MATHEMATIK

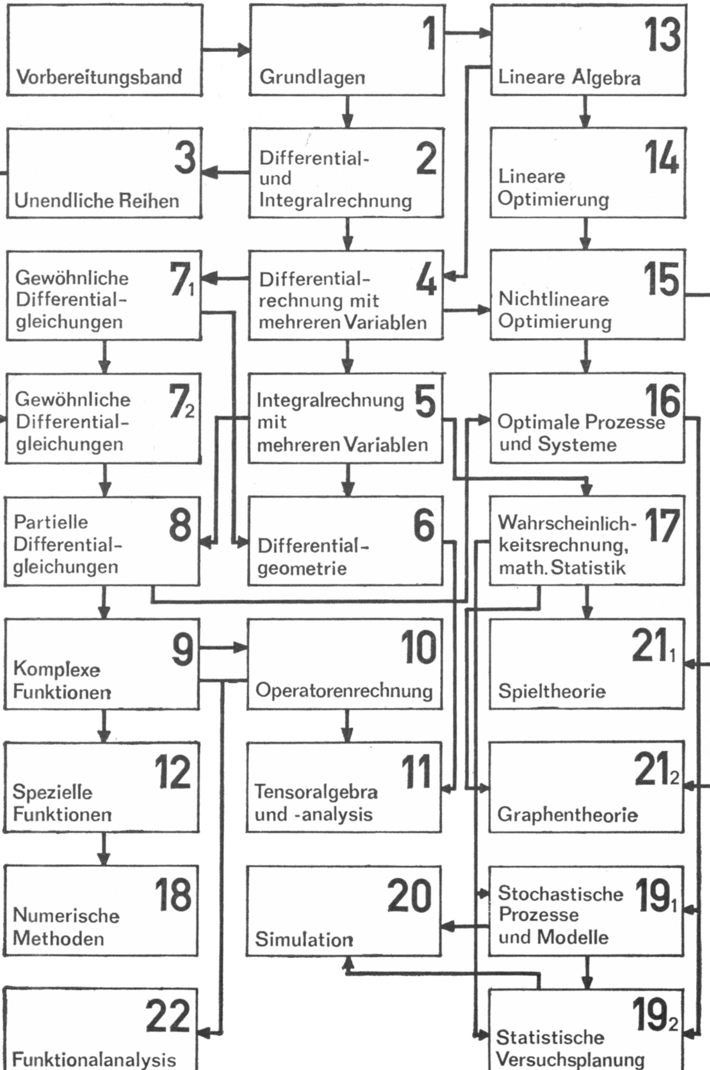
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

11

SCHULTZ-PISZACHICH

Tensoralgebra und -analysis

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER, ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 11

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

PROF. DR. W. SCHULTZ-PISZACHICH

Tensoralgebra und -analysis

2., BEARBEITETE AUFLAGE

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1979

Verantwortlicher Herausgeber:
Dr. sc. nat. Karl Manteuffel, ordentlicher Professor für mathematische Methoden der Operationsforschung an der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg

Autor:
Dr. phil. et rer. nat. habil. Wolfgang Schultz-Piszachich, ordentlicher Professor für Analysis an der Ingenieurhochschule Köthen

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, November 1978 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

2. Auflage
VLN 294-375/15/79 · LSV 1034
Lektor: Dorothea Ziegler
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung; INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig — III/18/97
Bestell-Nr. 665 825 4

DDR 7,— M

Vorwort zur ersten Auflage

Der Tensorkalkül ist die wichtigste Methode, physikalisch-technische Vorgänge und Prozesse mathematisch zu formulieren. Zahlreiche Anwendungsbeispiele dienen der „mathematischen Modellierung" solcher Vorgänge derart, daß ihre Beschreibung nicht von der Wahl des zufällig benutzten Koordinatensystems abhängt. Die Weiterentwicklung der Theorie und der Rechenfertigkeit sollten Hand in Hand gehen. Den Hinweisen zur Lösung der Übungsaufgaben wurde daher breiter Raum gewidmet. Die Aufgaben dienen der Rechenübung und Stoffergänzung. Aus Platzgründen müssen wir uns im Text gelegentlich auf die Ergebnisse von Übungsaufgaben stützen.

Ausgehend von einfachen Grundbegriffen werden die notwendigen Verallgemeinerungen schrittweise vorgenommen. Dieses etwas umständliche Vorgehen erfolgt aus didaktischen Gründen. Alle Zwischenstufen können natürlich durch Spezialisierung aus der ko- und kontravarianten Darstellung des 6. Kapitels zurückgewonnen werden.

Neben der Koordinatendarstellung gibt es die Komponentendarstellung in Summenform sowie die koordinatenfreie Darstellung für einen Tensor. Wir beschränken uns nicht wie üblich auf eine der Darstellungsmöglichkeiten, sondern behandeln sämtliche Methoden der Tensorrechnung ausführlich. Die Stoffauswahl ist auf die Belange einer effektiven *Einführung* in die Tensoralgebra und -analysis zugeschnitten, die den Leser befähigen soll, weiterführende Literatur mit Verständnis lesen zu können.

Für wertvolle Hinweise danke ich Herrn Prof. Dr. E. Lanckau (TH Karl-Marx-Stadt) und dem Herausgeber Herrn Prof. Dr. K. Manteuffel (TH Magdeburg). Herrn Prof. em. Dr. H. Schubert (MLU Halle) danke ich besonders für Literaturhinweise und -ausleihe. Bei der Ausarbeitung der Übungsaufgaben hat Herr Dr. U. Werner (IH Köthen) in dankenswerter Weise mitgewirkt. Dem Verlag sei für die Gestaltung des 11. Bandes und für die gute Zusammenarbeit herzlich gedankt.

Magdeburg, November 1975 W. Schultz-Piszachich

Inhalt

1. Tensorielle Aspekte der Vektoralgebra 7

1.1. Vektoren 7
1.2. Tensoren erster Stufe. Orthogonale Koordinatentransformationen 9
1.3. Invarianz des skalaren und vektoriellen Produktes 13
1.4. Invarianz des Spatproduktes 17
1.5. Multilinearformen. Tensoren n-ter Stufe 20

2. Tensoralgebra mit kartesischer Basis 25

2.1. Tensoroperationen 25
2.2. Tensoren in Komponentendarstellung. Punkttransformationen 27
2.3. Antisymmetrische Tensoren 31
2.4. Rechenkalkül mit **E**-Tensoren 34

3. Symmetrische Tensoren 2. Stufe. Tensorfelder. Drehtensor 38

3.1. Einheitstensor und Spannungstensor 38
3.2. Tensorfelder. Isotrope Tensoren 41
3.3. Der allgemeine Drehtensor 2. Stufe 42
3.4. Hauptachsenform und skalare Invariante eines symmetrischen Tensors 2. Stufe. Hauptachsentransformation 45
3.5. Tensor der Trägheitsmomente. Tensorellipsoid 47

4. Vektor- und Tensoranalysis mit orthonormierter Basis 51

4.1. Gradientenfelder, Divergenz und Rotor eines Tensorfeldes erster Stufe 51
4.2. Einfache Nabla-Operationen 53
4.3. Mehrfache Nabla-Operationen 56
4.4. Invarianz des Nabla-Operators. Integralsätze nach Gauß 58

5. Ausgewählte Anwendungen 60

5.1. Lorentztransformationen 60
5.2. Kräfte- und Momentengleichgewicht 62
5.3. Kugeltensor. Deviator. Verzerrungstensor. Navier-Stokes-Tensor 63
5.4. Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik 66
5.5. Bilanzgleichungen 68
5.6. Wirbelfelder. Integralsätze nach Stokes. Inkompatibilitätstensor 69

6. Einführung in die Tensoralgebra mit ko- und kontravarianter Basis 73

6.1. Ko- und kontravariante Basisvektoren und Tensorkoordinaten 73
6.2. Die Transformationsgesetze für die Tensorkoordinaten 74
6.3. Tensor der Metrikkoeffizienten 77
6.4. Tensorprodukte. Der ko- und kontravariante **E**-Tensor 78

7. Einführung in die Tensoranalysis mit ko- und kontravarianter Basis ... 82

7.1. Krummlinige Flächenkoordinaten. Vektor des Flächenelements. Zirkulation ... 82
7.2. Krummlinige Koordinaten des Raumes R^3 und der Ebene R^2 ... 84
7.3. Ortsabhängige Bezugssysteme ... 87
7.4. Die Christoffelsymbole ... 90

8. Riemannsche Krümmungstensoren ... 93

8.1. Kovariante Ableitungen ... 93
8.2. Der Riemann-Christoffel-Tensor (RCT) ... 94
8.3. Berechnung des RCT in zweidimensionalen Beispielräumen ... 96
8.4. Zum Ricci-Kalkül ... 98

9. Hinweise zur Lösung der Übungsaufgaben ... 100

Literatur ... 105

Namen- und Sachregister ... 106

1. Tensorielle Aspekte der Vektoralgebra

1.1. Vektoren

Die Vektoralgebra im *dreidimensionalen euklidischen Raum* kennen Sie bereits aus der „Linearen Algebra“ (Band 13 dieses Lehrwerks). Eine Einführung in die Vektoralgebra ist daher nicht beabsichtigt. Es sollen nur jene Begriffe und Zusammenhänge herausgestellt werden, die für die Tensorrechnung wichtig sind. Dabei ändern wir die Ihnen geläufige Bezeichnungsweise, um uns Schreibarbeit zu ersparen. Im folgenden wird der Ihnen durch die Anschauung vertraute dreidimensionale euklidische Raum zugrunde gelegt und mit R^3 bezeichnet.

Die Achsen eines *kartesischen Koordinatensystems* (KS) stehen paarweise aufeinander senkrecht. Die Einheiten werden auf allen drei Achsen gleich groß gewählt. In einem solchen Bezugssystem wollen wir die Einheitsvektoren in Richtung der positiven x-, y-, z-Achse respektive mit $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bezeichnen:

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \quad \mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3 .$$

Die so definierten Koordinateneinheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bilden eine orthonormierte Basis. Bezüglich dieser Basis erhält ein Vektor $\mathbf{u}$ die *Komponentendarstellung*

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\mathbf{e}_i . \tag{1.1}$$

Abgesehen von physikalischen Dimensionen sind die u_i Zahlen. Man nennt sie die *Koordinaten* des Vektors $\mathbf{u}$. Die drei Summanden $u_1\mathbf{e}_1$, $u_2\mathbf{e}_2$, $u_3\mathbf{e}_3$ sind die *Komponenten* des Vektors $\mathbf{u}$ (auch *vektorielle Komponenten* genannt).

Allgemein wird ein „eigentlicher“ Vektor als Repräsentant einer *Translation* angesehen, wobei alle Punkte des Raumes oder eines Raumteils (z. B. eines starren Körpers) die gleiche Parallelverschiebung erfahren. In dieser Definition ist der Vektor vom speziellen KS unabhängig. Physikalische Vektoren wie z. B. Geschwindigkeit und Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke sind eigentliche Vektoren, d. h. *Tensoren erster Stufe*. Damit ist gemeint, daß das geometrische Bild des eigentlichen Vektors als gerichtete Strecke mit Länge, Richtung und Richtungssinn ein geometrisches Objekt darstellt, das sich bei beliebiger Parallelverschiebung nicht ändert und nicht vom zufällig benutzten KS abhängt. Es werden also *freie Vektoren* zugrunde gelegt, die geometrisch von jedem beliebigen Raumpunkt aus abgetragen werden können. Zwei Vektoren sind gleich, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, wenn sie durch Parallelverschiebung gleichsinnig zur Deckung gebracht werden können. Das bedeutet algebraisch $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$ und folgt aus der linearen Unabhängigkeit der kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. In der Geometrie wird man verlangen, daß ein geometrisches Objekt, etwa eine Ebene, selbständige, also vom KS unabhängige Bedeutung hat. Auch aus dieser Forderung läßt sich, wie wir sehen werden, der Tensorbegriff herleiten.

Zur Frage der *Orientierung* eines KS betrachten wir drei nicht komplanare Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, die von einem beliebigen Punkt abgetragen werden. Der Endpunkt des Vektors $\mathbf{u}$ werde (auf kürzestem Wege nach Bild 1.1) in die gleichsinnige Richtung des Vektors $\mathbf{v}$ gedreht. Wir erhalten eine Schraubenlinie, wenn sich der Endpunkt von $\mathbf{u}$

bei dieser Drehbewegung gleichzeitig und gleichsinnig in Richtung des Vektors $\mathbf{w}$ bewegt. Ergibt sich dabei eine Rechtsschraube nach Bild 1.1 wie beim üblichen Korkenzieher, dann nennen wir das Vektortripel $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem* (R); ergibt sich hingegen eine Linksschraube nach Bild 1.2, so bilden die

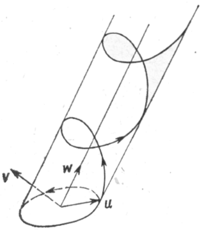


Bild 1.1:
Rechtsschraubenlinie:
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (R)

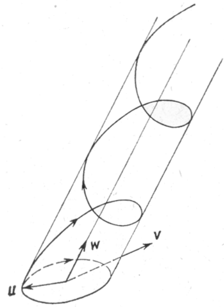


Bild 1.2:
Linksschraubenlinie:
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ (L)

Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ in dieser Reihenfolge ein *Linkssystem* (L). Speziell für ein kartesisches KS kann man danach angeben, ob die Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in dieser Reihenfolge nach Bild 1.3a ein Rechtssystem oder nach Bild 1.3b ein Linkssystem bilden. Man sagt auch, das KS sei *rechts-* oder *linksorientiert*.

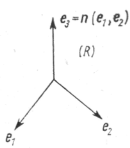


Bild 1.3a:
Rechtssystem:
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (R)

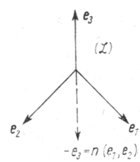


Bild 1.3b:
Linkssystem:
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (L)

Vereinbarung 1.1: Solange wir uns auf ein kartesisches KS beziehen, wird vereinbart, daß die kartesischen Basisvektoren mit der Bezeichnung $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

Dann bilden auch die Koordinateneinheitsvektoren in der Reihenfolge $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ein (R), aber in der Reihenfolge $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$ sowie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2$ ein (L). Bei Vektoren mit anderer Bezeichnung, z. B. $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ oder $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ muß in jedem Falle geprüft werden, ob es sich um ein (R) oder (L) handelt.

Wir schreiben $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ für die Basisvektoren eines kartesischen KS an Stelle von $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, um die Summationsvereinbarung nach Einstein benutzen zu können.

Vereinbarung 1.2: Es wird vereinbart, daß überall dort, wo zwei gleiche lateinische Buchstabenindizes auftreten, über diese von 1 bis 3 zu summieren ist, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Mit dieser Vorschrift ersparen wir uns das Aufschreiben des Summenzeichens. Die Komponentendarstellung (1.1) erhält nunmehr die einfache Formulierung

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i . \tag{1.2}$$

Beispiel 1.1: Die Doppelsumme $a_{ik}b_{ki}$ soll ausgeschrieben werden. Zunächst ist

$$a_{ik}b_{ki} = a_{1k}b_{k1} + a_{2k}b_{k2} + a_{3k}b_{k3},$$

wenn man die Summation bezüglich i ausführt. Es ist aber auch über k zu summieren mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} a_{ik}b_{ki} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ &\quad + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ &\quad + a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.1: Man schreibe die Doppelsumme $a_{ij}b_{ij}$ und die dreifache Summe $\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$ ausführlich!

1.2. Tensoren erster Stufe. Orthogonale Koordinatentransformationen

Das *skalare Produkt* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ der Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ wird mit einem Zwischenpunkt gekennzeichnet. Das Ergebnis ist eine skalare Größe.

Definition 1.1: *Die skalare Multiplikation zweier Koordinateneinheitsvektoren ergibt*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \tag{1.3}$$

wo δ_{ik} das Kronecker-Symbol bedeutet:

$$\delta_{ik} = 0 \textit{ für } i \neq k, \quad \delta_{ik} = 1 \textit{ für } i = k. \tag{1.4}$$

Nach (1.4) gilt

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

usw., aber

$$\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3. \tag{1.5}$$

In der Definition darf bezüglich

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{für} \quad i = k$$

nicht summiert werden, was man in Zweifelsfällen mit $\delta_{(kk)} = 1$ andeuten kann. Mittels (1.2), (1.3) und (1.4) erhalten wir das Skalarprodukt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i \mathbf{e}_i \cdot v_k \mathbf{e}_k = u_i v_k \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = u_i v_k \delta_{ik},$$

also bei Beachtung der Summationsvereinbarung den *Skalar*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 . \tag{1.6}$$

Wird nämlich über i summiert, so entsteht

$$u_i v_k \delta_{ik} = u_k v_k \delta_{(kk)} = u_k v_k .$$

Das skalare Produkt ist *kommutativ*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{1.7}$$

wegen $u_k v_k = v_k u_k$.

Beispiel 1.2: Denkt man sich die Masse eines Teilchens in seinem Schwerpunkt konzentriert, so spricht man von einem „*Massenpunkt*", der sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegen möge. Seine kinetische Energie ist dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

Wir führen die Kurzbezeichnung $\mathbf{v}^2$ ein mit der

Vereinbarung 1.3: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_k v_k = \mathbf{v}^2$, (1.8)

so daß

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v_k v_k = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 \tag{$\overline{1.8}$}$$

geschrieben werden kann.

Der Übergang von einem Bezugssystem B zu einem anderen $\bar{B}$ werde mit einer linearen Transformation vollzogen, wobei ein betrachteter *Punkt festgehalten* wird. Eine solche Transformation heißt *Koordinatentransformation.* Wegen der Summationsvereinbarung wollen wir künftig die kartesischen Koordinaten x, y, z durchnumerieren und dafür x_1, x_2, x_3 schreiben! Derselbe Punkt habe dann in B die Koordinaten x_1, x_2, x_3, dagegen in $\bar{B}$ die Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Der Übergang von einem Bezugssystem zum anderen wird von einer *Transformationsmatrix* vermittelt. Wir wollen uns dabei auf *homogene lineare Transformationen* beschränken, indem wir Parallelverschiebungen des KS ausschließen. (Im Bedarfsfall werden Translationen des Bezugssystems gesondert untersucht.) Die Bezugssysteme B und $\bar{B}$ haben bei diesen Transformationen immer denselben Ursprung (Nullpunkt), so daß für die Ortsvektoren $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ und $\bar{\mathbf{x}} = \bar{x}_k \bar{\mathbf{e}}_k$ desselben Punktes in beiden Bezugssystemen gilt: $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = \bar{x}_k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{x}}$.

Zur Einführung betrachten wir speziell *Drehtransformationen,* die B in $\bar{B}$ überführen. Das sind Drehungen des Bezugssystems B um eine Achse, die durch den festgehaltenen Nullpunkt (Ursprung des KS) geht. Nach wie vor benutzen wir kartesische Bezugssysteme, so daß ein Dreibein $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ wie ein starrer Körper in die neue Lage $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ gedreht wird. Dabei sind die $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ wieder kartesische Einheitsvektoren in gleicher Orientierung wie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. (Bei Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung würde sich die Orientierung ändern.) Es muß also gelten

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik}. \tag{1.9}$$

Der zum Vektor $\mathbf{v}$ gehörige *Einheitsvektor* werde mit $\mathbf{v}^0$ gekennzeichnet, $|\mathbf{v}^0| \doteq 1$. Seine Koordinaten sind die Richtungscosinus mit den Koordinatenachsen. Bezeichnet $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)$ den kleineren Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{e}_i$, so erhält $\mathbf{v}^0$ die Komponentendarstellung

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{e}_l \cos(\mathbf{v}, \mathbf{e}_l).$$

Ein Basisvektor des neuen Bezugssystems $\bar{B}$ wird also im alten KS B zerlegt in

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_l \cos(\bar{\mathbf{e}}_k, \mathbf{e}_l). \tag{1.10}$$

Umgekehrt werde $\mathbf{w}^0$ in $\bar{B}$ dargestellt:

$$\mathbf{w}^0 = \bar{\mathbf{e}}_l \cos(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{e}}_l).$$

Ein Basisvektor des alten KS B erhält somit im neuen KS $\bar{B}$ die Komponentendarstellung

$$\mathbf{e}_k = \bar{\mathbf{e}}_l \cos(\mathbf{e}_k, \bar{\mathbf{e}}_l). \tag{1.11}$$

Jede *Drehung* des ursprünglichen KS um eine Achse durch den Nullpunkt und jede *Spiegelung* des ursprünglichen KS an einer Ebene durch den Nullpunkt, die auch als *Umlegung* bezeichnet wird, überführt das kartesische Basissystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in eine neue kartesische Basis $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. Die vorstehenden Formeln gelten für Koordinatentransformationen nicht nur bei Drehung, sondern auch bei Umlegung des kartesischen KS.

Definition 1.2: *Die* **orthogonalen Koordinatentransformationen** *umfassen Drehungen* **und** *Umlegungen des kartesischen Bezugssystems. Sie werden von einer* **orthogonalen Matrix** $\underset{\sim}{C} = ((c_{kl}))$ *mit den 9 Elementen* c_{kl} *vermittelt. Die* **Transformationskoeffizienten** c_{kl} *werden wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \cos(\bar{\mathbf{e}}_k, \mathbf{e}_l) = \cos(\mathbf{e}_l, \bar{\mathbf{e}}_k), \\ c_{lk} &= \cos(\bar{\mathbf{e}}_l, \mathbf{e}_k) = \cos(\mathbf{e}_k, \bar{\mathbf{e}}_l). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Der erste Index der Transformationskoeffizienten bezieht sich auf einen Basisvektor von $\bar{B}$, der zweite Index auf einen Basisvektor von B. Aus (1.10) und (1.11) liest man mit (1.12) die Transformationsformeln

$$\bar{\mathbf{e}}_k = c_{kl}\mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_k = c_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l \tag{1.13}$$

ab, die Sie in anderer Bezeichnungsweise aus der „Linearen Algebra“ kennen.

Wird vorausgesetzt, daß der Vektor $\mathbf{v}$ ein Tensor 1. Stufe sei, so muß mit (1.13) gelten

$$\mathbf{v} = v_k\mathbf{e}_k = v_k c_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l = \bar{v}_l\bar{\mathbf{e}}_l = \bar{\mathbf{v}}$$

und

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_k\bar{\mathbf{e}}_k = \bar{v}_k c_{kl}\mathbf{e}_l = v_l\mathbf{e}_l = \mathbf{v}.$$

Es folgt

$$\bar{v}_l = c_{lk}v_k, \quad v_l = c_{kl}\bar{v}_k.$$

Auf die Wahl der Buchstabenindizes kommt es nicht an; bei einer Umbezeichnung müssen die vorher gleichen Buchstaben aber wieder durch gleiche Buchstaben ersetzt werden! Die Transformationsgesetze lauten dann auch

$$\bar{v}_k = c_{kl}v_l, \quad v_k = c_{lk}\bar{v}_l \tag{1.14}$$

neben

$$\bar{\mathbf{e}}_k = c_{kl}\mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_k = c_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l. \tag{1.13}$$

Definition 1.3: *Ein Tensor 1. Stufe ist ein System von drei Zahlen* (v_1, v_2, v_3), *seinen Koordinaten, die sich bei Drehung oder Umlegung des kartesischen Bezugssystems nach dem Gesetz* (1.14) *transformieren.*

Vereinbarung 1.4: Der Tensorbegriff wird im folgenden ohne besonderen Vermerk auf die Gruppe der orthogonalen Koordinatentransformationen bezogen. Die Gruppe der Lorentztransformationen und die Gruppe der homogenen linearen Koordinatentransformationen werden später besonders angesprochen.

Satz 1.1: *B sei ein kartesisches Bezugssystem mit den Koordinateneinheitsvektoren* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, *entsprechend $\bar{B}$ ein kartesisches Bezugssystem mit den Koordinateneinheitsvektoren* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. *Die Koordinatensysteme B und $\bar{B}$ haben den gleichen Nullpunkt. Ein Vektor mit der Komponentendarstellung $\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ in B bzw. $\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_k\bar{\mathbf{e}}_k$ in $\bar{B}$ ist ein Tensor 1. Stufe, wenn die* **Invarianzbedingung**

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \quad v_i\mathbf{e}_i = \bar{v}_k\bar{\mathbf{e}}_k \tag{1.15}$$

bei Übergang von B auf $\bar{B}$ (und umgekehrt) erfüllt ist.

Aus der Invarianzforderung (1.15) hatten wir mittels (1.13) die Transformationsgesetze (1.14) für die Koordinaten eines einstufigen Tensors abgeleitet. Durch Vergleich von (1.14) mit (1.13) erkennt man den

Satz 1.2: *Die Koordinaten v_k eines Tensors 1. Stufe transformieren sich nach dem gleichen Gesetz wie die kartesischen Basisvektoren* $\mathbf{e}_k$.

Folglich kann das System der kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ insgesamt *nicht* mit Tensoren 1. Stufe gebildet werden. Denn bei Übergang von B auf $\bar{B}$ kann die Invarianzforderung (1.15) nicht für alle Basisvektoren in der Form $\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_2$, $\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3$ erfüllt werden. Liegen im allgemeinen die Drehachse und die Spiegelebene schräg zu den Koordinatenachsen, dann gilt sogar $\mathbf{e}_i \neq \bar{\mathbf{e}}_i$ für $i = 1, 2, 3$, d. h. die Basisvektoren sind *nicht* Tensoren 1. Stufe. Wir nennen das kartesische Basissystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eine *kartesische Basis 1. Stufe*. Es folgt der

Satz 1.3: *Eine kartesische Basis 1. Stufe kann nicht vollständig mit Tensoren 1. Stufe gebildet werden. Die Koordinateneinheitsvektoren sind insgesamt keine Tensoren 1. Stufe.*

Beispiel 1.3: Bei Drehung um die x_3-Achse gilt zwar $\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3$, aber $\mathbf{e}_1 \neq \bar{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{e}_2 \neq \bar{\mathbf{e}}_2$. Bei Spiegelung an der x_1, x_2-Ebene gilt zwar $\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_2$, aber $\mathbf{e}_3 \neq \bar{\mathbf{e}}_3$, nämlich $\bar{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_3$.

