Löst man dieses lineare Gleichungssystem schrittweise, beginnend mit der ersten Gleichung, so erhält man $c_0 = 7$, $c_1 = -3$, $c_2 = 30$, $c_3 = 4$. Das gesuchte Newtonsche Polynom lautet daher

$$P_3(x) = 7 - 3x + 30x(x - 3) + 4x(x - 3)(x - 4).$$

Nun nehmen wir an, daß noch ein weiteres Stützpaar (1; 4) bekannt sei, und benutzen es, um den Grad des Newtonschen Interpolationspolynoms um eins zu erhöhen. Um dabei die bisherigen Ergebnisse verwenden zu können, verfahren wir gemäß Satz 9.8 und fügen die dem neuen Stützpaar (1; 4) entsprechende Gleichung

$$\begin{aligned} i = 4:\quad 4 &= c_0 + c_1 - 2c_2 - 2(-3)\,c_3 - 2(-3)(1 + 2)\,c_4 \\ &= c_0 + c_1 - 2c_2 + 6c_3 + 18c_4 \end{aligned}$$

dem obigen Gleichungssystem hinzu. Hieraus folgt $c_4 = \frac{1}{18}(4 - c_0 - c_1 + 2c_2 - 6c_3)$;

unter Verwendung der bereits berechneten Werte für c_0 bis c_3 ergibt sich $c_4 = 2$. Somit erhalten wir das neue Newtonsche Interpolationspolynom vierten Grades:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= P_3(x) + 2x(x - 3)(x - 4)(x + 2) \\ &= 7 - 3x + 30x(x - 3) + 4x(x - 3)(x - 4) \\ &\quad + 2x(x - 3)(x - 4)(x + 2). \end{aligned}$$

Wir bemerken noch, daß die Reihenfolge der Stützpaare Einfluß auf die äußere Form des Newtonschen Interpolationspolynoms hat. Ordnet man beispielsweise die obigen Stützpaare in der Reihenfolge fallender x-Werte an, d. h. geht man von (4; 115), (3; −2), (0; 7) und (−2; 73) aus, so erhält man

$$\tilde{P}_3(x) = 115 + 117(x - 4) + 30(x - 4)(x - 3) + 4(x - 4)(x - 3)\,x.$$

Selbstverständlich sind die beiden Polynome $\tilde{P}_3(x)$ und $P_3(x)$ identisch. Das kann man u. a. dadurch nachprüfen, daß man alle Klammern in beiden Polynomen auflöst.

Aufgabe 9.15: Man nehme im Beispiel 9.11 das Stützpaar (2, −43) anstelle von (1, 4) hinzu und zeige, daß sich dabei der Grad des Polynoms $P_3(x)$ nicht erhöht. Worin liegt die Ursache dafür? *

Aufgabe 9.16: Man verwende die Stützpaare (4, 115), (3, −2), (1, 4), (0, 7) und (−2,73) in der angegebenen Reihenfolge zur Konstruktion des entsprechenden Newtonschen Interpolationspolynoms $\hat{P}_4(x)$. Weiter überprüfe man, daß dieses Polynom identisch gleich dem in Beispiel 9.11 ermittelten Polynom $P_4(x)$ ist. *

Ein einfacher Spezialfall des Newtonschen Interpolationspolynoms ergibt sich, wenn der Abstand zwischen zwei beliebigen benachbarten Stützstellen gleich ist, d. h. wenn

$$x_i - x_{i-1} = h = \text{const} \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.66}$$

gilt. Man spricht dann von *äquidistanten Stützstellen* und ordnet sie in wachsender Reihenfolge: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Für äquidistante Stützstellen lassen sich die zum Newtonschen Interpolationspolynom führenden Berechnungen vereinfachen. Insbesondere können die Steigungen im Prinzip durch einfache Differenzen ersetzt werden. Aus (9.66) folgen nämlich die Gleichungen

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{bzw.} \quad x_i - x_0 = ih, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{9.67}$$