Bei Gültigkeit der Aussage $p \leftrightarrow q$ sagt man:

p ist eine *notwendige und hinreichende Bedingung* für q.

So ist dafür, daß ein Dreieck gleichseitig ist, notwendig und hinreichend, daß alle drei Innenwinkel des Dreiecks einander gleich sind.

4.3. Die Methode der vollständigen Induktion

Die bekannte *Methode der vollständigen Induktion* gibt uns die Möglichkeit, die Gültigkeit von unendlich vielen Aussagen zu beweisen. Von diesen unendlich vielen Aussagen muß man einschränkend fordern, daß sie durch Einsetzen natürlicher Zahlen in eine Aussageform entstehen. Diese Aussageform kürzen wir wie üblich mit $p(n)$ ab. Dabei sei n die Variable, die eine Menge X natürlicher Zahlen durchläuft, wobei wir voraussetzen wollen, daß

$$X = \{n \mid n - \text{natürliche Zahl} \wedge n \geqq a\},$$

a sei eine natürliche Zahl, ist. Nachdem diese Bezeichnungen eingeführt sind, können wir präziser sagen: Mit der Methode der vollständigen Induktion kann man nachweisen, daß die unendlich vielen Aussagen

$$p(a), p(a + 1), p(a + 2), \ldots$$

wahre Aussagen sind.

Indem wir unsere Ergebnisse aus 3.4.1. verwenden, schreiben wir kürzer:

$$q = (\forall n)\, p(n), \quad X = \{n \mid n - \text{natürliche Zahl} \wedge n \geqq a\}.$$

Demnach ist die vollständige Induktion die Methode dafür, nachzuweisen, daß q eine wahre Aussage ist.

In diesem Abschnitt ist es nicht unser Ziel, möglichst viele Beispiele darzustellen, sondern wir wollen einige charakteristische Eigenschaften angeben. Weitere Beispiele finden Sie insbesondere in Abschnitt 6.

Um Aussagen $q = (\forall n)\ p(n)$, $n \in X$ – man schreibt dafür oft kurz: Es gilt $p(n)$ für $n \geqq a$, a ganz – zu illustrieren, betrachten wir zunächst Beispiele:

Beispiel 4.7:

(1) Alle Zahlen der Form $n^2 + n + 41$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist ($X = \{0, 1, 2, \ldots\}$), sind Primzahlen.

(2) Es gilt: $S_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$
für jede natürliche Zahl n, die größer oder gleich eins ist ($X = \{1, 2, \ldots\}$).

(3) Jede natürliche Zahl n, ($X = \{0, 1, 2, \ldots\}$), ist der ihr folgenden natürlichen Zahl gleich.

(4) Für jede natürliche Zahl n, die größer oder gleich 3 ist, ($X = \{3, 4, 5, \ldots\}$), gilt die Ungleichung $2^n > 2n + 1$.

Es kommt nun darauf an, den Wahrheitswert solcher Aussagen zu bestimmen. Die Methode der vollständigen Induktion (siehe auch Induktionsaxiom in 5.1.) läßt sich folgendermaßen formulieren: