$  eine wesentliche Rolle. Wir benötigen deshalb ein Verfahren, um diese Bogenlängen berechnen zu können. Für die Bogenlänge  $s$  einer in der  $x, y$ -Ebene verlaufenden Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = x(t), & \alpha \leq t \leq \beta, \\ y = y(t), \end{cases}$$

hatten wir (s. Bänd 2; Satz 10.19)

$$s = \int_{t=a}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (5.5)$$

gefunden. Für eine zwischen  $x_1$  und  $x_2$  verlaufende ebene Kurve mit der expliziten Darstellung  $y = y(x)$  galt

$$s = \int_{x=x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5.6)$$

Analog zu Formel (5.5) erhalten wir für eine räumliche Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ ,  $z = g_3(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ,

$$s = \int_{t=a}^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (5.7)$$

als Bogenlänge von  $\mathfrak{K}$ . Mit  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  und  $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$  erhalten wir für die vektorielle Darstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , der Kurve  $\mathfrak{K}$  wegen

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{x}}| &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = |\dot{\mathbf{g}}(t)| \\ s &= \int_{t=a}^b |\dot{\mathbf{x}}| dt^1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ist nun  $(Z_n)_{n=1,2,\dots}$  eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $\mathfrak{K}$  und zerlegt  $Z_n \mathfrak{K}$  in die Teilkurven  $\mathfrak{K}_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots, k_n$ ) mit den Anfangspunkten  $\mathbf{g}(t_{n,i-1})$  und den Endpunkten  $\mathbf{g}(t_{ni})$ , so haben wir für die Bogenlänge  $\Delta s_{ni}$  von  $\mathfrak{K}_{ni}$

$$\Delta s_{ni} = \int_{t=t_{n,i-1}}^{t_{ni}} |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt. \quad (5.9)$$

Aus Formel (5.9) folgt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\Delta s_{ni} = |\dot{\mathbf{g}}(\tau_{ni})| \Delta t_{ni} \quad (5.10)$$

mit  $t_{n,i-1} \leq \tau_{ni} \leq t_{ni}$  und  $\Delta t_{ni} = t_{ni} - t_{n,i-1}$ .

Da bei Existenz des Kurvenintegrals  $S = \int_{\mathfrak{K}} f(P) ds$  die Summen (5.1) für jede Wahl der Punkte  $Q_{ni}$  aus  $\mathfrak{K}_{ni}$  gegen  $S$  konvergieren, können wir die Punkte  $Q_{ni}$  so wählen, daß ihnen die Vektoren  $\mathbf{g}(\tau_{ni})$  mit den Parametern  $\tau_{ni}$  aus Formel (5.10) entsprechen. Für Formel (5.1) erhalten wir damit

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} f(\mathbf{g}(\tau_{ni})) |\dot{\mathbf{g}}(\tau_{ni})| \Delta t_{ni}. \quad (5.11)$$

Aus Formel (5.11) folgt beim Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  (Formel (5.2))

$$S = \int_{\mathfrak{K}} f(P) ds = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{g}}(t)| dt. \quad (5.12)$$

<sup>1)</sup> Siehe hierzu auch Bd. 6, 2.3.

Die Formel (5.12) rechtfertigt einerseits die Schreibweise  $\int_{\mathfrak{K}} f(P) ds$  für den Grenzwert  $S$  aus Definition 5.4 und gestattet andererseits, die Formel (5.12) zur Berechnung eines Kurvenintegrals 1. Art leicht zu merken: Ist  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , eine Parameterdarstellung von  $\mathfrak{K}$ , so ist in  $\int_{\mathfrak{K}} f(P) ds$   $P$  durch  $g(t)$  und  $ds$  durch das Bogenelement  $|\dot{g}(t)| dt$  zu ersetzen. Die Integrationsgrenzen sind  $t_1 = a$ ,  $t_2 = b$ .

Eine wichtige Voraussetzung für den oben eingeschlagenen Weg zur Berechnung von Kurvenintegralen war die Differenzierbarkeit von  $g$ . Das bestimmte Integral in Formel (5.12) existiert, wenn der Integrand stückweise stetig ist. Da  $g$  die Kurve  $\mathfrak{K}$  darstellt, ist  $g$  stetig und  $\dot{g}$  stückweise stetig. Für die stückweise Stetigkeit des Integranden brauchen wir deshalb nur noch die stückweise Stetigkeit von  $f$  zu fordern. Die Ergebnisse können wir im folgenden Satz 5.1 zusammenfassen:

**S.5.1 Satz 5.1:** Gegeben sei die Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Darstellung  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , und die auf  $\mathfrak{K}$  definierte und stückweise stetige Funktion  $f$ . Dann existiert das Kurvenintegral  $\int_{\mathfrak{K}} f(P) ds$ , und es gilt

$$\int_{\mathfrak{K}} f(P) ds = \int_a^b f(g(t)) |\dot{g}(t)| dt.$$

Das Integral aus Formel (5.12) können wir der Komponentenschreibweise entsprechend auch in der Form

$$S = \int_{\mathfrak{K}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) \sqrt{\dot{g}_1^2 + \dot{g}_2^2 + \dot{g}_3^2} dt$$

schreiben.

Die Betrachtungen, die uns zu Satz 5.1 führten, sind natürlich auch für ebene orientierte Kurven mit einer Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b,$$

richtig. Es ist dann nur  $f$  eine Funktion von 2 Veränderlichen und  $g_3(t) \equiv 0$ . Damit wird

$$\int_{\mathfrak{K}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (5.13)$$

Ist die ebene orientierte Kurve explizit darstellbar,

$$y = y(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2,$$

so geht (5.13) entsprechend Formel (5.5) und (5.6) in

$$\int_{\mathfrak{K}} f(x, y) ds = \int_{x=x_1}^{x_2} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (5.14)$$

über.

*Beispiel 5.4:* Es ist die Oberfläche  $A$  einer Kugel mit dem Radius  $r$  zu berechnen. Sie entsteht durch Rotation des Halbkreises mit der expliziten Darstellung  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  ( $-r \leq x \leq r$ ) um die  $x$ -Achse. Für die Oberfläche eines Rotationskörpers gilt (s. Band 2, Satz 10.22)  $A = \int_0^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$ . Nach Formel (5.14) und Satz 5.1 ist dies ein Kurvenintegral mit der durch  $f(x, y) = 2\pi y$  gegebenen Funktion  $f$ . Speziell für die Kugel mit  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  und  $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$  wird  $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}$   $= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$  und

$$A = \int_{\mathfrak{K}} 2\pi y \, ds = \int_{x=-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = 2\pi r \int_{x=-r}^r \, dx = 4\pi r^2.$$

*Beispiel 5.5:* Es ist das Kurvenintegral 1. Art von  $f$  mit  $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$  über eine Windung der Schraubenlinie mit der Darstellung  $\mathbf{g}(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , zu berechnen. Es ist  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-r \sin t, r \cos t, a)$  und  $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{r^2 + a^2}$ . Damit wird nach Formel (5.12)

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{K}} f(\mathbf{x}) \, ds &= \int_{t=0}^{2\pi} at(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t) \sqrt{r^2 + a^2} \, dt \\ &= ar^2 \sqrt{r^2 + a^2} \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi^2 ar^2 \sqrt{r^2 + a^2}. \end{aligned}$$

*Aufgabe 5.1:* Es ist das Kurvenintegral 1. Art von  $f$  mit  $f(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  über die von  $(1, 1, 1)$  nach  $(2, 2, 2)$  führende Strecke  $\mathfrak{K}$  zu berechnen.

Bei der Berechnung des Kurvenintegrals  $\int_{\mathfrak{K}} f(P) \, dx$  2. Art haben wir gemäß Definition 5.5 in Formel (5.1)  $\Delta s_{ni}$  durch  $\Delta x_{ni} = g_1(t_{ni}) - g_1(t_{n,i-1})$  zu ersetzen. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt

$$\Delta x_{ni} = \dot{g}_1(\tau_{ni}) \Delta t_{ni} \quad (5.15)$$

mit  $t_{n,i-1} \leq \tau_{ni} \leq t_{ni}$  und  $\Delta t_{ni} = t_{ni} - t_{n,i-1}$ . Genau wie in Formel (5.11) wählen wir nun die Punkte  $Q_{ni}$  aus  $\mathfrak{K}_{ni}$  so, daß sie den Vektoren  $\mathbf{g}(\tau_{ni})$  entsprechen. Formel (5.3) geht dann in

$$L_n = \sum_{i=1}^{k_n} f(\mathbf{g}(\tau_{ni})) \dot{g}_1(\tau_{ni}) \Delta t_{ni}$$

über, und der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ergibt

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \dot{g}_1(t) \, dt. \quad (5.16)$$

Analog erhalten wir

$$\int_{\mathfrak{K}} f(P) \, dy = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \dot{g}_2(t) \, dt \quad (5.17)$$

und

$$\int_{\mathfrak{K}} f(P) dz = \int_{t=a}^b f(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_3(t) dt. \quad (5.18)$$

Linearkombination von (5.16), (5.17) und (5.18) ergibt für das allgemeine Kurvenintegral 2. Art

$$\int_{\mathfrak{K}} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) = \int_{t=a}^b [f_1(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_1(t) + f_2(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_2(t) + f_3(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_3(t)] dt. \quad (5.19)$$

Fassen wir die  $f_i$  als Komponenten eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$  auf und beachten wir, daß  $f_1 \dot{\mathbf{g}}_1 + f_2 \dot{\mathbf{g}}_2 + f_3 \dot{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{g}}$  ist, so wird

$$\int_{\mathfrak{K}} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) = \int_{t=a}^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(t) dt. \quad (5.20)$$

Für das allgemeine Kurvenintegral 2. Art schreiben wir mit  $(dx, dy, dz) = dx$  auch formal

$$\int_{\mathfrak{K}} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Der dem Satz 5.1 entsprechende Satz lautet dann:

**S.5.2 Satz 5.2:** Gegeben sei die Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t), t \in [a, b]$ , und die auf  $\mathfrak{K}$  definierte und stetige Vektorfunktion  $\mathbf{f}$ . Dann existieren die Kurvenintegrale 2. Art  $\int_{\mathfrak{K}} f_1 dx, \int_{\mathfrak{K}} f_2 dy, \int_{\mathfrak{K}} f_3 dz$  und das allgemeine Kurvenintegral 2. Art

$$\int_{\mathfrak{K}} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{K}} f_1(x) dx &= \int_{t=a}^b f_1(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_1(t) dt, & \int_{\mathfrak{K}} f_3(x) dz &= \int_{t=a}^b f_3(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_3(t) dt, \\ \int_{\mathfrak{K}} f_2(x) dy &= \int_{t=a}^b f_2(\mathbf{g}(t)) \dot{\mathbf{g}}_2(t) dt, & \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f}(x) \cdot dx &= \int_{t=a}^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(t) dt. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.6:** Es ist das allgemeine Kurvenintegral 2. Art  $L$  von  $\mathbf{f}$  mit  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ , d. h.,  $f_1(\mathbf{x}) = x, f_2(\mathbf{x}) = z, f_3(\mathbf{x}) = y$ , über die geschlossene orientierte Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t, 3), t \in [0, 2\pi]$ , zu berechnen.

Wegen  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) = (\cos t, 3, \sin t)$  wird  $L$  nach Satz 5.2

$$L = \int_{t=0}^{2\pi} (-\cos t \sin t + 3 \cos t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} (3 - \sin t) \cos t dt.$$

Mit der Substitution  $3 - \sin t = s, ds = -\cos t \cdot dt$  wird  $L = - \int_3^3 s ds = 0$ .

**Beispiel 5.7:** In der Physik wird die Arbeit  $W$ , die eine punktförmige Masse beim

Durchlaufen einer orientierten Kurve  $\mathfrak{K}$  vom Anfangs- bis zum Endpunkt gegen ein Kraftfeld  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  zu leisten hat, durch das Kurvenintegral 2. Art

$$W = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

definiert.

Diese Definition ist mit den elementaren Vorstellungen vom Begriff der Arbeit verträglich, denn für das Durchlaufen einer Strecke mit der Darstellung  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{c} + t\mathbf{d}$ ,  $t \in [a, b]$ , wird bei konstantem Kraftfeld  $\mathbf{F} = \text{const}$  wegen  $\dot{\mathbf{g}}(t) = \mathbf{d}$  die Arbeit

$$W = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t=a}^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} dt = (b - a) \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

geleistet. Die Weglänge ist dabei

$$s = \int_{\mathfrak{K}} ds = \int_{t=a}^b |\mathbf{d}| dt = (b - a) |\mathbf{d}|.$$

Die Projektion der Kraft auf die Richtung der Strecke, die *Kraftkomponente in Wegrichtung*, ist  $\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$ . Damit wird

$$W = (b - a) \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (b - a) |\mathbf{d}| \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|},$$

also *Arbeit = Weglänge mal Kraftkomponente in Wegrichtung*.

*Aufgabe 5.2:* Für die Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}(t) = (4 \cos t, 2 \sin t, 6t)$ ,  $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ , ist das (allgemeine) Kurvenintegral 2. Art  $L = \int_{\mathfrak{K}} (x dx + z dy + 2 dz)$  zu berechnen.

### 5.3. Eigenschaften von Kurvenintegralen

Vergleichen wir die Formeln (5.12) mit (5.20) für die Berechnung der Kurvenintegrale 1. bzw. 2. Art, so können wir feststellen, daß sie ineinander übergehen, wenn wir

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{g}}(t)}{|\dot{\mathbf{g}}(t)|} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(t))$$

setzen. Wir können also jedes Kurvenintegral 2. Art durch ein spezielles Kurvenintegral 1. Art darstellen.

Die folgenden Eigenschaften von Kurvenintegralen leiten wir nur für Kurvenintegrale 1. Art her, bei den Kurvenintegralen 2. Art führen analoge Gedankengänge mit Ausnahme von Satz 5.4 zu den gleichen Ergebnissen.

Für bestimmte Integrale  $\int_a^b h(t) dt$  gilt, wenn  $a < c < b$  ist,

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^c h(t) dt + \int_c^b h(t) dt \quad (5.21)$$

(s. Band 2, Abschn. 10.1.4.). Die Berechnung des Kurvenintegrals  $\int_{\mathfrak{K}} f ds$  von  $f$  über die

Kurve  $\mathfrak{K}$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , führt uns nach Satz 5.1 auf ein solches bestimmtes Integral mit  $h(t) = f(\mathbf{g}(t)) |\dot{\mathbf{g}}(t)|$ . Die Unterteilung des Integrationsintervales  $[a, b]$  in  $[a, c]$  und  $[c, b]$  entspricht bei der orientierten Kurve  $\mathfrak{K}$  der Zerlegung in zwei orientierte Kurven  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  mit den Darstellungen  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in [a, c]$ , und  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in [c, b]$ , (s. Bild 5.7). Formel (5.21) ergibt

$$\int_{\mathfrak{K}} f ds = \int_{\mathfrak{K}_1} f ds + \int_{\mathfrak{K}_2} f ds. \quad (5.22)$$

Da der Wert eines Kurvenintegrals nicht von der Parameterdarstellung der orientierten Kurve abhängt, können wir für  $\mathfrak{K}_1$  bzw.  $\mathfrak{K}_2$  auch von der speziellen Darstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , von  $\mathfrak{K}$  unabhängige Darstellungen  $\mathbf{g}_1(t)$ ,  $t \in [a_1, b_1]$ , von  $\mathfrak{K}_1$  bzw.  $\mathbf{g}_2(t)$ ,  $t \in [a_2, b_2]$ , von  $\mathfrak{K}_2$  wählen. Insbesondere muß nicht unbedingt  $b_1 = a_2$  sein.

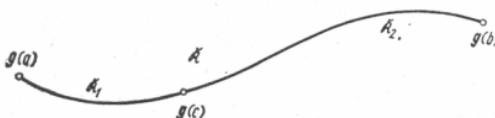


Bild 5.7

**D.5.6 Definition 5.6:**  $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_n$  seien orientierte Kurven. Der Endpunkt von  $\mathfrak{K}_i$  falle für jedes  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  mit dem Anfangspunkt von  $\mathfrak{K}_{i+1}$  zusammen. Der Anfangspunkt von  $\mathfrak{K}_1$  sei gleich dem Anfangspunkt von  $\mathfrak{K}$ , der Endpunkt von  $\mathfrak{K}_n$  gleich dem Endpunkt von  $\mathfrak{K}$ . Ferner sei  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2 \cup \dots \cup \mathfrak{K}_n$ , wenn wir  $\mathfrak{K}$  und die  $\mathfrak{K}_i$  ohne Beachtung der Darstellungen als Punktmengen auffassen. Dann sagen wir,  $\mathfrak{K}$  ist aus  $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_n$  zusammengesetzt.

Mit Definition 5.6 und Formel (5.22) erhalten wir:

**Satz 5.3:** Sind  $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  orientierte Kurven,  $\mathfrak{K}$  aus  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  zusammengesetzt und  $f$  eine auf  $\mathfrak{K}$  integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_{\mathfrak{K}} f ds = \int_{\mathfrak{K}_1} f ds + \int_{\mathfrak{K}_2} f ds.$$

Die entsprechende Aussage gilt auch für Kurvenintegrale 2. Art.

**Beispiel 5.8:**  $\mathfrak{K}$  sei zusammengesetzt aus der auf der  $z$ -Achse liegenden orientierten Strecke  $\mathfrak{K}_1$  mit dem Anfangspunkt  $(0, 0, 0)$  und dem Endpunkt  $(0, 0, 1)$  und dem in der Ebene  $z = 1$  liegenden orientierten Halbkreisbogen  $\mathfrak{K}_2$  mit dem Mittelpunkt  $(1, 0, 1)$  und dem Radius 1, der mit  $y \geq 0$  vom Anfangspunkt  $(0, 0, 1)$  zum Endpunkt  $(2, 0, 1)$  führt (siehe Bild 5.8). Welche Arbeit  $W$  hat ein  $\mathfrak{K}$  durchlaufender Punkt gegen das durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})) = (y, 1 - x, z^2)$$

gegebene Kraftfeld  $\mathbf{F}$  zu leisten?

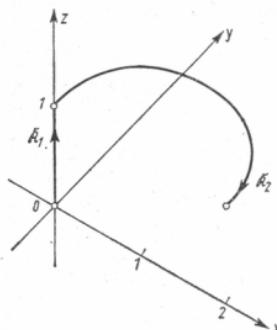


Bild 5.8

Nach Beispiel 5.7 gilt

$$W = \int_{\mathfrak{K}} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

$\mathfrak{K}$  ist aus  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  zusammengesetzt. Parameterdarstellungen von  $\mathfrak{K}_1$  bzw.  $\mathfrak{K}_2$  sind

$$\mathbf{g}_1(t) = (0, 0, t), \quad t \in [0, 1], \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_2(t) = (1 - \cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, \pi].$$

Nach Satz 5.3 und 5.2 wird

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{t=0}^1 (0, 1, t^2) (0, 0, 1) dt + \int_{t=0}^{\pi} (\sin t, \cos t, 1) (\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{3} + \pi \end{aligned}$$

wegen

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}_1(t)) = (0, 1, t^2), \quad \dot{\mathbf{g}}_1(t) = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}_2(t)) = (\sin t, \cos t, 1) \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{g}}_2(t) = (\sin t, \cos t, 0).$$

**Aufgabe 5.3:**  $\mathbf{F}$  sei das Kraftfeld aus Beispiel 5.8 und  $\mathfrak{K}$  der orientierte Polygonzug, der von  $(0, 0, 0)$  über  $(2, 0, 0)$  nach  $(2, 0, 1)$  führt. Wie groß ist die Arbeit  $W$ , die ein  $\mathfrak{K}$  durchlaufender Punkt gegen  $\mathbf{F}$  zu leisten hat?

**Definition 5.7:**  $\mathfrak{K}$  sei eine orientierte Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t), t \in [a, b]$ . Dann verstehen wir unter  $-\mathfrak{K}$  die Kurve, die aus der gleichen Punktmenge wie  $\mathfrak{K}$  besteht, aber von  $\mathbf{g}(b)$  nach  $\mathbf{g}(a)$  durchlaufen wird.

Eine Darstellung von  $-\mathfrak{K}$  ist z. B.  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{g}(a + b - t), t \in [a, b]$ . Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich  $\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} ds$  verändert, wenn wir  $\mathfrak{K}$  durch  $-\mathfrak{K}$  ersetzen, d.h., den

Integrationsweg entgegengesetzt durchlaufen. Wegen  $\dot{\mathbf{h}}(t) = -\dot{\mathbf{g}}(a + b - t)$  wird

$$I = \int_{-\mathfrak{K}}^a f \, ds = \int_{t=a}^b f(\mathbf{h}(t)) |\dot{\mathbf{h}}(t)| \, dt = \int_{t=a}^b f(\mathbf{g}(a + b - t)) |\dot{\mathbf{g}}(a + b - t)| \, dt. \quad (5.23)$$

Substituieren wir in (5.23)  $a + b - t = \tau$ ,  $d\tau = -dt$ , so wird

$$I = - \int_{\tau=b}^a f(\mathbf{g}(\tau)) |\dot{\mathbf{g}}(\tau)| \, d\tau = \int_{\tau=a}^b f(\mathbf{g}(\tau)) |\dot{\mathbf{g}}(\tau)| \, d\tau = \int_{\mathfrak{K}}^a f \, ds.$$

Wir haben also  $\int_{-\mathfrak{K}}^a f \, ds = \int_{\mathfrak{K}}^a f \, ds$ . Beim Kurvenintegral 2. Art ist der Sachverhalt anders.

Ist  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  eine Vektorfunktion und

$$L = \int_{-\mathfrak{K}}^a \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t=a}^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(t) \, dt,$$

so wird mit den oben verwendeten Bezeichnungen

$$\int_{-\mathfrak{K}}^a \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t=a}^b \mathbf{f}(\mathbf{h}(t)) \cdot \dot{\mathbf{h}}(t) \, dt = \int_{\tau=b}^a \mathbf{f}(\mathbf{g}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(\tau) \, d\tau = -L.$$

Beim Kurvenintegral 2. Art wechselt also bei der Umkehrung des Richtungssinnes einer orientierten Kurve das Vorzeichen. Die Ergebnisse fassen wir im folgenden Satz zusammen:

**Satz 5.4:** Das Kurvenintegral 1. Art ist von der Orientierung des Integrationsweges unabhängig, Integration über  $\mathfrak{K}$  und  $-\mathfrak{K}$  liefern beim gleichen Integranden den gleichen Wert. Dagegen wechselt ein Kurvenintegral 2. Art beim Übergang von  $\mathfrak{K}$  zu  $-\mathfrak{K}$  das Vorzeichen.

Besteht der Integrand eines Kurvenintegrals (1. oder 2. Art) aus einer Summe zweier Funktionen oder aus dem Produkt einer Funktion mit einer skalaren Größe, so gelten wegen Satz 5.1 bzw. 5.2 die gleichen Verhältnisse wie bei gewöhnlichen bestimmten Integralen (siehe Band 2, Abschn. 10.1.4.).

**Satz 5.5:** Ist  $\mathfrak{K}$  eine orientierte Kurve,  $f$  und  $g$  auf  $\mathfrak{K}$  definierte Funktionen und  $\lambda$  eine reelle Zahl, so gilt

$$a) \int_{-\mathfrak{K}}^a (f + g) \, ds = \int_{\mathfrak{K}}^a f \, ds + \int_{\mathfrak{K}}^a g \, ds, \quad b) \int_{-\mathfrak{K}}^a \lambda f \, ds = \lambda \int_{\mathfrak{K}}^a f \, ds.$$

Entsprechende Aussagen sind für Kurvenintegrale 2. Art gültig.

#### 5.4. Integration totaler Differentiale

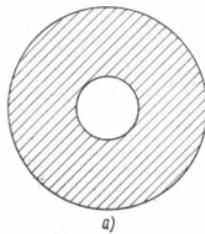
Im folgenden Abschnitt wollen wir einige für Kurvenintegrale 2. Art typische Ergebnisse herleiten. Sie setzen voraus, daß der Integrand nicht nur auf dem Integrationsweg, sondern in einem den Integrationsweg enthaltenden Gebiet definiert ist.

Es kommt dabei auch darauf an, daß die Gebiete einer bestimmten Bedingung genügen, die in der folgenden Definition angegeben wird.

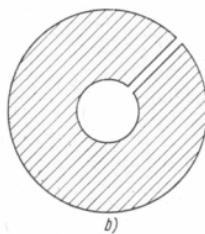
**Definition 5.8:** Ein (zwei- oder dreidimensionales) Gebiet  $G$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede in  $G$  verlaufende geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen kann, ohne  $G$  dabei zu verlassen. D.5.8

**Beispiel 5.9:** Eine (zweidimensionale) Kreisscheibe ist einfach zusammenhängend.

**Beispiel 5.10:** Das durch zwei Kreise nach Bild 5.9 a) begrenzte Gebiet  $G$  ist nicht einfach zusammenhängend, denn jede den inneren Kreis umschließende Kurve muß beim Zusammenziehen auf einen Punkt das nicht zu  $G$  gehörige Innere dieses Kreises überstreichen.  $G$  kann jedoch durch einen Schnitt nach Bild 5.9 b) in ein einfach zusammenhängendes Gebiet überführt werden. Ein solches Gebiet nennen wir nach Definition 5.9 zweifach zusammenhängend.



a)



b)

Bild 5.9

**Definition 5.9:** Ein (zwei- bzw. dreidimensionales) Gebiet  $G$  heißt **n-fach zusammenhängend**, wenn es sich durch  $n - 1$  Schnitte (entlang Geraden bzw. Ebenen) in ein einfach zusammenhängendes Gebiet umwandeln lässt. D.5.9

**Beispiel 5.11:** Die durch zwei konzentrische Kugelflächen begrenzte Hohlkugel ist einfach zusammenhängend.

**Beispiel 5.12:** Verstehen wir unter  $G$  eine Kugel, aus der nach Bild 5.10 ein Teil durch einen Zylinder herausgestoßen wurde, so ist  $G$  nicht einfach, sondern zweifach zusammenhängend.

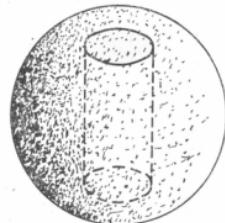


Bild 5.10

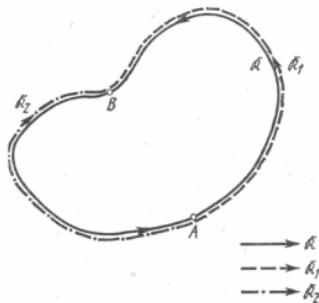


Bild 5.11

**D.5.10 Definition 5.10:** Ein Kurvenintegral 2. Art  $\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ , dessen Integrand  $\mathbf{f} = f(\mathbf{x})$  in einem Gebiet  $G$  definiert ist, heißt in  $G$  vom Integrationsweg unabhängig, wenn für jedes Punktpaar  $A, B$  aus  $G$ , gleichgültig welche ganz in  $G$  verlaufende orientierte Kurve  $\mathfrak{K}$  als Verbindung zwischen dem Anfangspunkt  $A$  und dem Endpunkt  $B$  gewählt wird, das Kurvenintegral

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

nur von  $A$  und  $B$ , nicht aber von  $\mathfrak{K}$  abhängt.

**S.5.6 Satz 5.6:**  $\mathbf{f}$  sei im Gebiet  $G$  definiert. Das Kurvenintegral 2. Art  $\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  ist genau dann in  $G$  vom Integrationsweg unabhängig, wenn für jede ganz in  $G$  verlaufende geschlossene Kurve  $\mathfrak{K}$

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

gilt.

