Aufgabe 9.7: Man zeige, daß $C_1 = -3$ eine untere Schranke der Funktion f *

$$f(x) = x^2 - 2x - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich ist. Außerdem bestimme man zwei Zahlen $a < b$ derart, daß $[a, b]$ das größte Intervall ist, auf dem f nach oben durch $C_2 = 7$ beschränkt ist.

Definition 9.7: *Eine Funktion* **D.9.7**

$$y = f(x), \quad x \in D_f,$$

heißt in dem Intervall $I \subseteqq D_f$ **monoton wachsend,** *wenn*

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{mit} \quad x_1 < x_2 \tag{9.29}$$

gilt; entsprechend wird sie **monoton fallend** *in I genannt, wenn*

$$f(x_1) \geqq f(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{mit} \quad x_1 < x_2 \tag{9.30}$$

gilt. Treten in den Ungleichungen (9.29) bzw. (9.30) zwischen den Funktionswerten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ die Gleichheitszeichen nicht auf, d. h. gilt

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{mit} \quad x_1 < x_2 \tag{9.31}$$

bzw.

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in I \quad \text{mit} \quad x_1 < x_2, \tag{9.32}$$

so wird f entsprechend **streng monoton wachsend** *bzw.* **streng monoton fallend** *in I genannt.*

Das streng monotone Wachsen läßt sich verbal auch etwa so formulieren: Wenn das Argument größer wird, dann wird auch der Funktionswert größer. Entsprechend kann man die anderen Eigenschaften verbal formulieren. Wichtig ist für die Monotonie, daß z. B. $f(x_1) < f(x_2)$ nicht nur für gewisse $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, **sondern** für *alle* solche x_1, x_2 gültig ist.

Beispiel 9.9:

1. $y = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ ist im gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend. Tatsächlich, es seien $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ zwei beliebige Werte mit $x_1 < x_2$. Dann gilt die Darstellung $x_1 = ax_2$ mit $0 < a < 1$. Daher folgt $\ln x_1 = \ln ax_2 = \ln a + \ln x_2$, woraus sich wegen $\ln a < 0$ die behauptete Monotonie $\ln x_1 < \ln x_2$ ergibt.

2. Für die in Bild 9.4 dargestellte Funktion f gelten folgende Aussagen:

   1. f ist in jedem Intervall $(-\infty, b]$ mit $b \leqq x_1$ streng monoton wachsend; Gleiches gilt für jedes Intervall $[a, +\infty)$ mit $a \geqq x_2$.

   2. f ist in $[x_1, x_2]$ monoton fallend, dagegen jedoch in $[x_1, \tilde{x}]$ streng monoton fallend.

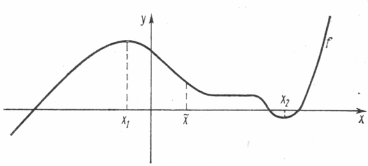

Bild 9.4.
Zur Monotonie von Funktionen