Die oben genannten Zeichen $\bar{\ }$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ bilden gemeinsam mit den beiden *Quantoren* $\forall$, $\exists$ eine *Zeichenmenge*, mit der man (unter Zuhilfenahme von Klammern) die Aussagen, die in der Mathematik, aber auch in anderen Wissenschaften vorkommen, formalisiert darstellen und auf ihren Wahrheitsgehalt untersuchen kann.

Aufgabe 3.4: Es werden folgende Aussageformen betrachtet:

$q(x)$ = „x ist eine Primzahl"; $r(x)$ = „x ist durch 2 teilbar";

$s(x)$ = „x ist durch 3 teilbar"; $t(x)$ = „x ist durch 6 teilbar".

Dabei ist x eine natürliche Zahl, $x \geqq 1$.

Man formuliere die folgenden Aussagen verbal und untersuche, ob sie wahr sind:

1. $(\forall x)\, r(x) \rightarrow \bar{q}(x)$;
2. $(\forall x)\, \bar{r}(x) \wedge \bar{s}(x) \rightarrow q(x)$;
3. $(\forall x)\, q(x) \rightarrow \bar{r}(x) \wedge \bar{s}(x)$;
4. $(\forall x)\, r(x) \wedge s(x) \leftrightarrow t(x)$;
5. $(\exists x)\, \bar{r}(x) \wedge \bar{s}(x) \rightarrow q(x)$.

* *Aufgabe 3.5:* Man stelle die folgenden Aussagen mittels logischer Symbole dar:

a) Zu einer beliebigen natürlichen Zahl läßt sich immer eine größere Zahl finden, die Primzahl ist.

b) Das Quadrat jeder beliebigen reellen Zahl ist größer als null.

Man bilde die Verneinung der durch b) formulierten Aussage!

3.4.2. Technische Realisierung der logischen Zeichen

Eine wichtige technische Anwendung der Logik ist die Beschreibung von *Schaltkreisen*. So machte Ehrenfest bereits 1910 darauf aufmerksam, daß man die mathematische Logik auf *Relaiskontaktschaltungen* anwenden könne. Die Anwendung begann jedoch erst in den dreißiger Jahren mit den Arbeiten von Shannon. Es entstand die *Schaltalgebra* als mathematische Grundlage für die logischen Schaltungen und speziell für die digitalen Rechenautomaten.

Betrachten wir einen Stromkreis, der durch Schalter geöffnet werden kann. Dann läßt sich leicht die folgende zweiwertige Aussage definieren

p = „Der Stromkreis ist geschlossen" = „Es fließt Strom"

Dabei ist $w(p) \in \{W, F\}$, wobei W dem geschlossenen, F dem geöffneten Stromkreis entspricht.

Wir wollen jetzt die Wahrheitstabellen (Wahrheitswertfunktionen) der grundlegenden Verknüpfungen (Aussagenverbindungen) durch Schaltungen technisch realisieren.

In Bild 3.1 und Bild 3.2 haben wir jeweils zwei Schalter, wobei

p_1 = „Der Schalter 1 ist geschlossen",

p_2 = „Der Schalter 2 ist geschlossen"

wie oben zweiwertige Aussagen sind. Eine Glühlampe G zeigt an, ob der Stromkreis geschlossen oder offen ist. Für die Schaltung aus Bild 3.1 gilt

$$w(p) = \begin{cases} W \text{ genau dann, wenn } w(p_1) = W \text{ oder } w(p_2) = W \\ F \text{ genau dann, wenn } w(p_1) = F \text{ und } w(p_2) = F. \end{cases}$$