*Beweis:* a) Es sei  $\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  in  $G$  vom Integrationsweg unabhängig und  $\mathfrak{K}$  eine beliebige, in  $G$  verlaufende geschlossene Kurve. Wir wählen zwei beliebige, aber voneinander verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  auf  $\mathfrak{K}$ .  $A$  und  $B$  zerlegen  $\mathfrak{K}$  in zwei Teile, die wir, jeweils von  $A$  nach  $B$  führend, als orientierte Kurven  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  auffassen (s. Bild 5.11). Nach Voraussetzung gilt

$$\int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}.$$

$\mathfrak{K}$  setzt sich aus  $\mathfrak{K}_1$  und  $-\mathfrak{K}_2$  zusammen. Nach Satz 5.3 und 5.4 gilt

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{-\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Aus der Voraussetzung folgt also  $\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0$  für jede geschlossene Kurve  $\mathfrak{K}$  aus  $G$ .

b) Für jede in  $G$  verlaufende geschlossene Kurve  $\mathfrak{K}$  sei

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Es seien nun  $A, B$  beliebige, voneinander verschiedene Punkte aus  $G$ , und  $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$  seien in  $G$  verlaufende, von  $A$  nach  $B$  führende orientierte Kurven. Die aus  $\mathfrak{K}_1$  und  $-\mathfrak{K}_2$  zusammengesetzte Kurve ist geschlossen. Die Voraussetzung und Satz 5.3 ergeben

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{-\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Folglich ist nach Satz 5.4

$$\int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{-\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x},$$

also  $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  vom Integrationsweg unabhängig. Damit ist Satz 5.6 bewiesen. ■

Die Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals  $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{f}(x) = (P(x), Q(x), R(x))$  tritt z.B. ein, wenn  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = P dx + Q dy + R dz$  das totale Differential  $d\Phi$  einer Funktion  $\Phi = \Phi(x)$ , d.h.  $\Phi_x = P$ ,  $\Phi_y = Q$  und  $\Phi_z = R$  ist. (Es besteht dann die Beziehung  $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \Phi$ .)

Ist nämlich  $\mathfrak{K}$  eine geschlossene Kurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , so wird mit  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{g}(t)) = F(t) \quad \text{und} \quad \frac{dF}{dt} = \Phi_x \dot{g}_1 + \Phi_y \dot{g}_2 + \Phi_z \dot{g}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(t).$$

Für das Kurvenintegral gilt dann nach Satz 5.2

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{t=a}^b \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}(t) dt = \int_{t=a}^b dF = F(b) - F(a).$$

Nach Voraussetzung ist  $\mathfrak{K}$  geschlossen, d.h.,  $\mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(b) = \mathbf{x}_0$ , und damit

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = F(b) - F(a) = \Phi(\mathbf{x}_0) - \Phi(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Satz 5.6 ergibt schließlich die Unabhängigkeit von  $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  vom Integrationsweg in jedem Gebiet, in dem  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  das totale Differential einer Funktion  $\Phi$  ist. Von diesem Sachverhalt gilt auch die Umkehrung, was hier aber nicht bewiesen werden soll. Es gilt also der folgende Satz.

**Satz 5.7:**  $\mathbf{f}$  sei in dem Gebiet  $G$  stetig.  $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ist genau dann in  $G$  vom Integrationsweg unabhängig, wenn  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  das totale Differential einer Funktion  $\Phi$  ist, d.h., wenn  $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \Phi$  in  $G$  ist. Ist  $\mathfrak{K}$  eine in  $G$  verlaufende orientierte Kurve mit dem Anfangspunkt  $(x_1, y_1, z_1)$  und dem Endpunkt  $(x_2, y_2, z_2)$ , so lässt sich das Kurvenintegral über  $\mathfrak{K}$  durch

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(x_2, y_2, z_2) - \Phi(x_1, y_1, z_1)$$

berechnen.

Es entsteht weiter die Frage, wie man es bereits  $\mathbf{f}$  ansehen kann, ob es eine Funktion  $\Phi$  mit  $\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{f}$  gibt, d.h., ob  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  das totale Differential einer Funktion  $\Phi$  ist, und wie sich  $\Phi$  aus  $\mathbf{f}$  berechnen lässt. Über den ersten Sachverhalt gibt Satz 5.8 Auskunft, dessen Beweis wir in Abschn. 7.5., Beispiel 7.7, nachholen. Zwei Methoden zur Berechnung von  $\Phi$  lernen wir in den nachfolgenden Beispielen 5.14 und 5.15 kennen.

**Satz 5.8:** *G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. In G sei f stetig und die Komponenten P, Q, R von f seien stetig partiell differenzierbar. Ferner sei in G  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$ , d.h.,  $R_y = Q_z$ ,  $P_z = R_x$  und  $Q_x = P_y$ . Dann ist  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ein totales Differential, also  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  in G vom Integrationsweg unabhängig.*

Ist das ganze Problem eben, d.h. G ein Teil der x,y-Ebene,  $R = 0$  und P, Q nur von x, y abhängig, so reduziert sich  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$  auf die dritte Gleichung  $P_y = Q_x$ .

Der einfache Zusammenhang von G ist, wie das folgende Beispiel 5.13 zeigt, eine wesentliche Voraussetzung, auf die nicht verzichtet werden kann.

**Beispiel 5.13:** Es ist  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  zu berechnen, wobei  $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x)$  und  $\Gamma$  der Einheitskreis ist. Es handelt sich hier um ein zweidimensionales Problem. Es ist

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad P_y = Q_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{für } x^2 + y^2 > 0.$$

Die Bedingung von Satz 5.8 ist also in dem zweifach zusammenhängenden Gebiet G, das aus der ganzen x,y-Ebene mit Ausnahme des Punktes (0, 0) besteht, erfüllt. Der Einheitskreis  $\Gamma$ , über den integriert werden soll, liegt ganz in G. Eine Parameterdarstellung von  $\Gamma$  ist

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Mit  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-\sin t, \cos t)$  wird

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ist also nicht vom Integrationsweg unabhängig, obwohl  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ein totales Differential ist (aber nicht in einem einfach zusammenhängenden Gebiet!).

**Beispiel 5.14:** Es sei  $\mathbf{f} = (yz, xz + y^2, xy)$ . Als erstes wollen wir untersuchen, ob  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ein totales Differential ist. Wir wenden hierzu Satz 5.8 an:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (x - x, y - y, z - z) = 0.$$

$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ist also (im ganzen Raum) ein totales Differential und  $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  vom Integrationsweg unabhängig. Wir wollen nun noch die Funktion  $\Phi$  berechnen, deren totales Differential  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ist. Wir verwenden hierzu die Beziehung  $\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{f}$ , d.h.

$$\operatorname{grad} \Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = (yz, xz + y^2, xy). \tag{5.24}$$

$\Phi$  lässt sich nun z.B. durch formale Integration von  $\Phi_x = yz$  nach x bestimmen. Es ist hierbei zu beachten, daß die *Integrationskonstante* eine von y und z abhängige Funktion sein kann. Das Ergebnis der unbestimmten Integration nach x wieder nach x differenziert ergibt nämlich  $yz$ , auch wenn noch eine Integrationskonstante  $\varphi(y, z)$  hinzugefügt wird, da  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ . Bei der formalen Integration nach x werden übrigens y

und  $z$  wie Konstante behandelt. Wir erhalten also

$$\Phi = \int yz \, dx + \varphi(y, z) = xyz + \varphi(y, z).$$

Die Funktion  $\varphi$  benötigen wir unbedingt, um  $\Phi$  auch noch den beiden restlichen Gleichungen von (5.24) anpassen zu können. Ohne  $\varphi$  wäre nämlich  $\Phi_y = xz \neq xz + y^2$ . Die Berücksichtigung der Integrationskonstanten  $\varphi$  ergibt dagegen

$$\Phi_y = xz + \varphi_y = xz + y^2.$$

Damit gilt für  $\varphi$

$$\varphi_y = y^2.$$

Formale Integration nach  $y$  ergibt

$$\varphi(y, z) = \frac{1}{3} y^3 + \psi(z).$$

Ähnlich wie bei der Integration von  $\Phi_x = yz$  muß hier die Integrationskonstante  $\psi(z)$  berücksichtigt werden, die noch zur Anpassung von  $\Phi$  an die dritte Gleichung von (5.24) benötigt wird. Es ist jetzt

$$\Phi = xyz + \frac{1}{3} y^3 + \psi(z), \quad \text{also} \quad \Phi_z = xy + \psi'(z) = xy.$$

Damit ergibt sich  $\psi'(z) = 0$  und  $\psi(z) = C = \text{const}$ . Wir haben somit

$$\Phi = xyz + \frac{1}{3} y^3 + C$$

gefunden. Die Probe ergibt, daß  $\Phi$  der Gleichung (5.24) genügt.

Die Funktion  $\Phi$  können wir nach Satz 5.7 benutzen, um bei konkret vorgegebenen  $\mathfrak{K}$  Kurvenintegrale  $\int_{\mathfrak{K}} [yz \, dx + (xz + y^2) \, dy + xy \, dz]$  zu berechnen. Es sei z.B.  $\mathfrak{K}$  eine orientierte Kurve mit dem Anfangspunkt  $(2, 0, 7)$  und dem Endpunkt  $(1, 3, 2)$ . Dann wird

$$\int_{\mathfrak{K}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(1, 3, 2) - \Phi(2, 0, 7) = 1 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{3} 3^3 + C - C = 15.$$

*Beispiel 5.15:* Eine Feder mit der Federkonstante  $a$  sei mit dem einen Ende im Punkte  $(0, 0, 0)$  befestigt. Welche Arbeit  $W$  ist gegen die Federkraft zu leisten, wenn das andere Ende der Feder auf einer von  $(x_1, y_1, z_1)$  nach  $(x_2, y_2, z_2)$  führenden Kurve  $\mathfrak{K}$  bewegt wird?

Die Federkraft sei  $\mathbf{F}$ .  $|\mathbf{F}|$  ist proportional zum Abstand des Federendes vom Nullpunkt mit dem Proportionalitätsfaktor  $a$ . Die Richtung von  $\mathbf{F}$  weist dabei zum Nullpunkt hin. Befindet sich das Federende im Punkt  $(x, y, z)$  und setzen wir  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , so gilt  $|\mathbf{F}| = a|\mathbf{x}|$  und  $\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} |\mathbf{F}| = -a\mathbf{x}$ . Das die Arbeit liefernde Kurvenintegral (s. Beispiel 5.7)

$$W = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

ist wegen  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = -a \operatorname{rot} (\mathbf{x}, y, z) = 0$  nach Satz 5.8 vom Integrationsweg  $\mathfrak{K}$  unabhängig. Es gibt also eine Funktion  $\Phi$  mit  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \Phi$ .

In der Physik nennt man eine Funktion  $\Phi$ , die zu einem Kraftfeld  $\mathbf{F}$  in der Beziehung  $\mathbf{F} = \text{grad } \Phi$  steht, die zu  $\mathbf{F}$  gehörige *Kräftefunktion*,  $-\Phi$  die *potentielle Energie* oder das *Potential* von  $\mathbf{F}$ . Besitzt  $\mathbf{F}$  ein Potential, so heißt  $\mathbf{F}$  *Potentialkraft* oder *konservative Kraft*. Dieser Sachverhalt trifft für das vorliegende Beispiel also zu. Die Federkraft ist eine konservative Kraft.

Wir wollen nun noch die Kräftefunktion  $\Phi$  bestimmen. Wir könnten dabei ebenso wie in Beispiel 5.14 vorgehen. Es soll hier jedoch ein anderer Weg eingeschlagen werden. Nach Satz 5.7 gilt

$$\int_{\mathfrak{K}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \Phi(x, y, z) - \Phi(x_0, y_0, z_0),$$

wenn  $\mathfrak{K}_0$  von  $(x_0, y_0, z_0)$  nach  $(x, y, z)$  führt. Diese Formel gestattet es uns also,  $\Phi$  bis auf die Konstante  $\Phi(x_0, y_0, z_0)$  zu bestimmen. Eine eindeutige Bestimmung von  $\Phi$  war uns aber auch in Beispiel 5.14 nicht möglich. Dort war in  $\Phi$  noch die Integrationskonstante  $C$  enthalten, die bei der Berechnung eines Kurvenintegrals mit Hilfe von  $\Phi$  aber herausfällt. Wir können also

$$\Phi(x, y, z) = \int_{\mathfrak{K}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

setzen, wobei  $\mathfrak{K}_0$  wegen der Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Wege eine beliebige, von  $(x_0, y_0, z_0)$  nach  $(x, y, z)$  führende Kurve sein kann. Wir wählen für die Integration  $\mathfrak{K}_0$  möglichst einfach. Für jeden von  $(x_0, y_0, z_0)$  verschiedenen Punkt  $(x, y, z)$  sei

$\mathfrak{K}_1$  die von  $(x_0, y_0, z_0)$  nach  $(x, y_0, z_0)$  führende orientierte Strecke,

$\mathfrak{K}_2$  die von  $(x, y_0, z_0)$  nach  $(x, y, z_0)$  führende orientierte Strecke,

$\mathfrak{K}_3$  die von  $(x, y, z_0)$  nach  $(x, y, z)$  führende orientierte Strecke

und  $\mathfrak{K}_0$  die aus  $\mathfrak{K}_1$ ,  $\mathfrak{K}_2$  und  $\mathfrak{K}_3$  zusammengesetzte orientierte Kurve (s. Bild 5.12). Zur Berechnung des Kurvenintegrals benötigen wir Darstellungen von  $\mathfrak{K}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).  $\mathfrak{K}_1$  wird dargestellt durch

$$\mathbf{x}(t) = (t, y_0, z_0), t \in [x_0, x], \text{ mit } \dot{\mathbf{x}} = (1, 0, 0).$$

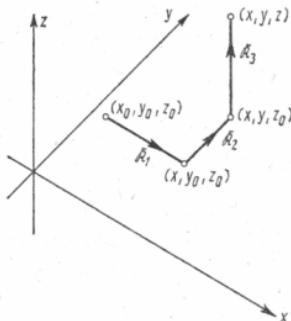


Bild 5.12

Nach Satz 5.2 wird

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t=x_0}^x \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dt = \int_{t=x_0}^x [-a(t, y_0, z_0) \cdot (1, 0, 0)] dt \\ &= -a \int_{t=x_0}^x t dt = -\frac{a}{2} (x^2 - x_0^2).\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{a}{2} (y^2 - y_0^2) \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{K}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{a}{2} (z^2 - z_0^2).$$

Nach Satz 5.3 wird

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\mathfrak{K}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{K}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\ &= -\frac{a}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2).\end{aligned}$$

Mit  $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \frac{a}{2} = C$  ist  $\Phi = -\frac{a}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + C$ . Satz 5.7 ergibt schließlich

$$W = \int_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{a}{2} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2).$$

*Aufgabe 5.4:* Untersuche, ob das Kraftfeld  $\mathbf{F} = (y, 1-x, z^2)$  aus Beispiel 5.8 ein Potential besitzt. \*

*Aufgabe 5.5:* Untersuche, ob das Kraftfeld  $\mathbf{F} = -\frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z)$  (Newton'sche Kraft) ein \* in einem geeignet zu wählenden Gebiet  $G$  ein Potential besitzt und bestimme gegebenenfalls die Kräftefunktion  $\Phi$ .

*Aufgabe 5.6:* Berechne unter Benutzung der Ergebnisse aus Beispiel 5.13 das Kurvenintegral  $\oint_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$ , \* wobei  $\mathbf{f} = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x)$  und  $\mathfrak{K}_1$  die orientierte Berandung des Quadrates mit der Seitenlänge 4, parallel zu den Achsen verlaufenden Seiten und dem Mittelpunkt  $(0, 0)$  ist.

*Anleitung:* Benutze den in Bild 5.13 dargestellten Integrationsweg  $\mathfrak{K}_0$ . Er ist geschlossen und verläuft ganz in einem einfach zusammenhängenden Gebiet ( $x, y$ -Ebene, aus der der Koordinatenursprung  $(0, 0)$  entfernt ist, und die entlang der positiven  $x$ -Achse aufgeschnitten wurde), in dem  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ein vollständiges Differential ist.

*Aufgabe 5.7:* Untersuche, ob das Vektorfeld  $\mathbf{v} = (-2x + \sin z, \cos y - y \sin z, x \cos z + 4e^{2z})$  \* ein Potential besitzt und bestimme gegebenenfalls die Kräftefunktion.

## 5.5. Kurvenintegrale anderer Art

Bei der Definition des Kurvenintegrals 1. Art (s. Def. 5.4)  $S = \int_{\mathfrak{K}} f ds$  waren wir von Zerlegungen (s. Def. 5.2) von  $\mathfrak{K}$  ausgegangen und haben die Summen der Produkte der Teilbogenlängen  $\Delta s_i$  mit

den Funktionswerten von  $f$  in einem beliebigen Punkt des Teilbogens  $\mathfrak{R}_i$  (Formel (5.1)) gebildet.  $S$  war dann der Grenzwert dieser Summen bei immer feinerer Unterteilung von  $\mathfrak{R}$ . Der Vorteil eines solchen Herangehens liegt darin, daß sich mit Definition 5.4 unmittelbar entsprechende geometrische, physikalische oder technische Probleme modellieren lassen.

In Satz 5.1 hatten wir dann

$$\int_{\mathfrak{R}} f \, ds = \int_{t=a}^b f(g(t)) |\dot{g}(t)| \, dt \quad (5.25)$$

gefunden, wenn  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , eine Darstellung der orientierten Kurve  $\mathfrak{R}$  ist. Die Formel (5.25) hätten wir auch zur Definition von  $\int_{\mathfrak{R}} f \, ds$  benutzen können: Ist  $\mathfrak{R}$  eine Kurve mit der Darstellung  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , und  $f$  eine auf  $\mathfrak{R}$  definierte Funktion, so verstehen wir unter  $\int_{\mathfrak{R}} f \, ds$  das Integral auf der rechten

Seite von Formel (5.25), falls es existiert. Von dieser Definition ausgehend hätten wir die gleichen Ergebnisse erhalten, die wir mit Definition 5.4 als Ausgangspunkt fanden. Dieser Weg bietet sich vor allem an, wenn man, z.B. zur Sicherung der Existenz von Kurvenintegralen unter weniger einschränkenden Bedingungen, den Begriff des Kurvenintegrals allgemeiner fassen will. So kann z.B. bei der Definition des Kurvenintegrals mit Hilfe von Formel (5.25) das Integral auf der rechten Seite von Formel (5.25) als Lebesguesches Integral oder anderes Integral (s. Band 2, 2.3.5.) aufgefaßt werden. Analog kann man natürlich auch mit dem Kurvenintegral 2. Art und den Darstellungsformeln aus Satz 5.2 verfahren.

Eine weitere Verallgemeinerung erhalten wir auf folgende Art. Es seien  $\mathfrak{R}$  eine Kurve mit der Darstellung  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , und  $f, h$  auf  $\mathfrak{R}$  definierte Funktionen. Unter  $\int_{\mathfrak{R}} f \, dh$  verstehen wir dann das Stieltjessche Integral (im Sinne von Riemann oder Lebesgue, s. Band 2, 10.5.)  $\int_a^b f(g(t)) \, dh(g(t))$ . Das Kurvenintegral 1. Art  $\int_{\mathfrak{R}} f \, ds$  ist jetzt ein Spezialfall dieses allgemeineren Kurvenintegrals, wenn wir unter der Funktion  $s = s(g(t))$  die Bogenlänge über dem Intervall  $[a, t]$  verstehen.

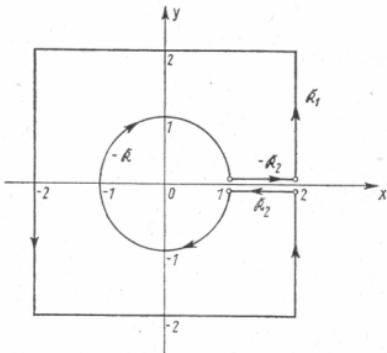


Bild 5.13  
Integrationsweg  $\mathfrak{R}_0$ , zusammengesetzt aus  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$ ,  $-\mathfrak{R}$  und  $-\mathfrak{R}_2$

## 6. Oberflächenintegrale

Unser Ziel ist es, ähnlich wie wir in 5.1. das bestimmte Integral zum Kurvenintegral erweitert haben, auch das Bereichsintegral für ebene Bereiche zum Integral über räumlich gekrümmte Flächen zu erweitern. Beim Kurvenintegral stand uns mit der Bogenlänge bereits ein Maß für die bei der Zerlegung der Kurve entstehenden Teile zur Verfügung (s. Def. 5.3, 5.4 und Abschnitt 5.2.). Wenn wir von den Rotationsflächen absehen, fehlt uns aber noch eine Definition für den Flächeninhalt gekrümmter Flächen. Wir werden sie in Abschnitt 6.1. bereitstellen. In Abschnitt 6.3. können wir dann auf der Grundlage dieser Definition in Analogie zu den Kurvenintegralen Oberflächenintegrale erster und zweiter Art einführen.

### 6.1. Definition und Berechnung des Inhalts krummer Flächenstücke

Es sei  $\tilde{\gamma}$  eine (endliche) räumlich gekrümmte Fläche. Die Projektion  $B$  von  $\tilde{\gamma}$  auf die  $x,y$ -Ebene (parallel zur  $z$ -Achse, s. Bild 6.1) sei meßbar, d.h.,  $\iint_B db$  existiert.

Jeder Projektionsstrahl soll  $\tilde{\gamma}$  dabei nur einmal treffen. Ordnen wir nun jedem Punkt  $(x, y)$  aus  $B$  die Ordinate  $z$  des Punktes von  $\tilde{\gamma}$  zu, in dem der Projektionsstrahl durch  $(x, y)$  die Fläche  $\tilde{\gamma}$  trifft, so erklären wir auf  $B$  eine Funktion  $f: z = f(x, y)$  (s. Bild 6.1).

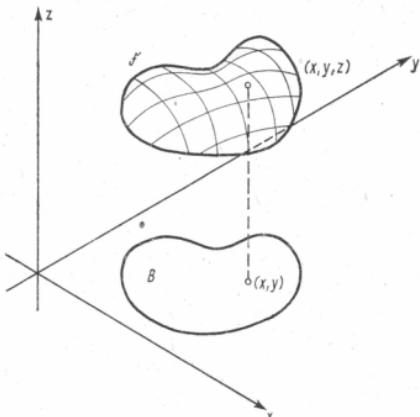


Bild 6.1

Umgekehrt erhalten wir durch jedes Paar  $B, f$ , wobei  $B$  ein endlicher Teilbereich der  $x,y$ -Ebene und  $f$  eine auf  $B$  definierte Funktion ist, eine räumlich gekrümmte Fläche, die aus den Punkten  $(x, y, f(x, y))$  mit  $(x, y) \in B$  besteht. Von der Funktion  $f$  wollen wir verlangen, daß sie auf  $B$  stetig und stetig partiell differenzierbar ist.

An  $\mathfrak{F}$  können wir in jedem Punkt eine Tangentialebene legen. Der Anstieg der Tangentialebene im Punkt  $(\xi, \eta, f(\xi, \eta))$  in  $x$ -Richtung ist  $a = f_x(\xi, \eta)$ , in  $y$ -Richtung  $b = f_y(\xi, \eta)$ . Damit können wir die Gleichung dieser Tangentialebene in der Form

$$z = ax + by + c \quad (6.1)$$

schreiben, wobei  $c = f(\xi, \eta) - \xi f_x(\xi, \eta) - \eta f_y(\xi, \eta)$  ist. Die Gleichung (6.1) können wir mit  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  und  $\mathbf{m} = (-a, -b, 1)$  umformen in

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} = c.$$

$\mathbf{m}$  ist dann ein senkrecht auf der Tangentialebene stehender Vektor (s. Band 13). Den Einheitsvektor von  $\mathbf{m}$  bezeichnen wir durch  $\mathbf{n}$  und nennen ihn Normalenvektor der Tangentialebene. Da die Tangentialebene die Fläche  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $(\xi, \eta, f(\xi, \eta))$  berührt, steht  $\mathbf{n}$  in diesem Punkt auch *senkrecht* auf  $\mathfrak{F}$ . Wir nennen  $\mathbf{n}$  deshalb auch *Normalenvektor* von  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $(\xi, \eta, f(\xi, \eta))$ . Für  $\mathbf{n}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{1}{|\mathbf{m}|} \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} (-a, -b, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi, \eta) + f_y^2(\xi, \eta)}} (-f_x(\xi, \eta), -f_y(\xi, \eta), 1). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Unter den oben für  $\mathfrak{F}$  gemachten Voraussetzungen läßt sich nun eine Folge  $(p_i)_{i=1,2,\dots}$  von auf  $B$  erklärten stetigen und stückweise linearen Funktionen angeben, die den weiter unten angeführten zusätzlichen Bedingungen (a) bis (d) genügt. Stückweise linear bedeutet, daß sich der Graph von  $p_i$  aus Teilen von Ebenen zusammensetzt. Wegen der Stetigkeit schließen sich die Ebenen ohne Sprünge aneinander. Der Graph von  $p_i$  ist also Teil der Oberfläche eines Polyeders. Wir sagen hierzu kurz *polyedrische Fläche*.  $p_i$  sei jeweils auf Teilbereichen  $B_{ik}$  ( $1 \leq k \leq m_i$ ) von  $B$  linear, d.h.,  $z = p_i(x, y)$  stellt über  $B_{ik}$  eine Ebene dar, deren Normalenvektor  $\mathbf{n}_{ik}$  sei.  $\alpha_i$  sei das Maximum der Durchmesser der  $B_{ik}$  ( $1 \leq k \leq m_i$ ) (s. 2.1., Def. 2.2).  $\beta_i$  sei das Maximum von  $|f(x, y) - p_i(x, y)|$ , wobei  $(x, y)$  ganz  $B$  durchläuft. Die zusätzlichen Bedingungen für die Folge  $(p_i)$  sind:

(a)  $(m_i)_{i=1,2,\dots}$  ist eine monoton wachsende Folge.

(b)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$ .

(c)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta_i = 0$ .

(d) In  $B_{ik}$  gibt es für jedes  $i = 1, 2, \dots$  und  $k = 1, 2, \dots, m_i$  einen Punkt  $(\xi_{ik}, \eta_{ik})$ , so daß die Normale an  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $(\xi_{ik}, \eta_{ik}, f(\xi_{ik}, \eta_{ik}))$  mit  $n_{ik}$  übereinstimmt.

Die Teilbereiche  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{im_i}$  von  $B$  bilden jeweils eine Zerlegung von  $B$ . Wegen der Bedingungen (a) und (b) bilden diese Zerlegungen für  $i = 1, 2, \dots$  eine *ausgezeichnete* Folge von Zerlegungen von  $B$  (s. 2.1., Def. 2.3). Die Bedingungen (c) und (d) sichern uns, daß sich die durch  $p_i$  dargestellten polyedrischen Flächen  $\mathfrak{P}_i$  mit

wachsendem  $i$  immer mehr der Fläche  $\tilde{\gamma}$  nähern. Den Flächeninhalt  $A_i$  von  $\tilde{\gamma}_i$  können wir aber leicht berechnen. Besitzt nun die Folge  $(A_i)_{i=1,2,\dots}$  einen Grenzwert  $A$ , so ist es naheliegend, diesen Wert  $A$  als Flächeninhalt der gekrümmten Fläche  $\tilde{\gamma}$  einzuführen.

