Für unser Beispiel wäre dieses falsche Vorgehen folgendermaßen charakterisiert: Zu zeigen ist:

Wenn $1 = 1$ ist, so ist $-1 = +1$.

Beweis: Es sei $-1 = +1$. Dann folgt: $(-1)^2 = (+1)^2$, d. h. $1 = 1$. Das ist gerade die Voraussetzung und daraus folgt die Richtigkeit des Satzes.

Trotzdem kann das genannte Vorgehen, zunächst $q \to p$ nachzuweisen, nützlich sein, wenn man daraus nicht den falschen Schluß $p \to q$ zieht.

* *Aufgabe 4.4:* Man bestimme die Lösung der Gleichung

$$\sqrt{x + 2\sqrt{2x + 7}} = 4.$$

Nun betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 4.3: Wir wollen beweisen:

$p \to q =$ Wenn $a \neq b$ ist, so gilt $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$, $a > 0$, $b > 0$, reelle Zahlen.
Wir versuchen zunächst zu zeigen: $q \to p$, d. h., es sei $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$. Dann würde gelten:

$$(a + b)^2 > 4ab, \qquad a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 > 0, \qquad (a - b)^2 > 0.$$

Von der Aussage $(a - b)^2 > 0$ weiß man, daß sie für $a \neq b$ gilt. Wir haben also gezeigt: Wenn $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$, so ist $a \neq b$. Außerdem hat uns der obige Beweis aber auch einen Ansatzpunkt dafür geliefert, wie man „Wenn $a \neq b$, so $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$" zeigen kann. Man durchlaufe dazu die Schritte des Beweises rückwärts: Für $a \neq b$ gilt

$$(a - b)^2 > 0, \qquad a^2 - 2ab + b^2 > 0,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, \qquad (a + b) > 2 \cdot \sqrt{ab}.$$

Damit haben wir auch durch diesen rückwärtigen Weg gezeigt: Wenn $a \neq b$, so $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Wir fassen zusammen: Das Schließen von einer Behauptung q aus beweist die Implikation $p \to q$ nicht (auch wenn es zur Voraussetzung p führt), kann aber oft sehr nützlich sein, um einen Beweisansatz zu finden. Wir nennen dieses Vorgehen deshalb *Analyse*.

Die Analyse liefert aber nicht immer einen Ansatz wie zum Beispiel $(a - b)^2 > 0$. Dagegen ist die Anwendung der Kontrapositionsschlüsse (Tabelle 4.7) immer möglich, die uns auch sofort einen Ausgangspunkt für den Beweis in die Hand gibt:

Man nehme das Gegenteil der Behauptung q an und versuche $\bar{q} \to \bar{p}$ zu beweisen.

Beispiel 4.4: $p \to q =$ „Wenn $a \neq b$, so $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$".

Wir nehmen $\bar{q} =$ „ $\dfrac{a+b}{2} \leqq \sqrt{ab}$" an. Dies ist ein unmittelbarer Ansatz für den