Tabelle 4.6. Schema logischer Schlußfiguren und Beispiel – indirekter Beweis

$$
\begin{array}{ll}
\text{Voraussetzung 1} & q \\
\quad\vdots & \\
\text{Voraussetzung } k & \bar{p} \to \bar{q} \\
\hline
\text{Behauptung 1} & p \\
\quad\vdots & \\
\text{Behauptung } l &
\end{array}
$$

Über einem horizontalen Strich werden im allgemeinen k Voraussetzungen angegeben, unter diesem Strich l Behauptungen, die jeweils durch „und" also konjunktiv verknüpft sind. Wenn man die Gültigkeit der Voraussetzungen nachgeprüft hat, kann man folgern, daß auch die Behauptungen wahre Aussagen sind. Die Begründung dafür liefert jeweils die entsprechende Tautologie gemeinsam mit der Abtrennungsregel. Ein solches Schema ist sehr zweckmäßig, weil es unmittelbar ein Rezept für das „Beweisen" liefert. Hat man zum Beispiel – wie in Tabelle 4.6 – die Wahrheit einer Aussage p zu beweisen, so kann man anstelle dessen versuchen, die Wahrheit der beiden Aussagen (Voraussetzungen) q und $\bar{p} \to \bar{q}$ zu überprüfen, was unter Umständen wesentlich leichter sein kann. Wir werden das in 4.3.3. an einem Beispiel demonstrieren.

Nachfolgend geben wir ausgehend von (4.1) bis (4.11) die entsprechenden logischen Schlußfiguren an.

Im Abschnitt 4.2. werden wir die Anwendung dieser logischen Schlußfiguren auf einige Beispiele aus der Elementarmathematik zeigen.

Wir sind jetzt in der Lage, auch die etwas kompliziertere Frage „Warum kann man auf Grund von $\bar{q}_1 \to \bar{p}$ und $\bar{q}_2 \to \bar{p}$ auf $\bar{q} \to \bar{p}$ schließen?" zu beantworten, die im Zusammenhang mit unserem einführenden Beispiel noch offen ist.

* *Aufgabe 4.3:* Man weise die Richtigkeit der logischen Schlußfigur nach, wobei

$$
\begin{array}{c}
\bar{q} \\
\bar{q}_1 \to \bar{p} \\
\bar{q}_2 \to \bar{p} \\
\hline
\bar{q} \to \bar{p}
\end{array}
$$

$\bar{q}$ = entweder $\bar{q}_1$ oder $\bar{q}_2$ ist (Disjunktion)!

Tabelle 4.7. Logische Schlußfiguren

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & p \vee q & & \\
s & q & p \to r & p \to q & p \to q \\
s \to t & \bar{p} \to \bar{q} & q \to r & q \to r & q \to p \\
\hline
t & p & r & p \to r & p \leftrightarrow q
\end{array}
$$

Abtrennungsregel	Indirekter Beweis	Fallunterscheidung	Kettenschluß	Schluß auf eine Äquivalenz

$$
\begin{array}{ccccc}
p \to q & \bar{q} \to \bar{p} & p & \overline{p \wedge q} & \overline{p \vee q} \\
\hline
\bar{q} \to \bar{p} & p \to q & \bar{\bar{p}} & \bar{p} \vee \bar{q} & \bar{p} \wedge \bar{q}
\end{array}
$$

Kontrapositionsschlüsse		Doppelte Verneinung	de Morgansche Regeln	