Wir wollen jetzt den Flächeninhalt  $A_i$  von  $\tilde{\gamma}_i$  berechnen. Das über  $B_{ik}$  gelegene Ebenenstück sei  $\tilde{\beta}_{ik}$ . In die Spur der Ebene  $E$ , in der  $\tilde{\beta}_{ik}$  liegt, mit der  $x,y$ -Ebene legen wir eine  $u$ -Achse und senkrecht zu ihr (ebenfalls in der  $x,y$ -Ebene) eine  $v$ -Achse. Senkrecht zur  $u$ -Achse legen wir in die Ebene  $E$  eine  $\bar{v}$ -Achse. Die Beziehung zwischen den Punkten  $(u, \bar{v})$  von  $E$  und ihren Projektionen  $(u, v)$  in der  $u,v$ -Ebene wird durch

$$v = \bar{v} \cos \gamma \quad (6.3)$$

wiedergegeben. Hierbei ist  $\gamma$  der Winkel zwischen  $E$  und der  $u,v$ -Ebene. Dieser Winkel liegt auch zwischen  $\mathbf{n}_{ik}$  und der  $z$ -Achse (s. Bild 6.2).

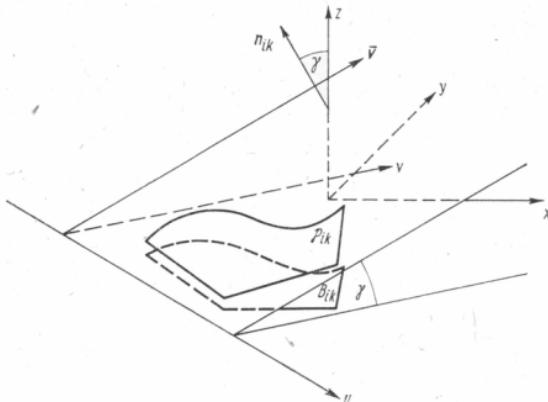


Bild 6.2

Die Funktionaldeterminante für den Übergang von  $u, \bar{v}$ -Koordinaten zu  $u, v$ -Koordinaten (vgl. Abschnitt 4.1.) folgt aus (6.3) zu

$$\frac{\partial(u, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \gamma} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Mit  $A_{ik}$  als Flächeninhalt von  $\tilde{\gamma}_i$  und  $\Delta B_{ik}$  als Flächeninhalt von  $B_{ik}$  gilt

$$A_{ik} = \iint_{B_{ik}} \frac{\partial(u, \bar{v})}{\partial(u, v)} \, db = \frac{1}{\cos \gamma} \iint_{B_{ik}} db = \frac{\Delta B_{ik}}{\cos \gamma}$$

(siehe Abschn. 4.2.). Ist  $e_3$  der Einheitsvektor in Richtung der  $z$ -Achse, so gilt

$$\cos \gamma = e_3 \cdot \mathbf{n}_{ik}. \quad (6.4)$$

Nach Bedingung (d) gibt es nun einen Punkt  $(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \in B_{ik}$ , so daß die Normale  $\mathbf{n}$  an  $\mathfrak{F}$  mit  $\mathbf{n}_{ik}$  übereinstimmt. Berücksichtigen wir  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{ik}$  und Formel (6.2) in (6.4), so erhalten wir

$$\cos \gamma = (0, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} (-f_x, -f_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad (6.5)$$

wobei  $f_x$  und  $f_y$  im Punkte  $(\xi_{ik}, \eta_{ik})$  zu nehmen sind. Damit wird

$$A_{ik} = \frac{\Delta B_{ik}}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_{ik}, \eta_{ik}) + f_y^2(\xi_{ik}, \eta_{ik})} \Delta B_{ik}$$

und

$$A_i = \sum_{k=1}^{m_i} \sqrt{1 + f_x^2(\xi_{ik}, \eta_{ik}) + f_y^2(\xi_{ik}, \eta_{ik})} \Delta B_{ik}.$$

Da nach (a) und (b) die  $B_{ik}$  eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen von  $B$  erklären und  $f_x, f_y$  stetig sind, konvergieren die  $A_i$  gegen ein Bereichsintegral über  $B$ :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, db$$

(siehe 2.1., Def. 2.5). Nach unseren oben angestellten Überlegungen wollten wir diesen Grenzwert als Flächeninhalt  $A$  von  $\mathfrak{F}$  einführen.

**D.6.1 Definition 6.1:** Die endliche Fläche  $\mathfrak{F}$  sei durch  $z = f(x, y)$  über dem meßbaren Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene gegeben, wobei die Funktion  $f$  stetig und stetig partiell differenzierbar sei. Dann definieren wir

$$A = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, db$$

als Flächeninhalt von  $\mathfrak{F}$ .

**Beispiel 6.1:** Über dem Einheitskreis  $B = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$  sei durch  $z = xy$  die Fläche  $\mathfrak{F}$  gegeben. Es ist also  $f(x, y) = xy$  mit  $f_x = y$  und  $f_y = x$ . Für den Flächeninhalt  $A$  von  $\mathfrak{F}$  gilt dann

$$A = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, db = \iint_B \sqrt{1 + y^2 + x^2} \, db.$$

Wegen der Gestalt von  $B$  und des Integranden läßt sich dieses Integral am besten in Polarkoordinaten auswerten:

$$A = \iint_B \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, db = \iint_B \sqrt{1 + r^2} r \, dr \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

\* Aufgabe 6.1: Es ist der Flächeninhalt der Zylinderfläche  $z = \sqrt{1 - x^2}$  zu berechnen, die sich über dem Einheitskreis  $B = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$  befindet.

## 6.2. Parameterdarstellung von Flächenstücken

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir Flächenstücke  $\tilde{\gamma}$  durch die Projektion  $B$  von  $\tilde{\gamma}$  auf die  $x,y$ -Ebene und durch die Funktion  $f$ , die aus der Zuordnung  $(x, y) \rightarrow z$  für  $(x, y, z) \in \tilde{\gamma}$  entsteht (siehe 6.1.), dargestellt. Voraussetzung war dabei, daß jeder Projektionsstrahl durch  $(x, y) \in B$  das Flächenstück  $\tilde{\gamma}$  in nur einem Punkt trifft. Dieser Sachverhalt ist aber selbst für relativ einfache Flächen, wie z.B. für die Kugel, bei der jeder zu einem inneren Punkt von  $B$  gehörige Projektionsstrahl die Kugelfläche zweimal trifft, nicht mehr gegeben. Es ist deshalb zweckmäßig, zu einer anderen Form der Darstellung überzugehen, die die bisher benutzte Form als Spezialfall enthält. Wir gehen dabei ähnlich vor wie bei den Raumkurven in Abschnitt 5.1. (vergleiche insbesondere Def. 5.1). In Abschnitt 6.1. haben wir von räumlich gekrümmten Flächen gesprochen, ohne diesen Begriff näher zu definieren. Dies wollen wir jetzt nachholen (vgl. auch Bd. 4, 2.6.4., oder Bd. 6, 4.1.1. und 4.1.5.).

**Definition 6.2:** Es sei  $M$  ein meßbarer Bereich der  $u,v$ -Ebene, dessen Rand im Sinn D.6.2 der Def. 5.1 eine Kurve ist, sowie  $g_1, g_2, g_3$  auf  $M$  stetige Funktionen. Ferner sei  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$  stückweise<sup>1)</sup> stetig partiell differenzierbar mit

$$\left| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right| \neq 0.$$

Dann nennen wir die Menge aller Punkte  $(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$  des  $\mathbb{R}^3$ , wobei  $(u, v)$  ganz  $M$  durchläuft, eine Fläche  $\tilde{\gamma}$ .  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(u, v), (u, v) \in M$ , nennen wir Parameterdarstellung oder auch kurz Darstellung von  $\tilde{\gamma}$ .

Die in Abschnitt 6.1. verwendeten Flächen entsprechen der Definition 6.2. Ist  $B$  ein meßbarer Bereich der  $x,y$ -Ebene und  $\tilde{\gamma}$  durch die Punkte  $(x, y, f(x, y))$  mit  $(x, y) \in B$  gegeben, wobei  $f$  auf  $B$  stetig und stetig partiell differenzierbar sein soll, so können wir  $x = u, y = v, g_1(u, v) = u, g_2(u, v) = v$  und  $g_3(u, v) = f(u, v)$  setzen und erhalten eine Definition 6.2 entsprechende Darstellung von  $\tilde{\gamma}$  in  $\mathbf{g} = (u, v, f(u, v)), (u, v) \in B$ .

Wir wollen nun für die Parameterdarstellung die Flächennormale  $\mathbf{n}$  bestimmen. Hierzu betrachten wir vorerst eine Kurve  $\tilde{\gamma}$  mit der Darstellung  $\mathbf{h}(t), t \in I$ . Die Ableitung  $\dot{\mathbf{r}}$

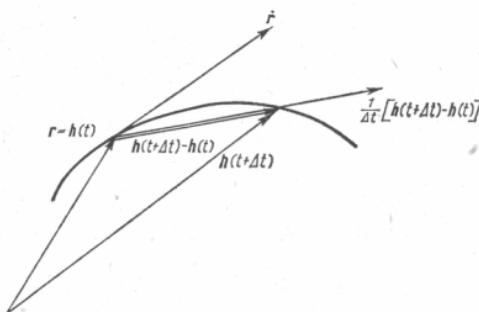


Bild 6.3

<sup>1)</sup> Stückweise soll hier bedeuten, daß sich  $M$  in endlich viele Teilbereiche  $M_1, M_2, \dots, M_n$  zerlegen läßt (die alle meßbar sind und durch Kurven berandet werden), auf denen  $\mathbf{g}$  stetig differenzierbar ist. Auf den die Bereiche  $M_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) trennenden Kurven braucht  $\mathbf{g}$  nur stetig zu sein.

von  $\mathbf{r} = \mathbf{h}(t)$  ist der Grenzwert von  $\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{h}(t + \Delta t) - \mathbf{h}(t)]$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ .  $\dot{\mathbf{r}}$  hat deshalb die Richtung der Tangente an  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $\mathbf{r} = \mathbf{h}(t)$  (vergleiche Bild 6.3). Ist nun  $\mathfrak{F}$  eine Fläche mit der Darstellung  $\mathbf{g}(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$  und  $(u_0, v_0) \in M$ , so setzen wir  $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{g}(t, v_0)$  und  $\mathbf{g}_2(t) = \mathbf{g}(u_0, t)$ . Sind  $I_1$  bzw.  $I_2$  geeignete Intervalle um  $u_0$  bzw.  $v_0$ , die noch ganz in  $M$  liegen (s. Bild 6.4), so sind die durch  $\mathbf{g}_1(t)$ ,  $t \in I_1$ , und  $\mathbf{g}_2(t)$ ,  $t \in I_2$ , dargestellten Kurven  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  so beschaffen, daß sie in  $\mathfrak{F}$  verlaufen und sich in  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g}(u_0, v_0)$  kreuzen (s. Bild 6.5). Die Tangenten an  $\mathfrak{K}_1$  und  $\mathfrak{K}_2$  in  $\mathbf{r}_0$  liegen aber in der

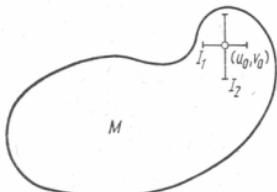


Bild 6.4

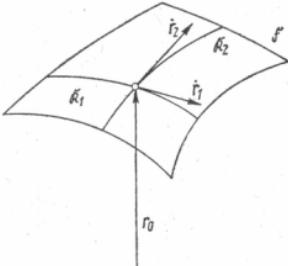


Bild 6.5

Tangentialebene an  $\mathfrak{F}$  im Punkt  $\mathbf{r}_0$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{g}}_1(u_0)$  und  $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{g}}_2(v_0)$  haben die Richtungen der beiden Tangenten,  $\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2$  steht demnach senkrecht auf der Tangentialebene.

Wir können also  $\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2}{|\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2|}$  setzen. Damit haben wir  $\mathfrak{F}$  gleichzeitig eine bestimmte Orientierung gegeben, denn wir haben eine Seite von  $\mathfrak{F}$ , nach der  $\mathbf{n}$  jeweils zeigt, ausgezeichnet. Vertauschung der Reihenfolge von  $\dot{\mathbf{r}}_1$  und  $\dot{\mathbf{r}}_2$  im Kreuzprodukt hätte das Vorzeichen von  $\mathbf{n}$  geändert und damit die andere Seite von  $\mathfrak{F}$  ausgezeichnet. Wir wollen uns dabei auf Flächen beschränken, die zwei Seiten haben. Es sei hier darauf hingewiesen, daß es auch Flächen mit nur einer Seite gibt, z.B. das Möbius-sche Band (s. [6], S. 179, oder [4], S. 391).

Wenn wir  $\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{g} = \mathbf{g}_u = \left( \frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_3}{\partial u} \right)$  und  $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{g} = \mathbf{g}_v = \left( \frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial v}, \frac{\partial g_3}{\partial v} \right)$  setzen, wird  $\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{g}_u(u_0, v_0)$  und  $\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{g}_v(u_0, v_0)$ . Damit wird

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v}{|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v|}. \quad (6.6)$$

Berücksichtigen wir dies in (6.4), so erhalten wir mit

$$\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ g_{1u} & g_{2u} & g_{3u} \\ g_{1v} & g_{2v} & g_{3v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{1u} & g_{2u} \\ g_{1v} & g_{2v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

da ja  $x = g_1(u, v)$ ,  $y = g_2(u, v)$  die Beziehung zwischen  $x, y$ -Ebene und  $u, v$ -Ebene darstellt (s. Abschn. 4.2.), die (6.5) entsprechende Formel

$$\cos \gamma = \frac{1}{|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v|} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (6.7)$$

Mit Formel (6.5) können wir den Flächeninhalt  $A$  von  $\tilde{\Sigma}$  in Definition 6.1 auch in der Form

$$A = \iint_B \frac{db}{\cos \gamma} \quad (6.8)$$

schreiben. Nehmen wir in (6.8) noch die Koordinatentransformation  $x = g_1(u, v)$ ,  $y = g_2(u, v)$  vor, so geht  $B$  in  $M$  und (6.8) in

$$A = \iint_M \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dm \quad (6.9)$$

über. Berücksichtigung von (6.7) ergibt schließlich

$$A = \iint_M |\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v| dm. \quad (6.10)$$

**Definition 6.3:** Ist  $\tilde{\Sigma}$  eine Fläche mit der Darstellung  $\mathbf{g}(u, v) = (g_1, g_2, g_3)$ ,  $(u, v) \in M$ , so **D.6.3** erklären wir

$$E = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \right)^2 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial u} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} = \frac{\partial g_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial g_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial v},$$

$$G = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right)^2 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_2}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial g_3}{\partial v} \right)^2.$$

Mit Def. 6.3 wird dann wegen  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$  (s. Band 13)

$$|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v| = \sqrt{EG - F^2}. \quad (6.11)$$

In (6.10) eingesetzt, ergibt dies den Flächeninhalt  $A$  einer Fläche  $\tilde{\Sigma}$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$ , entsprechend Definition (6.1) zu

$$A = \iint_M \sqrt{EG - F^2} dm. \quad (6.12)$$

Wichtig ist, daß wir in (6.12) keine Rücksicht darauf zu nehmen brauchen, wie oft ein Projektionsstrahl parallel zur  $z$ -Achse die Fläche  $\tilde{\Sigma}$  trifft.

**Beispiel 6.2:** Die räumliche Fläche  $\tilde{\Sigma}$  werde durch Rotation der ebenen Kurve  $\tilde{\Gamma}$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ , (in der  $x, y$ -Ebene) um die  $x$ -Achse erzeugt. Hierbei sei  $y(t) \geq 0$ . Eine Darstellung der räumlichen Fläche  $\tilde{\Sigma}$  erhält man durch  $\mathbf{h}(t, \varphi) = (x(t), y(t) \cos \varphi, y(t) \sin \varphi)$ ,  $(t, \varphi) \in M = \{(t, \varphi) \mid t \in I, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ . Wir erhalten  $E = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = y^2$  und  $\sqrt{EG - F^2} = y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . ( $t$  übernimmt hier die Rolle von  $u$ ,  $\varphi$  die von  $v$ .) Nach Formel (6.12) wird der Flächeninhalt von  $\tilde{\Sigma}$

$$A = \iint_M \sqrt{EG - F^2} dm = \int_I \int_0^{2\pi} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\varphi dt = 2\pi \int_I y ds.$$

Für den Schwerpunkt  $(x_0, y_0)$  von  $\mathfrak{F}$  gilt

$$y_0 = \frac{1}{a} \int_I y \, ds \text{ mit } a = \int_I ds.$$

Der Flächeninhalt von  $\mathfrak{F}$  läßt sich dann durch

$$A = 2\pi y_0 a$$

darstellen. In Worten läßt sich das wie folgt ausdrücken:

*Der Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers ist gleich der Länge der erzeugenden Kurve mal der Länge des Weges, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation zurücklegt.*

Diese Aussage wird als *zweite Guldinsche Regel* bezeichnet. In ähnlicher Weise kann auch die *erste Guldinsche Regel* hergeleitet werden:

*Der Rauminhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Flächeninhalt der erzeugenden Fläche mal der Länge des Weges, den der Schwerpunkt der Fläche bei der Rotation zurücklegt.*

*Beispiel 6.3:* Aus einer Kugel mit dem Radius  $R$ , deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, werden durch zwei sich in der  $z$ -Achse berührende Zylinder mit dem Radius  $\frac{R}{2}$  Teile herausgeschnitten. Es ist der Flächeninhalt  $A$  der Restfläche  $\mathfrak{F}$  der Kugel zu berechnen. Diese Aufgabenstellung wird als *Florentiner Problem* bezeichnet. Sie wurde 1692 von V. Viviani gestellt.

Eine Draufsicht auf  $\mathfrak{F}$  zeigt Bild 6.6a). Wegen der Symmetrie von  $\mathfrak{F}$  genügt es, den Inhalt des im ersten Oktanten gelegenen Teils  $\mathfrak{F}_1$  von  $\mathfrak{F}$  zu bestimmen (s. Bild 6.6b) und c)). Der gesamte Flächeninhalt hat dann den achtfachen Wert. Zur Darstellung von  $\mathfrak{F}_1$  benutzen wir Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases}$$

Da  $\mathfrak{F}_1$  ein Teil der Kugelfläche mit dem Radius  $R$  um den Koordinatenursprung ist, ist  $r = R$ .  $\varphi$  entspricht der geographischen Länge,  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen positiver  $z$ -Achse und der Verbindung zwischen Koordinatenursprung und Kugelpunkt (Polabstand). Mit  $\varphi = u$  und  $\vartheta = v$  wird

$$g(u, v) = R(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

Um den ersten Oktanten zu überstreichen, muß  $u$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  laufen. Bei festem  $u$  ist der Winkel  $v_0$  zum Schnittpunkt zwischen Zylinder- und Kugelfläche gleich  $\frac{\pi}{2} - u$  (s. Bild 6.6c)), in dem der zum Winkel  $u$  gehörige Kugelgroßkreis gezeichnet ist). Der zu  $\mathfrak{F}_1$  gehörige Bereich  $M_1$  ist also festgelegt durch  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} - u \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ .  $g(u, v), (u, v) \in M$ , ist eine Darstellung von  $\mathfrak{F}_1$ .

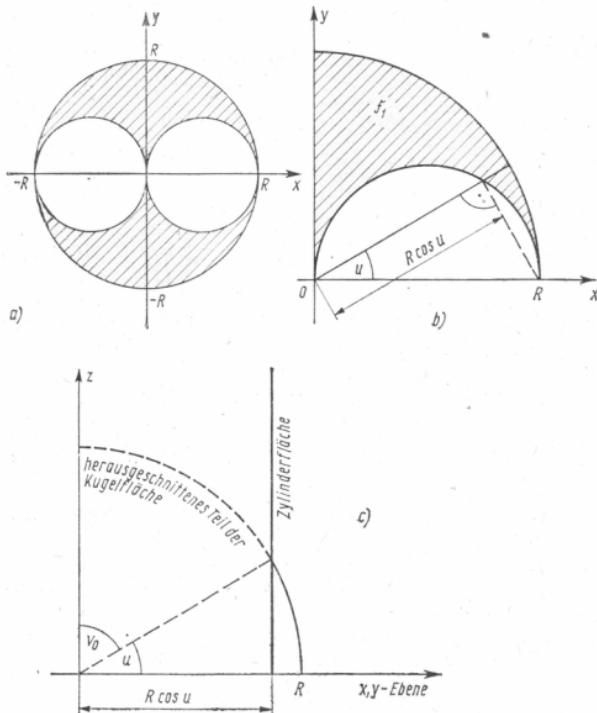


Bild 6.6 a) b) c)

Mit

wird

$$E = R^2(\sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \sin^2 v) = R^2 \sin^2 v,$$

$$F = R^2(-\sin u \cos u \sin v \cos v + \sin u \cos u \sin v \cos v) = 0,$$

$$G = R^2(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = R^2$$

und  $\sqrt{EG - F^2} = R^2 |\sin v| = R^2 \cdot \sin v$  wegen  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Für den Flächeninhalt von  $\mathfrak{D}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= 8 \iint_{M_1} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin v \, dv \, du \\ &= 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \, du = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \, du = 8R^2. \end{aligned}$$

- \* **Aufgabe 6.2:** Berechne den Teil der in Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  durch  $z = h \left(1 - \frac{r}{a}\right)$ ,  $0 \leq z \leq h$ , gegebenen Kegelfläche, die innerhalb des Kreiszylinders  $r = a \cos \varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  liegt. Skizziere den Schnitt des Zylinders mit der  $x,y$ -Ebene, also die Kurve  $r = a \cos \varphi$  mit  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  in der  $x,y$ -Ebene. Verwende zur Darstellung dieses Teiles der Kegelfläche Zylinderkoordinaten.  $g$  soll dabei eine Funktion von  $r$  und  $\varphi$  sein.

### 6.3. Definition und Berechnung von Oberflächenintegralen

**D.6.4 Definition 6.4:** Es sei  $\mathfrak{F}$  eine Fläche (nach Definition 6.2) und  $F$  eine mindestens auf  $\mathfrak{F}$  definierte Funktion. Wir zerlegen  $\mathfrak{F}$  in  $i$  messbare Teile (für jeden Teil ist nach Formel (6.12) der Flächeninhalt berechenbar) mit dem Flächeninhalt  $\Delta f_{ik}$ , wählen aus jedem Teil einen Punkt  $Q_{ik}$  beliebig aus und bilden die Summe

$$\sum_{k=1}^i F(Q_{ik}) \Delta f_{ik}. \quad (6.13)$$

Wir lassen nun  $i$  gegen Unendlich gehen und wählen die Zerlegungen dabei so, daß eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen entsteht (vgl. Def. 2.3). Streben die Summen (6.13) für  $i$  gegen Unendlich unabhängig von der gewählten Zerlegungsfolge und unabhängig von der Wahl der Punkte  $Q_{ik}$  gegen ein und denselben Grenzwert, so bezeichnen wir diesen Grenzwert durch

$$\iint_{\mathfrak{F}} F(P) \, df$$

und nennen ihn **Oberflächenintegral 1. Art über die Fläche  $\mathfrak{F}$  mit dem Integranden  $F$ .**

Ganz analog wie bei den Kurvenintegralen (vergleiche Abschn. 5.2.) können wir die Berechnung der Oberflächenintegrale auf die Berechnung von Bereichsintegralen zurückführen. Wir wollen die Gedankengänge nicht noch einmal wiederholen, sondern sofort das Ergebnis angeben:

**S.6.1 Satz 6.1:** Es sei  $\mathfrak{F}$  eine Fläche mit der Darstellung  $g(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$ , und  $F$  eine auf  $\mathfrak{F}$  definierte und stetige Funktion. Dann existiert das Oberflächenintegral 1. Art  $\iint_{\mathfrak{F}} f(P) \, df$ , und es gilt

$$\boxed{\iint_{\mathfrak{F}} F(P) \, df = \iint_M F(g(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.}$$

$E$ ,  $F$  und  $G$  sind hierbei nach Definition 6.3 zu berechnen.

Auf Oberflächenintegrale 1. Art führt z.B. die Berechnung des Schwerpunktes räumlich gekrümmter Flächen oder die Berechnung von Trägheitsmomenten solcher Flächen.  $\frac{1}{A} \iint_{\mathfrak{F}} x \, df$  liefert z.B. die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes, wobei  $A = \iint_{\mathfrak{F}} df$  der Flächeninhalt von  $\mathfrak{F}$  ist.

**Beispiel 6.4:** Es sind die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des Schwerpunktes der im ersten Oktanten gelegenen Fläche  $\mathfrak{F}_1$  des Florentiner Problems (s. Beispiel 6.3) zu bestimmen.

Wir verwenden die gleiche Darstellung von  $\tilde{\Omega}_1$  wie in Beispiel 6.3. Mit  $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin v$  hatten wir dort

$$A = \iint_{\tilde{\Omega}_1} df = \iint_{M_1} \sqrt{EG - F^2} du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin v dv du = R^2$$

gefunden. Die Integrationsgrenzen bleiben bei der Schwerpunktbestimmung dieselben, da ja ebenfalls über  $\tilde{\Omega}_1$  zu integrieren ist. Der Integrand 1 wird dagegen durch  $F(x, y, z) = x$  bzw.  $y$  bzw.  $z$  ersetzt.

$$\xi = \frac{1}{R^2} \iint_{\tilde{\Omega}_1} x df = \frac{1}{R^2} \iint_{M_1} R \cos u \sin v \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sin^2 v dv du = \frac{3\pi - 4}{12} R,$$

$$\eta = \frac{1}{R^2} \iint_{\tilde{\Omega}_1} y df = \frac{1}{R^2} \iint_{M_1} R \sin u \sin v \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin u \sin^2 v dv du = \frac{2}{3} R,$$

$$\zeta = \frac{1}{R^2} \iint_{\tilde{\Omega}_1} z df = \frac{1}{R^2} \iint_{M_1} R \cos v \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$= R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sin v dv du = \frac{\pi}{8} R.$$

*Aufgabe 6.3:* Der im 1. Oktanten liegende Teil  $\tilde{\Omega}$  der Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  sei mit \* Masse der Dichte  $\frac{h}{1+z}$  belegt. Berechne die Gesamtmasse. Das gleiche Problem entsteht, wenn man  $\tilde{\Omega}$  als Schale der Dicke  $\frac{h}{1+z}$  auffaßt, wobei  $h$  klein gegenüber  $R$  ist, und das Volumen berechnet. Die Dicke nimmt dabei vom Wert  $h$  in der  $x,y$ -Ebene bis zum Wert  $\frac{h}{1+R}$  im höchsten Punkt der Kugel ab.

Wir kommen nun zur Definition der Oberflächenintegrale 2. Art. Ähnlich wie bei den Kurvenintegralen 2. Art ersetzen wir in Formel (6.13) den Flächeninhalt  $\Delta f_{ik}$

durch seine Projektion auf eine der Koordinatenebenen. Wir wollen dabei jedoch den Projektionen ein bestimmtes Vorzeichen zuordnen. Wir benutzen hierzu die durch die Normale  $n$  nach Formel (6.6) gegebene *Orientierung* der Fläche  $\tilde{\gamma}$ . Sie ist von der Darstellung abhängig. Bei geschlossenen Flächen  $\tilde{\gamma}$  wollen wir nur solche Darstellungen zulassen, bei denen die Normale nach außen zeigt. Ist  $\tilde{\gamma}$  nicht geschlossen, so legen wir willkürlich eine Seite von  $\tilde{\gamma}$  als *Außenseite* fest und lassen dann ebenfalls nur Darstellungen zu, bei denen die Normale nach außen zeigt. Wir ordnen nun der Projektion von  $\Delta f_{ik}$  auf eine der Koordinatenebenen ( $y,z$ -,  $x,z$ - oder  $x,y$ -Ebene) das Plus-Zeichen zu, wenn wir bei der Projektion auf die Außenseite blicken, und wir ordnen ihr das Minus-Zeichen zu, wenn wir auf die andere Seite, die wir *Innenseite* nennen wollen, blicken. In Bild 6.7 sind die Verhältnisse bei Projektion auf die  $x,y$ -Ebene dargestellt. Blickt man zum Teil auf die Außen- und zum Teil auf die Innenseite, so wird die Teilfläche durch die Trennlinie nochmals unterteilt.

