# 9. Funktionen reeller Variabler

Funktionen reeller Variabler haben sich einerseits bei der Lösung zahlreicher Probleme der Naturwissenschaften, Technik und Ökonomie bewährt und sind andererseits für viele mathematische Untersuchungen von grundlegender Bedeutung. Deshalb werden im folgenden Funktionsbegriffe eingeführt sowie theoretische Grundkenntnisse über Funktionen vermittelt und deren einfachste Eigenschaften entwickelt.

## 9.1. Begriff der Funktion und Arten ihrer Vorgabe

In der Realität kann vielfach der Sachverhalt beobachtet werden, daß eine Größe ihren Zahlenwert in Abhängigkeit von den jeweiligen Werten gewisser anderer Größen verändert. So ist aus der Geometrie bekannt, daß sich der Flächeninhalt eines Kreises mit dessen Radius und der Flächeninhalt eines Rechtecks sich mit dessen Seitenlängen verändert; in der Physik ist u. a. ein Gesetz über den Zusammenhang zwischen Volumen ($V$), Druck ($p$) und Temperatur ($T$) bekannt, das jeweils eine dieser drei Größen durch die beiden anderen ausdrückt $\left(\text{z. B. } V = a\dfrac{T}{p},\right.$ $\left. a \text{ – Proportionalitäts- und Dimensionsfaktor}\right)$; aus der Wirtschaft ist bekannt, daß sich der beim Verkauf einer Ware erzielte Erlös mit der Anzahl der verkauften Mengeneinheiten ändert; in der politischen Ökonomie wird die Profitrate dargestellt als Quotient von Mehrwert durch Summe von variablem und konstantem Kapital und ändert sich daher mit den letztgenannten Größen.

Die Vielfalt dieser realen Sachverhalte wurde mathematisch durch den Begriff der Funktion verallgemeinert. Vorbereitend sei bemerkt, daß im weiteren mit $R^n$ der reelle, $n$-dimensionale, euklidische Raum bezeichnet wird, dessen Elemente geordnete $n$-Tupel reeller Zahlen sind (vgl. Abschnitt 7.7.). Für den Spezialfall $n = 1$ bezeichnet $R^1$ einfach die Menge aller reellen Zahlen **R**.

**Definition 9.1:** *Es sei $M$ eine Teilmenge des $R^n$ bzw. des $R^1$. Wird dann durch eine Vorschrift jedem $x \in M$ genau eine reelle Zahl $y$ zugeordnet, so sagen wir, daß auf $M$ eine* **reelle Funktion von einer Variablen** *(bei $M \subset R^1$) bzw. von mehreren* **Variablen** *(bei $M \subset R^n$) gegeben ist. Für die Funktion verwendet man häufig das Symbol $f$, und für die dem Element $x \in M$ eindeutig zugeordnete Zahl wird dann $f(x)$ geschrieben.* **D.9.1**

Die in der Definition 9.1 auftretende Menge $M$ wird **Definitionsbereich** von $f$ genannt und mit $D_f$ bezeichnet; die Menge aller Zahlenwerte $f(x)$, die sich ergibt, wenn $x$ die gesamte Menge $M$ durchläuft, heißt **Wertebereich** der Funktion $f$ und wird mit $W_f$ bezeichnet. Für Funktionen wird folgende Schreibweise verwendet:

$$y = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D_f \tag{9.1}$$

oder kurz

$$y = f(x), \quad x \in D_f. \tag{9.2}$$

Dabei wird $y = f(x)$ von uns auch **Zuordnungsvorschrift**, $x$ die **unabhängige Variable** oder das **Argument** und $y$ die **abhängige Variable** der Funktion $y = f(x)$, $x \in D_f$, genannt werden. Die Zuordnungsvorschrift muß durchaus nicht immer unmittelbar durch eine mathematische Formel gegeben sein. Auf die Vielfalt der Möglichkeiten wird unten näher eingegangen.