gibt es noch weitere Möglichkeiten zur Vorgabe von Funktionen. Erwähnt seien hier die Vorgabe von Funktionen mittels Parameter (siehe Abschnitt 9.7.). Schließlich können Funktionen auch durch gewisse Gleichungen gegeben werden. Genannt seien hier Differentialgleichungen (siehe Band 7), Integralgleichungen und Differenzengleichungen.

Bei praktischen Problemen ergeben sich häufig Funktionen, deren Definitionsbereich kleiner ist, als die Menge aller x-Werte, für die der analytische Term der Zuordnungsvorschrift mathematisch sinnvoll ist und reelle Werte liefert. Man unterscheidet daher zwischen dem sachbezogenen oder natürlichen und dem mathematischen Definitionsbereich. So stellt im Beispiel 9.6 das Intervall [10, 20] den sachbezogenen oder natürlichen Definitionsbereich für die Funktion von Teil 3 dar (siehe (9.17)), während der analytische Term $12x$ der Zuordnungsvorschrift $y = 12x$ mathematisch für alle $x \in R^1$ sinnvoll ist, weshalb R^1 hier den mathematischen Definitionsbereich bildet. Der mathematische Definitionsbereich muß durchaus nicht immer der ganze R^1 sein. So ist z. B. der Term $\log(3x - 12)$ nur für alle x mit $3x - 12 > 0$, d. h. für alle $x > 4$ mathematisch sinnvoll. Daher stellt das Intervall $(4, +\infty)$ den mathematischen Definitionsbereich der Zuordnungsvorschrift $y = \log(3x - 12)$ dar.

Aufgabe 9.4: Für die Zuordnungsvorschrift $y = \sqrt{4x - 20}$ ist der mathematische Definitionsbereich zu ermitteln. *

In den folgenden Darlegungen des Abschnittes 9. steht das neue mathematische Objekt der Funktion einer reellen Variablen im Mittelpunkt. Wir werden nach der Umkehrfunktion fragen (Abschnitt 9.2.), die einfachsten Eigenschaften unseres Untersuchungsobjektes darlegen (Abschnitt 9.3.), gewisse Grundfunktionen aufzählen (Abschnitt 9.4.) und aus diesen ein recht umfangreiches „Reservoir“ gebräuchlicher elementarer Funktionen bilden (Abschnitt 9.5.). Danach werden engere Beziehungen zur Anwendung hergestellt. Hierzu gehören die Konstruktion einer Funktion, die vorgegebene Wertepaare (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, enthält (Abschnitt 9.6.), die Darstellung von Funktionen mittels Parameter (Abschnitt 9.7.), die mathematische Modellierung einiger praktischer Probleme (Abschnitt 9.8.) sowie Funktionsleitern und Elemente der Nomographie (Abschnitt 9.9.). Wir hoffen auf die Bereitschaft des Lesers, bei der Realisierung dieses Programms mitzuwirken, und betonen noch einmal, daß im Vordergrund dieses wie auch des Abschnittes 10. das Anliegen steht, die mathematischen Grundlagen für eine Reihe der folgenden Bände zu legen.

Vorab sei hier noch erklärt, wie man die elementaren Grundrechenarten der Addition und Multiplikation sowie deren Umkehrungen auf Funktionen überträgt. Das geschieht, indem man diese Operationen für Funktionen auf die entsprechenden Operationen ihrer Funktionswerte zurückführt. So wird z. B. die Summe zweier Funktionen $f_i\colon y = f_i(x)$, $x \in D_{f_i}$, $i = 1, 2$, erklärt als die folgende Funktion

$$y = f_1(x) + f_2(x), \qquad x \in D;$$

dabei muß $D_{f_1} \cap D_{f_2} \neq \emptyset$ sein und $D = D_{f_1} \cap D_{f_2}$ gesetzt werden. Analog wird die Differenz, das Produkt sowie der Quotient zweier Funktionen definiert. Beim Quotienten von Funktionen ist zu beachten, daß man aus dem Definitionsbereich alle die x-Werte ausschließen muß, für die die Nennerfunktion gleich null wird.

9.2. Umkehrfunktion (für eine unabhängige Variable)

In praktischen Problemen sind die Rollen von unabhängigen und abhängigen Variablen durchaus nicht eindeutig festgelegt. So kann in den Beispielen 9.2 bis 9.4