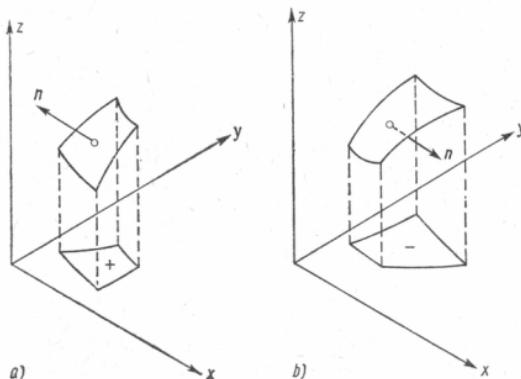


Bild 6.7 a) b)

Ist  $\gamma$  der Winkel zwischen positiver  $z$ -Achse und  $n$ , so ist  $\cos \gamma > 0$ , wenn  $\gamma$  spitz ist, d.h., wenn wir auf die Außenseite sehen. Dagegen ist  $\cos \gamma < 0$ , wenn  $\gamma$  stumpf ist, d.h., wenn wir auf die Innenseite sehen. Die Projektion  $\Delta b_{ik}$  von  $\Delta f_{ik}$  auf die  $x,y$ -Ebene erhält also gleichzeitig das richtige Vorzeichen, wenn wir

$$\Delta b_{ik} = \Delta f_{ik} \cos \gamma = (\mathbf{n}_{ik} \cdot \mathbf{e}_3) \Delta f_{ik}$$

setzen (vgl. Formel (6.4)). Ersetzen wir nun in (6.13)  $\Delta f_{ik}$  durch  $\Delta b_{ik}$ , so erhalten wir als Grenzwert das Oberflächenintegral  $\iint_{\tilde{\gamma}} F(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) d\mathbf{f}$ . Verstehen wir unter  $B_3$  die Projektion von  $\tilde{\gamma}$  auf die  $x,y$ -Ebene, so liefert jede Zerlegung von  $\tilde{\gamma}$  durch die Projektion eine Zerlegung von  $B_3$ , wobei der Flächeninhalt  $\Delta b_{ik}$  der Teile positives oder negatives Vorzeichen trägt, je nachdem, ob wir bei der Projektion auf die Außen- oder Innenseite des Teiles blicken. Die Projektion  $B_3$  von  $\tilde{\gamma}$  kann also auch aus mehreren Schichten mit unterschiedlichem Vorzeichen bestehen (vgl. Bild 6.8). Den Grenzwert der Summe  $\sum_{k=1}^i F(Q_{ik}) \Delta b_{ik}$  (Formel (6.13), wobei  $\Delta f_{ik}$  durch  $\Delta b_{ik}$  ersetzt ist) können wir nun aber auch als Bereichsintegral (in der  $x,y$ -Ebene) über  $B_3$  auffassen.

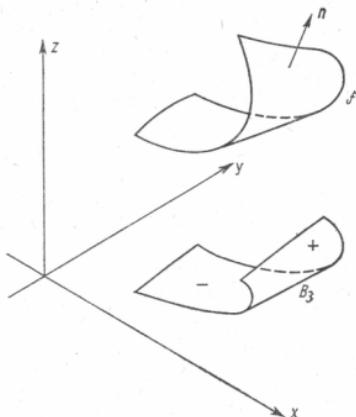


Bild 6.8

Dabei ist im Integranden  $F(P) = F(x, y, z)$  der Punkt  $P = (x, y, z)$  stets so zu nehmen, daß er auf der Fläche  $\tilde{F}$  liegt. Wir schreiben deshalb für  $\iint_{\tilde{F}} F(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) df$  auch  $\iint_{\tilde{F}} F(x, y, z) dx dy$  und nennen es *Oberflächenintegral 2. Art*.

**Definition 6.5:** Es sei  $\tilde{F}$  eine Fläche mit der Darstellung  $\mathbf{g}(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$ , (die D.6.5 nach Formel (6.6) die Normale  $\mathbf{n}$  auf  $\tilde{F}$  festlegt) und  $F_1, F_2, F_3$  mindestens auf  $\tilde{F}$  definierte und stetige Funktionen. Dann nennen wir  $\iint_{\tilde{F}} F_i(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) df$  ( $i = 1, 2, 3$ ) *Oberflächenintegrale 2. Art* und schreiben dafür:

$$\iint_{\tilde{F}} F_1(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) df = \iint_{\tilde{F}} F_1(x, y, z) dy dz,$$

$$\iint_{\tilde{F}} F_2(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) df = \iint_{\tilde{F}} F_2(x, y, z) dx dz,$$

$$\iint_{\tilde{F}} F_3(P) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) df = \iint_{\tilde{F}} F_3(x, y, z) dx dy.$$

Hierbei sind  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  bzw.  $\mathbf{e}_3$  die Einheitsvektoren in  $x, y$  bzw.  $z$ -Richtung. Das Integral

$$\iint_{\tilde{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} df = \iint_{\tilde{F}} (F_1 dy dz + F_2 dx dz + F_3 dx dy),$$

wobei  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  gesetzt ist, nennen wir *Oberflächenintegral allgemeiner Art*.

**Beispiel 6.5:** Es sei  $\mathbf{g}(u, v) = (R \cos v, u, R \sin v)$ ,  $M$  der durch  $0 \leq u \leq R$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  gegebene Bereich der  $u, v$ -Ebene und  $\tilde{F}$  die durch  $\mathbf{g}(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$ , dargestellte Fläche. Es soll das Oberflächenintegral 2. Art  $\iint_{\tilde{F}} xyz dx dy$  berechnet werden.

Mit  $\mathbf{g}_u = (0, 1, 0)$  und  $\mathbf{g}_v = (-R \sin v, 0, R \cos v)$  wird  $\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = (R \cos v, 0, R \sin v)$ ,  $\sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v| = R$ ,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v}{|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v|} = (\cos v, 0, \sin v)$  und  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = \sin v$ .

Für das Oberflächenintegral ergibt sich folglich

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathfrak{F}} xyz \, dx \, dy &= \iint_M xyz (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \sqrt{EG - F^2} \, dm \\
 &= \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cos v \cdot u \cdot R \sin v \cdot \sin v \cdot R \, dv \, du \\
 &= R^3 \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u \sin^2 v \cos v \, dv \, du = R^3 \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{3} \frac{d}{dv} (\sin v)^3 \, dv \, du \\
 &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^R u \, du = \frac{1}{3} R^5.
 \end{aligned}$$

Nach den Definition 6.5 vorangegangenen Betrachtungen können wir dieses Oberflächenintegral auch über die Projektion von  $\mathfrak{F}$  auf die  $x,y$ -Ebene berechnen.  $\mathfrak{F}$  ist die Hälfte einer Zylinderfläche mit dem Radius  $R$ , der  $y$ -Achse als Zylinderachse und der Länge  $R$  (s. Bild 6.9). Die Projektion  $B_3$  von  $\mathfrak{F}$  ist das Quadrat  $0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R$ .

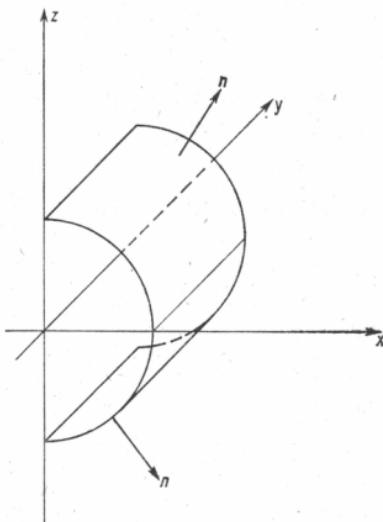


Bild 6.9

$B_3$  wird bei der Projektion aber doppelt überdeckt. Bereits die Projektion des über der  $x,y$ -Ebene liegenden Teiles von  $\mathfrak{F}$  liefert  $B_3$ , und zwar mit positivem Vorzeichen, da wir bei der Projektion auf die Außenseite blicken. Auch die Projektion des unter der  $x,y$ -Ebene Teiles von  $\mathfrak{F}$  ergibt  $B_3$ , aber jetzt mit negativem Vorzeichen, da wir auf die Innenseite blicken. Beim oberen Teil gilt  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ , beim unteren dagegen  $z = -\sqrt{R^2 - x^2}$ .

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\Sigma}} xyz \, dx \, dy &= \int_0^R \int_0^R xy \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy - \int_0^R \int_0^R xy (-\sqrt{R^2 - x^2}) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^R \int_0^R yx \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^R y \, dy = \frac{1}{3} R^6. \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß wir die Oberflächenintegrale 2. Art auf zwei Wegen berechnen können: einerseits durch Integration über die Fläche  $\tilde{\Sigma}$ , und andererseits durch Integration über die mit Vorzeichen versehene Projektion  $B_3$ , wobei der Integrand auf der Fläche  $\tilde{\Sigma}$  zu nehmen ist.

**Aufgabe 6.4:** Es sei  $M$  das Quadrat  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$  der  $u,v$ -Ebene und  $\mathbf{g} = (u+1, v-1, *v-u)$ ,  $\tilde{\Sigma}$  die durch  $\mathbf{g}(u, v), (u, v) \in M$ , dargestellte Fläche sowie  $\mathbf{F} = (y, z, x)$ . Berechne das Oberflächenintegral allgemeiner Art  $\iint_{\tilde{\Sigma}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df$ !

Bei unseren bisherigen Betrachtungen über den Flächeninhalt gekrümmter Flächen und über Oberflächenintegrale waren wir stets davon ausgegangen, daß die die Fläche darstellende Funktion stetig und stückweise stetig partiell differenzierbar ist, und daß der Integrand beim Oberflächenintegral stetig ist. Die Existenz des Flächeninhaltes und des Oberflächenintegrals ist natürlich auch unter schwächeren Voraussetzungen gesichert.

Bei den vorangegangenen Beispielen war  $\mathbf{g}$  auf ganz  $M$  stetig partiell differenzierbar mit  $|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v| \neq 0$ . Wir wollen jetzt ein Beispiel betrachten, bei dem die Differenzierbarkeit nur stückweise vorhanden ist. Wir wählen dazu einen Würfel  $\tilde{\Sigma}$ . Für eine Darstellung  $\mathbf{g}(u, v), (u, v) \in M$ , ist  $\mathbf{g}$  auf den 6 Flächen  $\tilde{\Sigma}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) stetig partiell differenzierbar. Dies gilt aber nicht für die 12 Kanten des Würfels. Die Rechnung wird vereinfacht, wenn wir nicht eine Darstellung für den gesamten Würfel wählen, sondern für jede Teilfläche  $\tilde{\Sigma}_i$  eine von den übrigen Flächen unabhängige Darstellung  $\mathbf{g}_i(u, v), (u, v) \in M_i$ , wählen. Ein Integral über  $\tilde{\Sigma}$  ist gleich der Summe der Integrale über die  $\tilde{\Sigma}_i$ .

**Beispiel 6.6:**  $\tilde{\Sigma}$  sei die Oberfläche des Würfels  $W$  im  $x, y, z$ -Raum mit den folgenden Eckpunkten  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$  und  $(0, 1, 1)$  und  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy + xz, y^2, x^2 + z^2)$ . Es ist das Oberflächenintegral allgemeiner Art

$$J = \iint_{\tilde{\Sigma}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df$$

zu berechnen.  $\mathbf{n}$  zeige hierbei nach außen.

Wir zerlegen hierzu  $\tilde{\Sigma}$  in 6 Teilflächen, die mit den Würfelseiten übereinstimmen. Zur Darstellung jeder dieser Teilflächen benutzen wir das Quadrat  $M$  der  $u, v$ -Ebene mit  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ .

Die einzelnen Darstellungen lauten

- $\tilde{\Omega}_1: \mathbf{g}_1(u, v) = (v, u, 0) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_3,$
  - $\tilde{\Omega}_2: \mathbf{g}_2(u, v) = (u, v, 1) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_3,$
  - $\tilde{\Omega}_3: \mathbf{g}_3(u, v) = (u, 0, v) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_3 = -\mathbf{e}_2,$
  - $\tilde{\Omega}_4: \mathbf{g}_4(u, v) = (v, 1, u) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_4 = \mathbf{e}_2,$
  - $\tilde{\Omega}_5: \mathbf{g}_5(u, v) = (0, v, u) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_5 = -\mathbf{e}_1 \quad \text{und}$
  - $\tilde{\Omega}_6: \mathbf{g}_6(u, v) = (1, u, v) \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_6 = \mathbf{e}_1,$
- $(u, v) \in M.$

Für alle sechs Teilflächen ist  $\sqrt{EG - F^2} = 1$ . Damit gilt für die Integrale über die Teilflächen

$$J_i = \iint_{\tilde{\Omega}_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_i \, df = \iint_M \mathbf{F}(\mathbf{g}_i(u, v)) \cdot \mathbf{n}_i \, du \, dv.$$

Im einzelnen erhalten wir

$$J_1 = \iint_{\tilde{\Omega}_1} (-x^2 - z^2) \, df = - \int_0^1 \int_0^1 v^2 \, du \, dv = -\frac{1}{3},$$

$$J_2 = \iint_{\tilde{\Omega}_2} (x^2 + z^2) \, df = \int_0^1 \int_0^1 (u^2 + 1) \, du \, dv = \frac{4}{3},$$

$$J_3 = \iint_{\tilde{\Omega}_3} (-y^2) \, df = - \int_0^1 \int_0^1 0 \, du \, dv = 0,$$

$$J_4 = \iint_{\tilde{\Omega}_4} y^2 \, df = \int_0^1 \int_0^1 1 \, du \, dv = 1,$$

$$J_5 = \iint_{\tilde{\Omega}_5} (-xy - xz) \, df = - \int_0^1 \int_0^1 0 \, du \, dv = 0,$$

$$J_6 = \iint_{\tilde{\Omega}_6} (xy + xz) \, df = \int_0^1 \int_0^1 (u + v) \, du \, dv = 1$$

und

$$J = \sum_{i=1}^6 J_i = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 + 1 = 3.$$

- \* **Aufgabe 6.5:** Die geschlossene Fläche  $\tilde{\Omega}$  sei zusammengesetzt aus dem Mantel  $\tilde{\Omega}_1$  des Zylinders mit dem Radius 1, der  $z$ -Achse als Zylinderachse und der Höhe 1 ( $0 \leq z \leq 1$ ) sowie der Grundfläche  $\tilde{\Omega}_2$  (Kreisscheibe in der  $x,y$ -Ebene) und der Deckfläche  $\tilde{\Omega}_3$  (Kreisscheibe in der Ebene  $z = 1$ ) dieses Zylinders. Es ist das Oberflächenintegral 1. Art  $J = \iint_{\tilde{\Omega}} (y^2 + z^2) \, df$  zu berechnen. Auf das Integral  $J$  führt die Berechnung des Trägheitsmomentes eines Blechfasses mit dem Durchmesser 2 und der Höhe 1 um einen Durchmesser des Bodens.

## 7. Integralsätze

In diesem Kapitel werden wir Beziehungen zwischen Bereichs- und Kurvenintegralen bzw. zwischen Raum- und Oberflächenintegralen kennenlernen, die es uns in häufig vorkommenden Spezialfällen gestatten, Bereichs- in Kurvenintegrale bzw. Raum- in Oberflächenintegrale und umgekehrt umzuformen. Diese Beziehungen gestatten uns auch, eine Reihe von Anwendungen zu behandeln. Besonders fruchtbar wirken sich diese Beziehungen im Zusammenhang mit der Vektoranalysis aus.

### 7.1. Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Es sei  $B$  ein durch Kurven (vgl. Def. 5.1) berandeter Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse und  $P$  eine auf  $B$  stetige und stetig nach  $y$  differenzierbare Funktion. Ziel unserer Betrachtung ist es, das Bereichsintegral  $J = \iint_B P_y \, db$  in ein Kurvenintegral umzuformen. Dies wird wegen der besonderen Gestalt von  $B$  ohne Schwierigkeiten möglich sein.

Als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse besitzt  $B$  eine Darstellung

$$(x, y) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2 \\ y_1(x) \leqq y \leqq y_2(x). \end{cases}$$

Die Berandungskurve  $\mathfrak{K}$  von  $B$  zerlegen wir in die vier Teilkurven  $\mathfrak{K}_1$  bis  $\mathfrak{K}_4$  (siehe Bild 7.1) mit den Parameterdarstellungen

$$\mathfrak{K}_1: g_1(t) = (t, y_1(t)), t \in I_1 = [x_1, x_2]; \quad (7.1)$$

$$\mathfrak{K}_2: g_2(t) = (x_2, t), t \in I_2 = [y_1(x_2), y_2(x_2)]; \quad (7.2)$$

$$-\mathfrak{K}_3: g_3(t) = (t, y_2(t)), t \in I_3; \quad (7.3)$$

$$-\mathfrak{K}_4: g_4(t) = (x_1, t), t \in I_4 = [y_1(x_1), y_2(x_1)]. \quad (7.4)$$

Das Bereichsintegral  $J$  können wir nach Satz 2.4, Formel<sup>7</sup>(2.5), durch ein Doppelintegral darstellen:

$$J = \iint_B P_y(x, y) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y(x, y) \, dy \, dx. \quad (7.5)$$

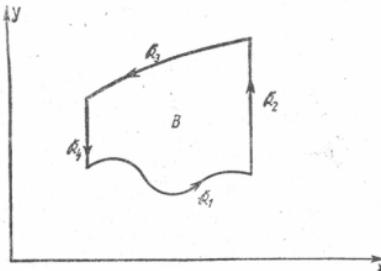


Bild 7.1

Da wir als Integranden von  $J$  die partielle Ableitung von  $P(x, y)$  nach  $y$  gewählt haben, lässt sich das innere Integral des Doppelintegrals in Formel (7.5) sofort angeben:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} P_y(x, y) dy = [P(x, y)]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} = P[x, y_2(x)] - P[x, y_1(x)].$$

Damit wird  $J$  nach Formel (7.5)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} P[x, y_2(x)] dx - \int_{x_1}^{x_2} P[x, y_1(x)] dx. \quad (7.6)$$

Auf die in Formel (7.6) vorkommenden Integrale stoßen wir auch bei der Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art  $\int P dx$ . Es ist nämlich nach Satz 5.2 mit den Darstellungen (7.1) und (7.3):

$$\int_{\mathfrak{R}_1} P dx = \int_{x_1}^{x_2} P[t, y_1(t)] \cdot 1 \cdot dt, \quad (7.7)$$

$$\int_{\mathfrak{R}_3} P dx = - \int_{-\mathfrak{R}_3} P dx = - \int_{x_1}^{x_2} P[t, y_2(t)] \cdot 1 \cdot dt. \quad (7.8)$$

Die Integrale (7.7) und (7.8) stimmen aber bis auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen mit den in (7.6) vorkommenden Integralen überein. Weiter gilt

$$\int_{\mathfrak{R}_2} P dx = \int_{y_1(x_2)}^{y_2(x_2)} P(x_2, t) \cdot 0 \cdot dt = 0, \quad (7.9)$$

da die Ableitung  $\dot{g}_2(t) = (0, 1)$  von  $g_2$  in der ersten Komponente den Wert 0 hat. Analog ist

$$\int_{\mathfrak{R}_4} P dx = 0. \quad (7.10)$$

Zusammenfassung von (7.7) bis (7.10) ergibt

$$\oint_{\mathfrak{R}} P dx = \int_{x_1}^{x_2} P[x, y_1(x)] dx - \int_{x_1}^{x_2} P[x, y_2(x)] dx, \quad (7.11)$$

wobei wir die Integrationsvariable  $t$  durch  $x$  ersetzt haben. (7.11) stimmt aber bis auf das Vorzeichen mit (7.6) überein. Wir haben damit

$$\iint_B P_y(x, y) db = - \oint_{\mathfrak{R}} P(x, y) dx \quad (7.12)$$

gefunden. Dies ist die gesuchte Beziehung.

Ganz analog erhalten wir

$$\iint_B Q_x(x, y) db = \oint_{\mathfrak{R}} Q(x, y) dy, \quad (7.13)$$

wenn  $B$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse und  $Q$  eine auf dem Bereich  $B$  stetige und nach  $x$  stetig partiell differenzierbare Funktion ist. Die einzelnen Schritte möge der Leser selbst aufschreiben.

Die Formeln (7.12) bzw. (7.13) heißen Gaußscher Integralsatz für die Ebene. Wollen wir die Integrale (7.12) und (7.13) in einer Formel zusammenfassen, so müssen wir von  $B$  verlangen, daß er Normalbereich sowohl bezüglich der  $x$ -Achse wie auch bezüglich der  $y$ -Achse ist oder sich in endlich viele Normalbereiche bezüglich der  $x$ -Achse, aber auch in endlich viele Normalbereiche bezüglich der  $y$ -Achse zerlegen läßt. Ein Beispiel eines solchen Bereiches zeigt das Bild 7.2. Die Definition 5.5 der Kurvenintegrale erfordert noch, daß die Berandung  $\mathfrak{R}$  von  $B$  Kurve ist und damit eine Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t)$ ,  $t \in I$ , mit stückweise stetig differenzierbarem  $\mathbf{g}$  besitzt. Der Gaußsche Integralsatz erhält dann die Form:

**Satz 7.1:** Ist  $B$  ein Bereich der oben beschriebenen Art mit der Berandung  $\mathfrak{R}$  und sind  $P$  S.7.1 und  $Q$  auf  $B$  stetige und stetig nach  $y$  bzw.  $x$  partiell differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\iint_B \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) db = \oint_{\mathfrak{R}} (P dx + Q dy).$$

Aus dem Gaußschen Integralsatz 7.1 ist sofort zu erkennen, daß  $\int (P dx + Q dy)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann vom Integrationsweg unabhängig ist, wenn die Integrierbarkeitsbedingung  $P_y = Q_x$  erfüllt ist.

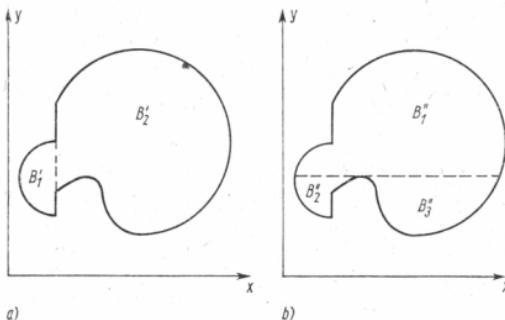


Bild 7.2 Zerlegung eines Bereiches  $B$  in Normalbereiche  
a) bezüglich der  $x$ -Achse, b) bezüglich der  $y$ -Achse

Die rechte Seite der Formel in Satz 7.1 kann auch in Vektordarstellung geschrieben werden, wenn wir  $\mathbf{G} = (P, Q)$  setzen. Es wird dann

$$\oint (P dx + Q dy) = \oint \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x},$$

wobei  $d\mathbf{x}$  die Richtung der Tangente an  $\mathfrak{R}$  hat. In Abschnitt 7.2. werden wir den Gaußschen Integralsatz im Raum behandeln. Das Bereichsintegral auf der linken Seite der Formel des Satzes erstreckt sich dann über einen räumlichen Bereich und läßt sich leicht mit Vektoren schreiben. Auf der rechten Seite der Formel geht das Kurvenintegral in ein Oberflächenintegral über die den räumlichen Bereich berandende Fläche über. Bei einer Fläche tritt an die Stelle der Tangente die Tangentialebene. Ihre Richtung wird am günstigsten durch die senkrecht auf ihr stehende Normale festgelegt. Der Gaußsche Integralsatz im Raum wird deshalb so geschrieben, daß die rechte Seite ein Skalarprodukt mit

der Flächennormalen enthält. Wir können selbstverständlich auch den Gaußschen Integralsatz in der Ebene mit Hilfe der Normalen  $\mathbf{n}$  an die Kurve  $\mathfrak{K}$  (im Kurvenpunkt  $P$ ) darstellen. Da  $\mathbf{n}$  orthogonal zum Einheitsvektor in Tangentenrichtung  $\mathbf{t}$  ist, müssen wir in  $\mathbf{G} \cdot d\mathbf{x}$  wegen  $d\mathbf{x} = t \, ds$  den Vektor  $\mathbf{G}$  durch einen orthogonalen Vektor  $\mathbf{F}$  mit gleichem Betrag ersetzen, um den gleichen Wert des Skalarproduktes zu erhalten. Ist  $\mathbf{g}$  mit  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , eine Parameterdarstellung von  $\mathfrak{K}$ , so wird

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{g}}|} \dot{\mathbf{g}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (\dot{x}, \dot{y}) \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (\dot{y}, -\dot{x}).$$

Um  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (P\dot{x} + Q\dot{y})$  zu erhalten, müssen wir also  $\mathbf{F} = (Q, -P)$  setzen.

Erweitern wir noch die zweidimensionalen Vektoren  $\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{n}$  durch Hinzufügen einer Komponente mit dem Wert  $O$  zu dreidimensionalen Vektoren, so können wir auf der linken Seite  $Q_x - P_y$  durch  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  ersetzen. Damit erhält die Formel im Satz 7.1 die Form

$$\iint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = \oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

In dieser Form werden wir in Abschnitt 7.2. den Gaußschen Integralsatz formulieren, nur daß dort das Bereichsintegral über einen räumlichen Bereich erstreckt und das Kurvenintegral durch ein Oberflächenintegral ersetzt wird. Schreiben wir obige Formel für das Vektorfeld  $\mathbf{G} = (P, Q, O)$  auf, so erhalten wir:

$$\iint_B \operatorname{div} \mathbf{G} \, db = \iint_B (P_x + Q_y) \, db = \iint_{\mathfrak{K}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\mathfrak{K}} (P \, dy - Q \, dx).$$

Diese Formel nennen wir auch die Normalkomponentenform des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene, während die in Satz 7.1 gewählte Form als Tangentialkomponentenform bezeichnet wird.

Wir wollen jetzt noch zu einigen einfachen Anwendungen des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene kommen.

