Tabelle 4.1. Kontraposition

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$\bar{p}$	W	F	W	F
$\bar{q}$	W	W	F	F
$u = p \to q$	W	F	W	W
$v = \bar{q} \to \bar{p}$	W	F	W	W
$v \to u$	W	W	W	W

Tabelle 4.2. Abtrennungsregel

s	F	W	F	W
t	F	F	W	W
$s \to t$	W	F	W	W
$z = s \wedge (s \to t)$	F	F	F	W
$z \to t$	W	W	W	W

Die Begründung einer richtigen logischen Schlußweise liegt also offenbar in der Existenz von Aussagenverbindungen der oben betrachteten Art. Deshalb liegt es nahe, daß wir uns zunächst etwas genauer mit dieser Klasse der immer wahren Aussagenverbindungen beschäftigen.

4.1.1. Tautologien

D.4.1 **Definition 4.1:** *Eine Aussagenverbindung heißt Tautologie, wenn die Wahrheitswertfunktion nur den Wert W annimmt, d. h. wenn die letzte Zeile der Wahrheitstabelle nur den Wert W besitzt. (Anstelle von Tautologie ist auch der Begriff Identität gebräuchlich.)*

Wir haben damit eine sehr wesentliche Klasse von Aussagenverbindungen definiert, die allein auf Grund ihrer logischen Struktur stets nur wahre Aussagen enthält. Uns interessiert diese Klasse von Aussagenverbindungen im Hinblick auf weitere logische Schlußfiguren. Deshalb stellen wir nachfolgend einige besonders wichtige Tautologien zusammen und führen den Nachweis über die entsprechenden Wahrheitstabellen.

Tautologien sind beispielsweise:

1) Abtrennungsregel $\quad s \wedge (s \to t) \to t \quad$ (4.2)

2) Indirekter Beweis $\quad (q \wedge (\bar{p} \to \bar{q})) \to p \quad$ (4.3)

3) Fallunterscheidung $\quad ((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r \quad$ (4.4)

4) Kettenschluß $\quad ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r) \quad$ (4.5)

5) Schluß auf eine Äquivalenz $\quad ((p \to q) \wedge (q \to p)) \to (p \leftrightarrow q) \quad$ (4.6)

6) Kontraposition $\quad (p \to q) \to (\bar{q} \to \bar{p}) \quad$ (4.7)

$\quad (\bar{q} \to \bar{p}) \to (p \to q) \quad$ (4.8)

7) Doppelte Verneinung $\quad p \leftrightarrow \bar{\bar{p}} \quad$ (4.9)

8) de Morgansche Regeln $\quad \overline{p \wedge q} \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q}) \quad$ (4.10)

$\quad \overline{p \vee q} \leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q}) \quad$ (4.11)

Mit den Tabellen 4.3, 4.4 und 4.5 zeigen wir für drei besonders wichtige dieser Aussagenverbindungen, daß es sich tatsächlich um Tautologien handelt.

* *Aufgabe 4.2:* Man weise nach, daß die Aussagenverbindungen (4.10), (4.11) Tautologien sind!