5. Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$|x - 1| \leqq |2x + 5|$$

erfüllen. Unter Benutzung von Definition 5.2 für $a = x - 1$ bzw. $a = 2x + 5$ werden drei Fälle unterschieden:

Fall 1: $x \geqq 1$. Hierfür lautet die Ungleichung

$$x - 1 \leqq 2x + 5,$$

was mit $x \geqq -6$ gleichbedeutend ist. Also ist die Ungleichung für alle $x \geqq 1$ erfüllt.

Fall 2: $-\frac{5}{2} \leqq x < 1$. Hierfür lautet die Ungleichung

$$-(x - 1) \leqq 2x + 5,$$

woraus sich $x \geqq -\frac{4}{3}$ ergibt. Also ist sie auch für $-\frac{4}{3} \leqq x < 1$ erfüllt.

Fall 3: $x < -\frac{5}{2}$. Hierfür lautet die Ungleichung

$$-(x - 1) \leqq -(2x + 5)$$

und dies ist wiederum gleichbedeutend mit $x \leqq -6$. Also gilt sie auch für $x \leqq -6$.

Insgesamt: Die Ungleichung gilt für $x \leqq -6$ und für $-\frac{4}{3} \leqq x$.

* *Aufgabe 5.8:* Für welche x gilt

a) $|2x + 3| < x + 3$; b) $\left|\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right| = |x - 2)|$;

c) $\frac{3x}{x + 1} \leqq |x - 4|$; d) $|x| + |x - 1| + |x - 2| > 6$?

* *Aufgabe 5.9:* Man bestimme die Punkte der x,y-Ebene, für die gilt:

a) $|x + y| < 1$; b) $|y| - |x| \leqq 1$.

* *Aufgabe 5.10:* Zeigen Sie

$$\frac{a + b + |b - a|}{2} = \mathrm{Max}\,(a, b); \qquad \frac{a + b - |b - a|}{2} = \mathrm{Min}\,(a, b).$$

5.3. Komplexe Zahlen

Der Tatbestand, daß die Gleichung $x^2 = 2$ durch keine rationale Zahl gelöst werden konnte, brachte uns die Einführung des Bereichs der reellen Zahlen (Abschnitt 5.1.3.). Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist nun andererseits auch für keine reelle Zahl lösbar. Dieser Sachverhalt ist bei der Untersuchung quadratischer Gleichungen schon sehr früh entdeckt worden. Mitte des 16. Jahrhunderts kam Cardano auf den Gedanken, daß man mit Wurzeln aus negativen Radikanden, z. B. $\sqrt{-15}$, nach den üblichen Regeln rechnen sollte. Descartes verwendet etwa ein Jahrhundert später