Nach (1.13) und (1.9) bilden wir die Skalarprodukte

$$\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_k = c_{il}\mathbf{e}_l \cdot c_{km}\mathbf{e}_m = c_{il}c_{km}\delta_{lm} = c_{il}c_{kl} = \delta_{ik},$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = c_{li}\bar{\mathbf{e}}_l \cdot c_{mk}\bar{\mathbf{e}}_m = c_{li}c_{mk}\delta_{lm} = c_{li}c_{lk} = \delta_{ik}$$

und erhalten die wichtigen Beziehungen

$$c_{il}c_{kl} = \delta_{ik}, \quad c_{li}c_{lk} = \delta_{ik}. \tag{1.16}$$

Das bedeutet für die Transformationsmatrix

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = ((c_{ik})),$$

die eine Drehung oder Spiegelung des kartesischen Bezugssystems vermittelt, daß die Quadratsumme der Elemente einer Zeile oder Spalte gleich eins, die Produktsumme der Elemente zweier verschiedener Zeilen oder Spalten gleich null ist, z. B.

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, \quad c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = 0 \text{ usw.}$$

(„Quadrat- bzw. Produktsumme" soll heißen: Summe der Quadrate bzw. Produkte). Eine solche Matrix heißt *orthogonal.*

Vereinbarung 1.5: Wir benutzen die Schreibweise

$$\underset{\sim}{C} = ((c_{ik})), \quad \det \underset{\sim}{C} = \|c_{ik}\|$$

für die Matrix $\underset{\sim}{C}$ und ihre Determinante $\det \underset{\sim}{C}$. Es wird $\det \underset{\sim}{C} \neq 0$ vorausgesetzt.

Nach (1.16) gilt in Matrizenschreibweise

$$((c_{il} c_{kl})) = ((c_{li} c_{lk})) = ((\delta_{ik}))$$

oder in symbolischer Form

$$\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{C}^{\mathrm{T}} = \underset{\sim}{C}^{\mathrm{T}}\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{I}, \tag{1.17}$$

wenn $\underset{\sim}{C}^{\mathrm{T}}$ die bezüglich $\underset{\sim}{C}$ transponierte Matrix und $\underset{\sim}{I} = ((\delta_{ik}))$ die Einheitsmatrix bedeuten. Wird (1.17) mit der Grundbeziehung

$$\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{C}^{-1} = \underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{I}$$

verglichen, so folgt

$$\underset{\sim}{C}^{-1} = \underset{\sim}{C}^{\mathrm{T}}, \tag{1.18}$$

wo $\underset{\sim}{C}^{-1}$ die bezüglich $\underset{\sim}{C}$ inverse Matrix bezeichnet. Die Eigenschaft (1.18) wird meistens als Definitionsgleichung für orthogonale Matrizen vorangestellt. Wegen (1.18) lautet die Auflösung des linearen Gleichungssystems (1.14) $\bar{v}_k = c_{kl} v_l$ einfach $v_k = c_{lk} \bar{v}_l$.

Orthogonale Matrizen sind mit den Eigenschaften (1.16) oder (1.18) vollständig charakterisiert.

Aufgabe 1.2: Man zeige, daß für die Koeffizientenmatrix $\underset{\sim}{C}$ bei orthogonaler Koordinatentransformation gilt

$$\|c_{ik}\|^2 = \|\delta_{ik}\| = 1,$$

$$\det \underset{\sim}{C} = \|c_{ik}\| = \pm 1.$$

Im Abschnitt 1.4. beweisen wir den

Satz 1.4:

$$\|c_{ik}\| = +1 \ (\textit{Drehung}), \quad \|c_{ik}\| = -1 \ (\textit{Umlegung}), \tag{1.19}$$

d. h. bei Drehung oder Umlegung des kartesischen KS gilt

$$\det \underset{\sim}{C} = +1 \quad \textit{oder} \quad \det \underset{\sim}{C} = -1.$$

1.3. Invarianz des skalaren und vektoriellen Produktes

Die Vektoralgebra wird in dem Umfang, wie sie in Band 13 behandelt wurde, als bekannt vorausgesetzt. Wir geben nur eine Übersicht (mit Ergänzungen) über das, was hier gebraucht wird. Das geometrische Bild eines eigentlichen Vektors ist mit Länge, Richtung und Richtungssinn (Orientierung) bestimmt. Eine Gerade besitzt als geometrisches Gebilde eine Richtung, aber keinen Richtungssinn. Die *koordinatenfreie Darstellung des Vektors*

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\, \mathbf{v}^0 \tag{1.20}$$

besagt natürlich, daß es sich um einen Tensor 1. Stufe handelt, denn die geometrischen Kenngrößen des Vektors hängen nicht von einem KS ab. Hier bedeuten $|\mathbf{v}|$ die Norm des Vektors $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}^0$ den zu $\mathbf{v}$ gehörigen Einheitsvektor mit der Norm $|\mathbf{v}^0| = 1$.

Beispiel 1.4: Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Bahnkurve mit einem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$, der in jedem Kurvenpunkt die Richtung der Bahntangente besitzt. Durch die mechanische Bewegung wird ein Durchlaufungssinn der Kurve vorgeschrieben, so daß der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ einen Richtungssinn erhält. Die Norm des Geschwindigkeitsvektors heißt auch „Größe der Geschwindigkeit". Die Größe der Geschwindigkeit sei $|\mathbf{v}| = 50$ [m s^{-1}]. Im geometrischen Bild wird dem Betrag $|\mathbf{v}|$ des Vektors eine Länge des Vektorpfeils zugeordnet. Nachdem die konstruktive Längeneinheit, etwa 10 [m s^{-1}] $\triangleq$ 1 [cm], vereinbart worden ist, wird der Betrag des Geschwindigkeitsvektors im geometrischen Bild durch eine Strecke von 5 cm Länge veranschaulicht. Die physikalische Dimension wird der Norm $|\mathbf{v}| = 10$ [ms^{-1}] zugewiesen, so daß der Einheitsvektor $\mathbf{v}^0$, für sich betrachtet, dimensionslos ist: $|\mathbf{v}^0| = 1$. Ist speziell $|\mathbf{v}| = 1$ [m s^{-1}] die Größe der Geschwindigkeit, so müßte man **$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\mathbf{v}^0$ mit $|\mathbf{v}| = 1$ [m s^{-1}] schreiben.**

Die *koordinatenfreie Darstellung des skalaren Produkts* lautet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\, |\mathbf{v}| \cos (\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{1.21}$$

Wir denken uns die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ in einem beliebigen Punkt angesetzt. Dann soll $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ den kleineren Winkel bezeichnen, den die Vektoren einschließen. Die Festlegung $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bedeutet $\cos (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \cos (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, aber $\sin (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\sin (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Winkel $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und Längen $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ sind geometrische Bestimmungsstücke, die nicht vom KS abhängen. Mit (1.21) wird unterstellt, daß es sich um Tensoren 1. Stufe handelt, daß also auch $u_i v_i = \bar{u}_i \bar{v}_i$ gilt. Aus (1.21) folgt wieder (1.7) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ sowie

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{v}| \cos (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i). \tag{1.22}$$

Aufgabe 1.3: Mit den drei Seitenvektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ werde ein Dreieck konstruiert. Der „Kosinussatz" ist mittels $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ bei Berücksichtigung von (1.21) und (1.7) herzuleiten. Man ergänze das Dreieck zum Parallelogramm und bilde die Diagonalvektoren. Mit Hilfe des skalaren Produkts ist zu zeigen, daß die Diagonalen eines Rhombus, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, aufeinander senkrecht stehen.

Das Skalarprodukt hat ursprünglich durch den Begriff der technischen *Arbeit* $W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}$ Eingang in die Anwendungen gefunden. Wegen

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{f}| \cos (\mathbf{f}, \mathbf{s})\, |\mathbf{s}| = |\mathbf{s}| \cos (\mathbf{s}, \mathbf{f})\, |\mathbf{f}|$$

ist die Arbeit gleich der skalaren Projektion des Kraftvektors $\mathbf{f}$ in Richtung des Weges mal Weglänge oder auch gleich der skalaren Projektion des Wegvektors $\mathbf{s}$ auf die Kraftrichtung mal Größe der Kraft. „Größe der Kraft" ist gleichbedeutend mit der Norm des Kraftvektors. Von gleicher physikalischer Dimension ist das *Drehmoment*. Es stellt aber einen Vektor $\mathbf{M}$ dar mit folgenden Bestimmungsgrößen: Betrag des Vektors als Größe des Drehmoments „Kraft mal Hebelarm", Richtung des Vektors in Richtung der momentanen Drehachse und Richtungssinn des Vektors, orientiert nach dem Drehsinn. Man schreibt $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{f}$ und benutzt das Zeichen $\times$ als Symbol für die vektorielle Multiplikation.

Das *vektorielle Produkt* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ wollen wir zunächst geometrisch einführen. Die eigentlichen Vektoren $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ werden in einem beliebigen Raumpunkt abgetragen und zu einem Parallelogramm ergänzt. Der positive *Flächeninhalt des Parallelogramms* ist $|\mathbf{u}\|\mathbf{v}\| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})| > 0$, wenn die Vektoren nicht parallel gerichtet sind. Die Ebene des Parallelogramms liegt aber im allgemeinen schräg zu den Koordinatenachsen. Der Betrag des Vektors $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sei

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})|. \tag{1.23}$$

Wir definieren jetzt den *Normaleneinheitsvektor* $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bezüglich des vektoriellen Produkts $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Der Vektor $\mathbf{n}$ hat die Norm $|\mathbf{n}| = 1$ und die Richtung der Normalen zur Parallelogrammebene, die von den Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannt wird. Der Richtungssinn des Normaleneinheitsvektors $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ wird so definiert, daß die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (R) bilden. Damit ist das *vektorielle Produkt in der koordinatenfreien Darstellung*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})|\,\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{1.24}$$

vollständig definiert. Diese geometrische Konstruktion ist offenbar vom speziellen KS unabhängig.

Satz 1.5: *Sind* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *Tensoren 1. Stufe, so ist der den Vektoren* $\mathbf{u}$ *und* $\mathbf{v}$ *nach* (1.24) *zugeordnete Vektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ein Tensor 1. Stufe, während* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *nach* (1.21) *einen invarianten Skalar, also einen Tensor nullter Stufe darstellt.*

Ein physikalisches Beispiel für ein vektorielles Produkt, das *nicht* mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ gebildet wird, ist der Poyntingsche Vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der elektromagnetischen Energiestrahlung, wo $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ die Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke bedeuten.

Wegen

$$\mathbf{n}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

gilt nach (1.24) das *Vertauschungsgesetz*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \tag{1.25}$$

das auch „alternierendes Kommutativgesetz“ genannt wird, siehe auch die Bilder 1.3a und 1.3b.

Wir erinnern an das *Assoziativgesetz*

$$\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}), \tag{1.26}$$

wo λ einen skalaren Faktor bezeichnet, und an das *Distributivgesetz*

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}). \tag{1.27}$$

Analog gelten die Gesetze

$$\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}), \tag{1.28}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \tag{1.29}$$

bei skalarer Multiplikation. Ein assoziatives Gesetz der Form $\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) \circ \mathbf{w}$ gibt es weder bei skalarer noch bei vektorieller Multiplikation.

Von grundlegender Bedeutung ist der nach Band 13 bekannte *Verbindungssatz* (Entwicklungssatz), den wir im Abschnitt 2.4. mit Hilfe der „Strukturformel" beweisen werden:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{w} \tag{1.30}$$

bzw.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}.$$

Aus (1.30) folgt sofort, daß im allgemeinen

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$

gelten muß.

Es seien $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, wenn $\mathbf{o} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$ den *Nullvektor* bezeichnet. Dann folgt nach (1.21) aus $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, daß die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufeinander senkrecht stehen, und nach (1.24) aus $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{o}$, daß sie parallel gerichtet sind. Diese Aussagen sind bei gleicher Voraussetzung umkehrbar als *Orthogonalitäts-* und *Kollinearitätsbedingung*.

Beispiel 1.5: Bei der Drehung eines starren Körpers um eine feststehende Achse bewegt sich ein Massenpunkt P auf einem Kreis mit dem tangential gerichteten Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ in einer Kreisebene senkrecht zur Drehachse. Der Ursprung des KS wird auf der Drehachse angenommen. Sind r der Kreisradius, M der Mittelpunkt des Kreises und ω die *Winkelgeschwindigkeit* der Kreisbewegung, so können wir in Bild 1.4 die Vektoren $\overrightarrow{MP} = \mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}$, $\mathbf{v} = r\omega\mathbf{t}$ und $\mathbf{u} = \omega\mathbf{a}^0$ definieren. Hier sind $\mathbf{a}^0$ der zum Achsenvektor $\mathbf{a}$ und $\mathbf{r}^0$ der zum Radiusvektor $\mathbf{r}$ gehörige Einheitsvektor sowie $\mathbf{t}$ der Tangenteneinheitsvektor der Kreisbahn. Der Vektor $\mathbf{a}$ wird so orientiert, daß bei der Drehbewegung des Punktes P und seiner gleichzeitigen fiktiven Fortbewegung in gleichsinniger Richtung von $\mathbf{a}^0$ eine Schraubenlinie entsteht, die zu einer Rechtsschraube gehört.

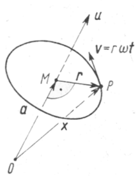


Bild 1.4:
Drehbewegung
eines Massenpunktes

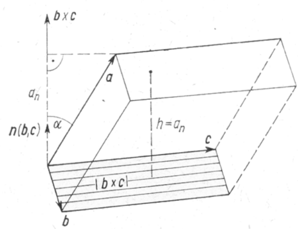


Bild 1.5:
Spatvolumen: $[\mathbf{bca}] = [\mathbf{abc}]$

Damit definiert man den *Drehvektor* als Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \omega\mathbf{a}^0. \tag{1.31}$$

In Bild 1.4 sieht man auf Grund dieser Festlegung die Richtungsbeziehung der eingeführten Einheitsvektoren:

$$\mathbf{r}^0 \times \mathbf{t} = \mathbf{a}^0. \tag{1.32}$$

Beispiel 1.6: Nach Beispiel 1.5 soll die physikalisch wichtige Formel

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} \tag{1.33}$$

mittels (1.31) und (1.32) bewiesen werden. Nach Bild 1.4 ist der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{r}$. Wir benutzen (1.33) und berechnen

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\mathbf{a} + \mathbf{r}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = \mathbf{u} \times \mathbf{r},$$

da die Vektoren **u** und **a** **parallel** gerichtet sind. Wird der *Verbindungssatz* (1.30) herangezogen, so folgt

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{u} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{r} = \mathbf{r}^2\mathbf{u},$$

da die Vektoren **r** und **u** **orthogonal** sind. Aus der letzten Gleichung erhalten wir

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2}(r\mathbf{r}^0 \times r\omega\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{r}^0 \times \mathbf{t})$$

und mit (1.32) die schon bekannte Definitionsgleichung (1.31) $\mathbf{u} = \omega\mathbf{a}^0$. Damit ist die Ausgangsformel (1.33) $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{x}$ bewiesen.

1.4. Invarianz des Spatproduktes

Es wäre nützlich, ein Kriterium zu besitzen, mit dem man feststellen kann, ob drei gegebene nicht komplanare Vektoren **a**, **b**, **c** des Raumes R^3 in dieser Reihenfolge ein (R) oder (L) bilden. Dafür tragen wir die Vektoren **a**, **b**, **c** von einem beliebigen Punkt ab und ergänzen das Vektorgerüst nach Bild 1.5 zu einem Parallelepiped, das auch *Spat* genannt wird. Die vorzeichenbehaftete Maßzahl des zugehörigen Spatvolumens bezeichnen wir mit $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Das Zeichen $\hat{V}$ soll später als Operator gedeutet werden.

Nach Bild 1.5 können wir das *Spatvolumen* als Grundfläche mal Höhe berechnen, z. B. mit der schraffierten Grundfläche $|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,|\sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})|$ und der Höhe $h = a_n$, wo $a_n = |\mathbf{a}| \cos\alpha$ die skalare Projektion des Vektors **a** auf die Normale zu der von den Vektoren **b**, **c** aufgespannten Parallelogrammebene bedeutet. Dann entsteht

$$\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,|\sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})|\,|\mathbf{a}| \cos\alpha. \tag{1.34}$$

Dieser Ausdruck ist aber wegen des Faktors $\cos\alpha$ *vorzeichenbehaftet*. Mit $\mathbf{f} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ wird $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{f})$, also

$$\begin{aligned} \hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{f}) \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{f}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{f}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet

$$\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{$\overline{1.34}$}$$

Das hier auftretende gemischte Produkt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ wird auf Grund der geometrischen Herleitung *Spatprodukt* genannt. In der Formulierung (1.34) bestimmt $a_n = |\mathbf{a}| \cos\alpha$ das Vorzeichen des Spatproduktes, nämlich $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \gtrless 0$, falls $\cos\alpha \gtrless 0$ ist. Wenn $\cos\alpha > 0$, also $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, dann handelt es sich wie in Bild 1.5 um ein Rechtssystem. Ist aber $\cos\alpha < 0$, also $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqq \pi$, dann bilden die Vektoren **a**, **b**, **c** in dieser Reihenfolge ein Linkssystem. Damit haben wir das gewünschte *Kriterium:*

die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein (R) bzw. (L) genau dann, wenn $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ bzw. $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$ ist. Sind die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ komplanar, so können sie kein räumliches Gebilde erzeugen; der Rauminhalt ist gleich null. Wir fügen hinzu: die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sind genau dann linear unabhängig (nicht komplanar), wenn $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ ist; sie sind genau dann linear abhängig (komplanar), wenn $\hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ ist (vgl. auch Bd. 13, 2.2.7.).

Auf Grund der Vereinbarung 1.1 gilt

$$\hat{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \hat{V}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = \hat{V}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1,$$

$$\hat{V}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \hat{V}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \hat{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -1,$$

wobei es sich dem Betrage nach um die Maßzahl des Volumens eines Würfels mit den Kantenlängen 1 handelt. Zum Beispiel bilden die Vektoren $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in dieser Reihenfolge ein (R) wegen $\hat{V}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 > 0$, aber in der Reihenfolge $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2$ ein (L) wegen $\hat{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -1 < 0$. Mit dem Vektortripel $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k$ läßt sich kein räumliches Gebilde erzeugen, wenn zwei oder drei Vektoren gleich sind, d. h. es gilt $\hat{V}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$, wenn zwei oder drei Indizes gleich sind.

Wir führen die Komponentendarstellungen der Vektoren

$$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = b_k\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{c} = c_l\mathbf{e}_l$$

ein. Nur unter der Voraussetzung, daß die kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in dieser Reihenfolge gemäß $\hat{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ ein Rechtssystem bilden, gelten die bekannten Zerlegungsformeln

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathbf{e}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathbf{e}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.35}$$

Man hat sich entschlossen, für das *Spatprodukt* ein eigenes *Symbol* $[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ einzuführen. In der eckigen Klammer werden *keine* Beistriche gesetzt; es handelt sich um eine neue *Produktdefinition:*

$$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \tag{1.36}$$

Mittels (1.35) erhält man bei Berücksichtigung von Determinanteneigenschaften die Beziehungen (1.36) und

$$\begin{aligned} &[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}] \\ &= -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}] = -[\mathbf{acb}]. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Von wesentlicher Bedeutung ist der Zusammenhang zwischen der Maßzahl des *Spatvolumens* und dem *Spatprodukt* gemäß

$$\hat{V}(\mathbf{abc}) = [\mathbf{abc}] \tag{1.38}$$

sowie die Koordinatendarstellung (1.35) bei Beachtung der Vereinbarung 1.1.

Die Invarianz des Spatprodukts ist aus der geometrischen Konstruktion nach Bild 1.5 und aus (1.34) ersichtlich, wo nur Längen und Winkel eingehen.

Satz 1.6: *Wird das Spatprodukt* $[\mathbf{uvw}]$ *mit den einstufigen Tensoren* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *gebildet, so ist es (gegenüber der Gruppe der orthogonalen Koordinatentransformationen) invariant:*

$$[\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{w}}] = [\mathbf{uvw}].$$

[**uvw**] *ist ein Tensor nullter Stufe. Skalarprodukt* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *und Spatprodukt* [**uvw**] *werden auch* (*skalare*) **Fundamentalinvariante** *genannt.*

Bemerkung 1.1: Aus den verallgemeinerten Formeln des Kapitels 7 ergeben sich die Darstellungen

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & v_1 & w_1 \\ \mathbf{e}_2 & v_2 & w_2 \\ \mathbf{e}_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \tag{1.35a}$$

$$[\mathbf{uvw}] = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.35b}$$

mit dem „Maßfaktor" $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]$. Wenn wir gegen die Vereinbarung 1.1 verstoßen und ein **Linkssystem** $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ zugrunde legen, sind die Formeln (1.35a, b) mit $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = -1$ anzuwenden. Wir wollen aber die Vereinbarung 1.1 einhalten, indem wir im folgenden, wenn nichts anderes gesagt wird, von einem *Rechtssystem* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ausgehen, so daß die Formeln (1.35) mit $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = +1$ gelten.

Es sei aber bemerkt, daß das Produkt

$$[\mathbf{abc}]\,[\mathbf{uvw}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix} \tag{1.39}$$

zweier Spatprodukte wegen $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]^2 = 1$ mit (1.35b) verträglich ist. Setzen wir nach (1.13)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{e}}_1 = c_{1k}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{e}}_2 = c_{2k}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{w} = \bar{\mathbf{e}}_3 = c_{3k}\mathbf{e}_k,$$

also $u_k = c_{1k}$, $v_k = c_{2k}$, $w_k = c_{3k}$, so folgt aus (1.35b) die Beziehung

$$[\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\,\|c_{ik}\|. \tag{1.35c}$$

Gehen wir von einem Rechtssystem mit $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$ aus, so wird nach (1.35c) auch $[\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3] = 1$, wenn $\|c_{ik}\| = 1$ ist; es handelt sich um eine Drehung des Bezugssystems, wobei ein (R) wieder in ein (R) übergeht. Ist aber $\|c_{ik}\| = -1$, so geht $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$ nach (1.35c) in $[\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3] = -1$, also ein Rechtssystem in ein Linkssystem über; es handelt sich um eine Spiegelung. Die Determinante $\|c_{ik}\|$ der Transformationsmatrix $\underline{C}$ entscheidet bei orthogonalen Transformationen, ob der Übergang von B auf $\bar{B}$ durch eine Drehung im Falle $\|c_{ik}\| = +1$ oder durch eine Umlegung des KS im Falle $\|c_{ik}\| = -1$ vollzogen wird. Damit ist Satz 1.4 bewiesen.

Aufgabe 1.4: Mittels (1.35c) ist nachzuweisen, daß das Kriterium (1.19) auch dann zutrifft, wenn man von einem Linkssystem ausgeht.

Aufgabe 1.5: Eine Ebene wird von zwei konstanten Vektoren **p** und **q** aufgespannt, die von dem festen Punkt A der Ebene abgetragen werden. Der laufende Punkt P der Ebene wird mit zwei variablen Parametern λ und μ erfaßt: $\overrightarrow{AP} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$. Man benutze die Vektoren $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}$ und $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$, so daß $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{r}$ gilt. Man begründe, daß die Ebenengleichung in der Form

$$\hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = 0, \quad \text{also} \quad \hat{V}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \hat{V}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$$

dargestellt werden kann. Man leite daraus die allgemeine Gleichung und die Abschnittsgleichung der Ebene her.

Aufgabe 1.6: Nach Aufgabe 1.5 führe man den *Stellungsvektor* $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$ der Ebene ein und leite die Hessesche Normalform ab.

Aufgabe 1.7: Mit Hilfe des Verbindungssatzes (1.30) leite man die folgenden Vektorformeln her:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{acd}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{bcd}]\,\mathbf{a} \tag{1.40a}$$

und

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\,\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\,\mathbf{d}. \tag{1.40b}$$

Welche Richtung hat der Vektor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$? Es folgt die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ gemäß

$$[\mathbf{abc}]\,\mathbf{d} = [\mathbf{bcd}]\,\mathbf{a} + [\mathbf{cda}]\,\mathbf{b} + [\mathbf{dab}]\,\mathbf{c}. \tag{1.40c}$$

Aufgabe 1.8: Man beweise die *Umwandlungsformel*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

mittels $\mathbf{f} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{abf}]$ und (1.30). Welche Beziehung ergibt (1.41) für $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$? Zur Lösung der Übungsaufgaben nehme man Band 13 zur Hilfe! Wir vervollständigen die „Formelsammlung" mit

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = [\mathbf{acd}]\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \tag{1.42a}$$

und

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{a} \times \mathbf{d}). \tag{1.42b}$$

Durch Umbezeichnungen folgt aus den letzten beiden Gleichungen die Beziehung

$$[\mathbf{abc}]\,\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,(\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\,(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}). \tag{1.42c}$$

1.5. Multilinearformen. Tensoren *n*-ter Stufe

Mit „Zahlen" sind hier immer reelle Zahlen gemeint, d. h., alle Zahlensymbole mit Ausnahme der imaginären Einheit bezeichnen reelle Zahlen.