*Beispiel 7.1:* Den Flächeninhalt  $A$  eines ebenen Bereiches  $B$  erhalten wir aus  $A = \iint_B db$ . Den Integranden 1 des Bereichsintegrals können wir in  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  zerlegen und  $-P_y = \frac{1}{2}, Q_x = \frac{1}{2}$  setzen. Wir erhalten daraus z. B. das Paar von Funktionen  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y, Q(x, y) = \frac{1}{2}x$  und schließlich nach dem Gaußschen Integralsatz

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\mathfrak{K}} (-y \, dx + x \, dy). \tag{7.14}$$

(7.14) ist eine vielfach zur Berechnung des Flächeninhaltes benutzte Formel (s. z. B. [1] S. 358). Aus ihr erhält man auch leicht die Leibnizsche Sektorformel:  $B$  sei begrenzt durch die Strecke  $\mathfrak{R}_1$  von  $(0, 0)$  nach  $(x_1, y_1)$ , durch die Kurve  $\mathfrak{R}_2$  von  $(x_1, y_1)$  nach  $(x_2, y_2)$  mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t)), t \in [t_1, t_2]$ , und durch die Strecke  $\mathfrak{R}_3$  von  $(x_2, y_2)$  nach  $(0, 0)$  (s. Bild 7.3). Für jede auf einer Geraden durch  $(0, 0)$  liegenden Strecke  $\mathfrak{R}_0$  hat nun aber das Kurvenintegral  $\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}_0} (-y \, dx + x \, dy)$  den Wert

Null. Ist nämlich  $\mathbf{g}(t) = (at, bt), t \in [t', t'']$ , eine Parameterdarstellung von  $\mathfrak{R}_0$ , so wird

$$\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}_0} (-y \, dx + x \, dy) = \frac{1}{2} \int_{t'}^{t''} (-bta + atb) \, dt = 0.$$

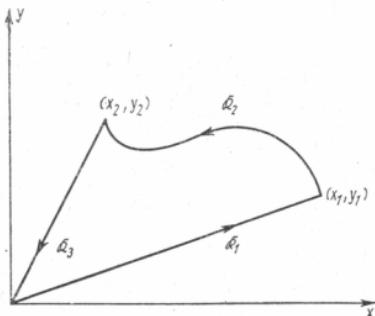


Bild 7.3

Damit wird für die Sektorfläche nach Bild 7.3

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{R}} (-y \, dx + x \, dy) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_2} (-y \, dx + x \, dy) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [-y(t) \dot{x}(t) + x(t) \dot{y}(t)] \, dt. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Als Zahlenbeispiel wollen wir den Flächeninhalt der Sektorfläche, die durch die Strecke von  $(0, 0)$  nach  $(a, 0)$ , durch die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  von  $(a, 0)$  nach  $(x_2, y_2)$  (auf dem Hyperbelast im 1. Quadranten) und durch die Strecke von  $(x_2, y_2)$  nach  $(0, 0)$  begrenzt ist, berechnen. Nach (7.15) (Leibnizsche Sektorformel) brauchen wir nur über das Hyperbelstück zu integrieren. Eine Parameterdarstellung dieser Kurve ist  $\mathbf{g}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$  (von der Richtigkeit dieser Darstellung kann man sich leicht durch Einsetzen von  $\mathbf{g}(t)$  in die Hyperbelgleichung überzeugen). Zu  $(a, 0)$  gehört der Parameter  $t_1 = 0$ .  $t_2$  gewinnt man durch Auflösen von  $x_2 = a \cosh t_2$  nach  $t_2$  zu  $t_2 = \operatorname{arccosh} \frac{x_2}{a}$ . Wir erhalten mit  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{t_2} (-b \sinh t \cdot a \sinh t + a \cosh t \cdot b \cosh t) \, dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{t_2} dt = \frac{1}{2} ab t_2 = \frac{1}{2} ab \operatorname{arccosh} \frac{x_2}{a} \end{aligned}$$

wegen  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ . Dieses Ergebnis ist auch für die Bezeichnung der Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen (area – Fläche) bestimmend gewesen.

*Aufgabe 7.1:* a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der zum Ellipsenbogen mit der Darstellung  $* \mathbf{g}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , gehörigen Sektorfläche! (Benutze Formel (7.15.))

b) Wie groß ist der Flächeninhalt der ganzen Ellipse?

*Beispiel 7.2:* Die Koordinaten des Schwerpunktes  $(\xi, \eta)$  eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Berandung  $\mathfrak{R}$  berechnet man mit Bereichsintegralen zu

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{A} \iint_B x \, db, \\ \eta = \frac{1}{A} \iint_B y \, db, \end{array} \right. \quad (7.16)$$

wobei  $A$  der Flächeninhalt von  $B$  ist. Formt man die Formeln (7.16) mit Hilfe der Formel (7.12) um, so erhält man

$$\left| \begin{array}{l} \xi = -\frac{1}{A} \oint_{\mathfrak{R}} xy \, dx, \\ \eta = -\frac{1}{2A} \oint_{\mathfrak{R}} y^2 \, dx. \end{array} \right.$$

Man kann bei  $\xi$  den Integranden  $x$  des Bereichsintegrals jedoch auch in  $\frac{x}{3} + \frac{2x}{3}$  zerlegen und  $\frac{x}{3}$  als  $-P_y$ ,  $\frac{2x}{3}$  als  $Q_x$  in der Darstellung nach Satz 7.1 auffassen. Es kann dann  $P = -\frac{1}{3}xy$ ,  $Q = \frac{1}{3}x^2$  gewählt werden, und wir erhalten

$$\xi = \frac{1}{3A} \oint_{\mathfrak{R}} x(-y \, dx + x \, dy).$$

Damit haben wir eine zu (7.14) ähnliche Formel. Analog erhält man

$$\eta = \frac{1}{3A} \oint_{\mathfrak{R}} y(-y \, dx + x \, dy).$$

Für die Trägheitsmomente findet man durch entsprechende Überlegungen

$$J_x = \iint_B y^2 \, db = \frac{1}{4} \oint_{\mathfrak{R}} y^2(-y \, dx + x \, dy), \quad J_y = \iint_B x^2 \, db = \frac{1}{4} \oint_{\mathfrak{R}} x^2(-y \, dx + x \, dy).$$

Die mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes gefundenen Formeln für  $A$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $J_x$ ,  $J_y$  sind gut geeignet für die Berechnung dieser Größen auf EDV-Anlagen. Nach dem Einsetzen von Parameterdarstellungen  $g(t)$  für  $\mathfrak{R}$  sind nur noch bestimmte Integrale mit der Integrationsvariablen  $t$  auszuwerten. Dies kann mit den Methoden der numerischen Integration, je nach nötiger Genauigkeit also z. B. mit der Trapezregel, der Simpsonschen Regel oder dem Romberg-Algorithmus, erfolgen. Schreibt man sich also einmal ein Programm zur Berechnung der Integranden aus Unterprogrammen für  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  und zur Anwendung einer Formel für die numerische Integration, so braucht man dann jeweils nur noch die Unterprogramme für die Parameterdarstellungen von  $\mathfrak{R}$  einschließlich der Integrationsgrenzen einzugeben und erhält gleichzeitig  $A$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $J_x$ , und  $J_y$ .

Als Zahlenbeispiel wollen wir  $J_x$  für das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  und  $(0, 1)$  berechnen.  $\mathfrak{R}_1$  sei die auf der  $x$ -Achse liegenden Seite,  $\mathfrak{R}_2$  die Seite mit den Eckpunkten  $(2, 0)$  und  $(0, 1)$ .  $\mathfrak{R}_3$  schließlich die auf der  $y$ -Achse liegende Seite. Die Parameterdarstellungen für die  $\mathfrak{R}_k$  einschließlich der Integrationsgrenzen  $t_0$  und  $t_1$  sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

$k$	$x$	$y$	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$t_0$	$t_1$	$F(t) = y^2(-y\dot{x} + x\dot{y})/4$
1	$t$	0	1	0	0	2	0
2	$2(1-t)$	$t$	-2	1	0	1	$\frac{1}{2}t^2$
3	0	$t$	0	1	1	0	0

Die letzte Spalte der Tabelle enthält die formelmäßige Darstellung des Integranden  $F(t)$ . Sie wird für ein Rechnerprogramm nicht benötigt. Der Rechner berechnet vielmehr die numerischen Werte von  $F(t)$  in den verwendeten Teilungspunkten unmittelbar aus den Spalten 2 bis 5. Da der Wert des Integranden auf  $\mathfrak{F}_1$  und  $\mathfrak{F}_3$  null ist, bekommen wir für  $J_x$  nur einen Beitrag von  $\mathfrak{F}_2$ . Verwendet man für die numerische Integration die Keplerische Faßregel  $\frac{h}{3}(F_0 + 4F_1 + F_2)$  mit  $h = 1/2, F_0 = F(0) = 0, F_1 = F(h) = 1/8, F_2 = F(2h) = 1/2$ , so wird  $J_x = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$ . Dies ist der genaue Wert, da die Keplersche Faßregel Polynome 2. Grades genau integriert. Bei gekrümmten Konturen wäre eine feinere Unterteilung der Integrationsintervalle und die Anwendung der Simpsonschen Regel oder des Rombergalgorithmus zweckmäßiger.

## 7.2. Der Gaußsche Integralsatz im Raum

Die Betrachtungen von Abschnitt 7.1. lassen sich ganz analog auch für Raumintegrale durchführen. Die einzelnen Schritte sollen hier nur angedeutet werden. Zur Umformung von  $\iiint_B P_x(x, y, z) db$  gehen wir von einem räumlichen Normalbereich  $B$  der Art

$$(x, y, z) \in B \Leftrightarrow \begin{cases} (y, z) \in B_{y,z} \\ x_1(y, z) \leqq x \leqq x_2(y, z) \end{cases}$$

aus und können in

$$\iiint_B P_x(x, y, z) db = \iint_{B_{y,z}} \left[ \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} P_x(x, y, z) dx \right] db_{y,z}$$

das innere Integral berechnen.

Ist  $\mathfrak{F}$  die  $B$  begrenzende Fläche (mit nach außen gerichteter Normale), so können wir das Ergebnis in der Form

$$\iiint_B P_x db = \iint_{\mathfrak{F}} P(x, y, z) dy dz \quad (7.17)$$

darstellen. Eine ausführliche Herleitung dieser Formel findet man z.B. in [6], S. 176 oder [4], S. 428ff. (Vorzeichenunterschiede in Formel (7.17) kommen durch entgegengesetzte Wahl der Normalenrichtung zustande.)

Entsprechend findet man

$$\iiint_B Q_y(x, y, z) db = \iint_{\mathfrak{F}} Q(x, y, z) dx dz \quad (7.18)$$

und

$$\iiint_B R_z(x, y, z) db = \iint_{\mathfrak{F}} R(x, y, z) dx dy. \quad (7.19)$$

Zusammenfassung der Formeln (7.17) bis (7.19) gibt die Grundformel für den Gaußschen Integralsatz im Raum:

$$\iiint_B (P_x + Q_y + R_z) \, db = \iint_{\tilde{\Omega}} (P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy). \quad (7.20)$$

Das Oberflächenintegral allgemeiner Art in Formel (7.20) können wir nach Definition 6.5 mit  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  auch in der Form

$$\iiint_B (P_x + Q_y + R_z) \, db = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df \quad (7.21)$$

schreiben.  $\mathbf{n}$  ist hierbei die nach außen gerichtete Normale der den räumlichen Bereich  $B$  begrenzenden Fläche  $\tilde{\Omega}$ . Auf die Komponenten der Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  können wir in der Grundformel ganz verzichten, wenn wir noch beachten, daß in Band 4, Abschnitt 3.9.2.2.,  $P_x + Q_y + R_z$  als Divergenz von  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  definiert war:

$$P_x + Q_y + R_z = \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Formel (7.20) erhält damit die Gestalt

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df. \quad (7.22)$$

Die äquivalenten Formeln (7.20) bis (7.22) sind natürlich nur unter gewissen Voraussetzungen für  $B$  und  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$  gültig.

**S.7.2 Satz 7.2 (Integralsatz von Gauß):** Es sei  $B$  ein räumlicher Bereich, der aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzt ist, und zwar sowohl bezüglich der  $x, y$ -, der  $y, z$ - wie auch der  $x, z$ -Ebene. Die die Normalbereiche begrenzenden Funktionen seien stetig und stückweise stetig differenzierbar bzw. partiell differenzierbar.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)$  sei auf  $B$  stetig und stückweise stetig partiell differenzierbar.  $\tilde{\Omega}$  sei schließlich die Oberfläche von  $B$  mit nach außen gerichteter Normale  $\mathbf{n}$ . Dann gilt

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df.$$

Der Integralsatz von Gauß gilt auch unter weniger einschränkenden Bedingungen für  $B$  und  $\mathbf{F}$  (wobei gegebenenfalls das Riemannsche Integral durch das Lebesguesche Integral<sup>1)</sup> zu ersetzen ist). Für die meisten praktischen Probleme reicht die obige Form jedoch voll aus. Wir verzichten deshalb auf nähere Darlegungen.

**Beispiel 7.3:** Es sei  $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$  und  $B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B', 0 \leq z \leq 1\}$ , also ein zylindrischer Bereich mit der Grundfläche  $B'$  in der  $x, y$ -Ebene und der Höhe 1.  $B'$  werde durch die geschlossene Kurve  $\tilde{\Omega}$  (in der  $x, y$ -Ebene) berandet.  $\tilde{\Omega}$  bezeichne die Oberfläche von  $B$ . Der Gaußsche Integralsatz kann dann wie folgt umgeformt werden:

<sup>1)</sup> Der interessierte Leser sei beispielsweise auf E. Kamke „Das Lebesgue-Stieltjes Integral“, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1956, oder E. Kamke „Differentialgleichungen, II, Partielle Differentialgleichungen“, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1965, Anhang II, verwiesen.

$$\iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = \iint_{B'} \left[ \int_0^1 dz (P_x + Q_y) \right] db' = \iint_{B'} (P_x + Q_y) \, db'.$$

Wegen  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$  bzw.  $\mathbf{e}_3$  auf der Grund- bzw. Deckfläche von  $B$  wird dort  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$  und

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df = \oint_{\tilde{\Omega}} \left[ \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dz \right] ds = \oint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

In dem Kurvenintegral ist  $\mathbf{n}$  jetzt die nach außen gerichtete Normale an  $\tilde{\Omega}$ . Ist  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t), 0)$ ,  $t \in I$ , eine Parameterdarstellung von  $\tilde{\Omega}$ , so wird  $\mathbf{n} = |\dot{\mathbf{g}}|^{-1} (\dot{y}, -\dot{x}, 0)$  und damit  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = |\dot{\mathbf{g}}|^{-1} (P\dot{y} - Q\dot{x})$ . Mit  $ds = |\dot{\mathbf{g}}| dt$  wird schließlich

$$\oint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\tilde{\Omega}} (P\dot{y} - Q\dot{x}) \, dt = \oint_{\tilde{\Omega}} (P \, dy - Q \, dx).$$

Es folgt also aus dem Gaußschen Satz im Raum durch obige Spezialisierung die Normalkomponentenform des Gaußschen Satzes in der Ebene (vgl. Abschnitt 7.1.):

$$\iint_{B'} (P_x + Q_y) \, db' = \oint_{\tilde{\Omega}} (P \, dy - Q \, dx).$$

**Beispiel 7.4:** Ein Körper, begrenzt durch die Fläche  $\tilde{\Omega}$  (mit nach außen gerichteter Normale  $\mathbf{n}$ ), tauche ganz in eine Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht  $\gamma$ . Wie groß ist der Auftrieb, der auf den Körper wirkt?

Die Oberfläche der Flüssigkeit sei die  $x,y$ -Ebene, die  $z$ -Achse senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeit nach oben gerichtet. Den durch  $\tilde{\Omega}$  begrenzten räumlichen Bereich bezeichnen wir durch  $B$ . Der Druck der Flüssigkeit greift senkrecht zur Oberfläche von  $B$  an und hat die absolute Größe  $-\gamma z$  ( $z$  ist negativ, da sich  $B$  unter der  $x,y$ -Ebene befindet). Der Druck hat also die Größe  $\gamma z \mathbf{n}$ . Die vertikale Komponente des Druckes ist  $\gamma z \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3$ , und für den Auftrieb ergibt sich  $\iint_{\tilde{\Omega}} \gamma z \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \, df$ . Dieses Oberflächenintegral 2. Art können wir nach Definition 6.5 auch in der Form

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \gamma z \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \, df = \iint_{\tilde{\Omega}} \gamma z \, dx \, dy$$

schreiben.

Nach Formel (7.19) gilt somit für den Auftrieb

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \gamma z \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \, df = \iiint_B \gamma \, db,$$

d.h., der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

**Beispiel 7.5:** In Beispiel 6.6 haben wir das Oberflächenintegral allgemeiner Art  $J = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df$  über die Oberfläche  $\tilde{\Omega}$  des Würfels  $B$  mit  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  und  $0 \leq z \leq 1$  berechnet. Die Vektorfunktion  $\mathbf{F}$  war durch  $\mathbf{F} = (xy + xz, y^2, x^2 + z^2)$  gegeben. Die hierbei auftretenden Integrationen waren nicht schwierig. Insgesamt war die Berechnung von  $J$  jedoch recht aufwendig, da über jede der 6 Würfelflächen

getrennt integriert werden mußte. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes kann die Berechnung von  $J$  wesentlich verkürzt werden. Nach Formel (7.22) gilt

$$J = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db.$$

Für die Divergenz von  $\mathbf{F}$  erhalten wir  $\operatorname{div} \mathbf{F} = y + z + 2y + 2z = 3(y + z)$ . Mit den oben angegebenen Grenzen des Normalbereiches  $B$  erhalten wir

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 3(y + z) \, dz \, dy \, dx = 3 \int_0^1 \int_0^1 (y + \frac{1}{2}) \, dy \, dx = 3 \int_0^1 (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) \, dx = 3 \int_0^1 dx = 3.$$

\* Aufgabe 7.2:  $\tilde{\Omega}$  sei die Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $R$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt,  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ . Berechne das Oberflächenintegral 2. Art  $J = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  a) direkt und b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes!

\* Aufgabe 7.3: Es sei  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Im Raum sei elektrische Ladung der Ladungsdichte  $\varrho = \frac{2\varepsilon}{|\mathbf{x}|}$  verteilt ( $\varepsilon$  ist die Dielektrizitätskonstante). Diese Ladung erzeugt ein elektrisches Feld  $\mathbf{E} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}$ . Zwischen Ladung und Feld besteht die Beziehung  $\varrho = \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E}$ . Berechne die im Inneren der Kugel  $B$  mit dem Radius  $a$  und dem Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  liegende Ladung  $Q = \iiint_B \varrho \, db$  mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes! Beachte dabei, daß für die Oberfläche  $\tilde{\Omega}$  der Kugel  $B$  der Flächeninhalt  $A$  durch  $A = \iint_{\tilde{\Omega}} d\sigma = 4\pi a^2$  gegeben ist!

\* Aufgabe 7.4: Gegeben sei das Vektorfeld  $\mathbf{F} = (x^2 + xy + 2z e^y, -x^2 - y^2 - z^2, -2xz + 3yz)$ . Berechne mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß  $J = \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ , wobei  $\tilde{\Omega}$  die Oberfläche des durch die Flächen  $x = 0, z = 0, y = 0, y = 3\sqrt{4 - 2x}$  und  $z = \frac{1}{2x^2 + 8}$  begrenzten Körpers  $B$  ist. Skizziere zunächst den Grundriß des Körpers in der  $x, y$ -Ebene!

### 7.3. Koordinatenfreie Darstellung der Divergenz

Wir haben bisher unter der Divergenz einer durch  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x}))$  gegebenen Vektorfunktion mit  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  (auch Vektorfeld genannt, vgl. Band 4, Abschnitt 2.6. und 3.9.) die Differentialoperation

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

verstanden. Die partiellen Ableitungen lassen vermuten, daß die Divergenz in einem bestimmten Punkt des Raumes nicht nur von der Vektorfunktion  $\mathbf{F}$ , sondern auch von der Wahl des rechtwinkligen Koordinatensystems  $x, y, z$  abhängig ist. Bei der Einführung der Divergenz in Band 4 wurde jedoch bereits eine verbale Definition gewählt, die von den gewählten Koordinaten unabhängig ist. Nur war es mit den in Band 4 zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht möglich, diese Definition exakt und als Formel niederzuschreiben, und der Nachweis, daß die Divergenz von  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  mit  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  übereinstimmt, blieb offen. Diese Schritte wollen wir jetzt nachholen.

Um die Betrachtungen anschaulich zu gestalten, wollen wir annehmen, daß  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  das Geschwindigkeitsfeld einer stationären, d.h., zeitlich nicht veränderlichen Flüssigkeitsströmung darstellt. Ist jetzt  $\tilde{\Omega}$  irgendeine Fläche, so erhalten wir das in der Zeiteinheit durch  $\tilde{\Omega}$  hindurchfließende Flüssigkeitsvolumen, den *Fluß von  $\mathbf{F}$  durch  $\tilde{\Omega}$* , zu  $\iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ . Betrachten wir nämlich eine Teilfläche von  $\tilde{\Omega}$  der

Größe  $\Delta f$ , so schiebt sich eine Flüssigkeitssäule der Länge  $|\mathbf{F}| \cdot 1$  in Richtung von  $\mathbf{F}$  durch die Fläche. Das Volumen dieser Säule ist  $\Delta f \cdot h$ , wobei  $h$  die Höhe der Flüssigkeitssäule ist. Mit  $h = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  (vgl. Bild 7.4) erhalten wir für das Volumen  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta f$ . Summation und Grenzübergang liefern schließlich für den Fluß von  $\mathbf{F}$  durch  $\tilde{\Omega}$  das Oberflächenintegral 2. Art  $\iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ . Ist speziell  $B$  ein räumlicher Bereich und  $\tilde{\Omega}$  die Oberfläche von  $B$ , so nennen wir den Fluß von  $\mathbf{F}$  durch  $\tilde{\Omega}$  die *Quellung von  $\mathbf{F}$  aus  $B$*  (vgl. Band 4, Abschnitt 3.9.2.2.).

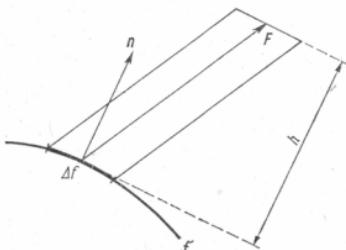


Bild 7.4

Für einen beliebigen Punkt  $x$  sei  $B_n$  die Folge von Kugeln mit dem Radius  $\frac{1}{n}$  und dem Mittelpunkt  $x$ . Die Oberfläche von  $B_n$  bezeichnen wir durch  $\tilde{\Omega}_n$ . Für jedes  $n = 1, 2, \dots$  bilden wir den Quotienten aus Quellung von  $\mathbf{F}$  aus  $B_n$  und dem Volumen  $A_n$  von  $B_n$  und betrachten den Grenzwert

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n} \iint_{\tilde{\Omega}_n} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Dieser Grenzwert stellt die *lokale Quelldichte von  $\mathbf{F}$*  dar. Das Oberflächenintegral können wir mit dem Gaußschen Integralsatz umformen:

$$\iint_{\tilde{\Omega}_n} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{B_n} \operatorname{div} \mathbf{F} \, db.$$

Sind die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  und  $\frac{\partial R}{\partial z}$  stetig, so ist auch  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  stetig, und wir können das Raumintegral mit dem Mittelwertsatz für Raumintegrale (vgl. Abschn. 3.1.) abschätzen:

$$\iiint_{B_n} \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = A_n \operatorname{div} \mathbf{F}|_{x_n},$$

wobei die Divergenz von  $\mathbf{F}$  in einem geeigneten Punkt  $x_n$  aus  $B_n$  zu nehmen ist.

Damit wird

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n} A_n \operatorname{div} \mathbf{F}|_{\mathbf{x}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{div} \mathbf{F}|_{\mathbf{x}_n}.$$

Da  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  stetig sein sollte und der Durchmesser der Kugel gegen null strebt, also  $\mathbf{x}_n$  gegen  $\mathbf{x}$  konvergiert, gilt

$$D = \operatorname{div} \mathbf{F}|_{\mathbf{x}}.$$

**Satz 7.3:** Ist  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  eine Vektorfunktion mit stetig partiell differenzierbaren Komponenten,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  ein beliebiger Punkt aus dem Inneren des Definitionsbereiches von  $\mathbf{F}$  und  $\mathfrak{F}_n$  die Folge der Kugeloberflächen mit dem Radius  $\frac{1}{n}$  und dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}$ , so gilt

$$\begin{aligned} P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z) &= \operatorname{div} \mathbf{F} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{4\pi} \int_{\mathfrak{F}_n} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Aus der Darstellung der Divergenz nach Satz 7.3 folgt insbesondere, daß die Divergenz eine skalare Punktfunktion ist, die unabhängig vom gewählten Koordinatensystem durch Integration aus einem gegebenen Vektorfeld gewonnen werden kann. Formel (7.23) kann, wie das schon in Band 4, 3.9.2.2., angedeutet wurde, sogar zur Definition der Divergenz benutzt werden. Die Differenzierbarkeitsforderungen in Satz 7.3 können dann durch die Forderungen ersetzt werden, daß für jede Folge räumlicher Bereiche  $B_n$  mit der Oberfläche  $\mathfrak{F}_n$  und dem Volumen  $A_n$ , die  $\mathbf{x}$  als inneren Punkt enthalten, der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A_n} \iint_{\mathfrak{F}_n} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{f}$  existiert und den gleichen Wert besitzt.

## 7.4. Die Greenschen Formeln

Wendet man den Gaußschen Integralsatz auf eine Vektorfunktion der Gestalt

$$\mathbf{F} = \varphi \operatorname{grad} \psi$$

an, wobei  $\varphi$  und  $\psi$  skalare Punktfunktionen sind, so wird wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) \\ &= (\operatorname{grad} \varphi) \cdot (\operatorname{grad} \psi) + \varphi \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \varphi \Delta \psi \end{aligned}$$

(vgl. Band 4, Abschnitt 3.9.2.4.), wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ist,

$$\iiint_B (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y + \varphi_z \psi_z + \varphi \Delta \psi) \, db = \iint_{\mathfrak{F}} \varphi \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \psi \, d\mathbf{f}. \quad (7.24)$$

Die Formel (7.24) bezeichnet man als *1. Greensche Integralformel*. Hinsichtlich ihrer Gültigkeit müssen wir für  $B$  und  $\mathbf{F}$  die gleichen Forderungen stellen wie beim Gauß-

schen Integralsatz 7.2. Für  $\varphi$  bedeutet das Stetigkeit und die stückweise Existenz stetiger partieller Ableitungen, für  $\psi$  Stetigkeit von  $\operatorname{grad} \psi$  und stückweise Existenz stetiger partieller Ableitungen 2. Ordnung. Setzen wir  $\mathbf{F} = \varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi$ , so verschwindet in  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  der in  $\varphi$  und  $\psi$  symmetrische Ausdruck  $(\operatorname{grad} \varphi) \cdot (\operatorname{grad} \psi)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi.$$

Der Gaußsche Integralsatz liefert dann

$$\iiint_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, db = \iint_{\mathfrak{F}} (\varphi \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} \, df. \quad (7.25)$$

Formel (7.25) bezeichnet man als 2. *Grezsche Integralformel*. Für ihre Gültigkeit ist die stückweise Stetigkeit bis zu den partiellen Ableitungen 2. Ordnung für  $\varphi$  und  $\psi$  zu fordern.

