5.2.2. Absoluter Betrag

Definition 5.2: *Der absolute Betrag einer reellen Zahl a wird durch* **D.5.2**

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

erklärt.

Da $-a$ für negatives a positiv ist, gilt stets $|a| \geqq 0$. Der absolute Betrag wird deshalb auch als Abstand der reellen Zahl a vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden gedeutet.

Beispiel 5.5: $|2| = 2$, da $2 > 0$, und $|-2| = -(-2) = 2$, da $-2 < 0$.

Für das Rechnen mit absoluten Beträgen von reellen Zahlen a und b lassen sich folgende Regeln herleiten:

1. $|-a| = |a|$ (5.4)

Hieraus folgt sofort $|a - b| = |b - a|$.

2. $\pm a \leqq |a|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (5.5)
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$ (5.6)
5. $||a| - |b|| \leqq |a + b| \leqq |a| + |b|$ (5.7)

Die unter 5. stehenden Beziehungen werden als *Dreiecksungleichungen* bezeichnet und besagen, daß der Betrag einer Summe nicht größer als die Summe der Beträge der Summanden und nicht kleiner als der Betrag der Differenz dieser Beträge ist.

Beispiele 5.6:

1. Die Ungleichung $|a| \leqq b$ mit $b > 0$ bedeutet dasselbe wie $-b \leqq a \leqq b$ (Bild 5.5).

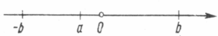

Bild 5.5
$|a| \leqq b$

2. Der Abstand der beiden den Zahlen a und b entsprechenden Punkte auf der Zahlengeraden beträgt $|b - a|$.
3. Für welche x gilt $|x - a| < b$ mit $b > 0$?
Nach der Definition 5.2 ist:

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{für} \quad x \geqq a \\ a - x & \text{für} \quad x < a \end{cases}$$

Für $x \geqq a$ entspricht obiger Ungleichung $x - a < b$ oder umgestellt $a \leqq x < a + b$. Für $x < a$ entspricht der Ungleichung $a - x < b$ oder $a - b < x < a$. Somit gilt obige Ungleichung für alle x mit $a - b < x < a + b$ (Bild 5.6).

Bild 5.6.
$|x - a| < b, b > 0$

4. Es ist $\dfrac{a + |a|}{2} = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ 0 & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$ und $\dfrac{a - |a|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$.