Definition 1.4: *Ein* **Funktional** *ist ein Operator, der jedem Element seines Definitionsbereiches eindeutig eine Zahl zuordnet. Der Definitionsbereich des Funktionals $\hat{L}$ sei die Menge der Vektoren des euklidischen Vektorraumes R^3.*

Definition 1.5: *Ein* **lineares Funktional** *$\hat{L}$ ist* **homogen** *(vom 1. Grade) gemäß*

$$\hat{L}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \hat{L}(\mathbf{u}),$$

wenn λ eine Zahl bedeutet, und **additiv** *gemäß*

$$\hat{L}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{L}(\mathbf{u}) + \hat{L}(\mathbf{v}).$$

Die **Linearität** *des Funktionals $\hat{L}$ wird mit Zahlen λ und μ durch die Eigenschaft*

$$\hat{L}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda \hat{L}(\mathbf{u}) + \mu \hat{L}(\mathbf{v}) \tag{1.43}$$

gekennzeichnet.

Für multilineare Funktionale benutzen wir einheitlich das Operatorzeichen $\hat{L}$, obwohl $\hat{L}$ bezüglich $\hat{L}(\mathbf{u})$, $\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, ... jeweils verschiedene Bedeutung hat.

Definitionen 1.6: *Ein* **bilineares Funktional** $\hat{L}$ *wird mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} \hat{L}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{v}) &= \lambda\hat{L}(\mathbf{a}, \mathbf{v}) + \mu\hat{L}(\mathbf{b}, \mathbf{v}), \\ \hat{L}(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) &= \lambda\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{a}) + \mu\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{1.44}$$

charakterisiert. Ein **trilineares Funktional** $\hat{L}$ *wird mit den Eigenschaften*

$$\begin{aligned} \hat{L}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \lambda\hat{L}(\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mu\hat{L}(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ \hat{L}(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \mathbf{w}) &= \lambda\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{w}) + \mu\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{w}), \\ \hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) &= \lambda\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) + \mu\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{b}) \end{aligned} \tag{1.45}$$

gekennzeichnet.

Ist nun $\hat{L}$ ein einfach oder mehrfach lineares Funktional, das je nach Definition jedem Vektor, jedem Vektorpaar, jedem Vektortripel, ... des Vektorraumes R^3 immer einen bestimmten Zahlwert zuweist, speziell

$$\hat{L}(\mathbf{e}_k) = a_k, \quad \hat{L}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ik}, \quad \hat{L}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_{ijk} \tag{1.46}$$

usw., so erhalten wir wegen der Homogenität des linearen bzw. multilinearen Operators $\hat{L}$ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{u}) &= \hat{L}(u_k\mathbf{e}_k) = u_k\hat{L}(\mathbf{e}_k) = u_k a_k, \\ \hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \hat{L}(u_i\mathbf{e}_i, v_k\mathbf{e}_k) = u_i v_k\hat{L}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = u_i v_k a_{ik}, \\ \hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \hat{L}(u_i\mathbf{e}_i, v_j\mathbf{e}_j, w_k\mathbf{e}_k) = u_i v_j w_k\hat{L}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = u_i v_j w_k a_{ijk}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\hat{L}(\mathbf{u}) = a_k u_k, \quad \hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{ik} u_i v_k, \\ &\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_{ijk} u_i v_j w_k \end{aligned} \tag{1.47}$$

usw. Die sich jeweils rechts ergebenden Skalare von (1.47) heißen nach der Reihe *Linearform*, *Bilinearform*, *Trilinearform*, allgemein *Multilinearform*. Eine Multilinearform $\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots)$ ist in jedem ihrer Argumente $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$ linear.

Satz 1.7: *Bei Übergang von einem kartesischen KS B zu einem anderen $\bar{B}$ bleibt eine Multilinearform genau dann* **invariant**, *wenn sie vollständig mit Tensorkoordinaten gebildet wird.*

Man sagt dann, daß der Tensor 1., 2., 3. Stufe mit den Koordinaten a_k, a_{ik}, a_{ijk} respektive die Linearform, Bilinearform, Trilinearform erzeugt. Die Tensorkoordinaten müssen sich bei Übergang von B auf $\bar{B}$ nach bestimmten Gesetzen transformieren, um die Invarianz der Multilinearformen zu sichern. Diese *Transformationsgesetze* für die Koordinaten a_k, a_{ik}, a_{ijk} eines Tensors 1., 2., 3. Stufe lauten respektive

$$\bar{a}_k = c_{kl}a_l, \qquad a_k = c_{lk}\bar{a}_l, \tag{1.14}$$

$$\bar{a}_{ik} = c_{ij}c_{kl}a_{jl}, \qquad a_{ik} = c_{ji}c_{lk}\bar{a}_{jl}, \tag{1.48}$$

$$\bar{a}_{ijk} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}a_{pqr}, \qquad a_{ijk} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}\bar{a}_{pqr}. \tag{1.49}$$

Um Satz 1.7 zu beweisen, benutzen wir die vorstehenden Transformationsgesetze und (1.16). Zunächst wird

$$\bar{a}_k\bar{u}_k = c_{kl}a_l c_{km}u_m = c_{kl}c_{km}a_l u_m = \delta_{lm}a_l u_m = a_l u_l\,,$$

also

$$\bar{a}_k\bar{u}_k = a_k u_k\,. \tag{1.50}$$

Aus (1.50) liest man die *Invarianz des Skalarprodukts* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}$ ab, sofern es mit Tensoren 1. Stufe gebildet wird.

Die entsprechende Rechnung zeigt die Invarianz der *Bilinearform*, sofern sie mit Tensoren 1. und 2. Stufe nach (1.14) und (1.48) erzeugt wird:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{ik}\bar{u}_i\bar{v}_k &= c_{ij}c_{kl}a_{jl}c_{im}u_m c_{kn}v_n = a_{jl}u_m v_n c_{ij}c_{im}c_{kl}c_{kn}\\ &= a_{jl}u_m v_n\delta_{jm}\delta_{ln} = a_{mn}u_m v_n\,,\end{aligned}$$

also

$$\bar{a}_{ik}\bar{u}_i\bar{v}_k = a_{ik}u_i v_k\,. \tag{1.51}$$

Wird die *Trilinearform* nach (1.14) und (1.49) mit Tensoren 1. und 3. Stufe gebildet, so folgt

$$\begin{aligned}\bar{a}_{ijk}\bar{u}_i\bar{v}_j\bar{w}_k &= c_{ip}c_{jq}c_{kr}a_{pqr}c_{il}u_l c_{jm}v_m c_{kn}w_n\\ &= a_{pqr}u_l v_m w_n c_{ip}c_{il}c_{jq}c_{jm}c_{kr}c_{kn}\\ &= a_{pqr}u_l v_m w_n\delta_{pl}\delta_{qm}\delta_{rn} = a_{lmn}u_l v_m w_n\,,\end{aligned}$$

also

$$\bar{a}_{ijk}\bar{u}_i\bar{v}_j\bar{w}_k = a_{ijk}u_i v_j w_k\,. \tag{1.52}$$

Die Formulierung „genau dann“ in Satz 1.7 besagt, daß der Satz umkehrbar ist. In der Tat können wir die Beweisführung umkehren, indem wir die Invarianz der Multilinearformen gemäß (1.50), (1.51), (1.52) voraussetzen und daraus die Transformationsgesetze (1.14), (1.48), (1.49) für die Koordinaten eines Tensors 1., 2., 3. Stufe herleiten.

Jetzt können wir den Tensorbegriff bezüglich der Gruppe der orthogonalen Transformationen endgültig fassen. Da jeder Index von 1 bis 3 laufen kann, gibt es $3^1 = 3$ Zahlen a_k, $3^2 = 9$ Zahlen a_{ik}, $3^3 = 27$ Zahlen a_{ijk}, usw.

Definition 1.7: *Ein Tensor n-ter Stufe ist ein System von* 3^n *Zahlen, seinen Koordinaten* $a_{i_1 i_2\cdots i_n}$, *die sich bei einer Drehung oder Umlegung des kartesischen* KS – *in Verallgemeinerung von* (1.49) – *nach dem Gesetz*

$$\bar{a}_{i_1 i_2\dots i_n} = c_{i_1k_1}c_{i_2k_2}\cdots c_{i_nk_n}a_{k_1k_2\dots k_n}$$

bzw.

$$a_{i_1 i_2\dots i_n} = c_{k_1i_1}c_{k_2i_2}\cdots c_{k_ni_n}\bar{a}_{k_1k_2\dots k_n} \tag{1.53}$$

transformieren. Die Transformationskoeffizienten c_{ik} *sind in Gleichung* (1.12) *definiert.*

Ein Tensor 2. bzw. 3. Stufe ist also ein System von 9 bzw. 27 Zahlen, seinen Koordinaten a_{ik} bzw. a_{ijk}, die sich bei einer orthogonalen Transformation des kartesischen KS nach dem Gesetz (1.48) bzw. (1.49) transformieren. Ein Vektor ist nur dann ein Tensor 1. Stufe, wenn sich seine Koordinaten nach dem Gesetz (1.14) transformieren. Ein *Skalar* wird hier als Tensor nullter Stufe, nämlich als Invariante mit nur einer Bestimmungsgröße ($3^0 = 1$) eingereiht. Beispiele sind das Skalarprodukt und Spatprodukt. Eine beliebige Zahl gehört nicht in diese Kategorie.

Bezüglich der Gruppe der orthogonalen Transformationen ist auch der variable *Ortsvektor* $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ ein Tensor 1. Stufe. Der Ortsvektor ist an den Ursprung des KS gebunden, der bei orthogonalen Transformationen nicht verschoben wird.

Beispiel 1.7: Hessesche Normalform der Ebene. Die Gleichung $a_k x_k = d$ stellt eine Ebene im R^3 dar, wenn das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_k x_k$ invariant ist. Der die Linearform erzeugende Vektor $\mathbf{a} = a_k\mathbf{e}_k$ sei der normierte Stellungsvektor der Ebene, $|\mathbf{a}| = 1$. Er ist senkrecht zur Ebene gerichtet. Sein Richtungssinn kennzeichnet *die* Seite eines Blattes, die dem Nullpunkt abgewandt (zugewandt) ist, wenn $d > 0$ ($d < 0$) ist, wo $|d|$ den Abstand der Ebene vom Nullpunkt bedeutet. Die Ebene ist ein geometrisches Objekt, das nicht von der zufälligen Wahl des KS abhängt. Folglich sind die a_k Koordinaten eines Tensors 1. Stufe.

Beispiel 1.8: Hauptachsentransformation. Setzen wir in der Bilinearform $a_{ik}x_i y_k$ die Ortsvektoren gleich, $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i = \mathbf{y} = y_k\mathbf{e}_k$, so entsteht die *quadratische Form* $a_{ik}x_i x_k$, wo noch $a_{ki} = a_{ik}$ und $\|a_{ik}\| \neq 0$ vorausgesetzt werden soll. Die Gleichung $a_{ik}x_i x_k = 1$ beschreibt eine Mittelpunktsfläche 2. Grades, wenn die quadratische Form $a_{ik}x_i x_k$ von einem Tensor 2. Stufe mit den Koordinaten a_{ik} erzeugt wird, so daß bei beliebiger Drehung des KS gilt

$$\bar{a}_{ik}\bar{x}_i\bar{x}_k = a_{ik}x_i x_k. \qquad (1.54)$$

Durch eine geeignete Drehung des KS gelingt es, die *Hauptachsenfom*

$$\lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 + \lambda_3\bar{x}_3^2 = 1 \qquad (1.55)$$

der Flächengleichung herzustellen, so daß

$$a_{ik}x_i x_k = \lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 + \lambda_3\bar{x}_3^2$$

gelten muß, wenn $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ jetzt die Koordinaten im *Hauptachsensystem* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ bezeichnen. Sind die positiven Eigenwerte $\lambda_i = 1/a_i^2$ des Hauptachsenproblems sämtlich verschieden, so beschreibt die Gl. (1.55) ein dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a_1, a_2, a_3 im Hauptachsensystem, während in einem beliebigen dazu gedrehten KS die gemischten Glieder in der Gleichung des Ellipsoids

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 1 \qquad (1.56)$$

auftreten. Diese Gleichung in der Kurzform

$$a_{ik}x_i x_k = 1 \qquad (1.57)$$

kann nur dann ein geometrisches Objekt (z. B. ein Ellipsoid) beschreiben, wenn die Koeffizienten a_{ik} der quadratischen Form $a_{ik}x_i x_k$ Koordinaten eines Tensors 2. Stufe sind.

Beispiel 1.9: Trilineares alternierendes Funktional $\hat{V}$. Entsprechend (1.45) bis (1.47) sei $\hat{V}$ ein trilineares Funktional, das jedem geordneten Vektortripel $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ einen bestimmten Zahlwert zuweist, und zwar nach der Vorschrift

$$\hat{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{uvw}]. \qquad (1.38)$$

Nach Vereinbarung 1.1 wird

$$\hat{V}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$$

vorausgesetzt. Mit der Bezeichnung $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k] = \varepsilon_{ijk}$ lautet die Vorschrift (1.38) speziell

$$\hat{V}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \varepsilon_{ijk}. \tag{1.58}$$

Es folgt

$$\hat{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \hat{V}(u_i\mathbf{e}_i, v_j\mathbf{e}_j, w_k\mathbf{e}_k)$$
$$= u_i v_j w_k \hat{V}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = u_i v_j w_k \varepsilon_{ijk},$$

also nach (1.38)

$$\hat{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]. \tag{1.59}$$

Da das Spatprodukt einen Skalar (Tensor nullter Stufe) darstellt, muß die Trilinearform $\varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k$ invariant sein. Das ist nur möglich, wenn die ε_{ijk} Koordinaten eines Tensors 3. Stufe sind, den wir **E**-Tensor nennen wollen.

Wird die Determinantendarstellung (1.35) herangezogen und die Sarrussche Regel angewandt, dann können wir die Bedingung (1.59) auswerten:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_1w_2v_3 - v_1u_2w_3 - w_1v_2u_3$$
$$= \varepsilon_{123}u_1v_2w_3 + \varepsilon_{231}u_2v_3w_1 + \varepsilon_{312}u_3v_1w_2$$
$$+ \varepsilon_{213}u_2v_1w_3 + \varepsilon_{321}u_3v_2w_1 + \varepsilon_{132}u_1v_3w_2.$$

Der Vergleich liefert

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \end{aligned} \tag{1.60}$$

$\varepsilon_{ijk} = 0$, wenn zwei oder drei Indizes gleichzahlig sind. ε_{ijk} wechselt das Vorzeichen, wenn man zwei beliebige Indizes vertauscht. Diese Eigenschaft heißt „*alternierend*".

Aufgabe 1.9: Man bestätige (1.60) mittels (1.34) in geometrischer Deutung.

2. Tensoralgebra mit kartesischer Basis

2.1. Tensoroperationen

Addition: Bekanntlich können in der Matrizenrechnung nur Matrizen gleichen Formats addiert bzw. subtrahiert werden, indem man die entsprechenden Elemente (mit gleichem Standort im Matrizenschema) addiert bzw. subtrahiert. Analog können nur *gleichartige* Tensoren, nämlich gleichstufige Tensoren desselben Raumes, addiert bzw. subtrahiert werden, indem man die entsprechenden Koordinaten (mit gleicher Indizierung) addiert bzw. subtrahiert. Der *Summentensor* mit den Koordinaten

$$s_{i_1 i_2 \ldots i_n} = a_{i_1 i_2 \ldots i_n} + b_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{2.1}$$

hat die gleiche Stufe wie die Summanden. Ein Tensor, dessen Koordinaten sämtlich gleich der Zahl Null sind, heißt *Nulltensor*. Ist die Differenz zweier gleichartiger Tensoren gleich dem Nulltensor, so sind die beiden Tensoren gleich. Wir wollen uns bis auf weiteres nur auf den Raum R^3 beziehen.

Multiplikation: Das allgemeine oder tensorielle Produkt zweier Tensoren wird einfach *Produkt* genannt. Es wird so definiert, daß Tensoren beliebiger Stufe multipliziert werden können. (Spezialisierte Produktbildungen erhalten je ein Beiwort wie z. B. skalares oder inneres Produkt.)

Definition 2.1: *Das* **Produkt** *zweier Tensoren wird so gebildet, daß man alle Koordinaten des Linksfaktors m-ter Stufe mit allen Koordinaten des Rechtsfaktors n-ter Stufe, also* 3^m *Zahlen mit* 3^n *Zahlen bei Beachtung der Reihenfolge multipliziert, was ein System von* 3^{m+n} *Koordinaten für den* **Produkttensor** *ergibt:*

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_m j_1 j_2 \ldots j_n} = a_{i_1 i_2 \ldots i_m} b_{j_1 j_2 \ldots j_n}. \tag{2.2}$$

Als *Multiplikationssatz* bezeichnen wir den

Satz 2.1: *Das Produkt eines m-stufigen mit einem n-stufigen Tensor ergibt einen Tensor* $(m + n)$*ter Stufe.*

Beispiel 2.1: Das Produkt eines Tensors 1. Stufe mit einem Tensor 2. Stufe sollte also einen Tensor 3. Stufe gemäß $u_{ik}v_l = w_{ikl}$ ergeben. Wir überprüfen den Tensorcharakter des Produktes mit Hilfe der Transformationsgesetze (1.14) und (1.48). Die Invarianzforderung wird mit

$$\bar{u}_{ik}\bar{v}_l = c_{ij}c_{kp}u_{jp}c_{lq}v_q = c_{ij}c_{kp}c_{lq}u_{jp}v_q = c_{ij}c_{kp}c_{lq}w_{jpq}$$

erfüllt, falls

$$\bar{w}_{ikl} = c_{ij}c_{kp}c_{lq}w_{jpq}$$

gilt. Das ist aber das Transformationsgesetz (1.49) für einen Tensor 3. Stufe. Den allgemeinen Beweis des Satzes 2.1 wollen wir uns schenken.

Als *Divisionssatz* bezeichnen wir den

Satz 2.2: *Von den beiden Faktoren eines Produktes seien ein Faktor und das Produkt Tensoren. Dann ist auch der andere Faktor ein Tensor.*

Dieser Satz bleibt auch gültig, wenn man zu speziellen Produktbildungen übergeht. Er folgt aus Satz 2.1.

Überschiebung und Verjüngung. Setzt man im Produkt zweier Tensoren einen Index des Linksfaktors gleich einem Index des Rechtsfaktors, etwa $j = k$, so nennt man diese Maßnahme *Überschiebung* der beiden Tensoren nach j und k. Eine Überschiebung erniedrigt die Stufe des Produkttensors um 2. Setzt man in ein und demselben Tensor der Stufe $n \geqq 2$ zwei Indizes gleich, so spricht man von einer *Verjüngung*, wobei sich die Stufe des Tensors um 2 erniedrigt. Daß durch Überschiebung oder Verjüngung wieder Tensoren entstehen, muß noch gezeigt werden.

Beispiel 2.2: Durch Überschiebung nach j und p geht

$$u_{ijk}v_{pq} = w_{ijkpq} \quad \text{in} \quad u_{ijk}v_{jq} = \omega_{ikq},$$

also ein Tensor 5. Stufe in einen Tensor 3. Stufe über. Der Tensor 3. Stufe mit den Koordinaten u_{ijk} wird in der Form $u_{iik} = s_k$ zu einem Tensor 1. Stufe mit den Koordinaten $s_k = u_{11k} + u_{22k} + u_{33k}$ verjüngt. –

Zum gleichen Resultat gelangen wir *durch Überschiebung mit einem Kroneckersymbol:*

$$\delta_{jp}u_{ijk}v_{pq} = \delta_{jp}w_{ijkpq} = u_{ijk}v_{jq} = \omega_{ikq}, \quad \delta_{ij}u_{ijk} = u_{iik} = s_k. \tag{2.3}$$

Durch Überschiebung mit δ_{ik} entstehen aber nur dann in beiden Fällen wieder Tensoren, wenn die Zahlen δ_{ik} Koordinaten eines Tensors 2. Stufe sind.

Satz 2.3: *Die δ_{ik} sind Koordinaten eines Tensors 2. Stufe, den wir* **Einheitstensor** *nennen. Durch Überschiebung mit δ_{ik} (nach i und k) geht ein Tensor oder ein Produkttensor wieder in einen Tensor über, dessen Stufe um 2 erniedrigt ist.*

Beweis: Nach (1.9) gilt $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_k = \delta_{ik}$, denn die durch Drehung oder Umlegung des kartesischen KS aus $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ hervorgehenden Basisvektoren $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ stehen wieder paarweise aufeinander senkrecht und haben einzeln die Länge 1 beibehalten, z. B. $\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 = 0$, $\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1^2 = 1$. Ursprünglich gilt aber $\bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\delta}_{ik}$ neben $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$. Es folgt

$$\delta_{ik} = \bar{\delta}_{ik}. \tag{2.4}$$

Andererseits sind die Transformationsgesetze (1.48) für die Koordinaten eines Tensors 2. Stufe gemäß

$$\bar{\delta}_{ik} = c_{ij}c_{kl}\delta_{jl} = c_{il}c_{kl} = \delta_{ik} \tag{2.5}$$

nach (1.16) in Übereinstimmung mit (2.4) erfüllt; also gilt Satz 2.3.

Das Produkt zweier Tensoren 1. Stufe hat z. B. die Koordinaten $u_iv_k = w_{ik}$ und heißt (lineare) *Dyade*. Es gilt $u_iv_k = v_ku_i$, aber im allgemeinen $u_iv_k \neq v_iu_k = \omega_{ik}$. Die Dyaden mit den Koordinaten w_{ik} und ω_{ik} sind im allgemeinen verschieden. Das Entsprechende muß für das Produkt zweier Tensoren m-ter und n-ter Stufe festgestellt werden.

Satz 2.4: *Das Produkt zweier Tensoren ist (im allgemeinen)* **nicht kommutativ.**

Die spezielle Dyade mit den Koordinaten v_iv_k stellt eine Ausnahme dar. Der Leser wird vielleicht fragen, warum z. B. $u_{ij}v_{kl}$ und $v_{ij}u_{kl}$ die Koordinaten verschiedener vierstufiger Tensoren sind, da es „doch auf die Wahl der Buchstabenindizes nicht ankomme“ und in beiden Fällen alle 3^4 Koordinaten erfaßt werden. Ein System von Koordinaten bedeutet eine systematische Anordnung der Koordinaten nach Maßgabe der Indizes. Die Wahl der Buchstabenindizes bei $u_{ij}v_{kl}$ ist zunächst willkürlich. Nach Maßgabe der ij, kl denken wir uns alle 3^4 Koordinaten $u_{ij}v_{kl}$ systematisch angeordnet. Dann bedeutet aber $v_{ij}u_{kl}$ eine *andere Anordnung* der 3^4 Zahlen. Am einfachsten ist das Beispiel der a_{ki} verglichen mit dem a_{ik}. Als systematische Anordnung nehmen wir das Matrizenschema. Die Matrix $((a_{ki}))$ ist gegenüber der Matrix $((a_{ik}))$ transponiert. Ursprüngliche und transponierte Matrix sind aber im allgemeinen verschiedene Matrizen.

Definition 2.2: *Die Stufe der Tensoren sei* $\geqq 1$. *Als* **inneres Produkt** *bezeichnen wir die spezielle Überschiebung derart, daß bei gegebener Reihenfolge der beiden Faktoren die innen benachbarten Indizes der Koordinaten gleichgesetzt werden.*

Das innere Produkt der Tensoren mit den Koordinaten u_{ij} und v_{klm} ist $u_{ik}v_{klm}$, um ein Beispiel zu nennen. Die Stufe des inneren Produktes ist um 2 niedriger als die Stufe des (allgemeinen) Produkts zweier Tensoren, im Beispiel $u_{ij}v_{klm}$.

2.2. Tensoren in Komponentendarstellung. Punkttransformationen

Wir haben festgestellt, daß der Mathematiker geometrische Objekte untersucht, die vom speziellen KS unabhängige Bedeutung haben. Der Physiker muß seine Grundgesetze so formulieren, daß sie prinzipiell nicht von dem zufällig benutzten KS abhängen. Die auftretenden physikalischen Größen müssen daher Tensoren sein. Es ist verständlich, daß dem Anwender die Definition 1.7 wenig zusagt, da „eigentlich" nur von Tensorkoordinaten und nicht vom Tensor selbst gesprochen wird, wenn man das Wort „System" überliest. Der Anwender sieht aber insbesondere im Tensor 2. Stufe eine selbständige Größe, nämlich ein (geometrisches oder) physikalisches Objekt 2. Stufe, das selbständige Bedeutung haben sollte. Das bekannteste Beispiel ist der zweistufige Spannungstensor der Mechanik deformierbarer Körper. Bei Definition von Tensoren 1. und 2. Stufe könnte man statt „System" auch „Matrix" sagen. Dann ist ein Tensor 2. Stufe eine Matrix von 9 Zahlen, seinen Koordinaten a_{ik}, die sich bei Übergang von B auf $\bar{B}$ nach (1.48) transformieren. Einem Tensor 2. Stufe kann man also eine Matrix vom Format (3,3) zuordnen. Aber nicht jede quadratische Matrix von 9 Elementen ist ein Tensor 2. Stufe. Das ist nur dann der Fall, wenn man überhaupt von Koordinaten und orthogonalen Koordinatentransformationen sprechen kann und wenn die Transformationsgesetze (1.48) erfüllt sind. Es ist klar, daß wir mit „System" eine systematische Anordnung meinen im Gegensatz zur Systemtheorie, wo man „Systeme" mit Eingang und Ausgang betrachtet.