Die Greenschen Integralformeln haben für die Lösung vieler physikalischer Probleme eine sehr große Bedeutung. Ebenso sind sie in der Analysis ein unentbehrliches Hilfsmittel. Bevor wir ihre Anwendung an einigen Beispielen zeigen, wollen wir noch eine Spezialisierung der Formel (7.24) angeben, die verschiedentlich als 3. *Grezsche Integralformel* bezeichnet wird. Setzt man  $\varphi = 1$ , so wird

$$\iiint_B \Delta \psi \, db = \iint_{\mathfrak{F}} (\operatorname{grad} \psi) \cdot \mathbf{n} \, df. \quad (7.26)$$

*Beispiel 7.6:* Eine skalare Punktfunction  $u = u(\mathbf{x})$  heißt harmonisch, wenn  $\Delta u = 0$  gilt. Es sollen einige grundlegende Eigenschaften der harmonischen Funktion hergeleitet werden. Um die Anwendung der Integralformeln zu erleichtern, wollen wir noch voraussetzen, daß  $u$  und die partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung in den betrachteten räumlichen Bereichen einschließlich der Oberfläche stetig sind.

a) Aus Formel (7.26) folgt

$$\iint_{\mathfrak{F}} (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, df = 0. \quad (7.27)$$

Die Ableitung einer skalaren Punktfunction  $v$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\mathbf{s}$  war  $(\operatorname{grad} v) \cdot \mathbf{s}$  (vgl. Band 4, Abschnitt 3.9.2.1.).  $(\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n}$  können wir also als Ableitung von  $u$  in Richtung der Normalen von  $\mathfrak{F}$  auffassen und  $(\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  schreiben. Formel (7.27) können wir damit wie folgt in Worte fassen:

*Ist  $u$  im räumlichen Bereich  $B$  mit der Oberfläche  $\mathfrak{F}$  zweimal stetig differenzierbar und harmonisch, so ist der Mittelwert der Ableitung von  $u$  in Richtung der Normalen von  $\mathfrak{F}$  auf  $\mathfrak{F}$  gleich null.*

b) Es sei  $B$  ein räumlicher Bereich mit der Oberfläche  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathbf{x}_0$  ein beliebiger Punkt aus dem Inneren von  $B$  und  $u$  in  $B$  harmonisch. Wir wenden jetzt die Formel (7.25) mit  $\varphi = u$  und  $\psi = \frac{K}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  an, wobei wir unter  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  den Ortsvektor verstehen. In Band 4, Beispiel 3.29, wurde gezeigt, daß  $\frac{K}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  harmonisch im  $R^3$  mit Ausnahme von  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  ist.  $K$  war dort eine Konstante. Da der Laplacesche Operator  $\Delta$  linear ist,

gilt auch  $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0 (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0)$ . Um die 2. Greensche Formel (7.25) anwenden zu können, müssen wir noch  $\mathbf{x}_0$  aus  $B$  entfernen, da  $\psi$  in  $\mathbf{x}_0$  die Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften nicht erfüllt. Verstehen wir unter  $B'$  den Bereich  $B$ , aus dem die Kugel  $B_0$  mit dem Radius  $a$  und dem Mittelpunkt  $\mathbf{x}_0$  herausgenommen ist, so besteht die Oberfläche von  $B'$  aus  $\tilde{\mathfrak{F}}$  und der Oberfläche  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  der herausgenommenen Kugel, wobei die Normale von  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  nach  $\mathbf{x}_0$  hin zeigt, da die Kugel ja nicht zu  $B'$  gehört. Für  $B'$ ,  $\varphi = u$  und  $\psi = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  ist (7.25) anwendbar. Insbesondere wird wegen  $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$  in  $B'$

$$\iiint_{B'} (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) \, d\mathbf{b} = 0.$$

Formel (7.25) ergibt wegen  $\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\tilde{\mathfrak{F}}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \operatorname{grad} u + u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) \cdot \mathbf{n} \, df \\ &\quad + \iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \operatorname{grad} u + u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) \cdot \mathbf{n} \, df. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Das Oberflächenintegral 2. Art über die Kugelfläche  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  können wir mit dem Mittelwertsatz für Bereichsintegrale (vgl. Abschnitt 2.2.) näher berechnen. Auf  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  ist  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = a$  und  $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{a}$ . Damit wird

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \cdot \mathbf{n} \, df = - \iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{a^3} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{a} \, df = -\frac{1}{a^2} \iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \, df.$$

Anwendung des Mittelwertsatzes auf  $\iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \, df$  ergibt  $\iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \, df = 4\pi a^2 u(\mathbf{x}_1)$ , wobei  $\mathbf{x}_1$  ein geeigneter Punkt der Kugeloberfläche  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  ist. Wir haben also

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \cdot \mathbf{n} \, df = -4\pi u(\mathbf{x}_1). \quad (7.29)$$

Den zweiten Anteil des Integrals über  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  können wir mit Formel (7.27) näher bestimmen. Es ist

$$\iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, df = \frac{1}{a} \iint_{\tilde{\mathfrak{F}}_0} (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, df.$$

Da  $u$  in  $B_0$  harmonisch ist, können wir Formel (7.27) anwenden. Die nach innen gerichtete Normale (von der in (7.27) als Ausgang gewählten Integration über  $B_0$  aus betrachtet) stört hierbei nicht. Es würde lediglich das Vorzeichen umgekehrt. Wir

erhalten folglich

$$\iint_{\tilde{\Omega}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, df = 0. \quad (7.30)$$

Unter Beachtung von (7.29) und (7.30) lautet (7.28)

$$0 = \iint_{\tilde{\Omega}} \left( \frac{\operatorname{grad} u}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) \cdot \mathbf{n} \, df - 4\pi u(\mathbf{x}_1). \quad (7.31)$$

(7.31) gilt für jeden Radius  $a$ . Wir können deshalb in (7.31)  $a$  gegen null streben lassen. Das Oberflächenintegral über  $\tilde{\Omega}$  ist von  $a$  nicht abhängig, bleibt beim Grenzübergang also unverändert. Da  $\mathbf{x}_1$  auf  $\tilde{\Omega}_0$  liegt, strebt  $\mathbf{x}_1$  beim Grenzübergang gegen den Kugelmittelpunkt  $\mathbf{x}_0$ . Die Stetigkeit von  $u$  ergibt  $\lim_{a \rightarrow 0} 4\pi u(\mathbf{x}_1) = 4\pi u(\mathbf{x}_0)$ . Der Grenzübergang  $a$  gegen null in (7.31) liefert demnach

$$0 = \iint_{\tilde{\Omega}} \left( \frac{\operatorname{grad} u}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + u \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) \cdot \mathbf{n} \, df - 4\pi u(\mathbf{x}_0)$$

oder

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tilde{\Omega}} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} u + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \operatorname{grad} u \right) \cdot \mathbf{n} \, df. \quad (7.32)$$

Formel (7.32) zeigt uns, daß der Wert einer in einem Bereich  $B$  harmonischen Funktion  $u$  in einem beliebigen inneren Punkt  $\mathbf{x}_0$  von  $B$  aus den Werten von  $u$  und der Ableitung  $(\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n}$  in Richtung der Normalen von  $\tilde{\Omega}$  auf der Oberfläche  $\tilde{\Omega}$  von  $B$  berechnet werden kann. Ist also in  $B$  eine Lösung von  $\Delta u = 0$  gesucht, wobei  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  auf der Oberfläche  $\tilde{\Omega}$  von  $B$  vorgegebene Werte annehmen sollen,  $u(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x})$  und  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = v_1(\mathbf{x})$  auf  $\tilde{\Omega}$  ( $v_0, v_1$  auf  $\tilde{\Omega}$  vorgegebene Funktionen), so liefert (7.32) die Lösung

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\tilde{\Omega}} v_0(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \cdot \mathbf{n} \, df + \frac{1}{4\pi} \iint_{\tilde{\Omega}} \frac{v_1(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \, df.$$

Eine derartige Aufgabenstellung nennt man Randwertaufgabe, hier speziell für die partielle Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  (genannt Laplacesche Differentialgleichung) (vgl. Band 8). Formel (7.32) löst also die Randwertaufgabe der Laplaceschen Differentialgleichung. Eine Lösung  $u$  der Laplaceschen Differentialgleichung ist aber bereits durch die Vorgabe der Randwerte  $v_0$  von  $u$  oder durch die Vorgabe der Randwerte  $v_1$  von  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$  vollständig bestimmt. Die Darstellung der Lösung  $u$  im Inneren von  $B$  ist dann aber schwieriger. Formel (7.32) ist dann noch weiter zu bearbeiten. Dies wollen wir jedoch Band 8 überlassen.

c) Wählen wir in Formel (7.32) als Integrationsbereich eine Kugel  $B_1$  um  $\mathbf{x}_0$  mit dem Radius  $\varrho$  und der Oberfläche  $\tilde{\Omega}_1$ , so läßt sich wieder Formel (7.27) anwenden. Es ist nämlich  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \frac{1}{\varrho} = \text{const}$  und  $\mathbf{n} = \frac{1}{\varrho} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , also

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathfrak{F}_1} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} u + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \operatorname{grad} u \right) \cdot \mathbf{n} \, df \\ &= \frac{1}{\varrho^2} \iint_{\mathfrak{F}_1} u \, df + \frac{1}{\varrho} \iint_{\mathfrak{F}_1} (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{n} \, df. \end{aligned}$$

Das zweite der Integrale auf der rechten Seite ist nach Formel (7.27) gleich null. Formel (7.32) liefert dann

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2} \iint_{\mathfrak{F}_1} u \, df = \frac{\iint_{\mathfrak{F}_1} u \, df}{\iint_{\mathfrak{F}_1} df}, \quad (7.33)$$

da  $4\pi\varrho^2$  ja gleich der Oberfläche von  $\mathfrak{F}_1$  ist.  $u(\mathbf{x}_0)$  ist also der Mittelwert der Werte von  $u$  auf  $\mathfrak{F}_1$ . (7.33) lässt sich verbal so ausdrücken: *Ist  $u$  in einer Kugel harmonisch, so nimmt  $u$  im Mittelpunkt der Kugel den Mittelwert der Werte von  $u$  auf der Kugeloberfläche an.*

## 7.5. Der Stokessche Integralsatz

Ebenso wie wir mit dem Gaußschen Integralsatz der Ebene eine Beziehung zwischen Bereichsintegralen und Kurvenintegralen über geschlossene ebene Kurven herstellen konnten, ist es auch möglich, eine Beziehung zwischen Oberflächenintegralen und Integralen über Raumkurven anzugeben. Eine solche Beziehung stellt der Integralsatz von Stokes her.

**Satz 7.4:** Es sei  $\mathfrak{F}$  eine Fläche mit der Darstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(u, v)$ ,  $(u, v) \in M$ .  $M$  sei ein Normalbereich bezüglich der  $u$ - und bezüglich der  $v$ -Achse,  $\mathbf{g}$  sei stetig und bis zur 2. Ordnung stetig partiell differenzierbar.  $\mathfrak{F}$  werde durch die orientierte Kurve  $\mathfrak{K}$  begrenzt.  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{K}$  sind dabei so orientiert, daß  $\mathfrak{K}$  entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn verläuft, wenn  $\mathfrak{F}$  von der Außenseite her betrachtet wird. In einer offenen Menge des Raumes, die  $\mathfrak{F}$  einschließlich  $\mathfrak{K}$  enthält, sei ein Vektorfeld  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  gegeben, dessen Komponenten stetig und stetig partiell differenzierbar sind. Dann gilt

$$\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\mathfrak{F}} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, df. \quad (7.34)$$

In Satz 7.4 verstehen wir dabei unter  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  den Ortsvektor und unter der Rotation den in Band 4, Abschnitt 3.9.2.3., eingeführten Differentialoperator:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Den Beweis des Integralsatzes von Stokes wollen wir nicht ausführlich durchführen, sondern nur eine kurze Skizze angeben. Wir betrachten zunächst nur die erste Komponente  $P = P(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ . Die linke Seite von Formel (7.34) lautet dann

$$\oint_{\mathfrak{K}} P(\mathbf{x}) \, dx. \quad (7.35)$$

$\mathbf{x} = \mathbf{g}(u, v)$  ist eine Abbildung aus der  $u, v$ -Ebene in den  $x, y, z$ -Raum, die  $M$  auf  $\tilde{\gamma}$  abbildet. Bei dieser Abbildung geht der Rand von  $M$ , die orientierte geschlossene Kurve  $\tilde{\gamma}^*$  ( $\tilde{\gamma}^*$  wird dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt durchlaufen), in die  $\tilde{\gamma}$  berandende Raumkurve  $\tilde{\gamma}$  über. Ist  $(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , eine Darstellung von  $\tilde{\gamma}^*$ , so ist  $\mathbf{g}(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , eine Darstellung von  $\tilde{\gamma}$ . Das Integral (7.35) kann dann berechnet werden durch

$$\int_I P[\mathbf{x}(u(t), v(t))] \frac{dx(u(t), v(t))}{dt} dt. \quad (7.36)$$

Unter Beachtung von  $\frac{dx(u(t), v(t))}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \dot{v}(t)$  ist (7.36) jedoch auch der Ausdruck zur Berechnung des Kurvenintegrals

$$\int_{\tilde{\gamma}^*} \left\{ P[\mathbf{x}(u, v)] \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + P[\mathbf{x}(u, v)] \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} dv \right\} \quad (7.37)$$

in der  $u, v$ -Ebene. Auf (7.37) können wir wegen der Voraussetzungen über  $P$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(u, v)$  und  $M$  den Gaußschen Integralsatz in der Ebene anwenden. (7.37) geht dann über in

$$\iint_M \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} \left[ P(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left[ P(\mathbf{x}(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right\} du dv. \quad (7.38)$$

Berechnet man in (7.38) die partiellen Ableitungen der Ausdrücke in den eckigen Klammern und ordnet das Ergebnis entsprechend, so stellt (7.38) das Bereichsintegral zur Berechnung des Oberflächenintegrals zweiter Art

$$\iint_{\tilde{\gamma}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right) = \iint_{\tilde{\gamma}} \left[ \frac{\partial P}{\partial z} (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial P}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \right] df \quad (7.39)$$

dar. Es gilt also

$$\oint_{\tilde{\gamma}} Q dx = \iint_{\tilde{\gamma}} \left[ \frac{\partial P}{\partial z} (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial P}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \right] df. \quad (7.40)$$

Ganz analog können wir mit  $Q$  und  $R$  verfahren und erhalten die Formeln

$$\oint_{\tilde{\gamma}} Q dy = \iint_{\tilde{\gamma}} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial Q}{\partial z} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) \right] df, \quad (7.41)$$

$$\oint_{\tilde{\gamma}} R dz = \iint_{\tilde{\gamma}} \left[ \frac{\partial R}{\partial y} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) - \frac{\partial R}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) \right] df. \quad (7.42)$$

Fassen wir die Formeln (7.40) bis (7.42) zusammen, so erhalten wir

$$\oint_{\tilde{\gamma}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\tilde{\gamma}} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}) \right] df.$$

Der Integrand des Oberflächenintegrals ist aber gleich  $(\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ , womit wir Formel (7.34) nachgewiesen haben.

Wir zeigen nun an einigen Beispielen die Anwendung des Integralsatzes von Stokes.  
**Beispiel 7.7:** Wir hatten den Beweis des Satzes 5.8 offengelassen. Wir wollen ihn jetzt nachholen. Satz 5.8 sagt aus: Ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  die Gleichung  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  erfüllt, dann ist das Kurvenintegral  $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  in  $G$  vom

Integrationsweg unabhängig. Nach Satz 5.6 ist  $\int f \, dx$  genau dann vom Integrationsweg unabhängig, wenn für jede geschlossene, ganz in  $G$  verlaufende Kurve  $\mathfrak{K} \oint f \cdot dx = 0$  gilt.

Um dies nachzuweisen, sei jetzt  $\mathfrak{K}$  eine beliebige ganz in  $G$  verlaufende geschlossene Kurve.  $\mathfrak{F}$  sei eine beliebige, ganz in  $G$  liegende und den Voraussetzungen des Integralsatzes von Stokes genügende Fläche, die  $\mathfrak{K}$  als Rand hat.<sup>1)</sup> Nach Formel (7.34) ist dann

$$\oint_{\mathfrak{K}} f \cdot dx = \iint_{\mathfrak{F}} (\operatorname{rot} f) \cdot n \, df = \iint_{\mathfrak{F}} 0 \cdot n \, df = 0.$$

Damit ist Satz 5.8 bewiesen.

*Beispiel 7.8:* Es sei  $\mathfrak{K}$  die Schnittkurve zwischen der oberen Halbkugel ( $z \geq 0$ ) mit dem Radius  $R$  um  $0$  und dem Zylinder  $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ , die entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, wenn wir von oben auf die Kugelfläche sehen. Es ist  $\oint_{\mathfrak{K}} f \cdot dx$  mit  $f = (xy, y^2, yz)$  zu berechnen.

$\mathfrak{K}$  berandet den beim Florentiner Problem herausgeschnittenen Teil  $\mathfrak{F}_0$  der Kugelfläche (vergleiche Beispiel 6.3). Wir wenden zur Berechnung des Kurvenintegrals  $L = \oint_{\mathfrak{K}} f \cdot dx$  den Integralsatz von Stokes an. Hierzu benötigen wir die Rotation von  $f$  und die Darstellung einer geeigneten Fläche, die von  $\mathfrak{K}$  berandet wird. Es bietet sich hier der Teil  $\mathfrak{F}_0$  der Kugeloberfläche an. Die Normale der Kugeloberfläche hat die gleiche Richtung wie der Ortsvektor  $x = (x, y, z)$ . Es gilt also  $n = \frac{x}{R}$ , da der Betrag für auf der Kugeloberfläche liegende  $x$  gleich  $R$  ist. Für  $\operatorname{rot} f$  finden wir  $(z, 0, -x)$ . Damit wird

$$(\operatorname{rot} f) \cdot n = \frac{1}{R} (z, 0, -x) \cdot (x, y, z) = \frac{1}{R} (xz - xz) = 0$$

und

$$L = \oint_{\mathfrak{K}} f \cdot dx = \iint_{\mathfrak{F}_0} (\operatorname{rot} f) \cdot n \, df = \iint_{\mathfrak{F}_0} 0 \cdot df = 0.$$

- \* *Aufgabe 7.5:* Es ist das gleiche Kurvenintegral wie in Beispiel 7.8 zu berechnen. Bei der Anwendung des Integralsatzes von Stokes ist jedoch nicht die Kugelfläche, sondern die Fläche  $\mathfrak{F}^*$  zu verwenden, die entsteht, wenn man auf  $\mathfrak{K}$  eine zur  $y$ -Achse parallele Gerade entlang gleiten lässt.

Ehe wir als nächstes Beispiel eine Anwendung des Integralsatzes von Stokes in der Elektrodynamik behandeln, wollen wir einen Hilfssatz bereitstellen.

**S.7.5 Satz 7.5:** Ist  $v$  ein in einem räumlichen Gebiet  $G$  stetiges Vektorfeld, für das für jede beliebige, in  $G$  liegende Fläche  $\mathfrak{F}$

$$\iint_{\mathfrak{F}} v \cdot n \, df = 0 \tag{7.43}$$

gilt, so ist  $v = 0$  in  $G$ .

---

<sup>1)</sup> Man kann zeigen, daß es unter unseren Voraussetzungen über die Kurve  $\mathfrak{K}$  (Def. 5.2) stets eine der Definition 6.2 genügende Fläche  $\mathfrak{F}$  gibt, deren Rand mit  $\mathfrak{K}$  übereinstimmt.

*Beweis.* Wir führen den Beweis indirekt. Hierzu nehmen wir an,  $v$  sei in  $x_0 \in G$  vom Nullvektor verschieden:  $v(x_0) = a \neq 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $v$  gibt es zu  $\varepsilon = \frac{1}{2} |a|$  ein  $\delta > 0$ , so daß  $|v(x) - v(x_0)| = |v(x) - a| < \varepsilon$  ist für alle  $x$  mit  $|x - x_0| \leq \delta$ . Für  $x$  mit  $|x - x_0| \leq \delta$  ist dann

$$0 \leq |v(x) - a|^2 = [v(x) - a] \cdot [v(x) - a] = |v(x)|^2 + |a|^2 - 2v(x) \cdot a < \varepsilon^2 = \frac{|a|^2}{4},$$

also

$$0 < \frac{1}{4} |a|^2 < v(x) \cdot a \quad \text{für } |x - x_0| \leq \delta. \quad (7.44)$$

$\tilde{\Omega}_0$  sei nun eine Kreisfläche mit dem Radius  $\delta$  um  $x_0$ , die senkrecht auf  $a$  steht. Die Normale von  $\tilde{\Omega}_0$  ist also  $n = \frac{a}{|a|}$ . Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\iint_{\tilde{\Omega}_0} v \cdot n \, df = \delta^2 \pi v(x_1) \cdot \frac{a}{|a|},$$

wobei  $x_1$  ein geeigneter Punkt von  $\tilde{\Omega}_0$  ist. Wegen der Voraussetzung (Formel (7.43)) ist dann

$$v(x_1) \cdot a = 0$$

im Widerspruch zu Formel (7.44), da wegen  $x_1 \in \tilde{\Omega}_0$ ,  $|x_1 - x_0| \leq \delta$  ist. Damit ist Satz 7.5 bewiesen.

*Beispiel 7.9:* Die Maxwellschen Gleichungen (für ruhendes Medium) in Integralform lauten:

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot n \, df = - \oint_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{E} \cdot dx \quad (\text{Induktionsgesetz}), \quad (7.45)$$

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{C} \cdot n \, df = \oint_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{H} \cdot dx \quad (\text{elektromagnetisches Verkettungsgesetz}). \quad (7.46)$$

Hierbei kann  $\tilde{\Omega}$  jede beliebige Fläche im Raum sein.  $\tilde{\Gamma}$  ist die jeweilige Berandungskurve von  $\tilde{\Omega}$ .  $\mathbf{B}$  ist die magnetische Induktion,  $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{I}$  der Gesamtstrom,  $\mathbf{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\mathbf{H}$  die magnetische Erregung und  $\mathbf{I}$  der spezifische elektrische Strom (s. z. B. [8], § 3).

Die Maxwellschen Gleichungen sollen nun in eine Form gebracht werden, die keine Integrale mehr verwendet. Hierzu wenden wir auf die Kurvenintegrale in Formel (7.45) und (7.46) den Integralsatz von Stokes an:

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{E} \cdot dx = \iint_{\tilde{\Omega}} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \cdot n \, df,$$

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{H} \cdot dx = \iint_{\tilde{\Omega}} (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \cdot n \, df.$$

Damit können wir (7.45) und (7.46) umformen zu

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0,$$

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{I} - \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

Da  $\tilde{\Sigma}$  jede beliebige Fläche sein darf, können wir Satz 7.5 anwenden. Es folgt

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{I} = \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Dies sind die gesuchten Gleichungen (Maxwellsche Gleichungen in Differentialform).

In den vorangegangenen Beispielen haben wir Kurvenintegrale über den Stokeschen Integralsatz durch Oberflächenintegrale ausgewertet. Oft lassen sich jedoch auch Oberflächenintegrale besser durch Kurvenintegrale berechnen. Es muß dann die Randkurve der Oberfläche oder das Vektorfeld besonders einfach sein. Wir wollen auch hierzu ein Beispiel angeben.

Wir bemerken weiter: Im Stokesschen Integralsatz 7.4 sind die betrachteten Oberflächen ziemlich starken Einschränkungen unterworfen. Satz 7.4 gilt jedoch auch noch dann, wenn  $\tilde{\Sigma}$  aus endlich vielen, den Bedingungen von Satz 7.4 genügenden Flächen zusammengesetzt ist. Auch dieser Sachverhalt soll im nächsten Beispiel berücksichtigt werden.

*Beispiel 7.10:* Es sei  $B$  der Würfel mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  und  $(0, 1, 1)$ .  $\tilde{\Sigma}$  sei die Oberfläche von  $B$  mit nach außen gerichteter Normale,  $\tilde{\Sigma}_0$  sei die Restfläche von  $\tilde{\Sigma}$ , wenn aus  $\tilde{\Sigma}$  das Quadrat  $\tilde{\Sigma}_1$  mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  entfernt wird. Es ist  $I = \iint_{\tilde{\Sigma}} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  zu berechnen mit  $\mathbf{v} = (e^{y+z}, \sin xz, e^{-xy})$ .

$\tilde{\Sigma}_0$  besteht aus fünf Quadranten, über die getrennt integriert werden muß. Weiter ist  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (-x e^{-xy} - x \cos xz, y e^{-xy} + e^{y+z}, z \cos xz - e^{y+z})$  sicher nicht einfacher als  $\mathbf{v}$  aufgebaut. Da der Rand  $\tilde{\alpha}$  von  $\tilde{\Sigma}_0$  der Streckenzug  $(0, 0, 0) - (1, 0, 0) - (1, 1, 0) - (0, 1, 0) - (0, 0, 0)$  ist, also ganz in der  $x, y$ -Ebene liegt, ist es sicher einfacher,  $I$  nach dem Stokesschen Integralsatz umzuformen und das Kurvenintegral über  $\tilde{\alpha}$  zu berechnen. Diesen Weg wollen wir beschreiben.

$$I = \iint_{\tilde{\Sigma}_0} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\tilde{\alpha}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 e^0 \, dt - \int_0^1 e^1 \, dt = 1 - e.$$

(In den beiden Integralen von  $(1, 0, 0)$  nach  $(1, 1, 0)$  und von  $(0, 1, 0)$  nach  $(0, 0, 0)$  ist der Integrand  $\sin xz$  gleich null wegen  $z = 0$ .)

- \* *Aufgabe 7.6:* Berechne mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes  $I = \iint_{\tilde{\Sigma}} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$ , wobei  $\mathbf{v} = (z - 4, y^2, 0)$  und  $\tilde{\Sigma}$  der Teil des Rotationsparaboloides  $z = x^2 + y^2$  ist, der im 1. Oktanten  $x \geq 0, y \geq 0$ ,

$z \geq 0$  zwischen den Ebenen  $z = 0$  und  $z = 4$  liegt. Die Normale  $\mathbf{n}$  von  $\tilde{\Sigma}$  weise stets in das Äußere des die positive  $z$ -Achse enthaltenden Rotationskörpers. Skizziere zunächst in einem Schrägbild das Flächenstück!

Aus dem Integralsatz von Stokes folgt übrigens unmittelbar ein Sachverhalt, der sich oft günstig zur Auswertung von Oberflächenintegralen des Types  $\iint_{\tilde{\Sigma}} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  verwenden lässt.

**Satz 7.6:** Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes räumliches Gebiet. In  $G$  sei das S.7.6 Vektorfeld  $\mathbf{v}$  stetig und stetig partiell differenzierbar.  $\tilde{\Sigma}_1$  und  $\tilde{\Sigma}_2$  seien ganz in  $G$  verlaufende Flächen, die den Voraussetzungen von Satz 7.4 genügen und gemeinsam von der Raumkurve  $\tilde{\alpha}$  berandet werden.  $\tilde{\Sigma}_1$ ,  $\tilde{\Sigma}_2$  und  $\tilde{\alpha}$  seien wie in Satz 7.4 orientiert. Dann gilt

$$\iint_{\tilde{\Sigma}_1} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\tilde{\Sigma}_2} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Ist insbesondere  $\tilde{\Sigma}$  eine in  $G$  liegende geschlossene Fläche, so ist

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

Zum Beweis wenden wir auf beide Oberflächenintegrale den Integralsatz von Stokes an und erhalten

$$\iint_{\tilde{\Sigma}_1} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\tilde{\alpha}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x},$$

$$\iint_{\tilde{\Sigma}_2} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\tilde{\alpha}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Wegen der Gleichheit der rechten Seiten ist der erste Teil des Satzes bereits bewiesen. Zerlegen wir die geschlossene Fläche  $\tilde{\Sigma}$  durch eine auf  $\tilde{\Sigma}$  liegende geschlossene Kurve  $\tilde{\alpha}$  in zwei Teile  $\tilde{\Sigma}_1$  und  $\tilde{\Sigma}_2$ , so gilt nach dem bisher bewiesenen

$$\iint_{\tilde{\Sigma}_1} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \iint_{\tilde{\Sigma}_2} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

da  $\tilde{\alpha}$  als Rand von  $\tilde{\Sigma}_2$  die entgegengesetzte Orientierung hat wie als Rand von  $\tilde{\Sigma}_1$ . Zusammenfassung der Integrale über  $\tilde{\Sigma}_1$  und  $\tilde{\Sigma}_2$  ergibt die Behauptung

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0. \blacksquare$$

**Beispiel 7.11:** Satz 7.6 liefert uns ein weiteres Mittel, das Oberflächenintegral  $I$  aus Beispiel 7.10 in einfacherer Weise zu berechnen.  $\mathbf{v}$  ist im ganzen Raum stetig und stetig partiell differenzierbar. Weiter ist das Quadrat  $\tilde{\Sigma}_1$  mit der Normale  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  eine Fläche, die die gleiche Randkurve  $\tilde{\alpha}$  wie  $\tilde{\Sigma}_0$  hat. Nach Satz 7.6 gilt folglich

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\tilde{\Sigma}_0} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\tilde{\Sigma}_1} (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_3 \, dx \, dy \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 e^y \, dy \, dx = 1 - e. \end{aligned}$$

## 7.6. Koordinatenfreie Darstellung der Rotation

Ähnlich wie die Divergenz lässt sich auch die Rotation eines Vektorfeldes mit Hilfe von Integralen in einer Form darstellen, die vom benutzten Koordinatensystem unabhängig ist. In Band 4, Abschnitt 3.9.2.3., wurde die Rotation von  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$  durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

definiert, und in dieser Form haben wir sie bisher auch immer benutzt. Es wurde jedoch bereits in Band 4 angedeutet, daß diese Vektoroperation besser über Integrale definiert werden kann, die dort aber noch nicht zur Verfügung standen.

