Wie wir gesehen haben, wurde die Aussage $q$ erst im Laufe des Beweises konstruiert, worin auch die Hauptschwierigkeit bei der Führung eines indirekten Beweises liegt. Man muß sich vorher zielbewußt überlegen, welche Annahme $q$ bei Voraussetzung von $\bar{p}$ zur Folgerung $\bar{q}$ führen könnte.

### 4.2.3. Schluß auf eine Äquivalenz

Die besondere Bedeutung von (4.6) liegt darin, daß es eine Möglichkeit gibt, eine *Äquivalenz* zu beweisen.

Betrachten wir zum Beispiel eine Eigenschaft, die wir oben schon benutzt haben.

*Beispiel 4.6:* Es sei $a$ eine ganze Zahl. Dann gilt: $a$ ist genau dann eine gerade Zahl, wenn $a^2$ eine gerade Zahl ist. ($a$ gerade ist notwendig und hinreichend dafür, daß $a^2$ gerade ist). Formalisieren wir diesen mathematischen Satz mittels der Aussagen

$$p = \text{„}a \text{ ist eine gerade Zahl“}, \qquad q = \text{„}a^2 \text{ ist eine gerade Zahl“},$$

so können wir ihn in der Form $p \leftrightarrow q$ schreiben ($a$ – beliebig, aber fest). Wir beweisen $p \leftrightarrow q$, indem wir den Schluß auf eine Äquivalenz anwenden. Demnach müssen wir zeigen: $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Es bedeuten dabei:

1. $p \to q$ = „Wenn $a$ gerade ist, ist auch $a^2$ gerade“ („$a$ gerade“ ist hinreichende Bedingung für „$a^2$ gerade“);
2. $q \to p$ = „Wenn $a^2$ gerade ist, ist auch $a$ gerade“ („$a$ gerade“ ist notwendige Bedingung für „$a^2$ gerade“).

Wir beweisen die Implikationen nacheinander.

Zu 1: Es sei $a$ gerade. Dann ist $a = 2m$, wobei $m$ eine ganze Zahl ist. Dann gilt: $a^2 = a \cdot a = (2m)(2m) = 2(2m^2)$. Da $2m^2$ eine ganze Zahl ist, ist $a^2$ eine gerade Zahl, und demzufolge ist $p \to q$ bewiesen.

Zu 2: Wir wollen zeigen: $q \to p$. Nach dem Kontrapositionsschluß genügt es, statt dessen $\bar{p} \to \bar{q}$ zu beweisen, d. h.

„wenn $a$ ungerade ist, ist auch $a^2$ ungerade“

müßte bewiesen werden. $a$ ungerade ist gleichbedeutend mit $a = 2m + 1$ mit einer ganzen Zahl $m$. Nun bilden wir $a^2$: $a^2 = (2m + 1) \cdot (2m + 1) = 2 \cdot 2m^2 + 2m + 2m + 1 = 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1$. Da $2 \cdot (2m^2 + 2m)$ eine gerade Zahl ist, ist $a^2$ ungerade und somit $\bar{p} \to \bar{q}$ nachgewiesen.

Wir wollen hier noch einmal ausführlich aufschreiben, wie aus dem Gezeigten die eigentliche Behauptung geschlossen wird. Wir haben gezeigt:

$$1.\ p \to q \qquad 2.\ \bar{p} \to \bar{q}.$$

Nach dem Kontrapositionsschluß folgt $q \to p$. Deshalb wissen wir, daß $(p \to q) \wedge (q \to p)$ gilt. Nach dem Schluß auf eine Äquivalenz folgt $p \leftrightarrow q$.

Die Darstellung dieses Beispiels zeigt besonders deutlich, wie das Anwenden logischer Schlüsse kombiniert durchzuführen ist, um konkrete Beweise zu führen.

*Bemerkung:* Da wir keinerlei Bedingung an das feste $a$ während des Beweises stellen mußten, können wir $p$ und $q$ auch als Aussageformen $p(a)$, $q(a)$ über dem Bereich der ganzen Zahlen interpretieren und behaupten:

$$(\forall a)(p(a) \leftrightarrow q(a)).$$