Beweis von $\bar{q} \to \bar{p}$ ($\bar{p}$ = „$a = b$“). Wir können folgern:

$$(a + b)^2 \leqq 4ab, \qquad a^2 + 2ab + b^2 \leqq 4ab, \qquad a^2 - 2ab + b^2 \leqq 0,$$

$$(a - b)^2 \leqq 0, \quad \text{woraus sofort } a = b \text{ folgt}.$$

Damit ist $\bar{q} \to \bar{p}$ gezeigt, und der Kontrapositionsschluß $\dfrac{\bar{q} \to \bar{p}}{p \to q}$ liefert die Richtigkeit der Implikation $p \to q$.

Unter der Voraussetzung, daß $p \to q$ eine wahre Aussage ist, benutzt man häufig die folgende Sprechweise:

Die Aussage p ist eine *hinreichende Bedingung* für die Aussage q, oder auch, die Aussage q ist eine *notwendige Bedingung* für p.

Im Beispiel 4.5 ist also $a \neq b$ hinreichend dafür, daß

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{a \cdot b}$$

gilt. Wie wir gesehen haben, folgt aus der Gültigkeit von $p \to q$ noch nicht, daß auch $q \to p$ eine wahre Aussage ist. Das bedeutet in unserer soeben eingeführten Sprechweise ausgedrückt:

- Eine für die Gültigkeit der Aussage p notwendige Bedingung q muß nicht hinreichend für p sein und
- eine für die Gültigkeit der Aussage p hinreichende Bedingung q muß nicht notwendig für p sein.

So ist die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl n durch 2 notwendig aber nicht hinreichend für die Teilbarkeit von n durch 4. Für drei natürliche Zahlen a, b, c ist die Teilbarkeit von a durch c und b durch c hinreichend, aber nicht notwendig für die Teilbarkeit von $a + b$ durch c.

Die Anwendung des *Kontrapositionsschlusses* ist eine Form des indirekten Beweisens. Man benutzt sie zum Beweis einer Implikation.

Die als *indirekter Beweis* bezeichnete Schlußfigur in Tabelle 4.6 benutzt man zum Beweis einer Aussage p. Das nachfolgende Beispiel soll auch diesen Schluß etwas näher erläutern.

Beispiel 4.5: Wir wollen zeigen, daß die Aussage

$$p = \text{„}\sqrt{2} \text{ ist keine rationale Zahl“}$$

eine wahre Aussage ist.

Wir benutzen Tabelle 4.6 und zeigen zunächst $\bar{p} \to \bar{q}$, wobei $\bar{q}$ eine Aussage ist, die das Gegenteil einer noch zu vereinbarenden Annahme q darstellt. Zunächst betrachten wir $\bar{p}$, $\bar{p}$ = „$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“. Das heißt $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a, b; $b \neq 0$, deren größter gemeinsamer Teiler gleich eins ist (d. h. a, b – teilerfremd). Wenn $\bar{p}$ gilt, so gilt auch $(\sqrt{2})^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$, $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ oder, anders geschrieben, $a^2 = 2 \cdot b^2$. Demzufolge wäre a^2 eine gerade Zahl, was nur dann möglich ist, wenn $a = 2n$ eine gerade Zahl ist. Es würde also $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2b^2$, d. h. $b^2 = 2 \cdot n^2$ und damit auch b eine gerade Zahl sein.

Bezeichnen wir mit q die Aussage: q = „a und b sind teilerfremd“, so haben wir gezeigt: $q \wedge (\bar{p} \to \bar{q})$, denn a und b würden den gemeinsamen Teiler 2 besitzen. Unter Verwendung der Schlußfigur aus Tabelle 4.7 folgt die Gültigkeit von p.