Zur Erläuterung dieser Feststellung erwähnen wir folgendes. Es sei eine Funktion f in der Form $y = f(x)$, $x \in D_f$, gegeben. Weiter sei w, $x = w(t)$, $t \in D_w$, irgendeine Funktion mit der Eigenschaft, daß $D_f \supseteqq W_w$ gilt. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß $W_w = D_f$ und daß w eine streng monotone Funktion ist. Dann ist durch

$$x = w(t), y = h(t) \quad \text{mit} \quad h(t) = f(w(t)), \quad t \in D_w, \tag{9.71}$$

immer eine Parameterdarstellung der Ausgangsfunktion f gegeben. Da es aber beliebig viele Funktionen w mit den geforderten Eigenschaften gibt (man wähle etwa $w(t) = qt$ mit beliebigen $q > 0$), so haben wir mit (9.71) im Prinzip beliebig viele Parameterdarstellungen der ursprünglichen Funktion f angegeben.

Aufgabe 9.19: Man zeige, daß durch die Parameterdarstellungen *

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = -r\sin\alpha, \qquad \alpha \in (0, \pi), \tag{9.72}$$

und

$$x = r\frac{2u}{u^2+1}, \qquad y = r\frac{u^2-1}{u^2+1}, \qquad u \in (-1, +1), \tag{9.73}$$

die gleiche Funktion gegeben wird, und ermittle deren Graph.

In der Praxis besteht das Problem jedoch häufig nicht darin, zu einer gegebenen Funktion gewisse Parameterdarstellungen anzugeben. Vielmehr ergeben sich solche Parameterdarstellungen nicht selten einfach bei der mathematischen Modellierung (siehe auch Aufgabe 9.23 in Abschnitt 9.8.). So ist z. B. die Bewegungskurve der Punktmasse eines mathematischen Pendels eine Kreislinie bzw. ein Teil von ihr. Daher führt ihre Modellierung zu Parameterdarstellungen der Form (9.72) oder auch (9.73).

Abschließend sei noch bemerkt, daß die Parameterdarstellung von Funktionen erweitert werden kann auf Parameterdarstellung von Kurven in der Ebene sowie von Kurven und Flächen im Raum. Dabei müssen z. B. diese Kurven in der Ebene in der Vorgabe durch rechtwinklige Koordinaten x, y durchaus keine Funktionen sein. Mit anderen Worten, durch Parameter können nicht nur eindeutige, sondern – in einer Reihe von Fällen – auch mehrdeutige Abbildungen dargestellt werden. Einige Einzelheiten zu dieser Thematik findet man in Band 6. Wir bemerken hier nur, daß dabei häufig die sogenannten *Polarkoordinaten* ein wesentliches Hilfsmittel sind, und betrachten zur Erläuterung das folgende

Beispiel 9.12: Wir stellen uns einmal vor, ein Punkt P bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden, wobei die Bewegung zum Zeitpunkt t_0 im Punkt P_0 beginnen möge (vgl. [10]). Wenn dabei die Gerade ihrerseits – ausgehend von der horizontalen Lage P_0H – mit konstanter Geschwindigkeit in einer Ebene um den Punkt P_0 gedreht wird, so ergibt sich z. B. eine Kurve, wie sie Bild 9.14 zeigt.

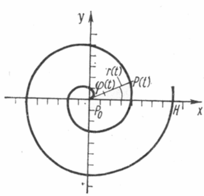

Bild 9.14.
Archimedische Spirale