heißt auf der Menge $M \subseteqq D_f$ **beschränkt**, *wenn es eine endliche Konstante C derart gibt, daß*

$$|f(x)| \leqq C \quad \text{für alle} \quad x \in M \tag{9.26}$$

gilt. Dabei wird C eine **Schranke** *von f auf M genannt.*

Da (9.26) äquivalent mit den Ungleichungen

$$-C \leqq f(x) \leqq C \quad \text{für alle} \quad x \in M \tag{9.26}$$

ist, so ist die Beschränkung einer Funktion auf $M \subseteqq D_f$ gleichbedeutend damit, daß ihre graphische Darstellung zwischen den beiden Geraden $y = -C$, und $y = C$ verläuft.

Neben (9.26) unterscheidet man noch die Beschränktheit in nur einer Richtung.

D.9.6 **Definition 9.6:** *Eine Funktion f*

$$y = f(x), \qquad x \in D_f,$$

heißt auf der Menge $M \subseteqq D_f$ **nach unten** *bzw.* **nach oben beschränkt**, *wenn es eine endliche Konstante C_1 bzw. C_2 derart gibt, daß*

$$C_1 \leqq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in M \tag{9.27}$$

bzw.

$$f(x) \leqq C_2 \quad \text{für alle} \quad x \in M \tag{9.28}$$

gilt. Dabei werden C_1 bzw. C_2 **untere** *bzw.* **obere Schranke** *von f auf M genannt.*

Es gilt folgende Aussage:

S.9.4 **Satz 9.4:** *Für die Beschränktheit einer Funktion f auf $M \subseteqq D_f$ ist notwendig und hinreichend, daß f auf M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.*

Es sei noch bemerkt, daß eine beschränkte Funktion nicht nur eine, sondern unendlich viele Schranken besitzt. Ist nämlich f auf M beschränkt und C irgendeine Schranke, so ist auch jede Zahl $\tilde{C} > C$ ebenfalls Schranke von f auf M.

Beispiel 9.8: Für die in Bild 9.3 dargestellte Funktion f gelten u. a. folgende Aussagen

1. f ist auf $[a, b]$ beschränkt; dabei ist $C = 4$ eine mögliche Schranke.

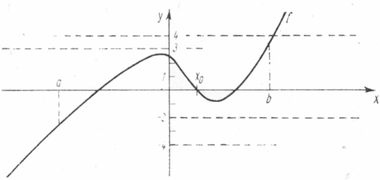

Bild 9.3.
Zur Beschränktheit von Funktionen

2. f ist auf $(-\infty, x_0]$ nach oben beschränkt, wobei $C_2 = 3$ eine mögliche obere Schranke ist.
3. f ist auf $[0, +\infty)$ nach unten beschränkt, wobei $C_1 = -2$ eine mögliche untere Schranke ist.