Da man gelernt hat, die Matrizen als selbständige Größen aufzufassen und sie deswegen in der Matrizenrechnung mit Buchstabensymbolen kennzeichnet, ist es auch erlaubt, einen Tensor zweiter Stufe, etwa den Spannungstensor als selbständige Größe mit *einem* Buchstaben, etwa **S** zu bezeichnen. Daß man Vektoren auch dann mit einem Buchstaben bezeichnen darf, wenn sie Tensoren erster Stufe sind, bedarf keiner Rechtfertigung. Bei Anwendungen genügt der Buchstabe, da die Stufe des Tensors aus dem Zusammenhang gegeben ist. Bei allgemeinen Betrachtungen wird die Stufe des Tensors kenntlich gemacht, z. B. $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(3)}$, $\mathbf{A}^{(4)}$ für einen Tensor 2., 3., 4. Stufe. Speziell sei $\mathbf{0}^{(n)}$ der *Nulltensor* n-ter Stufe.

Wir stellen folgende *Rechengesetze* zusammen:

$$\mathbf{A}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n)} + \mathbf{A}^{(n)}, \tag{I}$$

$$\mathbf{A}^{(n)} + [\mathbf{B}^{(n)} + \mathbf{C}^{(n)}] = [\mathbf{A}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}] + \mathbf{C}^{(n)}, \tag{II}$$

$$\lambda\mathbf{A}^{(n)} + \mu\mathbf{A}^{(n)} = (\lambda + \mu)\,\mathbf{A}^{(n)}, \tag{III}$$

$$\lambda[\mathbf{A}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}] = \lambda\mathbf{A}^{(n)} + \lambda\mathbf{B}^{(n)}. \tag{IV}$$

Für Produkte von Tensoren gelten die Gesetze

$$\lambda[\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{B}^{(m)}] = [\lambda\mathbf{A}^{(n)}]\,\mathbf{B}^{(m)} = \mathbf{A}^{(n)}[\lambda\mathbf{B}^{(m)}], \tag{V}$$

$$\mathbf{A}^{(n)}[\mathbf{B}^{(m)}\mathbf{C}^{(p)}] = [\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{B}^{(m)}]\,\mathbf{C}^{(p)}, \tag{VI}$$

$$\mathbf{A}^{(n)}[\mathbf{B}^{(m)} + \mathbf{C}^{(m)}] = \mathbf{A}^{(n)}\mathbf{B}^{(m)} + \mathbf{A}^{(n)}\mathbf{C}^{(m)}. \tag{VII}$$

Die Faktoren λ und μ können hier Zahlen oder Skalare bedeuten. In Koordinatenschreibweise handelt es sich um bekannte Assoziativ- und Distributivgesetze für Zahlen.

Eine interessante Erscheinung tritt auf, wenn wir Satz 1.2, nach dem sich die Koordinaten eines Tensors 1. Stufe nach dem gleichen Gesetz wie die Koordinateneinheitsvektoren transformieren, auf die behandelten Multilinearformen (1.50), (1.51), (1.52) anwenden, indem wir dort u_i, v_j, w_k durch $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k$ ersetzen. Es folgt, daß die Ausdrücke

$$a_k\mathbf{e}_k = \bar{a}_k\bar{\mathbf{e}}_k, \quad a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \bar{a}_{ik}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_k, \quad a_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = \bar{a}_{ijk}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k \tag{2.6}$$

(bezüglich der Gruppe der orthogonalen Koordinaten) *Invariante* der Stufe 1, 2, 3 darstellen, sofern die a_k, a_{ik}, a_{ijk} Koordinaten eines Tensors 1., 2., 3. Stufe sind. Man könnte also daran denken, den Tensor als *selbständige Größe in Summenform* darzustellen, etwa

$$\mathbf{a} = a_k\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{A}^{(2)} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{A}^{(3)} = a_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \tag{2.7}$$

und

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_k\bar{\mathbf{e}}_k, \quad \overline{\mathbf{A}}^{(2)} = \bar{a}_{ik}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_k, \quad \overline{\mathbf{A}}^{(3)} = \bar{a}_{ijk}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k. \tag{$\overline{2.7}$}$$

Dann lauten die Invarianzbedingungen für Tensoren 1., 2., 3. Stufe einfach

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{A}^{(2)} = \overline{\mathbf{A}}^{(2)}, \quad \mathbf{A}^{(3)} = \overline{\mathbf{A}}^{(3)}. \tag{2.8}$$

Die Schwierigkeit besteht aber darin, daß die Produkte $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ usw. nicht erklärt sind. Sie sind an und für sich irreduzible Größen der Stufe 2, 3 usw. Wir nennen das System der Produkte $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}$ ein kartesisches Basissystem oder eine kartesische *Basis n-ter Stufe*, d. h. die Gleichung

$$\lambda_{i_1 i_2\ldots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n} = \mathbf{0}^{(n)} \tag{2.9}$$

kann nur dadurch erfüllt werden, daß sämtliche 3^n Zahlen $\lambda_{i_1 i_2\ldots i_n}$ gleich null sind. Die 3^n Elemente $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}$ einer Basis n-ter Stufe sind *linear unabhängig*. Das ist eine Verallgemeinerung des Begriffes der linearen Unabhängigkeit für die Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ in dem Sinne, daß die Gleichung $\lambda_i\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, also

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Die *Summenform*

$$\mathbf{A}^{(n)} = a_{i_1 i_2\ldots i_n}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n} \tag{2.10}$$

nennen wir *Komponentendarstellung* des n-stufigen Tensors $\mathbf{A}^{(n)}$ bezüglich der n-stufigen Basis $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}$. Die 3^n Zahlen $a_{i_1 i_2\ldots i_n}$ sind seine Koordinaten, die dem Transformationsgesetz (1.53) genügen müssen. Die *Tensoroperationen* werden an (2.10) so definiert, daß sie *bezüglich der Tensorkoordinaten mit den* im Abschnitt 2.1. erklärten *Rechenregeln übereinstimmen*. Speziell wird das innere Produkt an (2.10) so erklärt, daß der Tensor n-ter Stufe durch n-malige innere Multiplikation mit je einem Tensor 1. Stufe auf eine Multilinearform, also auf einen Skalar „abgebaut" wird. Diese Art der Reduzierung auf einen wohldefinierten Ausdruck muß zur *Erklärung* von (2.10) *ausreichen*. Die Elemente des Basissystems $\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}$ sind insgesamt keine Tensoren n-ter Stufe ähnlich wie die Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ insgesamt nicht Tensoren 1. Stufe sind. Sie sollen aber den Rechengesetzen (I) bis (VII) genügen. Wir wollen uns darauf beschränken, die Tensoroperationen an Beispielen zu demonstrieren. Der *Summentensor*

$$u_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k + v_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = w_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$$

hat die Koordinaten $w_{ik} = u_{ik} + v_{ik}$ gemäß

$$u_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k + v_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = (u_{ik} + v_{ik})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \tag{2.11}$$

in Übereinstimmung mit der Summendefinition im Abschnitt 2.1. Der *Produkttensor*

$$a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j b_{klm}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m = c_{ijklm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m$$

hat die Koordinaten

$$c_{ijklm} = a_{ij}b_{klm}$$

gemäß

$$a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j b_{klm}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m = a_{ij}b_{klm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m \tag{2.12}$$

in Übereinstimmung mit Definition 2.1.

Bei der vorstehenden Multiplikation *zweier Tensoren* werden (V) und (VII) benutzt. Bereits bei der (linearen) Dyade

$$\mathbf{uv} = (u_i\mathbf{e}_i)\,(v_k\mathbf{e}_k)$$

gelangt man nur mit Hilfe des assoziativen und distributiven Gesetzes nach (V) und (VII) zur Komponentendarstellung gemäß

$$\mathbf{uv} = u_i\mathbf{e}_i v_k\mathbf{e}_k = u_i v_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k, \tag{2.13}$$

aber

$$\mathbf{vu} = v_i\mathbf{e}_i u_k\mathbf{e}_k = v_i u_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k. \tag{$\overline{2.13}$}$$

Im Beispiel (2.12) haben wir

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{B}^{(3)} = a_{ij}b_{klm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m,$$

aber

$$\mathbf{B}^{(3)}\mathbf{A}^{(2)} = b_{ijk}a_{lm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m.$$

Das Produkt zweier Tensoren ist *nicht kommutativ*, also gilt im allgemeinen

$$\mathbf{A}^{(m)}\mathbf{B}^{(n)} \neq \mathbf{B}^{(n)}\mathbf{A}^{(m)}.$$

Eine Ausnahme dieser Regel bildet z. B. die Dyade $\mathbf{vv} = v_i v_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$.

Das *innere Produkt* zweier Tensoren wird an einem Beispiel erläutert. Es wird mit einem *Malpunkt gekennzeichnet.*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{B}^{(2)} &= a_{ikl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \cdot b_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \\ &= a_{ikl}b_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = a_{ikl}b_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\delta_{lm}\mathbf{e}_n \\ &= a_{ikm}b_{mn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{lm}$ wird die Multiplikationsvorschrift auf das Skalarprodukt zweier Vektoren zurückgeführt. Bei Beachtung der Reihenfolge werden die innen mit dem Malpunkt verbundenen Basisvektoren skalar multipliziert. Wenn man diese Vektoren, im Beispiel $\mathbf{e}_l$ und $\mathbf{e}_m$, fortläßt und die zugehörigen Indizes l und m gleich setzt, gelangt man zum gleichen Resultat in Übereinstimmung mit der Definition 2.2. Wir können also z. B. einfacher rechnen:

$$a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \cdot b_{lm}\mathbf{e}_l\mathbf{e}_m = a_{il}b_{lm}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_m,$$

indem wir $\mathbf{e}_k$ und $\mathbf{e}_l$ fortlassen und $k = l$ setzen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}[(\mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{u} &= [(a_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \cdot w_l\mathbf{e}_l) \cdot v_m\mathbf{e}_m] \cdot u_n\mathbf{e}_n \\ &= [a_{ijk}w_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot v_m\mathbf{e}_m] \cdot u_n\mathbf{e}_n \\ &= a_{ijk}w_kv_j\mathbf{e}_i \cdot u_n\mathbf{e}_n = a_{ijk}w_kv_ju_i,\end{aligned}$$

also

$$[(\mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{u} = a_{ijk}u_iv_jw_k. \qquad (2.14)$$

Durch dreimalige innere Multiplikation des dreistufigen Tensors $\mathbf{A}^{(3)}$ mit je einem Tensor 1. Stufe gelangen wir zu der wohlbekannten skalaren Trilinearform (1.52). –

Das $(n - 1)$fache innere Produkt eines Tensors n-ter Stufe mit je einem Tensor 1. Stufe ergibt einen Tensor 1. Stufe. Auch auf diese Weise werden häufig Tensoren höherer Stufe erklärt. Man erhält so eine eindeutige Abbildung von $n - 1$ Vektoren auf einen Bildvektor. Diese Zuordnung ist homogen und linear in jedem der $n - 1$ Originalvektoren. Man nennt sie auch *multilineare Vektorfunktion*. Das einfachste Beispiel ist die *affine Abbildung* mit Hilfe eines zweistufigen Tensors $\mathbf{A} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ gemäß $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Der Tensor, der die affine Abbildung vermittelt, heißt auch „*Affinor*". Wegen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \cdot x_l\mathbf{e}_l = a_{ik}x_k\mathbf{e}_i = x_i'\mathbf{e}_i = \mathbf{x}' \qquad (2.15)$$

wird der Vektor $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ in *demselben* KS eindeutig auf den Vektor $\mathbf{x}' = x_i'\mathbf{e}_i$ mit den Koordinaten

$$x_i' = a_{ik}x_k \qquad (2.16)$$

abgebildet. Die Zuordnung (2.16) ist linear und homogen in den Vektorkoordinaten.

Wenn wir in der Rechnung für (2.14) den Vektor $\mathbf{u}$ fortlassen und $\mathbf{w} = \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}$ setzen, folgt

$$(\mathbf{A}^{(3)} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = a_{ijk}x_jy_k\mathbf{e}_i = z_i'\mathbf{e}_i = \mathbf{z}'.$$

Den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wird eindeutig der Bildvektor $\mathbf{z}'$ mit den Koordinaten

$$z_i' = a_{ijk}x_jy_k \qquad (2.17)$$

zugeordnet. Die Zuordnung ist bilinear und homogen.

Definition 2.3: *Die Transformationsformeln* (2.16) *beschreiben eine* **Punkttransformation,** *wenn a_{ik} die Koordinaten eines Tensors 2. Stufe sind. Dabei wird der Endpunkt des Ortsvektors mit den Koordinaten x_k in* **demselben KS** *eindeutig auf den Endpunkt des Ortsvektors mit den Koordinaten x_i' abgebildet:*

$$\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}' = x_i'\mathbf{e}_i.$$

Satz 2.5: *Eine* **Koordinatentransformation** *bei Übergang von einem KS B auf ein anderes $\bar{B}$ wird mit einer Matrix, speziell bei orthogonalen Koordinatentransformationen nach* (1.14) *mit der Matrix $\underset{\sim}{C}$ vollzogen,* **nicht** *von einem Tensor 2. Stufe. Im Gegensatz dazu* *wird eine* **Punkttransformation in demselben KS** *B von einem zweistufigen Tensor* $\mathbf{A}$ *vermittelt, der die eindeutige Abbildung* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ *nach* (2.15) *leistet. In beiden Fällen werden homogene lineare Transformationen (ohne Translation) betrachtet, wobei die Koordinatentransformation von einer Matrix, die Punkttransformation von einem Tensor vermittelt wird.*

Beispiel 2.3: Die affine Abbildung entspricht geometrischen Vorstellungen. Bei physikalischen Anwendungen muß man verschiedene Buchstaben wählen, z. B. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q}$ statt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Die Beziehung $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{q}$ tritt in der Kreiseltheorie auf, wenn $\mathbf{T}$ den zweistufigen Tensor der Trägheitsmomente, $\mathbf{u}$ den Vektor der Winkelgeschwindigkeit und $\mathbf{q}$ den Drehimpulsvektor bedeuten.

Beispiel 2.4: Die Dyade $\mathbf{vv} = v_i v_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ ist ein spezieller Tensor 2. Stufe. Bei Strömungsvorgängen wird die Massendichte $\varrho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ definiert, wo $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ das Volumenelement bedeutet. Den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{w}$ einer *turbulenten Strömung* zerlegt man in eine Geschwindigkeit $\overline{\mathbf{w}}$ der mittleren Hauptbewegung und eine Störgeschwindigkeit $\mathbf{w}'$ einer Nebenbewegung infolge turbulenter Schwankungen: $\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}'$. Die Turbulenz bewirkt den zusätzlichen *Reynoldsschen Spannungstensor* $\mathbf{S}' = -\varrho\overline{\mathbf{w}'\mathbf{w}'} = -\varrho\overline{w_i' w_k'}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$, der mit der Dyade $\mathbf{w}'\mathbf{w}'$ gebildet wird. Die Querstriche sollen auf Mittelwerte hinweisen.

Aufgabe 2.1: Mit Hilfe der Transformationsgesetze (1.48) ist zu zeigen, daß der zweistufige Tensor $\mathbf{A} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ invariant ist.

Aufgabe 2.2: Mit Hilfe der Transformationsgesetze (1.49) zeige man die Invarianz des dreistufigen Tensors $\mathbf{B}$ in der Komponentendarstellung $\mathbf{B} = b_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$.

2.3. Antisymmetrische Tensoren

Das Spatprodukt $[\mathbf{uvw}]$ ist nur dann eine skalare Invariante, wenn $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ Tensoren 1. Stufe bedeuten. Da die Koordinateneinheitsvektoren im allgemeinen keine Tensoren 1. Stufe sind, stellen die *Zahlsymbole nach Levi-Civita*

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k] = \varepsilon_{ijk}, \tag{2.18}$$

die wir bereits im Beispiel 1.9 eingeführt haben, im allgemeinen keine skalaren Invarianten (Tensoren nullter Stufe) dar. In Gl. (1.59)

$$[\mathbf{uvw}] = \varepsilon_{ijk}u_i v_j w_k \tag{1.59}$$

haben wir unter der *Voraussetzung* $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$ bereits erkannt, daß die Zahlen ε_{ijk} Koordinaten eines dreistufigen Tensors sind, den wir mit $\mathbf{E}$ bezeichnen:

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k. \tag{2.19}$$

Dann müssen die Transformationsgesetze (1.49) für die Koordinaten eines Tensors 3. Stufe gelten, und zwar bei Berücksichtigung von (1.60):

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{ijk} &= [\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k] = \varepsilon_{pqr}c_{ip}c_{jq}c_{kr} \\
&= \varepsilon_{123}c_{i1}c_{j2}c_{k3} + \varepsilon_{231}c_{i2}c_{j3}c_{k1} + \varepsilon_{312}c_{i3}c_{j1}c_{k2} \\
&\quad + \varepsilon_{213}c_{i2}c_{j1}c_{k3} + \varepsilon_{321}c_{i3}c_{j2}c_{k1} + \varepsilon_{132}c_{i1}c_{j3}c_{k2} \\
&= c_{i1}c_{j2}c_{k3} + c_{i2}c_{j3}c_{k1} + c_{i3}c_{j1}c_{k2} \\
&\quad - c_{i2}c_{j1}c_{k3} - c_{i3}c_{j2}c_{k1} - c_{i1}c_{j3}c_{k2},
\end{aligned}$$

also

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = [\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k] = \begin{vmatrix} c_{i1} & c_{j1} & c_{k1} \\ c_{i2} & c_{j2} & c_{k2} \\ c_{i3} & c_{j3} & c_{k3} \end{vmatrix}. \qquad \overline{(2.20)}$$

Diese Determinante liefert nämlich bei Anwendung der Sarrusschen Regel die vorstehenden 6 Summanden.

Andererseits ziehen wir (1.35 b) heran und berechnen mit (1.13) $\bar{\mathbf{e}}_i = c_{il}\mathbf{e}_l$, $\bar{\mathbf{e}}_j = c_{jl}\mathbf{e}_l$, $\bar{\mathbf{e}}_k = c_{kl}\mathbf{e}_l$ an Stelle von $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ das Spatprodukt $[\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k]$. Auf Grund dieser Rechnung ergibt sich für $[\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_k]$ wieder die Determinante $\overline{(2.20)}$. Damit ist *bewiesen*, daß die Levi-Civita-Symbole ε_{ijk} Koordinaten eines dreistufigen Tensors darstellen.

Nach (1.35 c) wissen wir bereits, daß

$$[\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3] = \bar{\varepsilon}_{123} = \|c_{ik}\|$$

in Übereinstimmung mit $\overline{(2.20)}$. Eine Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht. Sie bleibt ungeändert, wenn man zweimal zwei Spalten vertauscht. Das bedeutet für die Determinante von $\overline{(2.20)}$

$$\bar{\varepsilon}_{123} = \bar{\varepsilon}_{231} = \bar{\varepsilon}_{312} = -\bar{\varepsilon}_{213} = -\bar{\varepsilon}_{321} = -\bar{\varepsilon}_{132}.$$

Die Determinante $\overline{(2.20)}$ hat den Zahlwert Null, wenn zwei oder drei Spalten gleich sind, d. h., die $\bar{\varepsilon}_{ijk}$ sind gleich null, wenn zwei oder drei Indizes gleichzahlig sind. Speziell haben wir nach (1.19) die Zahlwerte

$$\bar{\varepsilon}_{123} = \|c_{ik}\| = +1 \quad \text{oder} \quad \bar{\varepsilon}_{123} = \|c_{ik}\| = -1$$

bei Drehung oder Spiegelung des KS. Folglich gilt mit (1.60)

$$\bar{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\ \text{(Drehung)}, \quad \bar{\varepsilon}_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}\ \text{(Umlegung)}. \qquad (2.21)$$

Im ursprünglichen Basissystem B können wir

$$\mathbf{e}_i = \delta_{il}\mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_j = \delta_{jl}\mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_k = \delta_{kl}\mathbf{e}_l$$

schreiben und die δ_{il} als Koordinaten des Basisvektors $\mathbf{e}_i$ usw. auffassen. Wir benutzen wieder (1.35 b), jetzt mit $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{w} = \mathbf{e}_k$, und erhalten

$$\varepsilon_{ijk} = [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k] = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

Aufgabe 2.3: Mittels Determinanteneigenschaften ist zu zeigen, daß die Darstellung (2.20) wieder die Zahlwerte (1.60) ergibt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1, \qquad (1.60) \\ \varepsilon_{ijk} &= 0, \text{ wenn zwei oder drei Indizes gleichzahlig sind.} \end{aligned}$$

Ein Tensor n-ter Stufe heißt *vollständig antisymmetrisch*, wenn seine Koordinaten bei Vertauschung zweier *beliebiger* Indizes das Vorzeichen wechseln. Offenbar ist der dreistufige **E**-Tensor (2.19) vollständig antisymmetrisch, denn seine Koordinaten ε_{ijk}

wechseln bei einmaliger Vertauschung von je zwei Indizes das Vorzeichen; infolgedessen bleiben sie bei zweimaliger Vertauschung von je zwei Indizes ungeändert:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}. \tag{2.22}$$

Von diesen Umstellungsmöglichkeiten wird oft Gebrauch gemacht! Bei Vertauschung von zwei gleichzahligen Indizes kann die Antisymmetrieforderung nur erfüllt werden, wenn die betreffende Koordinate verschwindet. Vertauschen wir z. B. in ε_{232} die Indizes an erster und dritter Stelle, so muß $\varepsilon_{232} = -\varepsilon_{232} = 0$ gefordert werden. Ein Tensor 3. Stufe hat im R^3 27 Koordinaten. Davon sind 21 Koordinaten gleich null, wenn es sich um einen vollständig antisymmetrischen Tensor handelt. Die nicht verschwindenden 6 Koordinaten des $\mathbf{E}$-Tensors sind nach (1.60)

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{132} = 1.$$

Die Koordinaten u_{ik} eines *antisymmetrischen Tensors 2. Stufe* $\mathbf{U} = u_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ genügen der *Antisymmetriebedingung*

$$u_{ki} = -u_{ik}. \tag{2.23}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} &u_{11} = u_{22} = u_{33} = 0, \\ &u_{12} = -u_{21}, \quad u_{23} = -u_{32}, \quad u_{31} = -u_{13}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe ist mit drei Zahlenangaben bestimmt, was eine gewisse Verwandtschaft zum Vektor andeutet.

Wir bilden das innere Produkt des $\mathbf{E}$-Tensors mit einem Vektor bei Rechtsmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} &= \varepsilon_{ikl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l \cdot v_m\mathbf{e}_m = \varepsilon_{ikl}v_m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\delta_{lm}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} &= \varepsilon_{ikl}v_l\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = v_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \mathbf{V}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Der entstehende zweistufige Tensor $\mathbf{V}$ hat die Koordinaten

$$v_{ik} = \varepsilon_{ikl}v_l = \varepsilon_{ik1}v_1 + \varepsilon_{ik2}v_2 + \varepsilon_{ik3}v_3, \tag{2.26}$$

die wir mittels (1.60) berechnen:

$$\begin{aligned} &v_{11} = 0, \quad v_{23} = -v_{32} = v_1, \\ &v_{22} = 0, \quad v_{31} = -v_{13} = v_2, \\ &v_{33} = 0, \quad v_{12} = -v_{21} = v_3. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Jedem Tensor 1. Stufe $\mathbf{v} = v_l\mathbf{e}_l$ läßt sich (mathematisch) durch

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{V} = v_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$$

nach (2.27) ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe mit den Koordinaten $v_{ik} = \varepsilon_{ikl}v_l$ zuordnen, denn in (2.27) ist auch die Antisymmetriebedingung $v_{ki} = -v_{ik}$ erfüllt.

In Fortsetzung dieser Überlegung bilden wir das zweifache innere Produkt

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = v_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \cdot u_n\mathbf{e}_n = \varepsilon_{ikl}v_lu_n\mathbf{e}_i\delta_{kn} = \varepsilon_{ikl}u_kv_l\mathbf{e}_i.$$

Aufgabe 2.4: Durch Nachrechnung bestätige man den Zusammenhang

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ikl} u_k v_l = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \tag{2.28}$$

mit dem *vektoriellen Produkt*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + \mathbf{e}_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + \mathbf{e}_3(u_1 v_2 - u_2 v_1). \tag{2.29}$$

Aufgabe 2.5: Mit $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{U}$ und $\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{V}$ soll gezeigt werden, daß die Beziehungen

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \tag{2.30}$$

und

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{U} = -\mathbf{U} \cdot \mathbf{v} \tag{2.31}$$

gelten.

2.4. Rechenkalkül mit E-Tensoren

Das Produkt eines Tensors m-ter Stufe mit einem Tensor n-ter Stufe ergibt einen Tensor $(m + n)$-ter Stufe.

Beispiel 2.5: Das Produkt

$$\begin{aligned} \mathbf{EE} &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \varepsilon_{lmn} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \end{aligned} \tag{2.32}$$

ergibt den Kronecker-Tensor 6. Stufe mit den Koordinaten

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

Diese Beziehung folgt aus $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k]\, [\mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n]$ bei Anwendung der Produktregel (1.39).

Das innere Produkt eines Tensors m-ter Stufe mit einem Tensor n-ter Stufe ergibt einen Tensor der Stufe $m + n - 2$.

