$x \in R^1$ gültig sind. Hier sei folgende Auswahl dieser Beziehungen genannt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x, \qquad \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x,$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}, \qquad \coth x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x},$$

$$\cosh (x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2,$$

$$\tanh (x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \tanh x_2}, \qquad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x, \qquad \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x},$$

$$\coth 2x = \frac{1 + \coth^2 x}{2 \coth x}.$$

Die Bilder 9.13a und 9.13b zeigen die Graphen der hyperbolischen Funktionen. Aus ihnen kann man auch Vorstellungen über das Monotonie- und Krümmungsverhalten dieser Funktionen gewinnen.

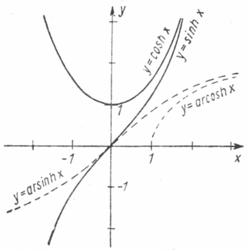

Bild 9.13a

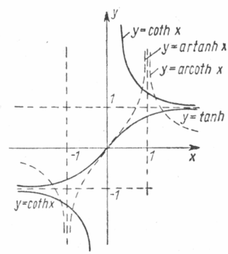

Bild. 9.13b

Hyperbelfunktionen mit Umkehrfunktionen (Areafunktionen)

4. *Areafunktionen*

$$\begin{aligned} &y = \operatorname{arsinh} x \quad \text{mit} \quad \operatorname{arsinh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}), && x \in (-\infty, +\infty), \\ &y = \operatorname{arcosh} x \quad \text{mit} \quad \operatorname{arcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), && x \in [1, +\infty), \\ &y = \operatorname{artanh} x \quad \text{mit} \quad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, && x \in (-1, 1), \\ &y = \operatorname{arcoth} x \quad \text{mit} \quad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, && x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \end{aligned} \tag{9.58}$$

Gelesen werden diese Funktionen als hyperbolischer Areasinus, Areakosinus, Areatangens und Areakotangens. Sie stellen die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen dar und ergeben sich in der üblichen Weise. So erhält man z. B. nach Multiplikation von $y = \sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ mit $2\,e^x$ die in e^x quadratische Glei-