Es sei  $\mathbf{v}$  ein stetiges und stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Ist  $\mathfrak{F}$  eine orientierte Fläche mit der orientierten Randkurve  $\mathfrak{K}$  ( $\mathfrak{K}$  wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen, wenn man von der Außenseite auf  $\mathfrak{F}$  blickt), so bezeichnet man  $\oint_{\mathfrak{K}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$

als *Zirkulation des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  längs der (geschlossenen) Kurve  $\mathfrak{K}$* . Betrachten wir nun für einen festen Punkt  $\mathbf{x}_0$  und eine feste Richtung  $\mathbf{n}_0$  eine Folge ebener Flächen  $\mathfrak{F}_n$  mit den Randkurven  $\mathfrak{K}_n$ , die senkrecht auf  $\mathbf{n}_0$  stehen,  $\mathbf{x}_0$  als inneren Flächenpunkt enthalten, und für die die Durchmesser gegen null streben, wenn  $n$  gegen unendlich strebt, so können wir mit der Zirkulation von  $\mathbf{v}$  längs  $\mathfrak{K}_n$  folgende (von  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{n}_0$  abhängige) skalare Größe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\oint_{\mathfrak{K}_n} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}}{A_n} \quad (7.47)$$

erklären, wobei  $A_n = \iint_{\mathfrak{F}_n} d\mathbf{x}$  der Flächeninhalt von  $\mathfrak{F}_n$  ist. Wenden wir auf die Zirkulation in Formel (7.47) den Integralsatz von Stokes an, so erhalten wir

$$\oint_{\mathfrak{K}_n} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\mathfrak{F}_n} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_0 d\mathbf{x}.$$

Der Mittelwertsatz für Bereichsintegrale liefert weiter

$$\iint_{\mathfrak{F}_n} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_0 d\mathbf{x} = A_n (\operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n}) \cdot \mathbf{n}_0,$$

wobei  $\mathbf{x}_n$  ein geeigneter Punkt von  $\mathfrak{F}_n$  ist. Da die Durchmesser der  $\mathfrak{F}_n$  gegen null streben, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ . Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen von  $\mathbf{v}$  ist auch  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  stetig, und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n} = \operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ . Damit liefert Formel (7.47)

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n (\operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_n}) \cdot \mathbf{n}_0}{A_n} = (\operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}) \cdot \mathbf{n}_0.$$

$a$  ist also die Komponente von  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  in Richtung von  $\mathbf{n}_0$  im Punkte  $\mathbf{x}_0$ . Wir fassen das Ergebnis zusammen in

**Satz 7.7:** Es sei  $\mathbf{v}$  ein stetiges und stetig partiell differenzierbares Vektorfeld,  $\mathbf{x}_0$  ein fester Punkt,  $\mathbf{n}_0$  eine feste Richtung und  $\mathfrak{F}_n$  eine Folge ebener, auf  $\mathbf{n}_0$  senkrecht stehenden

der Flächen mit dem Flächeninhalt  $A_n$  und dem Rand  $\mathfrak{E}_n$ , die  $\mathbf{x}_0$  als inneren Flächenpunkt enthalten und deren Durchmesser gegen null streben, so gilt

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}) \cdot \mathbf{n}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}}{A_n}.$$

Satz 7.7 zeigt, daß  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  nicht von der speziellen Wahl der Koordinatenachsen abhängig ist.

Übrigens kann die rechte Seite von Formel (7.47) unter Umständen auch dann berechnet werden, wenn  $\mathbf{v}$  schwächeren als den in Satz 7.7 angegebenen Voraussetzungen genügt. Zum Beispiel muß  $\mathbf{v}$  zur Anwendung von Formel (7.47) nicht unbedingt partiell differenzierbar sein. Man muß dann allerdings fordern, daß die rechte Seite von (7.47) für jede Folge von Flächen der angegebenen Art gegen den gleichen Grenzwert  $a$  strebt. Mit Formel (7.47) als Grundlage für die Definition von  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  erhält man deshalb sogar einen allgemeineren Begriff als mit der Definition über die Differentialoperatoren.

*Beispiel 7.12:* Es sei  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$  mit  $r = |\mathbf{x}|$ .  $\mathbf{v}$  ist also auf jeder Kugel um 0 eine konstante Vektorgröße. Es ist die Komponente von  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  in Richtung von  $\frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|} = \mathbf{n}_0$  zu berechnen.

Wir benutzen Satz 7.7 und nehmen für  $\mathfrak{E}_n$  Kreisflächen mit dem Radius  $\frac{1}{n}$  um  $\mathbf{x}_0$  senkrecht zu  $\mathbf{n}_0$ . Auf dem Rand  $\mathfrak{E}_n$  dieser Kreisflächen ist  $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_0|^2 + \frac{1}{n^2}$  konstant, also ist auch  $\mathbf{v}(|\mathbf{x}|) = \mathbf{a}_n$  konstant auf  $\mathfrak{E}_n$ . Wir haben also  $\oint_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{a}_n \cdot d\mathbf{x}$  zu berechnen. Wir können dieses Kurvenintegral auch als  $\oint_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  auffassen mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_n = \text{const}$  im ganzen Raum. Wegen  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$  wird dann nach Satz 5.8 das Kurvenintegral  $\oint_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  vom Weg unabhängig, nach Satz 5.6 also  $\oint_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{E}_n} \mathbf{a}_n \cdot d\mathbf{x} = 0$ . Formel (7.47) liefert schließlich

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\pi \cdot \frac{1}{n^2}} = 0.$$

*Aufgabe 7.7:* Es sei  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  ein Vektorfeld, dessen Feldlinien die Ebene  $E$  mit der Gleichung  $* 3x + 2y - z = 5$  senkrecht durchsetzen. Es ist die Komponente von  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  in Richtung  $\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} (3, 2, -1)$  im Punkt  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 2)$  zu berechnen.

## Lösungen der Aufgaben

**1.1:**  $\int_{-x}^{2x} x(y+1) dy = [x(\frac{1}{2}y^2 + y)]_{y=-x}^{y=2x} = x(2x^2 + 2x) - x(\frac{1}{2}x^2 - x) = 3x^2(\frac{1}{2}x + 1)$ . (Für  $x \geq 0$  verläuft  $y_1(x) = -x$  unterhalb von  $y_2(x) = 2x$ ).

**1.2:** a) Durch die Substitution  $u = xy$  ( $x dy = du$ ) erhält man  $F(x) = \int_0^{x^2} (\sin u) \frac{1}{x} du$

$$= \left[ -\frac{1}{x} \cos u \right]_{u=0}^{u=x^2} = \frac{1}{x} (1 - \cos x^2).$$

Hieraus folgt:  $F'(x) = 2 \sin x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \cos x^2$ .

b)  $f(x, y) = \sin xy, f_x(x, y) = y \cos xy$ . Aus Formel (1.3) folgt dann:

$F'(x) = \int_0^x y \cos xy dy + \sin x^2$ . Das Integral kann durch die Substitution  $u = xy$  ( $x dy = du$ ) und anschließende partielle Integration gelöst werden:

$$\int_0^x y \cos xy dy = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} u \cos u du = \frac{1}{x^2} [u \sin u + \cos u]_0^{x^2} = \frac{1}{x^2} (x^2 \sin x^2 + \cos x^2 - 1).$$

Man erhält also für  $F'(x)$  das gleiche Ergebnis wie in Aufgabe a).

**1.3:**  $B^*$  ist eine Ordinatenmenge  $O(B, f)$  mit  $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3-x\}$  und  $z = f(x, y) = 6 - x - 2y$ . (Vgl. die Ausführungen in Beispiel 1.8.) Bild L 1.3 liefert uns eine Skizze von  $B^*$ .

Aus Formel (1.5) ergibt sich dann  $V = \int_0^3 \int_0^{3-x} (6 - x - 2y) dy dx = \int_{x=0}^3 \left[ \int_{y=0}^{3-x} (6 - x - 2y) dy \right] dx$ .

Wir berechnen zunächst das innere Integral:

$$\int_0^{3-x} (6 - x - 2y) dy = [6y - xy - y^2]_{y=0}^{y=3-x} = 6(3-x) - x(3-x) - (3-x)^2 = 9 - 3x.$$

Hieraus folgt:  $V = \int_0^3 (9 - 3x) dx = \frac{27}{2}$ .

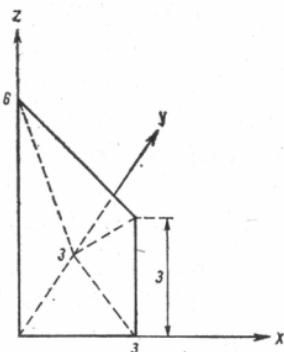


Bild L 1.3

**1.4:**  $B^*$  ist eine Ordinatenmenge  $O(B, f)$  mit

$$B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, 4 - \sqrt{4 - (x-3)^2} \leq y \leq 4 + \sqrt{4 - (x-3)^2}\}$$

und  $f(x, y) = xy$  (vgl. die Ausführungen in Beispiel 1.8). Bild L 1.4 zeigt den Grundriß  $B$  von  $B^*$ .  $B$  wird von dem Kreis  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$  begrenzt;  $y = y_1(x) = 4 - \sqrt{4 - (x-3)^2}$  liefert die untere Kreishälfte,  $y = y_2(x) = 4 + \sqrt{4 - (x-3)^2}$  die obere Kreishälfte. Aus Formel (1.5) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{5} \int_{4-\sqrt{4-(x-3)^2}}^{4+\sqrt{4-(x-3)^2}} xy \, dy \, dx = \int_1^5 8x \sqrt{4 - (x-3)^2} \, dx = \int_{-2}^2 8(t+3) \sqrt{4 - t^2} \, dt \\ &= 8 \int_{-2}^2 t \sqrt{4 - t^2} \, dt + 24 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - t^2} \, dt = 0 + 48\pi = 48\pi. \end{aligned}$$

(Hinweis: Das 1. Integral braucht man nicht zu berechnen. Da  $f(t) = t\sqrt{4-t^2}$  eine ungerade Funktion ist, muß  $\int f(t) \, dt$  gleich null sein!)

**1.5:** Nach der l'Hospitalschen Regel gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xf(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) + xf'(x)) \cos(xf(x))}{1} = \frac{(y_0 + 0) \cdot 1}{1} = y_0.$$

Die Zusatzfrage muß mit „nein“ beantwortet werden (s. Definition des Grenzwertes bei Funktionen mit mehreren Variablen in Band 4).

**1.6:**  $x = 0,1$ . Aus  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$  (für jedes  $x > 0$ ) und der Tabelle ergibt sich:  $0,1 \cdot \Gamma(0,1) = \Gamma(1,1) = 0,951$ . Hieraus folgt:  $\Gamma(0,1) = 9,51$ . Analog berechnet man  $\Gamma(x)$  für  $x = 0,2; \dots; 0,9$ .

$$x = 2,1 \Rightarrow \Gamma(2,1) = \Gamma(1,1 + 1) = 1,1 \cdot \Gamma(1,1) = 1,1 \cdot 0,951 = 1,046.$$

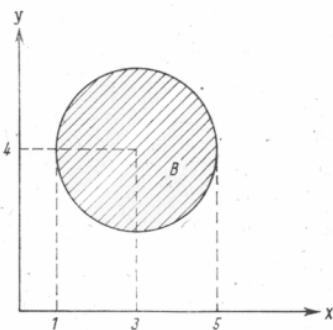


Bild L 1.4

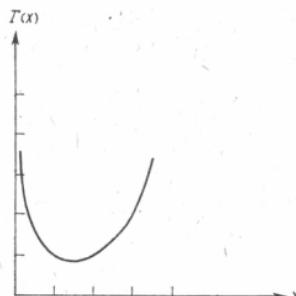


Bild L 1.6

Analog berechnet man  $\Gamma(x)$  für  $x = 2,2; \dots; 3,0$ .

$x$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\Gamma(x)$	9,51	4,59	2,99	2,22	1,77	1,49	1,30	1,16	1,07

$x$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
$\Gamma(x)$	1,05	1,10	1,17	1,24	1,33	1,43	1,55	1,68	1,83	2,00

$$2.1: B: \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ \sqrt{y} \leq x \leq 6 - y \end{cases}$$

ist ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse. ( $y = -x + 6$  ist die Gerade durch die Punkte  $(6,0)$  und  $(2,4)$ . Aus  $y = -x + 6$  bzw.  $y = x^2$  folgt  $x = 6 - y$  bzw.  $x = \sqrt{y}$ .)

$$\int \int_B f(P) db = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{6-y} xy dx dy = \frac{112}{3}.$$

2.2: Der Bereich  $B$  wird durch die Gerade  $x = 4$  (das ist eine Gerade parallel zur  $y$ -Achse) in zwei Normalbereiche bezüglich der  $x$ -Achse zerlegt, die wir mit  $B_1$  bzw.  $B_2$  bezeichnen wollen (vgl. Def. 1.1).

$$B_1: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{4}x^2 + 1, \end{cases} \quad B_2: \begin{cases} 4 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 9 - x. \end{cases}$$

Aus den in Satz 2.5 bzw. Satz 2.6 angegebenen Formeln erhalten wir dann – unter Beachtung der in Satz 2.3, c angegebenen Zerlegungsformel –

$$m = \int \int_B \varrho db = \int \int_{B_1} \varrho db + \int \int_{B_2} \varrho db = \int_0^4 \int_0^{1/4x^2+1} xy dy dx + \int_4^9 \int_0^{9-x} xy dy dx \\ = \frac{124}{3} + \frac{875}{8} = \frac{3617}{24},$$

$$x_S = \frac{1}{m} \int \int_B x \varrho db = \frac{1}{m} \left( \int_0^4 \int_0^{1/4x^2+1} x^2 y dy dx + \int_4^9 \int_0^{9-x} x^2 y dy dx \right) \\ = \frac{24}{3617} \left( \frac{14176}{105} + \frac{2375}{4} \right) \approx 0,0066 \cdot 728,76 \approx 4,81,$$

$$y_S = \frac{1}{m} \int \int_B y \varrho db = \frac{1}{m} \left( \int_0^4 \int_0^{1/4x^2+1} xy^2 dy dx + \int_4^9 \int_0^{9-x} xy^2 dy dx \right)$$

$$\approx 0,0066 \cdot \{104 + 261\} \approx 2,41.$$

$$2.3: J_x = \int \int_B y^2 \varrho db = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y^2(x^2 + y) dy dx = \int_{-2}^2 \left( 64 - \frac{128}{3}x^2 + 8x^4 - \frac{1}{12}x^8 \right) dx \\ = 2 \cdot \int_0^2 \left( 64 - \frac{128}{3}x^2 + 8x^4 - \frac{1}{12}x^8 \right) dx \approx 121.$$

$$2.4: \int \int_B f(P) db = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{B_\varepsilon} f(P) db = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{4-x^2} y \cdot x^{-1/3} dy dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 12 \left( 2 - \varepsilon^{2/3} \right) = 24.$$

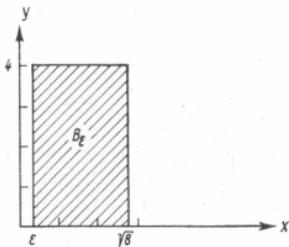


Bild L 2.4

3.1:  $B$  wird von 5 Ebenen begrenzt:

- $z = -3$  (untere Begrenzung);
- $y = -x + 1, \quad y = x - 1, \quad x = 4$  (seitl. Begrenzung);
- $z = \frac{2}{3}(x + y + 2)$  (obere Begrenzung).

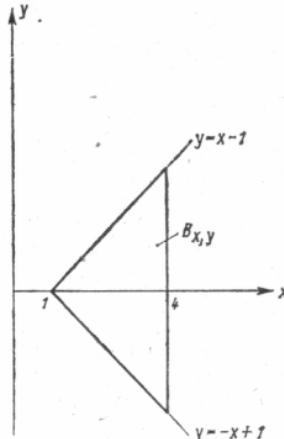
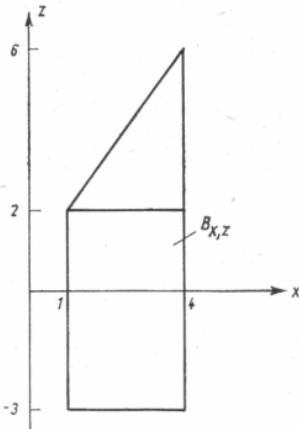


Bild L 3.1

3.2: Normalbereiche bezüglich der  $x, y$ -Ebene:

$$B_1: \begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \end{cases} \quad B_2: \begin{cases} y_1 \leq y \leq y_2 \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \end{cases}$$

Normalbereiche bezüglich der  $y, z$ -Ebene:

$$B_3: \begin{cases} y_1 \leq y \leq y_2 \\ z_1(y) \leq z \leq z_2(y) \\ x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), \end{cases} \quad B_4: \begin{cases} z_1 \leq z \leq z_2 \\ y_1(z) \leq y \leq y_2(z) \\ x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), \end{cases}$$

Normalbereiche bezüglich der  $x, z$ -Ebene:

$$B_5: \begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ z_1(x) \leq z \leq z_2(x) \\ y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), \end{cases} \quad B_6: \begin{cases} z_1 \leq z \leq z_2 \\ x_1(z) \leq x \leq x_2(z) \\ y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z). \end{cases}$$

Aus diesen Darstellungen kann man folgende Gesetzmäßigkeit bei räumlichen Normalbereichen ablesen: Bringt man die Variablen  $x, y, z$  in eine geeignete Reihenfolge (z. B.  $z, y, x$  bei  $B_4$ ), so sind die Grenzen für die 1. Variable konstant, die Grenzen für die 2. Variable Funktionen der 1. Variablen

und die Grenzen für die 3. Variable Funktionen der 1. und 2. Variablen. Diese Formulierung (in entsprechend präzisierter Form) kann als Definition für räumliche Normalbereiche benutzt werden; sie ist unabhängig von der in Definition 3.2 zugrunde gelegten geometrischen Vorstellung und sofort auf einen beliebigen  $u, v, w$ -Raum übertragbar.

**Hinweis:** In Aufgabe 3.1 ist  $B$  ein räumlicher Normalbereich vom Typ  $B_1$ . Es gilt  $z_1(x, y) = -3$ ,  $z_2(x, y) = \frac{3}{2}(x + y + 2)$ . Bei der Gleichung  $z_1(x, y) = -3$  soll besonders darauf hingewiesen werden, daß  $z = -3$  als Funktion von  $x$  und  $y$  angesehen werden kann:  $z$  ist für alle Punkte  $(x, y)$  konstant gleich  $-3$  (s. Band 4).

### 3.3:

$$\text{Inneres Integral: } \int_0^{x+y+4} (x + y + z) dz = \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x+y+4} \\ = \frac{3}{2} x^2 + 8x + 8y + 3xy + \frac{3}{2} y^2 + 8.$$

$$\text{Mittleres Integral: } \left[ \frac{3}{2} x^2 y + 8xy + 4y^2 + \frac{3}{2} xy^2 + \frac{1}{2} y^3 + 8y \right]_{y=x-1}^{y=\frac{x}{2}+3} \\ = -\frac{37}{16} x^3 + \frac{73}{8} x^2 + \frac{261}{4} x + 78.$$

$$\text{Äußeres Integral: } \left[ -\frac{37}{64} x^4 + \frac{73}{24} x^3 + \frac{261}{8} x^2 + 78x \right]_0^8 = \frac{5704}{3} \approx 1901.$$

$B$  wird nach unten durch die  $x, y$ -Ebene mit der Gleichung  $z = 0$ , nach oben durch die Ebene  $z = x + y + 4$  und seitlich durch die drei auf der  $x, y$ -Ebene senkrecht stehenden Ebenen  $y = x - 1$ ,  $y = \frac{x}{2} + 3$ ,  $x = 0$  begrenzt.

**3.4:** Zu den Normalbereichen  $B_1, \dots, B_6$  gehören (in der angegebenen Reihenfolge) die folgenden dreifachen Integrale:

$$1. \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx,$$

$$2. \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy,$$

$$3. \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dx dz dy,$$

$$4. \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx dy dz,$$

$$5. \int_{x_1}^{x_2} \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy dz dx,$$

$$6. \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy dx dz.$$

*Hinweis:* Die drei Symbole (Elemente)  $dx, dy, dz$  kann man auf  $3! = 6$  Arten anordnen (permutieren). Das entspricht der Tatsache, daß es 6 verschiedene Arten von dreifachen Integralen gibt.

3.5:

$$\text{Inneres Integral: } \left[ \frac{1}{2} x z y^2 \right]_{y=0}^{y=x+3z} = \frac{1}{2} x^3 z + 3x^2 z^2 + \frac{9}{2} x z^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Mittleres Integral: } & \left[ \frac{1}{8} x^4 z + x^3 z^2 + \frac{9}{4} x^2 z^3 \right]_{x=0}^{x=z+2} \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{27}{4} z^5 + 32z^4 + 48z^3 + 24z^2 + 4z \right). \end{aligned}$$

$$\text{Äußeres Integral: } \frac{1}{2} \left[ \frac{9}{8} z^6 + \frac{32}{5} z^5 + 12z^4 + 8z^3 + 2z^2 \right]_0^5 = \frac{369025}{16} \approx 23064.$$

Betrachtet man die  $y$ -Achse als vertikale Richtung, so wird  $B$  nach unten durch die  $x,z$ -Ebene ( $y = 0$ ), nach oben durch die Ebene  $y = x + 3z$  und seitlich durch die auf der  $x,z$ -Ebene senkrecht stehenden Ebenen  $x = 0, x = z + 2, z = 0, z = 5$  begrenzt.

$$\begin{aligned} 3.6: V &= \iiint_B db = \int_0^3 \int_1^4 \int_0^{x^2+y^2+2} dz dy dx \\ &= \int_0^3 \int_1^4 (x^2 + y^2 + 2) dy dx = \int_0^3 (3x^2 + 27) dx = 108. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{V} \int_B \int \int x db = \frac{1}{108} \int_0^3 \int_1^4 \int_0^{x^2+y^2+2} x dz dy dx \\ &= \frac{1}{108} \int_0^3 \int_1^4 x(x^2 + y^2 + 2) dy dx = \frac{1}{108} \cdot \frac{729}{4} = \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

3.7:  $B$  ist ein räumlicher Normalbereich von dem in Beispiel 3.2 behandelten Typ.

$$B: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 5 - \frac{5}{3}x \\ 0 \leq z \leq 2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y. \end{cases}$$

Diese Darstellung gewinnt man ganz einfach, wenn man davon ausgeht, daß  $y = 5 - \frac{5}{3}x$  die Gleichung der Geraden durch die Punkte  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$  und  $z = 2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y$  die Gleichung der Ebene durch die Punkte  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  ist.

*(Hinweis:* Bei diesem speziellen Beispiel hätte man  $B$  auch als Normalbereich der anderen fünf Typen beschreiben können. Siehe Lösung zu Aufgabe 3.2.) Nach Satz 3.6 gilt:  $J_y = \iiint_B r^2 \varrho db$  mit  $r^2 = x^2 + z^2$

und  $\varrho = x + 1$ . ( $r$  ist der Abstand des Punktes  $P(x, y, z)$  von der  $y$ -Achse.) Aus Satz 3.6 folgt dann:

$$\begin{aligned} J_y &= \iiint_B (x^2 + z^2)(x + 1) \, db \\ &= \int_0^3 \int_0^{5-x} \int_0^{(x^2+z^2)(x+1)} (x^2 + z^2)(x + 1) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{X^2/(x-y)} (x^2 + z^2)(x + 1) \, dz \, dy \, dx \quad (\text{Abk.: } X = \frac{5}{3}(3 - x)). \end{aligned}$$

$$\text{Inneres Integral: } \frac{2}{5}(x+1) \left( x^2(X-y) + \frac{4}{75}(X-y)^3 \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Mittleres Integral: } &\frac{1}{5}(x+1)x^2X^2 + \frac{2}{375}(x+1)X^4 \\ &= \frac{5}{9}(9x^2 + 3x^3 - 5x^4 + x^5) + \frac{10}{243}(81 - 27x - 54x^2 + 42x^3 - 11x^4 + x^5). \end{aligned}$$

Äußeres Integral:  $J_y = 14,25$ .

**4.1:**  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ebenfalls möglich!)

$$0 \leq z \leq 3,$$

$$0 \leq r \leq 2 - \frac{2}{3}z.$$

[Aus  $z = -\frac{3}{2}r + 3$  (vgl. Beispiel 4.2) folgt  $r = 2 - \frac{2}{3}z$ .]