Beispiel 2.6: Das innere Produkt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \cdot \varepsilon_{lmn} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \delta_{kl} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

definiert nach (2.33) einen Tensor 4. Stufe mit den Koordinaten

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jk} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kk} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{2.34}$$

Diese Determinante wird mit $\delta_{kk} = 3$ nach der 3. Zeile entwickelt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} &= 3(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) - \delta_{km}(\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jk}) + \delta_{kn}(\delta_{ik}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}) \\ &= 3(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) - (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) + (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}) \\ &= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \end{aligned}$$

Es hat sich die grundlegende *Strukturformel*

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \tag{2.35}$$

ergeben.

Im Anschluß an (2.25), (2.27), wo einem Vektor $\mathbf{v}$ ein antisymmetrischer Tensor $\mathsf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{V}$ zugeordnet wurde, stellen wir die Frage, welcher antisymmetrische Tensor $\mathsf{E} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ dem Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zugeordnet wird. Mit (2.28) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ikl}\mathbf{e}_i u_k v_l$ wird auch $\mathsf{E} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k \cdot \varepsilon_{lmn}\mathbf{e}_l a_m b_n$.

Die Strukturformel (2.35) läßt sich hier unmittelbar anwenden

$$\begin{aligned}
\mathsf{E} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} a_m b_n \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\delta_{kl} \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} a_m b_n \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\, a_m b_n \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \\
&= (a_i b_j - a_j b_i)\, \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = a_i b_j \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - b_i a_j \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j .
\end{aligned}$$

Sind **ab** und **ba** Dyaden, so lautet das Ergebnis

$$\mathsf{E} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}.$$

Dem vektoriellen Produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kann man den antisymmetrischen Tensor 2. Stufe

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = \mathbf{ab} - \mathbf{ba} = \mathsf{E} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{2.36}$$

zuordnen. Wir nennen $\langle \mathbf{ab} \rangle = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ einen *Bivektor.*

Jetzt bilden wir das zweifache Produkt von drei Tensoren 1. Stufe gemäß

$$\mathbf{abc} = a_i b_j c_k \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k . \tag{2.37}$$

Es stellt einen Tensor 3. Stufe dar.

Aufgabe 2.6: Man zeige, daß

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{abc} \rangle = \mathbf{abc} &+ \mathbf{bca} + \mathbf{cab} \\
&- \mathbf{bac} - \mathbf{cba} - \mathbf{acb}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

ein vollständig antisymmetrischer Tensor 3. Stufe ist. Wir nennen $\langle \mathbf{abc} \rangle$ nach (2.38) einen *Trivektor.*

Die *Strukturformel* (2.35) läßt sich weiter spezialisieren, indem wir nach m und i überschieben:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kin} = \delta_{ii}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{ji} = 3\delta_{jn} - \delta_{jn},$$

also

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kin} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kin} = 2\delta_{jn}. \tag{2.39}$$

Bei drei gleichen Indizes wird schließlich

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{jj} = 6. \tag{2.40}$$

Beispiel 2.7: Das Gleichungssystem (2.26) $v_{ik} = \varepsilon_{ikn}v_n$ soll aufgelöst werden. Dafür wird (2.39) umgeschrieben in

$$\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{ikn} = 2\delta_{mn}. \tag*{$\overline{(2.39)}$}$$

Über (2.26) bilden wir die Doppelsumme

$$\varepsilon_{ikm} v_{ik} = \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{ikn} v_n .$$

Nach (2.39) erhalten wir

$$\varepsilon_{ikm} v_{ik} = 2\delta_{mn} v_n = 2v_m$$

und damit die Lösung

$$v_m = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ikm} v_{ik} .$$

Das lineare Gleichungssystem

$$v_{ik} = \varepsilon_{ikn} v_n \text{ hat die Lösung } v_n = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ikn} v_{ik} \tag{2.41}$$

für $n = 1, 2, 3$.

Die *Strukturformel* (2.35) ist mit dem *Verbindungssatz* (1.30) äquivalent, so daß wir (1.30) mit (2.35) beweisen können. Mit

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k = f_k \mathbf{e}_k = \mathbf{f}$$

wird

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{f} \times \mathbf{w} = \varepsilon_{kmn} f_k w_m \mathbf{e}_n .$$

Zum Einsetzen muß in beiden Gleichungen f_k erscheinen. Nach (2.35) folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} \times \mathbf{w} &= \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_m \mathbf{e}_n \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} u_i v_j w_m \mathbf{e}_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\, u_i v_j w_m \mathbf{e}_n \\
&= (\delta_{im} u_i w_m)\, v_n \mathbf{e}_n - (\delta_{jm} v_j w_m)\, u_n \mathbf{e}_n \\
&= (u_m w_m)\, \mathbf{v} - (v_m w_m)\, \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{u}
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{u} . \tag{1.30}$$

Aufgabe 2.7: Folgende Ausdrücke sind gleich:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w} &= \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \\
&= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}\mathbf{w}) = (\mathbf{w}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{w}) = (\mathbf{w}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} .
\end{aligned} \tag{2.42}$$

In der letzten Zeile treten die Dyaden **vw**, **wu**, **uw** und **wv** auf. In Komponentendarstellung zeige man $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}\mathbf{w})$ und $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{w})$. Warum ist $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{w})$? Nach (2.42) können wir den *Verbindungssatz* in der Form

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}\mathbf{u} , \\
\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\mathbf{w}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

schreiben.

Aufgabe 2.8: Man führe die Rechnung

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k \cdot \varepsilon_{lmn} u_l v_m \mathbf{e}_n$$

zum Ergebnis und zeige

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 \tag{2.44}$$

mit der Bezeichnung (1.8).

Aufgabe 2.9: Zur Übung beweise man mittels

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i a_j b_k \cdot \varepsilon_{lmn}\mathbf{e}_l c_m d_n$$

die Umwandlungsformel (1.41)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Das **Spatprodukt** entsteht jetzt in der Form

$$[\mathbf{uvw}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k \cdot w_l \mathbf{e}_l,$$

also

$$[\mathbf{uvw}] = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k \tag{1.59}$$

in Übereinstimmung mit (1.59).

Beispiel 2.8: Ein zweistufiger Tensor, der uns noch beschäftigen wird, habe die Gestalt

$$\mathbf{Q} = A_1\mathbf{rr} + A_2\mathbf{I} + A_3\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}. \tag{2.45}$$

A_1, A_2, A_3 seien Skalare, $\mathbf{r}$ sei ein Tensor 1. Stufe. Die Koordinaten des Tensors (2.45) im Bezugssystem B und $\bar{B}$ sind

$$Q_{ij}(r_1, r_2, r_3) = A_1 r_i r_j + A_2 \delta_{ij} = A_3 \varepsilon_{ijk} r_k \tag{2.46}$$

und

$$\bar{Q}_{ij}(r_1, r_2, r_3) = c_{ik} c_{jl} Q_{kl}\,(r_1, r_2, r_3)$$
$$= A_1 c_{ik} r_k c_{jl} r_l + A_2 c_{ik} c_{jl} \delta_{kl} + A_3 c_{ik} c_{jl} \varepsilon_{klm} r_m.$$

Mit $r_{kl} = \varepsilon_{klm} r_m$ und $\bar{r}_{kl} = \bar{\varepsilon}_{klm}\bar{r}_m$ gilt nach (2.26) und (2.27) $c_{ik} c_{jl} r_{kl} = \bar{r}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ijk}\bar{r}_k$. Es folgt

$$\bar{Q}_{ij}(r_1, r_2, r_3) = A_1 \bar{r}_i \bar{r}_j + A_2 \delta_{ij} + A_3 \bar{\varepsilon}_{ijk} \bar{r}_k \tag{2.47}$$

wegen $\bar{\delta}_{ij} = \delta_{ij}$ nach (2.4). Durch Vergleich von (2.47) mit (2.46) erkennt man, daß die Koordinatenbeziehung

$$Q_{ij}(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = \bar{Q}_{ij}(r_1, r_2, r_3) \tag{2.48}$$

von dem Tensor (2.45) nur dann erfüllt wird, wenn wir uns auf die Untergruppe der Drehtransformationen mit $\bar{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ beschränken. Die „Isotropiebedingung" (2.48), auf die wir noch zu sprechen kommen, hat mir G. Seifert in verallgemeinerter Form mitgeteilt.

3. Symmetrische Tensoren 2. Stufe. Tensorfelder. Drehtensor.

3.1. Einheitstensor und Spannungstensor

Dem zweistufigen Tensor $\mathbf{T} = \tau_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ können wir die quadratische Matrix $((\tau_{ik}))$ mit 9 Zahlen τ_{ik} zuordnen, aber nicht umgekehrt. Ohne die Matrix heranzuziehen, wollen wir dem Tensor 2. Stufe direkt seine Determinante $\det \mathbf{T} = \|\tau_{ik}\|$ zuordnen.

Definition 3.1: *Der zweistufige Tensor* **T** *heißt* **regulär,** *wenn seine Determinante* $\det \mathbf{T} \neq 0$, *also der Rang seiner Koordinatenmatrix gleich drei ist. Der Tensor* **T** *heißt* **singulär,** *wenn* $\det \mathbf{T} = 0$ *ist.*

Definition 3.2: *Wenn die Tensorkoordinaten die* **Symmetriebedingung**

$$\sigma_{ki} = \sigma_{ik} \tag{3.1}$$

erfüllen, heißt der zweistufige Tensor

$$\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \sigma_{ki}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$$

symmetrisch.

Ein wichtiger symmetrischer Tensor 2. Stufe ist der *Einheitstensor*

$$\mathbf{I} = \delta_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\,. \tag{3.2}$$

Seine Koordinaten sind wegen $\delta_{ki} = \delta_{ik}$ symmetrisch. Der Tensor **I** ist regulär, da

$$\det \mathbf{I} = \|\delta_{ik}\| = 1$$

gilt. Daß die δ_{ik} Tensorkoordinaten darstellen, wurde im Satz 2.3 bewiesen. Obwohl die Basiselemente 2. Stufe $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ insgesamt nicht Tensoren 2. Stufe sind, ergibt die Summenform (3.2) einen zweistufigen Tensor.

Aufgabe 3.1: Man zeige durch Nachrechnung, daß sich der Tensor **I** nach (3.2) bei innerer Multiplikation mit einem beliebigen Tensor 1. oder 2. Stufe wie ein „Einselement" verhält:

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A}\,. \tag{3.3}$$

Aufgabe 3.2: **S** sei ein Tensor 2. Stufe. Durch Ausmultiplizieren bestätige man, daß die Beziehungen

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}, \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} \tag{3.4}$$

nur gelten, wenn **S** symmetrisch ist.

Die *Zeilen-* oder *Spaltenvektoren* der Matrix eines Tensors 2. Stufe sind insgesamt *keine* Tensoren 1. Stufe. Bilden wir nämlich die Summenform

$$\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i(\sigma_{ik}\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i\mathbf{p}_i \tag{3.5}$$

mit

$$\mathbf{p}_i = \sigma_{ik}\mathbf{e}_k\,, \tag{3.6}$$

so sind $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ die Zeilenvektoren der Matrix $((\sigma_{ik}))$. Wenn die Transformationsgesetze für die Koordinaten σ_{ik} eines Tensors 2. Stufe erfüllt sind, so sind die Transformationsgesetze z. B. für die

Koordinaten σ_{1k} des Zeilenvektors $\mathbf{p}_1 = \sigma_{1k}\mathbf{e}_k$ im allgemeinen nicht erfüllt, so daß der Zeilenvektor $\mathbf{p}_1$ keinen Tensor 1. Stufe darstellt, wie man leicht überprüft. Die Zeilenvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ sind also insgesamt keine Tensoren 1. Stufe. Bedeutet $\mathbf{S}$ den symmetrischen *Spannungstensor* der Elastizitätstheorie mit den Tensorkoordinaten σ_{ik}, so sind die zugehörigen *Spannungsvektoren* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ nach (3.6) insgesamt *keine* Tensoren 1. Stufe. Entsprechend sind die Zeilen- oder Spaltenvektoren des Tensors $\mathbf{I}$ nach (3.2) insgesamt keine Tensoren 1. Stufe. Hier sind die Zeilen- oder Spaltenvektoren nämlich speziell die Koordinateneinheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, von denen wir wissen, daß sie insgesamt nicht einstufige Tensoren sein können.

Die Koordinaten σ_{ik} des Spannungstensors $\mathbf{S}$ heißen *Schubspannungen* im Falle $i \neq k$; die $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ sind die *Normalspannungen*. In der Technischen Mechanik sind folgende Bezeichnungen üblich: $\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z$ sowie $\sigma_{12} = \tau_{xy}, \sigma_{23} = \tau_{yz}, \sigma_{31} = \tau_{zx}$. Mit dem Kräfte- und Momentengleichgewicht werden wir uns noch befassen. Daraus folgt die *Symmetrie* des Spannungstensors: $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$.

Beispiel 3.1: Ein elastisch deformierter Körper befinde sich unter dem Einfluß äußerer Kräfte im Gleichgewichtszustand. Denken wir uns einen Teilkörper herausgeschnitten, so sind an den Schnittflächen Spannungskräfte derart anzubringen, daß sein Gleichgewichtszustand erhalten bleibt. Als Teilkörper wählen wir einen infinitesimalen Quader mit achsenparallelen Kanten. Wir konstruieren ihn, indem wir von dem „Trägerpunkt" P mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 zunächst die Kantenlängen $\mathrm{d}x_1 > 0$, $\mathrm{d}x_2 > 0$, $\mathrm{d}x_3 > 0$ abtragen. Damit entstehen die drei in Bild 3.1 eingezeichneten Randflächen, die sich in P schneiden. Wir ergänzen das Bild in Gedanken zum vollständigen Quader durch Hinzufügen der gegenüberliegenden Begrenzungsflächen. Wie wird in diesem Modell der Spannungszustand im Punkt P beschrieben?

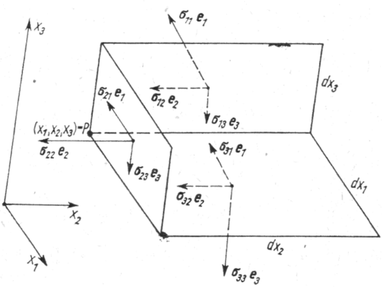


Bild 3.1: Komponenten der Spannungsvektoren

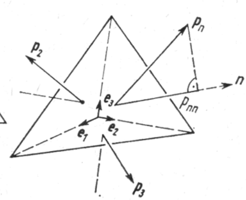


Bild 3.2: Spannungsvektoren

An den drei eingezeichneten Randflächen der Inhalte $\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}A_3 = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ greift jeweils im Schwerpunkt der Fläche ein *Spannungsvektor* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ an, so daß sich $\mathbf{p}_i$ auf $\mathrm{d}A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bezieht. Die Spannungsvektoren sind Kraftvektoren, bezogen auf die Flächeneinheit. Die Schnittflächen $\mathrm{d}A_i$, an denen die Spannungsvektoren $\mathbf{p}_i$ angreifen, stehen auf den Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ senkrecht. Ein Spannungsvektor $\mathbf{p}_i$ steht aber im allgemeinen keineswegs senkrecht auf seiner

Bezugsfläche $\mathrm{d}A_i$, so daß wir ihn in Komponenten zerlegen können gemäß

$$\mathbf{p}_1 = \sigma_{1k}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{p}_2 = \sigma_{2k}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{p}_3 = \sigma_{3k}\mathbf{e}_k,$$

oder für $i = 1, 2, 3$ zusammengefaßt: $\mathbf{p}_i = \sigma_{ik}\mathbf{e}_k$.

Damit haben wir die Gl. (3.6) physikalisch gedeutet. Die 9 Tensorkoordinaten σ_{ik} beschreiben den Spannungszustand im Punkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ vollständig. Die Größe $\mathbf{S}$ nach (3.5) hat also selbständige physikalische Bedeutung und kann als solche nicht davon abhängen, wie wir das KS in Bild 3.1 einzeichnen. Dann muß aber die Invarianzbedingung

$$\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \bar{\sigma}_{ik}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{S}}$$

für einen Tensor 2. Stufe erfüllt sein. Wie läßt sich das beweisen? Man wendet den Divisionssatz an: Besteht die Beziehung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ derart, daß $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ Tensoren 1. Stufe sind, dann muß $\mathbf{A}$ ein Tensor 2. Stufe sein, siehe Beispiel 3.2.

Beispiel 3.2: Als Volumenelement eines elastischen Körpers legen wir jetzt ein Tetraeder nach Bild 3.2 zugrunde. Die Spannungsvektoren $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ greifen an den Dreiecksflächen mit den Flächeninhalten

$$\mathrm{d}A_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3, \quad \mathrm{d}A_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_1, \quad \mathrm{d}A_3 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

in den Koordinatenebenen an, während der Spannungsvektor $\mathbf{p}_n$ der schrägen Deckdreiecksfläche mit dem Inhalt $\mathrm{d}A$ und dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ zugeordnet ist. Die Vektoren $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_n$ haben im allgemeinen nicht die Richtung der zugehörigen Flächennormalen entsprechend $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}$, so daß z. B. $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = p_{nn}$ die skalare Projektion des Vektors $\mathbf{p}_n$ auf die Normale der schrägen Deckfläche bedeutet. Während aber die Spannungsvektoren $\mathbf{p}_i$ mit ihren Bezugsflächen $\mathrm{d}A_i$ vom KS abhängen, ist das beim Spannungsvektor $\mathbf{p}_n$ nicht der Fall. Die schräge Deckfläche ist als Ausschnitt einer Ebene ein geometrisches Objekt, das nicht von dem in Bild 3.2 zufällig gewählten KS abhängt. Die ihr zugeordneten Vektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{p}_n$ sind daher Tensoren 1. Stufe.

Die Gleichgewichtsbedingung für die *Spannungskräfte* an den Randflächen des Tetraeders lautet

$$\mathbf{p}_n\,\mathrm{d}A = \mathbf{p}_i\,\mathrm{d}A_i. \tag{3.7}$$

Wegen $\mathrm{d}A_i = \mathrm{d}A\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)$ gilt

$$\mathbf{p}_n\,\mathrm{d}A = \mathbf{p}_i\cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}A,$$

$$\mathbf{p}_n = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{e}_i)\,\mathbf{p}_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i)\,\mathbf{p}_i,$$

also nach (3.5)

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i\mathbf{p}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}. \tag{3.8}$$

Da $\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{n}$ Tensoren 1. Stufe sind, muß $\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ auf Grund des Divisionssatzes ein Tensor 2. Stufe sein. Die Spannungen σ_{ik} sind also Koordinaten eines Tensors 2. Stufe. Die vorher definierte skalare Normalspannung erhält jetzt die Darstellung

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = p_{nn}. \tag{3.9}$$

3.2. Tensorfelder. Isotrope Tensoren

Der Begriff des Vektorfeldes läßt sich auf den Begriff des Tensorfeldes erweitern. Als Repräsentanten wählen wir einen Tensor 2. Stufe $\mathbf{T} = \tau_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$. Die Tensorkoordinaten sind jetzt nicht mehr feste Zahlen, sondern Funktionen des Ortes und der Zeit. Ihr Definitionsbereich umfaßt einen räumlichen Bereich und ein Zeitintervall, meistens den Raum R^3 für die Ortskoordinaten x_1, x_2, x_3 und das Intervall $0 \leqq t < \infty$ für die Zeitkoordinate t. Die Tensorkoordinaten seien mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen in den Variablen x_1, x_2, x_3, t. Abgekürzt schreiben wir $(x_1, x_2, x_3, t) = (\mathbf{x}, t)$.

Definition 3.3: *$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i$ bzw. $\mathbf{T} = \tau_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ seien Tensorfelder 1. bzw. 2. Stufe. Bestehen die Abhängigkeiten $v_i(\mathbf{x})$, $\tau_{ik}(\mathbf{x})$ oder $v_i(\mathbf{x}(t))$, $\tau_{ik}(\mathbf{x}(t))$, so heißen die Tensorfelder* **statisch** *oder* **stationär**[1]*. Tensorfelder mit Koordinatenfunktionen der Art $v_i(\mathbf{x}(t), t)$, $\tau_{ik}(\mathbf{x}(t), t)$, aber auch $v_i(\mathbf{x}, t)$, $\tau_{ik}(\mathbf{x}, t)$ heißen* **instationär**.

Der letzte Fall liegt z. B. vor, wenn es sich um die Wellenausbreitung in einem ruhenden Medium handelt. Das Vektorfeld der Geschwindigkeit einer stationären oder instationären Strömung hat den Charakter $\mathbf{w} = w_i(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{e}_i$ oder $\mathbf{w} = w_i(\mathbf{x}(t), t)\,\mathbf{e}_i$. Ein elektrostatisches Feld hat die erstgenannte Eigenschaft.

Jedem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ des Definitionsbereiches wird ein Tensor 2. Stufe mit den Koordinaten $\tau_{ik}(\mathbf{x}, t)$ zugeordnet. Die Tensorkoordinaten sind die *Varianten*, die sich so transformieren müssen, daß der Tensor und die von ihm erzeugte Bilinearform invariant bleibt. Invariante Multilinearformen lassen sich leicht konstruieren.

Definition 3.4: *Ein Tensorfeld 2. Stufe heißt* **isotrop**, *wenn die von ihm erzeugte 2fache Multilinearform nur mit additiven Termen aufgebaut wird, die für sich invariante Skalare darstellen, wobei sämtliche Möglichkeiten zur Konstruktion von direkten Skalarprodukten berüchsichtigt, aber Spatprodukte ausgeschlossen werden.*

Satz 3.1: *Die Koordinaten eines* **isotropen Tensors 2. Stufe** *haben die Gestalt*

$$Q_{ij}(\mathbf{r}, t) = A_1(r^2, t)\, r_i r_j + A_2(r^2, t)\, \delta_{ij}. \tag{3.10}$$

Ein isotroper Tensor 2. Stufe ist symmetrisch.

Um das zu zeigen, betrachten wir die *Bilinearform*

$$\hat{L}(\mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = Q_{ij}(\mathbf{r}, t)\, u_i v_j \tag{3.11}$$

in den einstufigen Tensoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$. Als Variable werden der Verbindungsvektor $\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$ der Raumpunkte P und Q und der Zeitparameter t eingeführt. Invariant gegenüber Drehung und Umlegung des KS sind die Fundamentalinvarianten (Skalar- und Spatprodukt): $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$; $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$; $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$; $[\mathbf{uvr}]$.

Bilinear in $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ wird damit der Ausdruck

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= A_1(r^2, t)\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\,(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + A_2(r^2, t)\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + A_3(r^2, t)\,[\mathbf{uvr}] \\ &= A_1 r_i u_i r_j v_j + A_2 \delta_{ij} u_i v_j + A_3 \varepsilon_{ijk} u_i v_j r_k \\ &= [A_1 r_i r_j + A_2 \delta_{ij} + A_3 \varepsilon_{ijk} r_k]\, u_i v_j . \end{aligned} \tag{3.12}$$

[1]) Bei Stationarität gilt die Zusatzbedingung, daß das Geschwindigkeitsfeld $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ nicht mehr von t abhängt.

Da diese Bilinearform invariant ist, stehen in der eckigen Klammer die Koordinaten eines Tensorfeldes 2. Stufe, die nach G. Seifert der **Isotropiebedingung** (2.48) genügen müssen. Diese Bedingung läßt sich allgemein bei orthogonalen Koordinatentransformationen (einschließlich Spiegelung) nur dadurch erfüllen, daß wir den Summanden mit dem Faktor A_3 in (3.12) ausschließen, so daß (3.10) entsteht, vgl. Beispiel 2.8.

Isotropie nach (3.10) setzt *Homogenität* voraus, d. h. der Punkt P, von dem der Vektor $\mathbf{r}$ abgetragen wird, ist beliebig. Jede Parallelverschiebung der „Zweipunktkonfiguration" PQ ist zulässig. Der Vektor $\mathbf{r}$ ist ein Tensor 1. Stufe, was schon benutzt wurde.

Mit der *Trilinearform*

$$\hat{L}(\mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = Q_{ijk}(\mathbf{r}, t)\, u_i v_j w_k$$

findet man durch entsprechende Überlegungen die Gestalt eines *isotropen Tensors 3. Stufe* mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} Q_{ijk}(\mathbf{r}, t) = {} & K_1(r^2, t)\, r_i r_j r_k + K_2(r^2, t)\, r_i \delta_{jk} \\ & + K_3(r^2, t)\, r_j \delta_{ik} + K_4(r^2, t)\, r_k \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die einfache *Linearform*

$$\hat{L}(\mathbf{r}, t; \mathbf{u}) = Q_i(\mathbf{r}, t)\, u_i$$

führt auf den *isotropen Tensor 1. Stufe* mit den Koordinaten

$$Q_i(\mathbf{r}, t) = C_1(r^2, t)\, r_i. \tag{3.14}$$

3.3. Der allgemeine Drehtensor 2. Stufe

Zur Vorbereitung soll die Vektorgleichung

$$\mathbf{v} = \nu_1 \mathbf{b}_1 + \nu_2 \mathbf{b}_2 + \nu_3 \mathbf{b}_3 \tag{3.15}$$

nach den ν_1, ν_2, ν_3 aufgelöst werden. Die Basisvektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ seien nicht komplanar, sonst beliebig! Wir multiplizieren (3.15) nach der Reihe skalar mit den vektoriellen Produkten $\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) &= [\mathbf{v}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] = \nu_1[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] + \nu_2[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] + \nu_3[\mathbf{b}_3\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3], \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) &= [\mathbf{v}\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1] = \nu_1[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1] + \nu_2[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1] + \nu_3[\mathbf{b}_3\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1], \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) &= [\mathbf{v}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] = \nu_1[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] + \nu_2[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] + \nu_3[\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]. \end{aligned}$$

Das Spatprodukt verschwindet, wenn zwei Vektoren (parallel oder speziell) gleich sind. Beachten wir außerdem die Umstellungsregeln (1.37) und die Voraussetzung $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] = D \neq 0$, so lautet die Lösung

$$\nu_1 = \frac{[\mathbf{v}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \nu_2 = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{v}\mathbf{b}_3]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \nu_3 = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{v}]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]} \tag{3.16}$$

oder auch zur Erinnerung an die Cramersche Regel

$$\nu_1 = D_1/D, \quad \nu_2 = D_2/D, \quad \nu_3 = D_3/D.$$

Wir betrachten die Drehbewegung eines Massenpunktes um eine beliebige Achse durch den Ursprung des KS, also eine *Punkttransformation*, die von einem Tensor 2. Stufe vermittelt wird. Dieser Tensor sei der *Drehtensor* **K**. Von einem Bewegungsmechanismus mit einer Punktmasse wollen wir absehen und die Aufgabe geometrisch behandeln, so daß der Endpunkt des Ortsvektors **x** mit Hilfe des Drehtensors **K** auf den Endpunkt des Ortsvektors **x**′ abgebildet wird, so daß die affine Abbildung

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}' \tag{3.17}$$

entsteht. (Bei Übergang von B auf $\bar{B}$ durch Drehung des Bezugssystems wird hingegen der betrachtete Punkt *festgehalten*. Dabei handelt es sich um eine orthogonale *Koordinatentransformation*, die von einer Matrix $\underset{\sim}{C}$ vermittelt wird, *nicht* von einem Tensor 2. Stufe.) Nach Bild 3.3 wird ein Punkt P eines Kreises (in der Ebene senkrecht zur

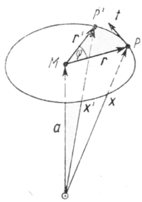


Bild 3.3: Zum allgemeinen Drehtensor

Drehachse durch P) auf einen anderen Kreispunkt P' abgebildet. Wir beziehen uns auf Bild 3.3, wo die geometrischen Beziehungen

$$|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|, \quad |\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}| = r, \quad \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r^2 \cos\varphi,$$
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^0 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{a}^0 = |\mathbf{a}|, \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a} + \mathbf{r}',$$
$$\mathbf{r}^0 \times \mathbf{t} = \mathbf{a}^0, \quad \mathbf{a}^0 \times \mathbf{r}^0 = \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} \times \mathbf{a}^0 = \mathbf{r}^0$$

abgelesen werden, wenn **t** wieder den Tangenteneinheitsvektor des Kreises bezeichnet. Die Einheitsvektoren $\mathbf{a}^0$, $\mathbf{r}^0$, **t** bilden in dieser Reihenfolge ein orthonormiertes Rechtssystem. Der Bildvektor **x**′ werde in dieser Basis dargestellt

$$\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{a}^0 + \mu\mathbf{r}^0 + \nu\mathbf{t}. \tag{3.18}$$

Die Aufgabe wird zunächst algebraisch nach dem Muster (3.15), (3.16) gelöst:

$$\lambda = [\mathbf{x}'\mathbf{r}^0\mathbf{t}] = \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{r}^0 \times \mathbf{t}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{a}^0 = |\mathbf{a}|,$$
$$\mu = [\mathbf{a}^0\mathbf{x}'\mathbf{t}] = [\mathbf{a}^0\mathbf{a}\mathbf{t}] + [\mathbf{a}^0\mathbf{r}'\mathbf{t}] = [\mathbf{r}'\mathbf{t}\mathbf{a}^0],$$
$$\mu = \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{a}^0) = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}^0 = r\cos\varphi,$$
$$\nu = [\mathbf{a}^0\mathbf{r}^0\mathbf{x}'] = [\mathbf{a}^0\mathbf{r}^0\mathbf{a}] + [\mathbf{a}^0\mathbf{r}^0\mathbf{r}'] = [\mathbf{a}^0\mathbf{r}^0\mathbf{r}'],$$
$$\nu = \mathbf{a}^0 \cdot (\mathbf{r}^0 \times \mathbf{r}') = \mathbf{a}^0 \cdot r\sin\varphi\mathbf{a}^0 = r\sin\varphi,$$

so daß (3.18) lautet

$$\mathbf{x}' = |\mathbf{a}|\mathbf{a}^0 + r\cos\varphi\mathbf{r}^0 + r\sin\varphi\mathbf{t}. \tag{3.19}$$

Das Problem besteht aber darin, bei Vorgabe der für die Drehung charakteristischen Größen $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ und φ (Ortsvektor, Achsenvektor und Drehwinkel) den *Drehtensor* zu ermitteln. Unter diesem Gesichtspunkt wird (3.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{a} + \mathbf{r}\cos\varphi + r\sin\varphi\mathbf{t} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{r}\cos\varphi + r\sin\varphi(\mathbf{a}^0 \times \mathbf{r}^0), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{a}(1 - \cos\varphi) + \mathbf{x}\cos\varphi + \sin\varphi(\mathbf{a}^0 \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

wegen $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ und $\mathbf{a}^0 \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ schließlich

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}(1 - \cos\varphi) + \mathbf{x}\cos\varphi + \sin\varphi(\mathbf{a}^0 \times \mathbf{x}). \tag{3.20}$$

Die affine Abbildungsaufgabe ist damit gelöst.

Wie sieht der Drehtensor (Affinor) aus, der diese Abbildung vermittelt? Wir benutzen

$$|\mathbf{a}| = \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}^0|\mathbf{a}| = \mathbf{a}^0\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}$$

und (2.28) $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Damit lautet (3.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{a}^0\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{x}(1 - \cos\varphi) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}\cos\varphi + \sin\varphi(\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}^0 \\ &= [\mathbf{a}^0\mathbf{a}^0(1 - \cos\varphi) + \mathbf{I}\cos\varphi - \sin\varphi(\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^0)] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Der Drehtensor ist, wenn wir noch (3.2) und (2.19) heranziehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{a}^0\mathbf{a}^0(1 - \cos\varphi) + \mathbf{I}\cos\varphi - \sin\varphi\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}^0 \\ &= [a_i^0 a_k^0(1 - \cos\varphi) + \delta_{ik}\cos\varphi - \sin\varphi\, \varepsilon_{ikl}a_l^0]\, \mathbf{e}_i\mathbf{e}_k. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Der Tensor $\mathbf{K}$ ist nicht isotrop und auch nicht symmetrisch.

Aufgabe 3.3: Wie gelangt man unter der Voraussetzung $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$ von (3.20) wieder zur Grundformel (1.33) $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{x}$ für die Drehbewegung eines Massenpunktes im Verband eines starren Körpers?

Aufgabe 3.4: Man untersuche die speziellen orthogonalen Transformationen bei Drehung um die x_3-Achse, und zwar

a) durch Einführung des Winkels $(\bar{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_1) = \alpha$ die *Koordinatentransformation* mit der Koeffizientenmatrix $\underset{\sim}{C}$ bei Drehung des Bezugssystems,
b) durch Einführung des positiven Winkels α, den der Originalvektor $\mathbf{x}$ und Bildvektor $\mathbf{x}'$ bei der affinen längentreuen Abbildung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ in demselben KS miteinander bilden, wenn $\mathbf{A}$ den speziellen Drehtensor dieser *Punkttransformation* bei der gedachten Drehbewegung des Punktes P um die x_3-Achse in die Lage P' bedeutet.

Man gebe die Elemente der Matrix $\underset{\sim}{C}$ und die Koordinaten des Tensors $\mathbf{A}$ an. Man überprüfe die Bedingungen für orthogonale Transformationen allgemein und speziell für die Drehtransformation.

3.4. Hauptachsenform und skalare Invariante eines symmetrischen Tensors 2. Stufe. Hauptachsentransformation

Beim *Hauptachsenproblem* kommen beide Transformationsarten ins Spiel: Ein *Tensor* 2. Stufe leistet in demselben KS vermöge $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ eine *Punkttransformation*, in geometrischer Sprache eine affine Abbildung. Bei Übergang von B auf $\bar{B}$ wird hingegen die *Koordinatentransformation* $\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\bar{x}}$ von einer Transformationsmatrix $\underset{\sim}{C}$ vermittelt. Die Tensorkoordinaten müssen den Transformationsgesetzen gehorchen, während es für die Elemente einer Matrix keine Transformationsgesetze gibt.

Durch Drehung des Bezugssystems B in die Lage $\bar{B}$ soll der gegebene *symmetrische* Tensor $\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ auf die *Hauptachsenform*

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\sigma}_{(11)}\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\sigma}_{(22)}\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\sigma}_{(33)}\bar{\mathbf{e}}_3\bar{\mathbf{e}}_3 \tag{3.22}$$

gebracht werden. Welche Transformationsmatrix $\underset{\sim}{C}$ leistet eine solche Drehung des KS, daß $\mathbf{S}$ in $\bar{\mathbf{S}}$ nach (3.22) übergeht? Die *Querstriche* beziehen sich hier auf das gesuchte *Hauptachsensystem* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$. Wegen $\bar{\mathbf{e}}_k = c_{kl}\mathbf{e}_l$ sind die c_{kl} so zu bestimmen, daß der Tensor $\mathbf{S}$ mit Hilfe der gesuchten Transformationsmatrix $\underset{\sim}{C} = ((c_{kl}))$ die Gestalt (3.22) annimmt. Obwohl nur Hauptachsenrichtungen (Gerade) ermittelt werden können, wollen wir diese mit „Eigenvektoren" angeben, die dann nur bis auf je einen Faktor bestimmt sind, über den man so verfügen kann, daß Einheitsvektoren $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ entstehen. Die gesuchten Basisvektoren

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = c_{1l}\mathbf{e}_l, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = c_{2l}\mathbf{e}_l, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = c_{3l}\mathbf{e}_l \tag{3.23}$$

bilden das *Hauptachsensystem*.

Für orthogonale Transformationen wird das Transformationsgesetz (1.48) der Tensorkoordinaten

$$\bar{\sigma}_{ik} = c_{im}c_{kn}\sigma_{mn}$$

in

$$c_{il}\bar{\sigma}_{ik} = c_{il}c_{im}c_{kn}\sigma_{mn} = \delta_{lm}c_{kn}\sigma_{mn}$$

oder

$$c_{il}\bar{\sigma}_{ik} = c_{kn}\sigma_{ln}$$

überführt. Wir schreiben

$$c_{kn}\sigma_{ln} = c_{il}\bar{\sigma}_{ik}$$

und berücksichtigen in diesem Gleichungssystem die *Hauptachsenbedingung*

$$\bar{\sigma}_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \tag{3.24}$$

in der Formulierung

$$c_{kn}\sigma_{ln} = c_{kl}\bar{\sigma}_{(kk)}. \tag{3.25}$$

Auf der rechten Seite wird mit $\bar{\sigma}_{(kk)}$ angedeutet, daß dort *nicht* über k summiert werden darf, da nur die Tensorkoordinaten $\bar{\sigma}_{ik} = 0$ für $i \neq k$ ausgeschlossen worden sind. Dagegen ist auf der linken Seite nach wie vor über n zu summieren. Wir erhalten so für $l = 1, 2, 3$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
c_{k1}\sigma_{11} + c_{k2}\sigma_{12} + c_{k3}\sigma_{13} &= c_{k1}\bar{\sigma}_{(kk)},\\
c_{k1}\sigma_{21} + c_{k2}\sigma_{22} + c_{k3}\sigma_{23} &= c_{k2}\bar{\sigma}_{(kk)},\\
c_{k1}\sigma_{31} + c_{k2}\sigma_{32} + c_{k3}\sigma_{33} &= c_{k3}\bar{\sigma}_{(kk)},
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
c_{k1}(\sigma_{11} - \bar{\sigma}_{(kk)}) + c_{k2}\sigma_{12} \qquad\qquad + c_{k3}\sigma_{13} \qquad\qquad &= 0, \\
c_{k1}\sigma_{21} \qquad\qquad + c_{k2}(\sigma_{22} - \bar{\sigma}_{(kk)}) + c_{k3}\sigma_{23} \qquad\qquad &= 0, \\
c_{k1}\sigma_{31} \qquad\qquad + c_{k2}\sigma_{32} \qquad\qquad + c_{k3}(\sigma_{33} - \bar{\sigma}_{(kk)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Das lineare homogene Gleichungssystem (3.26) für die Unbekannten c_{k1}, c_{k2}, c_{k3} hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \bar{\sigma}_{(kk)}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22} - \bar{\sigma}_{(kk)}, & \sigma_{23} \\ \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33} - \bar{\sigma}_{(kk)} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

ist. Der gesamte weitere Lösungsprozeß ist ihnen aus der „Linearen Algebra" bekannt, wo das Kapitel „Eigenwertprobleme bei Matrizen" ausführlich behandelt worden ist. Nach dem Entwicklungssatz oder nach der Sarrusschen Regel berechnet man die Determinante der Bedingungsgleichung (3.27) und erhält eine algebraische Gleichung 3. Grades der Form

$$-\bar{\sigma}_{(kk)}^3 + A\bar{\sigma}_{(kk)}^2 - B\bar{\sigma}_{(kk)} + C = 0. \tag{3.28}$$

Die Wurzeln $\bar{\sigma}_{(11)}, \bar{\sigma}_{(22)}, \bar{\sigma}_{(33)}$ sind die *Eigenwerte* des Hauptachsenproblems.

Diese drei Zahlen werden nach der Reihe für $k = 1, 2, 3$ in das homogene Gleichungssystem (3.26) eingesetzt, speziell unter der Voraussetzung, daß es sich um drei verschiedene reelle Wurzeln handelt. Es entsteht je ein Gleichungssystem für $k = 1$ mit $\bar{\sigma}_{(11)}$, für $k = 2$ mit $\bar{\sigma}_{(22)}$ und für $k = 3$ mit $\bar{\sigma}_{(33)}$. Die zugeordneten (normierten) Lösungen sind

$$\begin{aligned}
&c_{11}, c_{12}, c_{13} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{e}}_1 = c_{1l}\mathbf{e}_l \quad \text{für} \quad k = 1, \\
&c_{21}, c_{22}, c_{23} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = c_{2l}\mathbf{e}_l \quad \text{für} \quad k = 2, \\
&c_{31}, c_{32}, c_{33} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = c_{3l}\mathbf{e}_l \quad \text{für} \quad k = 3.
\end{aligned}$$

Die den Eigenwerten $\bar{\sigma}_{(kk)}$ zugeordneten *Eigenvektoren* $\bar{\mathbf{e}}_k = c_{kl}\mathbf{e}_l$ sind die Basisvektoren des gesuchten Hauptachsensystems. Die Eigenvektoren sind insgesamt *keine* Tensoren 1. Stufe.

Aufgabe 3.5: Gesucht sind jene *Hauptrichtungen* (Gerade), für die bei der affinen Abbildung $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ speziell keine Richtungsänderung zwischen Original- und Bildvektor eintritt, so daß für die affine Parallelabbildung die Bedingung $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$ erfüllt ist.

Satz 3.2: *Die Koeffizienten A, B, C der charakteristischen Gleichung* (3.28) *sind* **skalare Invariante** *des symmetrischen Tensors* **S**. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
A &= \bar{\sigma}_{(11)} + \bar{\sigma}_{(22)} + \bar{\sigma}_{(33)} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\
B &= \bar{\sigma}_{(11)}\bar{\sigma}_{(22)} + \bar{\sigma}_{(22)}\bar{\sigma}_{(33)} + \bar{\sigma}_{(33)}\bar{\sigma}_{(11)} \\
&= \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2, \\
C &= \bar{\sigma}_{(11)}\bar{\sigma}_{(22)}\bar{\sigma}_{(33)} = \|\sigma_{ik}\|.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Die überstrichenen Tensorkoordinaten $\bar{\sigma}_{(kk)}$ beziehen sich auf das spezielle Hauptachsensystem $\bar{B}$, während die ungestrichenen σ_{ik} auf ein beliebiges kartesisches KS B bezogen werden können. Für alle zulässigen Bezugssysteme B sind die rechts stehenden Ausdrücke gleich den links stehenden speziellen Werten, also *invariant*.

Die Formeln (3.29) ergeben sich in den gestrichenen Größen, wenn man die Abkürzungen $\lambda = \bar{\sigma}_{(kk)}$, $\lambda_1 = \bar{\sigma}_{(11)}$, $\lambda_2 = \bar{\sigma}_{(22)}$, $\lambda_3 = \bar{\sigma}_{(33)}$ einführt und die linke Seite von (3.28) in lineare Wurzelfaktoren zerlegt:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 A - \lambda B + C = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 .$$

Die Ausdrücke von (3.29) in den ungestrichenen Größen erhält man durch Ausrechnen der Determinante (3.27) und Ordnen nach Potenzen von $\lambda = \bar{\sigma}_{(kk)}$.

Die Hauptachsentransformation eines Tensors 2. Stufe ist von großer praktischer Bedeutung. Man stellt z. B. die Beziehung zwischen dem Spannungs- und Verzerrungstensor im einfachen Hauptachsensystem $\bar{B}$ auf und kann die tensorielle Beziehung dann ohne weiteres auf jedes andere kartesische Bezugssystem B umrechnen, entweder mit Hilfe der Transformationsgesetze für die Tensorkoordinaten oder mit Hilfe der skalaren Invarianten nach (3.29). Da im allgemeinen die Hauptachsen in einem deformierten Körper von Punkt zu Punkt ihre Richtung ändern, ist die Umrechnung von $\bar{B}$ auf B sehr wichtig.

3.5. Tensor der Trägheitsmomente. Tensorellipsoid

Wir ziehen die Beispiele 1.5 und 1.6 heran und berechnen die *kinetische Energie* des Massenpunktes bei seiner Drehbewegung um die Achse mittels (1.33):

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(\mathbf{u} \times \mathbf{x})^2. \tag{3.30}$$

Der *Vektor der Winkelgeschwindigkeit* (Drehvektor) sei

$$\mathbf{u} = \omega\mathbf{a}^0 = \omega_i\mathbf{e}_i , \tag{3.31}$$

so daß

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{x})^2 = \mathbf{u}^2\mathbf{x}^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2 = \omega_i\omega_i\mathbf{x}^2 - (\omega_i x_i)^2$$

folgt. Die Umformungen

$$\omega_i\omega_i = \omega_i\omega_k\delta_{ik}, \quad (\omega_i x_i)^2 = \omega_i x_i \omega_k x_k = \omega_i\omega_k x_i x_k$$

ergeben

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2\omega_i\omega_k\delta_{ik} - \omega_i\omega_k x_i x_k ,$$

also die *quadratische Form*

$$2E_{\text{kin}} = m(\mathbf{x}^2\delta_{ik} - x_i x_k)\,\omega_i\omega_k = \tau_{ik}\omega_i\omega_k \tag{3.32}$$

in den Koordinaten ω_i des Drehvektors $\mathbf{u}$. Da die kinetische Energie des Teilchens nicht vom zufällig benutzten KS abhängt und der physikalische Drehvektor ein Tensor 1. Stufe ist, muß

$$\mathbf{T} = \tau_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = m(\mathbf{x}^2\delta_{ik} - x_i x_k)\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$$
$$= m(\mathbf{x}^2\mathbf{I} - \mathbf{x}\mathbf{x}) = m\mathbf{x}^2(\mathbf{I} - \mathbf{x}^0\mathbf{x}^0) \tag{3.33}$$

ein Tensor 2. Stufe sein, der offenbar *symmetrisch* ist. Das ist der *Tensor der Trägheitsmomente* für das behandelte Einteilchensystem. Wir nennen ihn kurz „Trägheitstensor". Der *Trägheitstensor* erzeugt die quadratische Form (3.32)

$$\hat{L}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \tau_{ik}\omega_i\omega_k. \tag{3.34}$$

Seine Koordinaten $\tau_{ik} = -mx_ix_k$ für $i \neq k$ heißen *Deviationsmomente*;

$$\tau_{11} = m(x_2^2 + x_3^2), \quad \tau_{22} = m(x_3^2 + x_1^2), \quad \tau_{33} = m(x_1^2 + x_2^2)$$

heißen *Hauptträgheitsmomente*.

Beispiel 3.3: Man berechne den Vektor des Drehimpulses $\mathbf{q}$. Der Teilchenimpuls ist $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Damit wird der *Drehimpulsvektor* (Drall)

$$\mathbf{q} = q_i\mathbf{e}_i = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) \tag{3.35}$$

definiert. Zur Berechnung von $\mathbf{q}$ wenden wir den Verbindungssatz (1.30) an:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= m(\mathbf{x} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{x})) = m(\mathbf{x}^2\mathbf{u} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})\mathbf{x}) \\ &= m(\mathbf{x}^2\omega_i\mathbf{e}_i - x_k\omega_k x_i\mathbf{e}_i) = q_i\mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Mit $\omega_i = \omega_k\delta_{ik}$ erhalten wir den Drehimpuls

$$\mathbf{q} = m(\mathbf{x}^2\delta_{ik} - x_ix_k)\,\omega_k\mathbf{e}_i = \tau_{ik}\omega_k\mathbf{e}_i = q_i\mathbf{e}_i \tag{3.36}$$

oder auch

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}. \tag{3.37}$$

Das entspricht geometrisch der von dem zweistufigen Tensor $\mathbf{T}$ vermittelten affinen Abbildung

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}. \tag{3.38}$$

Den *Achseneinheitsvektor* bezeichnen wir mit $\mathbf{a}^0 = \mathbf{n}$. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\mathbf{u} = \omega\mathbf{n} = \omega_i\mathbf{e}_i. \tag{3.39}$$

Die momentane Drehachse ist nur im Ursprung des KS fixiert; sie kann im Laufe der Zeit ihre mit $\mathbf{n}$ gegebene Richtung ändern: $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$. Mit dem Achseneinheitsvektor $\mathbf{n}$ definieren wir den Skalar

$$\Theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \tag{3.40}$$

und nennen ihn *skalares Trägheitsmoment* Θ. In der technischen Literatur sind die Bezeichnungen $\tau_{ik} = I_{ik}$ und $\Theta = I$ üblich.

Aufgabe 3.6: Man bestätige die Formeln

$$E_{\text{kin}} = \frac{\Theta}{2}\omega^2, \quad \Theta = m(\mathbf{n} \times \mathbf{x})^2, \tag{3.41}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_n = \Theta\omega. \tag{3.42}$$

Aufgabe 3.7: Die Drehachse werde speziell in die Richtung von $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$ gelegt. Folgende Beziehungen sind zu bestätigen:

$$\Theta = \tau_{33}, \quad q_3 = \tau_{33}\omega, \quad E_{\text{kin}} = \frac{\omega}{2}q_3. \tag{3.43}$$

In der Tensorrechnung sagt man, daß der *symmetrische Tensor* **T** die *quadratische Form* erzeugt gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} &= u_i\mathbf{e}_i\cdot\tau_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\cdot u_l\mathbf{e}_l = \tau_{jk}u_iu_l\delta_{ij}\delta_{kl},\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} &= \tau_{ik}u_iu_k = \hat{L}(\mathbf{u},\mathbf{u}).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Bei physikalischen Anwendungen kann man einem symmetrischen Tensor 2. Stufe immer ein *Tensorellipsoid* zuordnen, indem man die physikalischen Vektoren in Ortsvektoren übersetzt und die Tensorkoordinaten τ_{ik} als (dimensionslose) Zahlen a_{ik} betrachtet, so daß z. B.

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{q},\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}$$

in

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}',\quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$$

übergeht. Als geometrische Hilfskonstruktion benutzt man die Gleichung

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = a_{ik}x_ix_k = 1 \tag{3.45}$$

oder in Hauptachsenform

$$\bar{\mathbf{x}}\cdot\bar{\mathbf{A}}\cdot\bar{\mathbf{x}} = \lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 + \lambda_3\bar{x}_3^2 = 1\,. \tag{3.46}$$

Die Gl. (3.46) stellt die Mittelpunktsgleichung einer Fläche 2. Grades in der Normalform dar.