Geometrische Interpretation (s. Bild 4.5):  $P$  sei ein Punkt des Kegels mit den Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ . Bei beliebig vorgegebenem  $\varphi$  kann  $z$  alle Werte zwischen 0 und 3 annehmen;  $z$  ist nicht von  $\varphi$  abhängig. Sind  $\varphi$  und  $z$  vorgegeben, so kann  $r$  alle Werte zwischen 0 und  $2 - \frac{2}{3}z$  annehmen;  $r$  ist nur von  $z$ , nicht von  $\varphi$  abhängig.

$$\text{4.2: a) } B: \begin{cases} -R \leq x \leq R \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

Man orientiere sich am Beispiel 4.1! Dem  $R$  in Aufgabe 4.2 entspricht das  $a$  in Beispiel 4.1. Während in Beispiel 4.1 die Halbkugel  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  die untere Begrenzungsfäche von  $B$  darstellt, wird in Aufgabe 4.2 der Bereich  $B$  nach unten durch die  $x, y$ -Ebene (mit der Gleichung  $z = z_1(x, y) = 0$ ) begrenzt.

b) Ausgehend von der geometrischen Bedeutung der Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  (vgl. Bild 4.4) können wir feststellen: Bei der vorgegebenen Halbkugel vom Radius  $R$  kann  $r$  alle Werte zwischen 0 und  $R$  annehmen. Bei beliebig vorgegebenem  $r$  kann  $\vartheta$  alle Werte zwischen 0 und  $\frac{1}{2}\pi$  ( $\cong 90^\circ$ ) annehmen;  $\vartheta$  ist nicht von  $r$  abhängig. Sind  $r$  und  $\vartheta$  vorgegeben, so kann  $\varphi$  alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$  ( $\cong 360^\circ$ ) annehmen;  $\varphi$  ist in diesem Falle weder von  $r$  noch von  $\vartheta$  abhängig. Der vorgegebene Bereich wird daher bezüglich Kugelkoordinaten beschrieben durch

$$B': \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\text{4.3: a) } B': \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{4}\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

b) Schneidet man den vorgegebenen Kugelausschnitt (Kugelsektor) längs der  $x, z$ -Ebene auf, so erhält man den in Bild L 4.3 b dargestellten Kreisausschnitt (Kreissektor) mit dem Zentriwinkel  $\alpha = 90^\circ$  und dem Radius  $R$ . (Bezüglich ebener und räumlicher Figuren siehe z. B. [1], Abschnitt

Geometrie.) Wir versuchen den Kugelausschnitt als einen Normalbereich von dem in Beispiel 4.2 b angegebenen Typ

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\leqq \varphi \leqq \varphi_2, \\ r_1(\varphi) &\leqq r \leqq r_2(\varphi), \\ z_1(r, \varphi) &\leqq z \leqq z_2(r, \varphi)\end{aligned}$$

zu beschreiben! Zunächst einmal kann  $\varphi$  alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$  annehmen. Bei vorgegebenem  $\varphi$  kann  $r$  alle Werte zwischen 0 und  $r_0 = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$  annehmen (siehe Bild L 4.3 b). Die Grenzen für  $r$  sind also bei diesem Beispiel nicht von der ersten Variablen  $\varphi$  abhängig! Sind  $\varphi$  und  $r$  vorgegeben, so kann  $z$  alle Werte zwischen  $z_1$  und  $z_2$  annehmen; dabei gilt  $z_1 = r$ ,  $z_2 = \sqrt{R^2 - r^2}$ . (Satz des Pythagoras beachten!) Die Grenzen für  $z$  sind bei diesem Beispiel nur von der zweiten Variablen  $r$  abhängig. Der vorgegebene Bereich wird daher bezüglich Zylinderkoordinaten beschrieben durch

$$B'': \begin{cases} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}R\sqrt{2} \\ r \leqq z \leqq \sqrt{R^2 - r^2}. \end{cases}$$

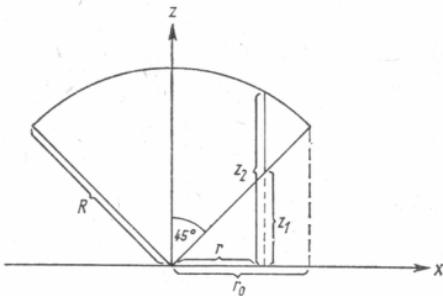


Bild L 4.3 b)

**4.4:** Für den geometrischen Schwerpunkt  $x_0, y_0$  von  $B$  gilt (vgl. Satz 2.6 und anschließende Bemerkung):

$$x_0 = \frac{1}{A} \int_B \int x \, db, \quad y_0 = \frac{1}{A} \int_B \int y \, db; \quad A = \int_B \int db = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Transformation auf Polarkoordinaten führt zu den Formeln:

$$x_0 = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \cos \varphi) r \, dr \, d\varphi = \frac{4R}{3\pi},$$

$$y_0 = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi = \frac{4R}{3\pi},$$

vgl. Formel (4.16) – diesmal wurde aber in der Reihenfolge  $dr, d\varphi$  integriert! Zugehöriger Normalbereich:

$$(0 =) \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2 \left( = \frac{\pi}{2} \right),$$

$$(0 =) r_1(\varphi) \leqq r \leqq r_2(\varphi) (= R).$$

**4.5:** Nach Satz 2.8 des Abschnittes 2.4. gilt:  $J_x = \iint_B y^2 \, db$ .

1. Transformation (Übergang von  $x, y$  zu  $x', y'$ ):

$$T_1: \begin{cases} x = x' + 5 \\ y = y' + 4 \end{cases} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = 1,$$

2. Transformation (Übergang von  $x', y'$  zu Polarkoordinaten (bezüglich  $x', y'$ )  $r, \varphi$ ):

$$T_2: \begin{cases} x' = r \cos \varphi \\ y' = r \sin \varphi \end{cases} \quad \frac{\partial(x', y')}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

Hieraus folgt (vgl. Formel (4.16)):

$$\begin{aligned} J_x &= \iint_B y^2 \, db = \iint_{B'} (y' + 4)^2 \cdot 1 \, db' = \iint_{B''} (r \sin \varphi + 4)^2 r \, db'' \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^2 (r \sin \varphi + 4)^2 r \, dr \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left( 4 \sin^2 \varphi + \frac{64}{3} \sin \varphi + 32 \right) d\varphi \\ &= \left[ 2\varphi - \sin 2\varphi - \frac{64}{3} \cos \varphi + 32\varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 34 \cdot \pi = 106,81. \end{aligned}$$

**4.6:** (Vgl. Formeln (3.3), (4.19), (4.18) und Beispiel 4.2)

$$\begin{aligned} V &= \iiint_B db = \iiint_{B'} 1 \, db = \iiint_{B'} 1 \cdot r \, db' = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \int_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}r+3} r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^2 r(-\frac{3}{2}r + 3) \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \, d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

Kontrolle:  $V = \frac{1}{3} Fh = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi$ .

**4.7:** Bezuglich Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  wird der vorgegebene Bereich beschrieben durch:

$$B': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq z \leq r^2 + 4. \end{cases}$$

Aus  $z = x^2 + y^2 + 4$  folgt  $z = r^2 + 4$ . Nach Formel (4.19) gilt daher:

$$V = \iint_B \int db = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{r^2+4} r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r(r^2 + 4) \, dr \, d\varphi = \frac{153}{2} \pi.$$

**4.8:** Wir führen ein  $x, y, z$ -Koordinatensystem ein, dessen Ursprung  $O$  mit der Spitze des Kugelausschnitts und dessen  $z$ -Achse mit der Symmetriechse des Kugelausschnitts zusammenfällt. Das Bild zeigt den Schnitt mit der  $x, z$ -Ebene. Für den Winkel  $\vartheta$  gilt  $\vartheta = \frac{\pi}{6}$  ( $\sin \vartheta = \frac{a}{R} = \frac{1}{2}$ ).

Im  $r, \vartheta, \varphi$ -Raum (Kugelkoordinaten) wird der Bereich beschrieben durch

$$B': \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leq r \leq 4. \end{cases}$$

Für das Volumen  $V$  von  $B$  und die  $z$ -Koordinate des geometrischen Schwerpunkts von  $B$  gilt dann:

$$V = \iiint_B db = \iiint_{B'} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^4 r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$z_0 = \frac{1}{V} \iiint_B z \, db = \frac{1}{V} \iiint_{B'} (r \cos \vartheta) \cdot (r^2 \sin \vartheta) \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^4 \frac{1}{2} r^3 \sin 2\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

$x_0$  und  $y_0$  müssen gleich null sein, weil aus Symmetriegründen der Schwerpunkt auf der  $z$ -Achse liegen muß. Die Berechnung der auftretenden dreifachen Integrale liefert für  $V$  und  $z_0$  die Werte

$$V = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{3}), z_0 = \frac{1}{V} \cdot 16\pi = \frac{3}{4(2 - \sqrt{3})} \approx 2,8.$$

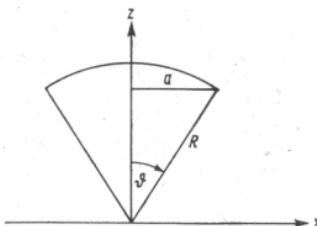


Bild L 4.8

**5.1:** Eine Darstellung der Strecke erhält man aus der Geradengleichung  $\mathbf{x}(t) = (1, 1, 1) + t[(2, 2, 2) - (1, 1, 1)] = (1+t)(1, 1, 1)$  durch  $(1, 1, 1)$  und  $(2, 2, 2)$ . Zum Anfangspunkt gehört  $t = 0$ , Endpunkt  $t = 1$ . Eine Darstellung der Strecke ist folglich  $\mathbf{g}(t) = (1+t, 1+t, 1+t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , mit  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (1, 1, 1)$  und  $|\dot{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{3}$ . Damit wird

$$\int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) \, ds = \int_0^1 \frac{1+t}{\sqrt{(1+t)^2 + (1+t)^2 + (1+t)^2}} \sqrt{3} \, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

**5.2:** Wegen  $\mathbf{g}(t) = (-4 \sin t, 2 \cos t, 6)$  wird nach Formel (5.19)

$$L = \int_{\pi/2}^{\pi/2} [4 \cos t \cdot (-4 \sin t) + 6 t \cdot 2 \cos t + 2 \cdot 6] dt = 9\pi - 6(1 + \sqrt{3}).$$

**5.3:**  $\mathfrak{K}$  ist zusammengesetzt aus  $\mathfrak{K}_1$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}_1(t) = (t, 0, 0)$ ,  $t \in [0, 2]$ , und  $\mathfrak{K}_2$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}_2(t) = (2, 0, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Es ist  $\mathbf{F}(\mathbf{g}_1(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}_1(t) = (0, 1-t, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0$  und  $\mathbf{F}(\mathbf{g}_2(t)) \cdot \dot{\mathbf{g}}_2(t) = (0, -1, t^2) \cdot (0, 0, 1) = t^2$ , also

$$W = \int_0^2 0 \cdot dt + \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

**5.4:** rot  $\mathbf{F} = (0, 0, -2) \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}$  besitzt also kein Potential und  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$  ist nicht vom Integrationsweg unabhängig.

**5.5:** rot  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  in  $G$ , wobei  $G$  der gesamte Raum mit Ausnahme des Punktes  $(0, 0, 0)$  ist ( $G$  ist einfach zusammenhängend!).

Analog Beispiel 5.14 erhält man  $\Phi = -K \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \varphi(y, z).$

$$\varphi_y = 0 \text{ ergibt } \varphi(y, z) = \psi(z) \text{ und } \psi'(z) = 0 \text{ schließlich } \Phi = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C.$$

**5.6:**  $G$  sei die entlang der positiven  $x$ -Achse aufgeschnittene  $x, y$ -Ebene, aus der  $(0, 0)$  entfernt wurde.  $G$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}$  ein vollständiges Differential ist. Die nach Bild 5.13 aus  $\mathfrak{K}_1$ ,  $\mathfrak{K}_2$ ,  $-\mathfrak{K}$  (negativ durchlaufener Einheitskreis, Beispiel 5.13) und  $-\mathfrak{K}_2$  zusammengesetzte Kurve  $\mathfrak{K}_0$  verläuft in  $G$ . Satz 5.6 und 5.7 ergeben  $\oint_{\mathfrak{K}_0} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} - \oint_{\mathfrak{K}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathfrak{K}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{K}}$ .

**5.7:** Wegen rot  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  besitzt  $\mathbf{v}$  ein Potential. Analog Beispiel 5.14 wird  $\Phi = \int (-2x + \sin z) \, dx = -x^2 + x \sin z + \varphi(y, z)$ .

$$\Phi_y = \varphi_y = \cos y - y \sin y \text{ ergibt } \varphi(y, z) = \sin y - (-y \cos y + \sin y) + \psi(z).$$

$$\Phi_z = x \cos z + \psi'(z) = x \cos z + 4 e^{2z} \text{ führt auf } \psi(z) = 2 e^{2z} + C \text{ und } \Phi = -x^2 + x \sin z + y \cos y + 2 e^{2z} + C.$$

**6.1:** Es ist  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $f_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$  und  $f_y = 0$ .

$$\text{Damit wird } \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} A &= \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, db = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 2\sqrt{1-x^2} \, dx = 4. \end{aligned}$$

**6.2:**  $\mathbf{g}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h - hr/a)$ ,  $M: -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq a \cos \varphi$ .

$$\mathbf{g}_r = \left( \cos \varphi, \sin \varphi, -\frac{h}{a} \right), \mathbf{g}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), E = 1 + \frac{h^2}{a^2}, F = 0, G = r^2,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = r \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}.$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} r \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{4} a \sqrt{a^2 + h^2}.$$

**6.3:**  $M = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\mathbf{g} = R(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$ ,  $t \in M$ , ist eine Darstellung von  $\tilde{\Omega}$  (vgl. Beispiel 6.2) mit  $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin v$ . Die Masse wird

$$\iint_{\tilde{\Omega}} \frac{h}{1+z} \, df = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{1+R \cos v} R^2 \sin v \, du \, dv = h \frac{\pi}{2} R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{1+R \cos v} \, dv = \frac{\pi}{2} h R \ln(1+R).$$

**6.4:**  $\mathbf{g}_u = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{g}_v = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = (1, -1, 1)$ ,

$$\sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v| = \sqrt{3}, \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{\Omega}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df &= \iint_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v-1, v-u, 1+u) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1) \sqrt{3} \, du \, dv \\ &\stackrel{!}{=} \int_0^1 \int_0^1 (v-1-v+u+1+u) \, du \, dv = 2 \int_0^1 u \, du \, dv = 1. \end{aligned}$$

**6.5:** Für die Teile von  $\tilde{\Omega}$  kann man z. B. folgende Darstellungen verwenden (die Darstellungen sind so gewählt, daß die Normale nach außen zeigt, obwohl die Normale beim Oberflächenintegral 1. Art nicht benötigt wird):

$\tilde{\Omega}_1: M_1 = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$ ,  $\mathbf{g}_1 = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $(u, v) \in M_1$ ,  $\sqrt{EG - F^2} = 1$ ,

$\tilde{\Omega}_2: M_2 = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$ ,  $\mathbf{g}_2 = v(\cos u, \sin u, 0)$ ,  $(u, v) \in M_2$ ,  $\sqrt{EG - F^2} = v$ ,

$\tilde{\Omega}_3: M_3 = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ ,  $\mathbf{g}_3 = (u \cos v, u \sin v, 1)$ ,  $(u, v) \in M_3$ ,  $\sqrt{EG - F^2} = u$ .

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\tilde{\Omega}} (y^2 + z^2) \, df = \sum_{i=1}^3 \iint_{\tilde{\Omega}_i} (y^2 + z^2) \, df = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sin^2 u + v^2) \, dv \, du + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (v^2 \sin^2 u + 0) \, v \, dv \, du \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u^2 \sin^2 v + 1) \, u \, dv \, du = \frac{5}{3} \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4} \pi = \frac{19}{6} \pi. \end{aligned}$$

7.1: a)  $\dot{\mathbf{g}}(t) = (-a \sin t, b \cos t)$  ergibt

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [-b \sin t(-a \sin t) + a \cos t \cdot b \cos t] dt = \frac{ab}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{2} ab(t_2 - t_1).$$

b) Für die ganze Ellipse ist  $t_1 = 0, t_2 = 2\pi$ , also  $A = ab\pi$ .

7.2: a) Eine Darstellung der Kugelfläche  $\mathfrak{F}$  ist  $\mathbf{g} = R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$  mit  $(u, v) \in M = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ .

(Vgl. Beispiel 6.2. Es sind hier lediglich die Parameter  $u$  und  $v$  vertauscht, um eine nach außen gerichtete Normale zu erhalten.) Für diese Darstellung ist  $\mathbf{g}_u = R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$ ,  $\mathbf{g}_v = R(-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$  und  $\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = R^2 \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ . Für die Berechnung von  $I$  benötigen wir  $\mathbf{n} \cdot \sqrt{EG - F^2}$ . Wegen  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v}{|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v|}$  und  $\sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v|$  wird

$\mathbf{n} \cdot \sqrt{EG - F^2} = \mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = R^2 \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathfrak{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R(\sin u \sin v, \cos u, \sin u \cos v) \cdot R^2 \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \, du \, dv \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\sin^3 u \sin v \cos v + \sin^2 u \cos u (\sin v + \cos v)] \, du \, dv \\ &= R^3 \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} \sin v \cos v \, dv = 0. \end{aligned}$$

b) Wegen  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$  wird  $\iint_{\mathfrak{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, df = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = 0$ .

7.3:  $Q = \iint_B \iint \varrho \, db = \iint_B \iint \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} \, db = \varepsilon \iint_{\mathfrak{F}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, df$ . Für die Kugeloberfläche  $\mathfrak{F}$  ist  $\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \mathbf{x}$ .

Damit wird  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} = 1$  und  $Q = \varepsilon \iint_{\mathfrak{F}} df = 4\pi a^2 \varepsilon$ .

7.4:  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + y - 2y - 2x + 3y = 2y$ .

$$\begin{aligned} I &= \iint_B \iint \operatorname{div} \mathbf{F} \, db = \int_0^2 \int_0^{3\sqrt{4-2x}} \int_0^{\frac{1}{2x^2+8}} 2y \, dz \, dy \, dx = \int_0^2 \int_0^{3\sqrt{4-2x}} \frac{2y}{2x^2+8} \, dy \, dx = \int_0^2 \frac{9(4-2x)}{2x^2+8} \, dx \\ &= \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \ln 2 \right). \end{aligned}$$

7.5: Da  $\mathfrak{F}^*$  in  $y$ -Richtung konstant ist, gilt  $z = g(x)$  für die Darstellung von  $\mathfrak{F}^*$  in expliziter Form. Aus  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  und  $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$  folgt  $z = \sqrt{R^2 - Rx}$ . Für  $\mathbf{n}$  gilt (vgl. Formel (6.2))

$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2}} (-z_x, 0, 1)$  wegen  $z_y = 0$ . Verstehen wir unter  $B^*$  die Projektion von  $\mathfrak{F}^*$  auf die  $x,y$ -Ebene, d.h., die von  $\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$  eingeschlossene Fläche, so wird

$$\begin{aligned} L &= \oint_{\mathfrak{R}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\mathfrak{F}^*} (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, df = \iint_{B^*} (z, 0, -x) \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2}} (-z_x, 0, 1) \sqrt{1+z_x^2} \, db \\ &= \iint_{B^*} (-zz_x - x) \, db. \end{aligned}$$

Weiter ist  $z_x = -\frac{R}{2\sqrt{R^2-Rx}} = -\frac{R}{2z}$ . Für  $L$  ergibt dies  $L = \iint_{B^*} \left(\frac{R}{2} - x\right) \, db$ .

Da  $B^*$  symmetrisch zur Geraden  $x = \frac{R}{2}$  liegt, wird  $L = 0$ .

**7.6:**  $I = \oint_{\mathfrak{R}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\mathfrak{R}} [(z-4) dx + y^2 dy]$ .

$\mathfrak{R}$  ist zusammengesetzt aus einem Parabelbogen  $\mathfrak{R}_1$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}_1(t) = (0, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 2]$ , einem Kreisbogen  $\mathfrak{R}_2$  in der Ebene  $z = 4$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}_2(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 4)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , und einem Parabelbogen  $\mathfrak{R}_3$  mit der Darstellung  $\mathbf{g}_3(t) = (2-t, 0, (2-t)^2)$ ,  $t \in [0, 2]$ . Wegen  $\dot{\mathbf{g}}_1(t) = (0, 1, 2t)$ ,  $\dot{\mathbf{g}}_2(t) = (2 \cos t, -2 \sin t, 0)$ ,  $\dot{\mathbf{g}}_3(t) = (-1, 0, 2t-4)$  wird

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (t^2 - 4, t^2, 0) \cdot (0, 1, 2t) \, dt + \int_0^{\pi/2} (0, 4 \cos^2 t, 0) \cdot (2 \cos t, -2 \sin t, 0) \, dt \\ &\quad + \int_0^2 ((2-t)^2 - 4, 0, 0) \cdot (-1, 0, 2t-4) \, dt = \int_0^2 t^2 \, dt - 8 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \, dt - \int_0^2 [(2-t)^2 - 4] \, dt \\ &= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} - \left( \frac{8}{3} - 8 \right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

**7.7:**  $\mathbf{x}_0$  liegt in  $E$ ,  $\mathbf{n}_0$  steht senkrecht auf  $E$ .  $\mathbf{n}_0$  ist also Normale von  $E$  und von jeder Teilfläche von  $E$ . Da  $\mathbf{v}$  die Ebene  $E$  senkrecht durchsetzt, ist  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{n}_0$  für jedes  $\mathbf{x} \in E$ . Es sei nun  $\mathfrak{F}_n$  eine Folge von Teilleichen von  $E$ , die  $\mathbf{x}_0$  als inneren Punkt enthalten, und deren Durchmesser für  $n \rightarrow \infty$  gegen null streben. Ist  $\mathfrak{R}_n$  die Randkurve von  $\mathfrak{F}_n$  mit der Darstellung  $I, \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , so ist  $\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ , da  $\mathfrak{F}_n$  in  $E$  verläuft und  $\mathbf{n}_0$  senkrecht auf  $E$  steht. Damit wird aber

$$\oint_{\mathfrak{R}_n} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_I \varphi(\mathbf{x}(t)) \mathbf{n}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \, dt = 0. \quad \text{Satz 7.7 ergibt } (\text{rot } \mathbf{v}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}) \cdot \mathbf{n}_0 = 0.$$

## Literatur

- [1] *Bronstein, J. N.; Semendjajew, K. A.*: Taschenbuch der Mathematik. 23. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1987.
- [2] *Gourant, R.*: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band II. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Julius Springer Verlag 1955.
- [3] *Fichtenholz, G. M.*: Differential- und Integralrechnung, Bände II und III (Übers. a. d. Russ.). 10., 11. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982.
- [4] *v. Mangoldt, H.; Knopp, K.*: Einführung in die höhere Mathematik, Bände II und III. 15., 15. Aufl. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1978, 1981.
- [5] *Piskunow, N. S.*: Differential- und Integralrechnung, Teil 1 und 2. 3., 2. Aufl. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972, 1970.
- [6] *Schröder, K.* (Hrsg.): Mathematik für die Praxis, Band II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1966.
- [7] *Smirnow, W. I.*: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II (Übers. a. d. Russ.). 15. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.
- [8] *Sommerfeld, A.*: Vorlesungen über theoretische Physik, Band III. 5. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1967.

## Namen- und Sachregister

- allgemeines Kurvenintegral 2. Art 88
- Anziehungskraft 80
- Arbeit 93
- ausfüllende Teilbereiche 40
- axiales Trägheitsmoment 57
  
- Bereich, ebener 26
- , homogener 45
- Bereichsintegral 28
- , Eigenschaften 29
- , konvergentes uneigentliches 40
- , uneigentliches, einer nichtbeschränkten Funktion 43
- , - , über einem nichtbeschränkten Bereich 40
- , Berechnung 31
- , Mittelwertsatz 30
- , Transformationsformel für ein 69
  
- Differentiation von Parameterintegralen 8
- Divergenz, koordinatenfreie Darstellung 130
- Doppelintegral 12, 33
- dreidimensionales Integral 52
- dreifaches Integral 48
- dritte Greensche Integralformel 133
- Durchmesser eines Bereiches 26
  
- ebener Bereich 26
- -, Schwerpunkt 36
- Normalbereich 5
- Eigenschaften des Bereichsintegrals 29
- einfach zusammenhängendes Gebiet 97
- erste Greensche Integralformel 132
- Eulersche Gammafunktion ( $\Gamma$ -Funktion) 23
  
- Feinheitsmaß der Zerlegung 27
- Feld, skalares 27
- Fläche 109
- Flächendichte 27, 33
- Flächenelement in krummlinigen Koordinaten 74
- Flächeninhalt einer räumlich gekrümmten Fläche 111
- Flächenintegral 28
- Florentiner Problem 112
- Fundamentalbereich 5
- Funktion, durch ein Integral dargestellt 7
- , durch ein uneigentliches Integral dargestellte 18
- , integrierbare 28
- Funktionaldeterminante 64
- , geometrische Bedeutung 73
- Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion 24
  
- Gammafunktion, Eulersche ( $\Gamma$ -Funktion) 23
- $\Gamma$ -Funktion, Funktionalgleichung der 24
- Gaußscher Integralsatz für die Ebene 123
- - im Raum 128
- Gebiet, einfach zusammenhängendes 97
- ,  $n$ -fach zusammenhängendes 97
- Gebietsintegral 28
- geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante 73
- geometrischer Schwerpunkt 36, 55
- Gesamtmasse 34, 54
- gleichmäßig konvergent 21
- Greensche Integralformeln 132, 133
- Grenze, obere 26
- Guldinsche Regeln 112
  
- hebbare Unstetigkeiten 19
- homogener Bereich 45
  
- Integral, dreidimensionales 52
- , dreifaches 48
- , iteriertes 13
- ,  $n$ -faches 53
- , zweidimensionales 52
- , zweifaches 13
- ,  $n$ -dimensionales 52
- , Transformationsformel für ein  $n$ -dimensionales 77
- Integralformeln, Greensche 132, 133
- Integralsatz für den Raum, Gaußscher 128
- - die Ebene, Gaußscher 123
- von Stokes 136
- Integralsumme, zu einer Zerlegung gehörige 27
- integrierbare Funktion 28
  
- Körper, Masse und Volumen 45
- konvergent, gleichmäßig 21
- konvergentes uneigentliches Bereichsintegral 40
- Koordinaten im  $R^n$ , krummlinige 64
- koordinatenfreie Darstellung der Divergenz 130
- - - Rotation 142
- Kräftefunktion 102
- Kreiskegel 65
- Kreiszylinderfläche 17
- krummlinige Koordinaten 62
- - im  $R^n$  64
- Kugelausschnitt 67, 79
- Kugelkoordinaten 64
- Kurve, orientierte 84
- , singuläre 43
- Kurven, Zusammensetzung von 94

- Kurvenintegral 1. Art 86
  - 2. Art 88
  - – –, allgemeines 88
- Leibnizsche Sektorformel 125
- Majorantenkriterium für uneigentliche Parameterintegrale 22
- Masse eines Körpers 45
- Massenbelegung 33
- Massenelemente 54
- Maxwellsche Gleichungen 139
- Mittelwertsatz für Bereichsintegrale 30
- Moment, statisches 37, 57
- $n$ -dimensionales Integral 52
- $n$ -fach zusammenhängendes Gebiet 97
- $n$ -faches Integral 53
- Normalbereich 13, 66
  - des  $R^n$  53
  - , ebener 5
  - , räumlicher 46
- obere Grenze 26
- Oberflächenintegral 118
  - 1. Art 114
- Ordinatenmenge 15, 16
- orientierte Kurve 84
- Parameterintegral 7
  - mit festen Grenzen 10
  - , uneigentliches 17
  - , Differentiation 8
  - , Majorantenkriterium für ein uneigentliches 22
- planares Trägheitsmoment 57
- polares Trägheitsmoment 57
- Potential 102
  - anziehender Massen 80
- Potentialkraft 102
- Punkt, singulärer 43
- Punktfunktion, skalare 27
- punktierte Umgebung 39
- räumlicher Normalbereich 46
- Raumintegral 44
  - , uneigentliches 79
  - , Transformationsformel für ein 74
- Rotation, koordinatenfreie Darstellung 142
- Rotationsparaboloid 16
- Säulenzerlegung 28
- Sattelfläche 17
- Satz von Steiner 59
- Schwerpunkt 54
  - eines ebenen Bereiches 36
  - , geometrischer 36, 55
- Sektorformel, Leibnizsche 125
- singuläre Kurve 43
- singulären Punkt 43
- skalare Punktfunktion 27
- skalares Feld 27
- statisches Moment 37, 57
- Stokescher Integralsatz 136
- stückweise stetig 51
- Supremum 26
- Trägheitsmoment 38, 57
  - , planares bzw. axiales bzw. polares 57
- Transformationsformel für Bereichsintegrale 69
  - Raumintegrale 74
- Umgebung, punktierte 39
- unabhängig vom Integrationsweg 98
- uneigentliches Bereichsintegral einer nicht-beschränkten Funktion 43
  - über einem nichtbeschränkten Bereich 40
  - Parameterintegral 17
  - Raumintegral 79
- Unstetigkeiten, hebbare 19
- Verzerrungsfaktor 74
- Vierflach 59
- Volumen eines Körpers 45
- Volumenelement 53
- Zerlegung eines Bereiches 26
  - , Feinheitsmaß der 27
- Zerlegungen, Folge von unbegrenzt feiner wiedenden 27
- Zerlegungssumme 27
- Zusammensetzung von Kurven 94
- zweidimensionales Integral 52
- zweifaches Integral 13
- zweite Greensche Integralformel 133
- Zwischensumme 27
- Zylinder, allgemeiner 46
- Zylinderkoordinaten 63