Die Beträge der physikalischen Vektoren sind stets endlich, z. B. $|\mathbf{u}| < \infty$. Die Forderung $|\mathbf{x}| < \infty$ schließt Flächen aus, die sich ins Unendliche erstrecken, so daß es sich in (3.46) nur um ein Ellipsoid handeln kann. Dann sind alle Eigenwerte $\lambda_k = 1/a_k^2$ positiv. Die quadratische Form heißt dann *positiv definit:*

$$\hat{L}(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},\quad \hat{L}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Satz 3.3: *Einem physikalischen symmetrischen Tensor 2. Stufe kann man immer ein* **Tensorellipsoid** *zuordnen, das im Hauptachsensystem die Halbachsen $a_k = 1/\sqrt{\lambda_k}$ besitzt, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die positiven Eigenwerte des Hauptachsenproblems bedeuten. Das Tensorellipsoid stellt in den physikalischen Anwendungen eine* **Fläche konstanter Energie** *dar.*

Beispiel 3.4: Nach (3.32) ist

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\tau_{ik}\omega_i\omega_k = \text{const}$$

eine Fläche konstanter kinetischer Energie. Bezeichnet **S** den Spannungstensor, so ist der Skalar

$$\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \text{const}$$

eine Energiedichte (Energie je Volumeinheit). In den Beispielen handelt es sich um das *Trägheitsellipsoid* und das *Spannungsellipsoid.*

Da wir im nächsten Abschnitt mit der Tensoranalysis beginnen, sei hier ein Vorgriff gestattet. Beschreibt der Endpunkt P des Ortsvektors $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$ die Ellipsoidfläche, so liegt der Differentialvektor d$\mathbf{x}$ in der Tangentenebene, welche die Fläche in P berührt. Wird Gl. (3.45) differenziert, so folgt $\mathrm{d}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = 0$ oder

$$\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0 \tag{3.47}$$

d. h., der Bildvektor $\mathbf{x}'$ ist normal zur Ellipsoidfläche gerichtet. Bezeichnet $\mathbf{N}$ einen Normalenvektor in P, so gilt nach (3.45) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = |\mathbf{x}||\mathbf{x}'| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x}||\mathbf{x}'| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{N}) = 1$, also

$$|\mathbf{x}'| = \frac{1}{|\mathbf{x}| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{N})} \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < (\mathbf{x}, \mathbf{N}) < +\frac{\pi}{2}.$$

Durch Rückübersetzung kann man am Trägheitsellipsoid für jeden Vektor $\mathbf{u}$ den zugehörigen Drehimpulsvektor $\mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$ in Richtung der Normalen mit dem Betrag $|\mathbf{q}| = 1/|\mathbf{u}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{N})$ konstruieren. Besonders nützlich für die Anwendungen ist die festgestellte Richtungsbeziehung, indem man zu jeder gegebenen Richtung von $\mathbf{u}$ oder $\mathbf{n}$ sofort die zugehörige Richtung von $\mathbf{q}$ oder $\mathbf{p}_n$ als Normalenrichtung am Tensorellipsoid ablesen kann.

In der Technischen Mechanik rotiert an Stelle des Einteilchensystems entweder ein System von n Massenpunkten oder ein starrer Körper um die Drehachse. Im 2. Fall muß über alle differentiellen Massenanteile $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$, die im Gesamtvolumen V des Körpers enthalten sind, integriert werden. Formal lassen sich die Kenngrößen ab (3.30) mit Hilfe des Bereichsintegraloperators

$$\iiint\limits_{(V)} \ldots \varrho\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} \varrho\,\mathrm{d}V \ldots = \iiint\limits_{(M)} \mathrm{d}m \ldots = \hat{M} \ldots \tag{3.48}$$

ohne weiteres umschreiben, wenn man m durch den linearen Operator $\hat{M}$ ersetzt, z. B.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin}} &= \hat{\boldsymbol{M}}\tfrac{1}{2}\mathbf{v}^2 = \tfrac{1}{2} \iiint\limits_{(V)} \mathbf{v}^2 \varrho\,\mathrm{d}V, \\ \tau_{ik} &= \hat{\boldsymbol{M}}(\mathbf{x}^2\delta_{ik} - x_i x_k) = \iiint\limits_{(V)} (\mathbf{x}^2\delta_{ik} - x_i x_k)\,\varrho\,\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{3.49}$$

4. Vektor- und Tensoranalysis mit orthonormierter Basis

4.1. Gradientenfelder, Divergenz und Rotor eines Tensorfeldes erster Stufe

Ein *linearer Operator* wird in der Analysis anders als in der Algebra *definiert*. Der Definitionsbereich des Operators $\hat{A}$ enthalte nach Verabredung entweder die Folge $\{\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots\}$ der skalaren Ortsfunktionen $\varphi_n(\mathbf{x})$ *oder* die Folge $\{\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \mathbf{v}_2(\mathbf{x}), \ldots\}$ der vektoriellen Ortsfunktionen $\mathbf{v}_n(\mathbf{x})$.

Definition 4.1: *Der Operator $\hat{A}$ ist* **stetig**, *wenn aus* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi^*$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}(\varphi_n) = \hat{A}\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right) = \hat{A}(\varphi^*)$$

oder (in Kurzschreibweise), wenn

$$\text{aus } \mathbf{v}_n \to \mathbf{v}^* \text{ folgt } \hat{A}\mathbf{v}_n \to \hat{A}\mathbf{v}^*. \tag{4.1}$$

Definition 4.2: *Ein Operator mit der Eigenschaft*

$$\hat{A}(\varphi + \psi) = \hat{A}\varphi + \hat{A}\psi \quad \text{oder} \quad \hat{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{A}\mathbf{u} + \hat{A}\mathbf{v}$$

heißt **additiv**. *Ein Operator $\hat{A}$ heißt* **linear**, *wenn er additiv und stetig ist.*

Daraus folgt, daß der lineare Operator *homogen* ist, d. h.

$$\hat{A}(\lambda\varphi) = \lambda\hat{A}\varphi \quad \textit{oder} \quad \hat{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\hat{A}\mathbf{v}.$$

Ein *linearer Operator* hat also auch in der Analysis die Eigenschaften

$$\hat{A}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\hat{A}\varphi + \mu\hat{A}\psi \quad \text{oder} \quad \hat{A}(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\hat{A}\mathbf{u} + \mu\hat{A}\mathbf{v}. \tag{4.2}$$

Das Operatorsymbol ∇ soll für sich sprechen; hier wird auf das Operatorzeichen ^ verzichtet. Der *Nabla-Operator* wird als Vektor in der Komponentendarstellung

$$\nabla = \mathbf{e}_i\partial_i = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{4.3}$$

mit den Koordinaten

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

eingeführt, wobei wieder ein kartesisches Basissystem mit $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = 1$ zugrunde gelegt wird.

Satz 4.1: *Der Nabla-Operator ist linear.*

Sind $\varphi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ oder $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ Tensorfelder nullter oder erster Stufe, so gilt für die (allgemeinen) *Produkte* entsprechend (4.2):

$$\nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi \quad \text{oder} \quad \nabla(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\nabla\mathbf{u} + \mu\nabla\mathbf{v}, \tag{4.5}$$

aber auch speziell

$$\nabla \cdot (\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{4.6}$$

$$\nabla \times (\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\nabla \times \mathbf{u} + \mu\nabla \times \mathbf{v}. \tag{$\overline{4.6}$}$$

Die Stetigkeitsbedingungen sind erfüllt, denn

$$\text{aus } \mathbf{v}_n \to \mathbf{v}^* \text{ folgt } \nabla\mathbf{v}_n \to \nabla\mathbf{v}^* \tag{4.7}$$

usw.

Als *Hauptsatz* der Tensoranalysis bezeichnen wir die Invarianz des Nabla-Operators

$$\nabla = \mathbf{e}_i\partial_i = \bar{\mathbf{e}}_i\bar{\partial}_i = \bar{\nabla}, \tag{4.8}$$

so daß die Transformationsgesetze (1.14)

$$\bar{\partial}_i = c_{ik}\partial_k, \quad \partial_i = c_{ki}\bar{\partial}_k \tag{4.9}$$

gelten müssen. Der Nabla-Operator ∇ ist ein partieller Ableitungsoperator mit Vektorcharakter. Der Hauptsatz ergibt den

Satz 4.2: *Der Nabla-Operator* (4.8) *ist ein Tensor 1. Stufe.*

Diese Aussage wird axiomatisch vorangestellt. Durch die koordinatenfreie Darstellung des Nabla-Operators wird sie im Abschnitt 4.3. bewiesen. Das Skalarfeld $\nabla \cdot \mathbf{w} = q$ beschreibt mit $\mathbf{w}$ als Strömungsgeschwindigkeit eine *Quelldichte* q, die sicher vom KS unabhängig ist. Das Vektorfeld $\nabla \times \mathbf{w} = \boldsymbol{\gamma}$ beschreibt eine **Wirbeldichte** $\boldsymbol{\gamma}$, die ebenfalls unabhängig vom KS existieren muß. Da das Vektorfeld der Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ ein Tensorfeld 1. Stufe ist, muß auch ∇ ein Tensor 1. Stufe sein.

Wenn nichts anderes gesagt wird, soll der Ausdruck rechts vom Nabla-Operator differenziert werden. Wir bilden das Produkt des Nabla-Operators mit einem Tensorfeld 2. Stufe

$$\nabla\mathbf{T} = \mathbf{e}_k\partial_k\tau_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \partial_k\tau_{ij}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{4.10}$$

Da die Basisvektoren Konstante sind, werden nur die Tensorkoordinaten differenziert. Durch Verallgemeinerung erhalten wir den

Satz 4.3: *Das Produkt des Nablaoperators mit einem Tensor n-ter Stufe ergibt einen Tensor der Stufe $n + 1$:*

$$\nabla\mathbf{A}^{(n)} = \partial_k a_{i_1 i_2 \ldots i_n}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}. \tag{4.11}$$

Das innere Produkt ergibt hingegen einen Tensor der Stufe $n - 1$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^{(n)} = \partial_k a_{k i_2 \ldots i_n}\mathbf{e}_{i_2}\ldots\mathbf{e}_{i_n}. \tag{4.12}$$

Speziell entsteht also ein Tensor 2. oder 0. Stufe, wenn wir

$$\nabla\mathbf{v} = \partial_i v_k \mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \tag{4.13}$$

oder

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i = \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{4.14}$$

bilden. Das Tensorfeld (4.13) heißt „lokale Dyade", gelegentlich auch „Vektorgradient". Das Skalarfeld div $\mathbf{v}$ wird „*Divergenz* des einstufigen Tensorfeldes $\mathbf{v}$" genannt. Wir schreiben

$$\nabla = \mathbf{grad}, \quad \nabla \cdot = \operatorname{div}, \quad \nabla \times = \mathbf{rot}, \tag{4.15}$$

um auf Gradientenfelder, Quellenfelder, Wirbelfelder hinzuweisen. Sind $\varphi(\mathbf{x})$ bzw.

$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ Tensorfelder der Stufe 0 bzw. 1, so gelten folgende

Definitionen 4.3:

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{v} &= \mathbf{grad}\,\mathbf{v} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \partial_i v_k = \bar{\mathbf{e}}_i \bar{\mathbf{e}}_k \bar{\partial}_i \bar{v}_k, \\
\nabla \varphi &= \mathbf{grad}\,\varphi = \partial_i \varphi = \bar{\partial}_i \bar{\varphi}, \\
\nabla \cdot \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_i v_i = \bar{\partial}_i \bar{v}_i, \\
\nabla \times \mathbf{v} &= \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \bar{\mathbf{e}}_i \bar{\varepsilon}_{ijk} \bar{\partial}_j \bar{v}_k
\end{aligned} \tag{4.16}$$

nach (2.28). Man nennt **grad** φ „*Gradient* des Skalarfeldes φ" und **rot v** „*Rotor* des einstufigen Tensorfeldes **v**". Die Ausdrücke (4.16) stellen nach der Reihe Tensorfelder der Stufe 2, 1, 0, 1 dar.

4.2. Einfache Nabla-Operationen

Der Nabla-Operator wirkt nach der *Produktregel der Differentialrechnung* auf alle Größen, die rechts von ∇ stehen. Es ist aber rechentechnisch zweckmäßig, wenn man wie in Band 4 die Größe mit einem Pfeil kennzeichnet, die differenziert werden soll, z. B.

$$\nabla \cdot \left(\overset{\downarrow}{\varphi}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \left(\nabla \overset{\downarrow}{\varphi}\right) \cdot \mathbf{v} + \left(\nabla \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) \varphi. \tag{4.17}$$

Außerordentlich wichtig ist die Unterscheidung von Operatorbildung und Anwendung des Operators, wobei der Operator auch nach links wirken kann:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = v_i \partial_i, \quad \text{aber} \quad \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \cdot \nabla = \overset{\downarrow}{v}_i \partial_i = \partial_i v_i.$$

Falls v_k nicht differenziert werden soll, schreibt man $v_k \partial_i$, denn $\partial_i v_k = \partial v_k / \partial x_i$ ist eindeutig festgelegt, entsprechend $\nabla \mathbf{v} = \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}$. In dieser Bezeichnungsweise gilt mit Pfeilmarkierung:

$$\begin{aligned}
\nabla \varphi &= \nabla \overset{\downarrow}{\varphi} = \overset{\downarrow}{\varphi} \nabla, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} = \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \cdot \nabla, \\
\nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} = -\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \times \nabla\right), \quad \text{aber} \quad \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \neq \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \nabla.
\end{aligned}$$

Nur in Ausnahmefällen müssen wir den *Wirkoperator* vom Blindoperator unterscheiden und *Blindoperatoren*, die in dem jeweils angeschriebenen Ausdruck *nicht* wirken sollen, besonders kenntlich machen durch ∂_k^c oder ∇^c. So ist $\partial_i \partial_k \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_k$ ein Skalarfeld, aber $\partial_i \varphi \partial_k = \partial_i \partial_k^c \varphi$ ein Operator. Als Ausnahmefall bezeichnet das Spatprodukt

$$\left[\nabla^c \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right] = \left[\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \nabla^c\right] = \left(\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) \cdot \nabla \tag{4.18}$$

einen Operator, aber es gilt

$$\left[\nabla \nabla \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right] = (\nabla \times \nabla) \cdot \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}} = 0. \tag{4.19}$$

Wir wenden uns den „Nabla-Operationen", d. h. den *Rechenregeln* mit dem Nabla-Operator zu. Die Zulässigkeit jedes Rechenschritts muß in der Koordinatendarstellung bewiesen werden!

Beispiel 4.1: Um (4.17) zu beweisen, berechnen wir

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \mathbf{v}) = \mathbf{e}_i \partial_i \cdot (\varphi v_k \mathbf{e}_k) = \partial_k(\varphi v_k) = (\partial_k \varphi)\, v_k + (\partial_k v_k)\, \varphi\,,$$

also auch

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\, \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{4.20}$$

Beispiel 4.2: Der Ausdruck div $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ist umzuformen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \partial_i \varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i (u_j v_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} v_k \partial_i u_j + \varepsilon_{ijk} u_j \partial_i v_k = \varepsilon_{ijk} v_i \partial_j u_k - \varepsilon_{ijk} u_i \partial_j v_k \\ &= v_i \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k - u_i \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k\,,\end{aligned}$$

also

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{v}. \tag{4.21}$$

Beispiel 4.3: Es gilt

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j (\varphi v_k) = \varphi \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k - \varepsilon_{ijk} v_j \partial_k \varphi\,,$$

folglich (bei Multiplikation mit $\mathbf{e}_i$ und Summation nach Vereinbarung)

$$\mathbf{rot}\,(\varphi \mathbf{v}) = \varphi\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{grad}\, \varphi. \tag{4.22}$$

Aufgabe 4.1: Welche Nabla-Operationen sind nach (4.20) bis (4.22) erlaubt? Man leite diese Formeln durch Anwendungen des Operators $\boldsymbol{\nabla}$ her.

Mit Hilfe des Nabla-Operators berechnen wir

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,(\varphi\psi) &= \boldsymbol{\nabla}\big(\overset{\downarrow}{\varphi}\overset{\downarrow}{\psi}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla}\overset{\downarrow}{\varphi}\big)\, \psi + \varphi\big(\boldsymbol{\nabla}\overset{\downarrow}{\psi}\big), \\ \mathbf{grad}\,(\varphi\psi) &= \varphi\, \mathbf{grad}\, \psi + \psi\, \mathbf{grad}\, \varphi.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Wird der Verbindungssatz (1.30) herangezogen, so ergibt sich

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla} \times \big(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\big) = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\big)\, \overset{\downarrow}{\mathbf{u}} - \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\big)\, \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}.$$

Nach der Produktregel der Differentialrechnung folgt weiter

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\big)\, \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \overset{\downarrow}{\mathbf{u}} - \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\big)\, \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}$$

und mittels Dyadenschreibweise

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}. \tag{4.24}$$

Aufgabe 4.2: Die Formeln (4.23) und (4.24) sind in Koordinatendarstellung zu beweisen.

Aufgabe 4.3: Für den Ortsvektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = r\mathbf{x}^0$ bestätige man die Formeln:

$$\text{a)}\ \partial_i x_k = \delta_{ik}, \quad \partial_i r = x_i / r, \tag{4.25a}$$

$$\text{b)}\ \operatorname{div} \mathbf{x} = 3, \quad \mathbf{rot}\, \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{x} = \mathbf{I}, \tag{4.25b}$$

$$\text{c)}\ \mathbf{grad}\, r = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{grad}\, f(r) = f'(r)\, \mathbf{x}^0. \tag{4.25c}$$

In c) bedeutet $f'(r)$ die Ableitung der Funktion $f(r)$.

Nach dem Verbindungssatz (1.30) wird

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} &= \mathbf{u} \times \left(\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \nabla\left(\mathbf{u} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) - \mathbf{u} \cdot \nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{v}},\\ \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u} &= \mathbf{v} \times \left(\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\right) = \nabla\left(\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\right) - \mathbf{v} \cdot \nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Wir wollen das Vektorfeld **grad** $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ zerlegen:

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}\right) + \nabla\left(\mathbf{u} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \nabla\left(\mathbf{u} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}\right) + \nabla\left(\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\right).$$

Die letzten beiden Summanden werden (4.26) entnommen; es folgt

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{u} \tag{4.27}$$

und daraus speziell die *Lambsche Formel*

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}. \tag{4.28}$$

Beispiel 4.4: Wir untersuchen *instationäre* Felder, z. B. das Skalarfeld der Massendichte $\varrho(\mathbf{x}(t), t)$ und das instationäre Vektorfeld $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}(t), t)$ der Strömungsgeschwindigkeit in der Komponentendarstellung $\mathbf{w} = w_i\mathbf{e}_i = \dot{x}_i\mathbf{e}_i$ mit $\dot{x}_i = \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = w_i$, das ein Tensorfeld 1. Stufe darstellt. Das totale Differential $\mathrm{d}\varrho = \dfrac{\partial\varrho}{\mathrm{d}x_i}\mathrm{d}x_i + \dfrac{\partial\varrho}{\partial t}\mathrm{d}t$ führt auf die *totale Zeitableitung*

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varrho}{\partial x_i} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + w_i\partial_i\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla\varrho.$$

Ist $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ ein instationäres Vektorfeld, so gilt entsprechend

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{v}. \tag{4.29}$$

Der 1. Summand ist das lokale oder instationäre Glied. Der 2. Summand heißt „*konvektives* Glied“ oder „Transportglied“. $\nabla\varrho$ bzw. $\nabla\mathbf{v}$ sind Tensorfelder 1. bzw. 2. Stufe.

Bei instationärer Strömung benutzt man den Operator der totalen Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \tag{4.30}$$

mit $\mathbf{w} \cdot \nabla = w_i\partial_i$. Aus (4.29) folgt speziell

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla\mathbf{w}. \tag{4.31}$$

Die *Eulersche Bewegungsgleichung* der Hydrodynamik für die reibungsfreie Strömung lautet

$$\varrho\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{grad}\,p,$$

wenn p den hydrostatischen Druck, also $-\mathbf{grad}\, p$ das Druckgefälle bezeichnet. Mit (4.31) wird

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\frac{1}{\varrho}\, \mathbf{grad}\, p \tag{4.32}$$

und nach der Lambschen Formel (4.28)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{grad}\, \frac{\mathbf{w}^2}{2} - \mathbf{w} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{w} = -\frac{1}{\varrho}\, \mathbf{grad}\, p\,. \tag{4.33}$$

Äußere Kräfte wie z. B. die Schwerkraft werden hier und im folgenden nicht aufgeschrieben.

4.3. Mehrfache Nabla-Operationen

Zweifache Nabla-Operationen werden sehr oft benötigt. Der Tensoroperator

$$\nabla\nabla \;\; = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \partial_i \partial_k \tag{4.34}$$

wird zu

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \nabla^2 \tag{4.35}$$

verjüngt. ∇^2 ist der skalare *Laplace-Operator*. Das Zeichen Δ bleibt für Differenzterme reserviert, z. B.

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x),$$

$$\Delta V \;\; = V(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - V(x_1, x_2, x_3).$$

Mit den Bezeichnungen (4.15) kann man schreiben

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}, \quad \nabla\nabla \cdot = \mathbf{grad}\, \mathrm{div}. \tag{4.36}$$

Als Grundformeln gelten

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, \varphi = \mathbf{0}, \quad \mathrm{div}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 0 \tag{4.37}$$

wegen

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{grad}\, \varphi = \nabla \times \nabla \overset{\downarrow\downarrow}{\varphi} = (\nabla \times \nabla)\, \overset{\downarrow\downarrow}{\varphi} = \mathbf{0}\varphi = \mathbf{0},$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \left[\nabla\nabla\overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right] = 0.$$

Nach (1.30) und (4.36) wird

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \nabla \times \left(\nabla \times \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right) - (\nabla \cdot \nabla)\, \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}},$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v} - \mathrm{div}\, \mathbf{grad}\, \mathbf{v}. \tag{4.38}$$

Aufgabe 4.4: In Koordinatendarstellung sind die Formeln

$$\nabla \cdot \left(\nabla \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\right) = \mathrm{div}\, \mathbf{grad}\, \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \left(\overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla\right) = \mathbf{grad}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v} \tag{4.39}$$

zu beweisen.

Der *Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten* wird definiert:

$$\mathbf{D} = \nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{w}} + \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla = (\partial_i w_k + \partial_k w_i)\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k. \tag{4.40}$$

Dieses zweistufige Tensorfeld ist symmetrisch. Daneben benutzen wir

$$\mathbf{def\ w} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{w}} + \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla\right) = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}. \qquad \overline{(4.40)}$$

Nach (4.39) gilt somit

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \nabla\cdot\left(\nabla\overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}} + \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla\right) = \operatorname{div}\mathbf{grad}\,\mathbf{w} + \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}. \tag{4.41}$$

Man schreibt auch $\nabla\cdot\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{D}$.

Beispiel 4.5: Die Bewegungsgleichung für die *reibungsbehaftete Strömung* lautet

$$\varrho\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{4.42}$$

Der symmetrische Spannungstensor 2. Stufe

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \eta\mathbf{D} - \tfrac{2}{3}\eta\,(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I} \tag{4.43}$$

heißt *Navier-Stokes-Tensor*, siehe (5.28). Hier bedeuten p den hydrostatischen Druck, $\mathbf{w}$ die Strömungsgeschwindigkeit, η die (orts- und zeitunabhängige) dynamische Zähigkeit; $\nu = \eta/\varrho$ heißt kinematische Zähigkeit. Wir berechnen

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \nabla\cdot\mathbf{S} = -(\nabla\cdot p\mathbf{I}) + \eta\nabla\cdot\mathbf{D} - \tfrac{2}{3}\eta\nabla\cdot[(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}]$$

mittels

$$\operatorname{div}(p\mathbf{I}) = \nabla\cdot(p\mathbf{I}) = \mathbf{e}_i\partial_i\cdot p\delta_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$$
$$= \partial_i p\delta_{ik}\delta_{kl}\mathbf{e}_l = \partial_i p\delta_{ik}\mathbf{e}_k = (\partial_k p)\,\mathbf{e}_k,$$

also

$$\nabla\cdot(p\mathbf{I}) = \mathbf{grad}\,p, \quad \nabla\cdot[(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}] = \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}. \tag{4.44}$$

Mit (4.41) und (4.44) wird $\nabla\cdot\mathbf{S}$ nach (4.43):

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{grad}\,p + \eta\,(\operatorname{div}\mathbf{grad}\,\mathbf{w} + \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{w} - \tfrac{2}{3}\,\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}).$$

Wir erhalten damit die *Bewegungsgleichung* (4.42) *nach Navier-Stokes:*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\left(\operatorname{div}\mathbf{grad}\,\mathbf{w} + \frac{1}{3}\,\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{w}\right). \tag{4.45}$$

Bewegungsgleichungen müssen so formuliert werden, daß sie vom speziellen KS unabhängig sind. Die Invarianz der rechten Seite von (4.45) kommt in der Schreibweise mit **grad** und div zum Ausdruck.

Die Ortsfunktionen seien jetzt dreimal stetig differenzierbar, so daß z. B. div **grad rot v** ein stetiges Vektorfeld darstellt. Aus (4.38) folgt die *Vertauschbarkeit* der linearen Operatoren ∇^2 und **rot** gemäß

$$\nabla^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\nabla^2\mathbf{v}, \tag{4.46}$$

wenn wir einmal von der Identität (4.38) den Rotor bilden

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{rot}\operatorname{div}\mathbf{grad}\,\mathbf{v},$$

wenn wir andererseits in (4.38) $\mathbf{v}$ durch $\mathbf{rot\,v}$ ersetzen

$$\mathbf{rot\,rot\,rot\,v} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{rot\,v} - \mathrm{div}\,\mathbf{grad\,rot\,v}$$

und die *beiden* Identitäten (4.37) berücksichtigen. Dann bleibt

$$-\mathbf{rot}\,\mathrm{div}\,\mathbf{grad\,v} = -\mathrm{div}\,\mathbf{grad\,rot\,v}$$

in Übereinstimmung mit (4.46).

Aufgabe 4.5: Die Vertauschbarkeit des Laplace-Operators ∇^2 mit **grad** und div ist durch Nabla-Operationen nachzuprüfen.

4.4. Invarianz des Nabla-Operators. Integralsätze nach Gauß

Im folgenden bezeichnet der Buchstabe A den Flächeninhalt (area). Der *Vektor des Flächenelements* sei

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}A\mathbf{n} \tag{4.47}$$

mit dem Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$, der bei einer geschlossenen Oberfläche (Hülle H) immer nach *außen* weist. Diese Orientierungsvorschrift für $\mathbf{n}$ bleibt erhalten, wenn wir H in Teilflächen zerlegen. $\mathrm{d}A$ ist der Flächeninhalt eines infinitesimalen Parallelogramms in der Tangentenebene, siehe Definition 7.1.

In einer stationären Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ wird der kinematische Fluß, der in der Zeiteinheit durch ein Flächenelement strömt, gemäß

$$\mathbf{w}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = w_n\,\mathrm{d}A$$

definiert. Wenn die Zeitabhängigkeit nicht weiter interessiert, schreibt man einfach $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x})$, wobei es sich aber nicht um ein statisches Feld handeln soll. Der Hüllenfluß $\oiint\limits_{(H)} \mathbf{w}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$ ist der kinematische Fluß durch eine geschlossene Oberfläche. Wenn im Innern keine Quellen (oder Senken) vorhanden sind, ist das Hüllenintegral gleich null, aber auch dann, wenn im Innern die Summe der Quellstärken gleich der Summe der Senkenstärken ist. Nur wenn im Innenbereich ein *Überschuß* an resultierender Quellstärke eines Vorzeichens besteht, wird das Hüllenintegral

$$\oiint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{w} = \oiint\limits_{(H)} \mathbf{w}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \oiint\limits_{(H)} w_n\,\mathrm{d}A = Q_{\ddot{u}} \tag{4.48}$$

ungleich null. Es dient daher als direktes Maß für den Überschuß an Quellstärke $Q_{\ddot{u}} = \Sigma Q_+ + \Sigma Q_- = \Sigma|Q_+| - \Sigma|Q_-|$ im Bereich (V). H sei die Oberfläche des Volumens V. Mit (H) und (V) bezeichnen wir die zugehörigen Bereiche (kontinuierliche Punktmengen, die durch Ungleichungen beschrieben werden).

Der grundlegende *Integralsatz von Gauß*

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\,\mathbf{w}\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{w} \tag{4.49}$$

ist aus der Analysis (Band 5) bekannt. Neben der Quellstärke Q wird die *Quelldichte*

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = q(\mathbf{x}) \tag{4.50}$$

eingeführt. Durch den Grenzübergang $\Delta V = \Delta x_1 \, \Delta x_2 \, \Delta x_3 \to 0$ soll das Volumenelement auf den „Trägerpunkt“ (x_1, x_2, x_3) zusammenschrumpfen, so daß alle Kantenlängen des infinitesimalen Quaders gegen null streben:

$$\Delta x_1 \to 0, \quad \Delta x_2 \to 0, \quad \Delta x_3 \to 0 .$$

Satz 4.4: *Die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes einer stationären Strömung stellt eine kinematische Quelldichte dar:*

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = q(\mathbf{x}) . \tag{4.51}$$

Allgemein wird div **v** *als ein Quellenfeld angesprochen, das ein zugeordnetes Vektorfeld* **v** *erzeugt.*

Setzen wir nämlich (4.51) in den Integralsatz (4.49) ein, so folgt

$$\iiint\limits_{(V)} q \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} \, \mathrm{d}V = Q_{\ddot{\mathrm{u}}} = \oint\!\!\!\oint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}$$

in Übereinstimmung mit (4.48). Aus (4.51) $\nabla \cdot \mathbf{w} = q$ folgt weiter in Verbindung mit (4.50):

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\!\oint\limits_{(\Delta H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} \right), \tag{4.52}$$

wenn (4.48) in der Form $\oint\!\!\oint\limits_{(\Delta H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \Delta Q$ auf das Volumelement ΔV mit der Oberfläche ΔH und dem Quellanteil ΔQ übertragen wird. Da $\mathbf{w}$ ein beliebiges Vektorfeld ist, erhalten wir aus (4.52) die *koordinatenfreie Darstellung* des Nabla-Operators

$$\nabla = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \oint\!\!\!\oint\limits_{(\Delta H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \right), \tag{4.53}$$

d. h., ∇ ist ein Tensor 1. Stufe, wie es der Hauptsatz verlangt. Die Koordinaten des Nabla-Tensors $\nabla = \mathbf{e}_i \partial_i$ müssen sich also nach den Gesetzen (4.9)

$$\bar{\partial}_i = c_{ik} \partial_k , \quad \partial_i = c_{ki} \bar{\partial}_k$$

transformieren.

Weitere Integralsätze nach Gauß sind in (5.9), (5.10) und (5.11) formuliert.

5. Ausgewählte Anwendungen

5.1. Lorentztransformationen

Programmatischer Satz 5.1: *Der Übergang von einem kartesischen KS B auf ein relativ zu B mit konstanter Geschwindigkeit u im Sinne der Mechanik bewegtes KS $\bar{B}$ läßt sich deuten als Übergang von einem Bezugssystem B^{M} des Minkowskiraumes auf ein um eine Achse durch den Ursprung gedrehtes Bezugssystem $\bar{B}^{\mathrm{M}}$, wenn der Übergang nach der Lorentztransformation erfolgt. Damit wird eine Translationsbewegung des Bezugssystems im dreidimensionalen euklidischen Raum in eine Drehung des Bezugssystems im vierdimensionalen Minkowskiraum übersetzt. Da Tensoren gegenüber solchen Drehtransformationen des Bezugssystems invariant sind, lassen sich die Gesetze der Elektrodynamik und Mechanik* **lorentzinvariant** *formulieren, wenn es gelingt, die zugehörigen physikalischen Tensoren des vierdimensionalen Minkowskiraumes aufzustellen. Insbesondere muß ein vierdimensionaler Nabla-Tensor existieren.*

Definition 5.1: *Das kartesische KS $\bar{B}$ habe, von B aus beurteilt, die konstante Translationsgeschwindigkeit $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$. Bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so lautet die* **Lorentztransformation**

$$\bar{x} = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{5.1}$$

Dabei wird die Zeitkoordinate t mittransformiert. Die Lichtgeschwindigkeit c ist nach Einstein eine Invariante:

$$\bar{c} = c. \tag{5.2}$$

Wir gehen von einem vierdimensionalen euklidischen Punktraum R^4 mit der orthonormierten Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ als Bezugssystem aus. Dieser Punktraum wird durch die Definition der Punktkoordinaten

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = \mathrm{i}ct \tag{5.3a}$$

zu einem pseudoeuklidischen Raum R_4^{M} modifiziert, der als *vierdimensionaler Minkowskiraum* bezeichnet wird. Der Faktor i ist die imaginäre Einheit $\left(\mathrm{i} = \sqrt{-1}\right.$ und $\left.\mathrm{i}^2 = -1\right)$. Durch Drehung des Bezugssystems B^{M} mit der Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ in die neue Lage $\bar{B}^{\mathrm{M}}$ mit $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_4$ wird eine orthogonale Koordinatentransformation durchgeführt, wobei (5.3a) in

$$\bar{x}_1 = \bar{x}, \quad \bar{x}_2 = \bar{y}, \quad \bar{x}_3 = \bar{z}, \quad \bar{x}_4 = \mathrm{i}c\bar{t} \tag{5.3b}$$

übergeht. Mit den Abkürzungen

$$\frac{u}{c} = h, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = K; \quad (1 - h^2)\,K^2 = 1$$

und den Umbezeichnungen nach (5.3a, b) liefert (5.1) die *Transformationsgleichungen*

$$\bar{x}_1 = K(x_1 + \mathrm{i}hx_4), \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3, \quad \bar{x}_4 = K(x_4 - \mathrm{i}hx_1). \tag{5.4a}$$

Aufgabe 5.1: Man schreibe das lineare Gleichungssystem (5.4a) in Matrizenform mit der Transformationsmatrix $\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}}$ und zeige, daß

$$C^{\mathrm{M}}_{11} = C^{\mathrm{M}}_{44} = K, \quad C^{\mathrm{M}}_{22} = C^{\mathrm{M}}_{33} = 1, \quad C^{\mathrm{M}}_{14} = \mathrm{i}hK = -C^{\mathrm{M}}_{41}, \tag{5.5}$$

alle anderen $C^{\mathrm{M}}_{kl} = 0$.

Man überprüfe, daß die Quadratsumme der Elemente jeder Zeile oder Spalte der Matrix $\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}}$ eins ergibt und daß die Produktsumme zweier verschiedener Zeilen oder Spalten immer gleich null wird. Die Transformationsmatrix $\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}}$ ist also orthogonal: $(\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}})^{-1} = (\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}})^{\mathrm{T}}$. Man berechne $\det \underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}} = 1$. Die Matrix $\underset{\sim}{C}^{\mathrm{M}}$ vermittelt also eine Drehung des KS B^{M} in die Lage $\bar{B}^{\mathrm{M}}$.

Mit der transponierten Matrix erhält man sofort die Auflösung von (5.4a) nach

$$x_1 = K(\bar{x}_1 - \mathrm{i}h\bar{x}_4), \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_3 = \bar{x}_3, \quad x_4 = K(\bar{x}_4 + \mathrm{i}h\bar{x}_1). \tag{5.4b}$$

Satz *5.2: Die Koordinaten der Vierertensoren genügen der Invarianzforderung gegenüber Lorentztransformationen, wenn die* **Transformationsgesetze**

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{kl}\mathbf{e}_l, \qquad \mathbf{e}_k = \sum_{l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l, \tag{5.6a}$$

$$\bar{V}_k = \sum_{l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{kl}V_l, \qquad V_k = \sum_{l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{lk}\bar{V}_l, \tag{5.6b}$$

$$\bar{B}_{nk} = \sum_{j,l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{nj}C^{\mathrm{M}}_{kl}B_{jl}, \qquad B_{nk} = \sum_{j,l=1}^{4} C^{\mathrm{M}}_{jn}C^{\mathrm{M}}_{lk}\bar{B}_{jl} \tag{5.6c}$$

usw. mit den **Transformationskoeffizienten** (5.5) *erfüllt sind, speziell nach* (5.6b) *für Vierertensoren 1. Stufe:*

$$\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3 + V_4\mathbf{e}_4.$$

Aufgabe 5.2: Mit Hilfe der konkreten Transformationsformeln (5.6b)

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= K(V_1 + \mathrm{i}hV_4), \quad \bar{V}_2 = V_2, \quad \bar{V}_3 = V_3, \quad \bar{V}_4 = K(V_4 - \mathrm{i}hV_1), \\ V_1 &= K(\bar{V}_1 - \mathrm{i}h\bar{V}_4), \quad V_2 = \bar{V}_2, \quad V_3 = \bar{V}_3, \quad V_4 = K(\bar{V}_4 + \mathrm{i}h\bar{V}_1) \end{aligned} \tag{5.7}$$

und (5.5) beweise man die *Invarianz des Skalarprodukts*

$$\bar{U}_1\bar{V}_1 + \bar{U}_2\bar{V}_2 + \bar{U}_3\bar{V}_3 + \bar{U}_4\bar{V}_4 = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 + U_4V_4.$$

Mit $\partial_4 = \partial/\partial x_4 = \partial/\partial(\mathrm{i}ct)$ wird der *vierdimensionale Nabla-Operator*

$$\Box = \mathbf{e}_1\partial_1 + \mathbf{e}_2\partial_2 + \mathbf{e}_3\partial_3 + \mathbf{e}_4\partial_4 \tag{5.8}$$

erklärt. Er ist ein Tensor 1. Stufe, wenn er gegenüber Lorentztransformationen invariant ist: $\Box = \bar{\Box}$. Das ist der Fall, wenn seine Koordinaten mit $V_1 = \partial_1$, $V_2 = \partial_2$, $V_3 = \partial_3$, $V_4 = \partial_4$ den Transformationsgesetzen (5.7) genügen. Alle Bezugssysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Translationsgeschwindigkeit bewegen, heißen *Inertialsysteme*. Die Grundgesetze der Physik müssen unabhängig von dem zufällig benutzten Inertialsystem gelten. Das trifft für die Maxwellschen Grundgleichungen der Elektrodynamik zu, da sie sich vollständig in Vierertensoren darstellen lassen. Insbesondere muß $\Box$ ein Tensor 1. Stufe sein.

Ergänzung: Der Tensorkalkül läßt sich auf den *n-dimensionalen* euklidischen Raum R^n erweitern. Dafür wird zunächst die Summenvereinbarung verallgemeinert: über zwei gleiche Buchstabenindizes soll immer von 1 bis n summiert werden, wenn der Raum R^n zugrunde gelegt wird. Die Summenform eines beliebigen Tensors und das Produkt zweier Tensoren behalten ihre bisherige Darstellung; speziell besitzt die Dyade $\mathbf{uv} = u_i v_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ jetzt n^2 Summanden.

Auch die Formulierung des Skalarproduktes

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

bleibt mit $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ erhalten.

Die Konstruktion des Vektors $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ist jedoch an den Raum R^3 gebunden. Für $n > 3$ wird das vektorielle Produkt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ durch den Bivektor $\langle \mathbf{uv} \rangle$ nach (2.36) ersetzt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{uv} \rangle &= \mathbf{E} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{uv} - \mathbf{vu} = (u_i v_k - v_i u_k)\, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k, \\ \langle \nabla \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} - \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \nabla = \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{v}. \end{aligned} \qquad \overline{(2.36)}$$

Statt des Wirbelfeldes **rot v** wird somit das antisymmetrische zweistufige Tensorfeld $\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} - \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \nabla$ eingeführt. Der Speziellen Relativitätstheorie liegt der vierdimensionale Minkowskiraum R_4^{M} zugrunde, wo jeweils bis $n = 4$ zu summieren ist. An Stelle von **rot v** muß hier das Tensorfeld $\Box \overset{\downarrow}{\mathbf{V}} - \overset{\downarrow}{\mathbf{V}} \Box$ mit (5.7) und (5.8) benutzt werden.

5.2. Kräfte- und Momentengleichgewicht

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Gauß in der Form (4.49) besteht in der *Operatoridentität*

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V\, \nabla \ldots = \oint\!\!\oint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \ldots, \qquad (5.9)$$

so daß auch folgende *Integralsätze* gelten:

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V\, \mathbf{grad}\, \varphi = \oint\!\!\oint\limits_{(H)} \varphi\, \mathrm{d}\mathbf{A}, \quad \iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V\, \mathbf{rot}\, \mathbf{w} = \oint\!\!\oint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \times \mathbf{w}, \qquad (5.10)$$

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V\, \mathrm{div}\, \mathbf{T} = \oint\!\!\oint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}, \qquad (5.11)$$

wo φ, **w**, **T** Tensoren 0., 1., 2. Stufe bedeuten.

Beispiel 5.1: Wir legen als Volumenelement eines elastischen Körpers nochmals das Tetraeder nach Bild 3.2 zugrunde. Es sei wieder $\mathbf{p}_n$ der Spannungsvektor bezüglich der schrägen Randfläche mit dem Stellungsvektor **n**. Die äußere Kraftdichte sei **f**, so daß **f** vektorielle Kraft je Volumeneinheit und **p** vektorielle Kraft je Flächeneinheit bedeuten. Die Bedingungen des Kräfte- und *Drehmomentengleichgewichts* am Gesamtvolumen V des Körpers mit der Oberfläche H lauten

$$\iiint\limits_{(V)} \mathbf{f}\, \mathrm{d}V + \oint\!\!\oint\limits_{(H)} \mathbf{p}_n\, \mathrm{d}A = \mathbf{0} \qquad (5.12)$$

und

$$\iiint\limits_{(V)} (\mathbf{x} \times \mathbf{f})\, \mathrm{d}V + \oint\!\!\oint\limits_{(H)} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n)\, \mathrm{d}A = \mathbf{0}. \qquad (5.13)$$

Durch Vergleich des Integralsatzes (5.11) in der Form

$$-\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{S}\, \mathrm{d}V + \oiint\limits_{(H)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}\, \mathrm{d}A = \mathbf{0}$$

mit (5.12) erhalten wir die Beziehungen

$$\mathbf{f} = -\operatorname{div} \mathbf{S}, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}, \tag{5.14}$$

von denen wir schon Gebrauch gemacht haben, z. B. in der *dynamischen Bewegungsgleichung*

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \varrho \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div} \mathbf{S}. \tag{5.15}$$

Bei Anwendung des Integralsatzes (4.49) von Gauß können wir nach (5.14)

$$\mathrm{d}A(\mathbf{p}_n \times \mathbf{x}) = \mathrm{d}A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) \times \mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{x})$$

schreiben

$$\oiint\limits_{(H)} \mathrm{d}A(\mathbf{p}_n \times \mathbf{x}) = \oiint\limits_{(H)} \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{x}) = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V \operatorname{div} (\mathbf{S} \times \mathbf{x})$$

und nach (5.13) und (5.14)

$$\oiint\limits_{(H)} \mathrm{d}A(\mathbf{p}_n \times \mathbf{x}) = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V(\mathbf{x} \times \mathbf{f}) = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{d}V (\operatorname{div} \mathbf{S}) \times \mathbf{x}.$$

Durch Vergleich der beiden Ergebnisse finden wir

$$\operatorname{div} (\mathbf{S} \times \mathbf{x}) = (\operatorname{div} \mathbf{S}) \times \mathbf{x},$$

also

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{S} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{0}. \tag{5.16}$$

Wir hatten $\mathbf{S} = \mathbf{e}_i \mathbf{p}_i$ und setzen $\mathbf{S}^T = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_i$. Damit wird (5.16)

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{S} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{S}^T \cdot \nabla \times \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \partial_k \times \mathbf{x} &= (\mathbf{p}_i \delta_{ik} \partial_k) \times \mathbf{x} = \mathbf{p}_i \times \partial_i \mathbf{x} \\ &= \mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_i = \sigma_{ik} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = -\sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \\ &= -(\sigma_{23} - \sigma_{32})\, \mathbf{e}_1 - (\sigma_{31} - \sigma_{13})\, \mathbf{e}_2 - (\sigma_{12} - \sigma_{21})\, \mathbf{e}_3 = \mathbf{0},\end{aligned}$$

also $\sigma_{ki} = \sigma_{ik}$; der *Spannungstensor ist symmetrisch.*

5.3. Kugeltensor. Deviator. Verzerrungstensor. Navier-Stokes-Tensor

Durch

$$\mathbf{S}_x = \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \tag{5.17}$$

wird die Stufe des Tensors $\mathbf{S} = \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$ um 1 erniedrigt; durch die Verjüngung

$$\operatorname{sp} \mathbf{S} = \sigma_{ik} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sigma_{kk} \tag{5.18}$$

erniedrigt sich die Tensorstufe um 2; sp $\mathbf{S}$ heißt „*Spur* des Tensors 2. Stufe“. *Kugeltensor* $\mathbf{S}_u$ und *Deviator* $\mathbf{S}_v$ werden wie folgt erklärt:

$$\mathbf{S}_u = \tfrac{1}{3} (\operatorname{sp} \mathbf{S})\, \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}_v = \mathbf{S} - \tfrac{1}{3} (\operatorname{sp} \mathbf{S})\, \mathbf{I}, \tag{5.19}$$

so daß die identische Zerlegung

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_u + \mathbf{S}_v \tag{5.20}$$

in Kugeltensor und Deviator besteht. Es gilt

$$\operatorname{sp}\mathbf{S}_u = \operatorname{sp}\mathbf{S}, \quad \operatorname{sp}\mathbf{S}_v = 0, \tag{5.21}$$

denn nach (5.18) und (5.19) wird

$$\operatorname{sp}\mathbf{S}_v = \sigma_{kk} - 3\cdot\tfrac{1}{3}\,\sigma_{kk} = 0.$$

Die Spur des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{D} = (\partial_i w_k + \partial_k w_i)\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \nabla\mathbf{w} + \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla$$

ist

$$\operatorname{sp}\mathbf{D} = 2\operatorname{div}\mathbf{w}. \tag{5.22}$$

Auch hier können wir (5.19) entsprechend in Kugeltensor und Deviator zerlegen:

$$\mathbf{D}_u = \tfrac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_v = \mathbf{D} - \tfrac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}. \tag{5.23}$$

Für viskose Strömungen gilt in einem isotropen Medium das *rheologische Prinzip*

$$\mathbf{S}_v = \eta\mathbf{D}_v, \tag{5.24}$$

also

$$\mathbf{S}_v = \mathbf{S} - \mathbf{S}_u = \eta[\mathbf{D} - \tfrac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}]. \tag{5.25}$$

Wird der hydrostatische Druck

$$p = -\tfrac{1}{3}\sigma_{kk} \tag{5.26}$$

eingeführt, so folgt

$$\mathbf{S}_u = \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}\mathbf{I} = -p\mathbf{I} \tag{5.27}$$

und damit nach (5.25) der *Navier-Stokes-Tensor*

$$\mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \eta\left[\nabla\mathbf{w} + \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla - \tfrac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}\right] \tag{5.28}$$

in Übereinstimmung mit (4.43).

In der Elastizitätslehre wird der *Verzerrungstensor* $\mathbf{def\,s} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)$ mit dem *Verschiebungsvektor* $\mathbf{s}$ benutzt, sofern man sich auf linearisiert elastische Verformungen in einem isotropen Medium beschränkt. Man erhält mit völlig entsprechenden Überlegungen die *Tensorbeziehung*

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{3}\sigma_{kk}\mathbf{I} + 2G[\mathbf{def\,s} - \tfrac{1}{3}(\operatorname{div}\mathbf{s})\,\mathbf{I}]. \tag{5.29}$$

Schubmodul (Gleitmodul) G und dynamische Zähigkeit η seien zeit- und ortsunabhängige Kenngrößen. Der Kugeltensor bewirkt hier eine Deformation mit Volumenänderung ohne Gestaltsänderung, wobei eine Kugel wieder in eine (kleinere oder größere) Kugel übergeht. Der Deviator bewirkt umgekehrt eine Gestaltsänderung ohne Volumenänderung, z. B. die Verformung einer Kugel in ein Ellipsoid mit gleichem Volumen.

Satz 5.3: *Ein beliebiger asymmetrischer Tensor 2. Stufe läßt sich immer in einen symmetrischen und antisymmetrischen Tensor 2. Stufe zerlegen.*

Eine solche Zerlegung ist $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ mit $\mathbf{A} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$, $b_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) = b_{ki}$, $c_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}) = -c_{ki}$, so daß $\mathbf{B} = b_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ einen symmetrischen und $\mathbf{C} = c_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe darstellt. Spaltet man in der Zerlegung

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\boldsymbol{\nabla}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{s} - \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{5.30}$$

den antisymmetrischen Rotationsanteil $\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{s} - \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\boldsymbol{\nabla}\right)$ ab, so bleibt der *symmetrische Verzerrungstensor* $\mathbf{def}\,\mathbf{s} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{s} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\boldsymbol{\nabla}\right) = d_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ übrig. Die Tensorkoordinaten $d_{ik} = \frac{1}{2}(\partial_i s_k + \partial_k s_i)$ für $i \neq k$ heißen *Scherungen* und bedeuten relative Winkeländerungen gegenüber einem ursprünglich rechten Winkel.

$d_{11} = \partial_1 s_1$, $d_{22} = \partial_2 s_2$, $d_{33} = \partial_3 s_3$ sind relative Längenänderungen in den Achsenrichtungen und heißen *Dehnungen* (bzw. Stauchungen). –

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Tensoren 2. Stufe. Wir bilden das innere Produkt und erhalten wieder einen Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \cdot b_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = a_{ik}b_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l. \tag{5.31}$$

Die Koordinaten des Produkttensors erhält man auch durch Matrizenmultiplikation. Wird nochmals verjüngt, so entsteht das *doppeltskalare Produkt*

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = a_{ik}b_{kl}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l = a_{ik}b_{ki}. \tag{5.32}$$

Bei energetischen Betrachtungen spielt das doppeltskalare Produkt, das eine skalare physikalische Größe darstellt, eine große Rolle.

Beispiel 5.2: Mit $\mathbf{S} = \sigma_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ und $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} = \partial_i w_k \mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ sowie $\mathbf{I} = \delta_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ berechnen wir nach (5.32):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} &= \sigma_{ik}\partial_k w_i, \\ \mathbf{I} : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} &= \delta_{ik}\partial_k w_i = \partial_k w_k = \operatorname{div}\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Aufgabe 5.3: Man berechne die *Dissipation*

$$\varepsilon = \mathbf{S}_v : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} = 2\eta[\mathbf{def}\,\mathbf{w} - \tfrac{1}{3}(\operatorname{div}\mathbf{w})\,\mathbf{I}] : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w}, \tag{5.34}$$

wo $\mathbf{S}_v$ den Deviator (5.25) bezeichnet.

Aufgabe 5.4: Es sei $\mathbf{S}$ der Navier-Stokes-Tensor. Man bilde die Energiebilanz

$$\mathbf{S} : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} = -p \operatorname{div}\mathbf{w} + \varepsilon. \tag{5.35}$$

Aufgabe 5.5: Man bringe die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\mathbf{w}) = 0 \tag{5.36}$$

mit $v = \dfrac{1}{\varrho}$ auf die Formen

$$-\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{div}\mathbf{w}. \tag{5.37}$$

Was bedeutet $\mathbf{S}_u : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{w} = -p \operatorname{div}\mathbf{w}$ physikalisch?

Die Dissipation ε nach (5.34) bedeutet die durch Reibung in Wärme verwandelte mechanische Energie je Volumen- und Zeiteinheit. Die Kontinuitätsgleichung bringt den *Satz von der Erhaltung der Masse* in einem strömenden Medium zum Ausdruck.

5.4. Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik

Wir benutzen das internationale Maßsystem nach Giorgi. Als Materialkonstante definiert man die absolute und relative Dielektrizitätskonstante sowie die absolute und relative Permeabilität mit den Buchstaben ε_0 und ε sowie μ_0 und μ. Die Verbindungsgrößen sind

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \tag{5.38}$$

Die Vektorfelder **E** und **H** sowie **B** und **D** sind die elektrische und magnetische Feldstärke sowie die magnetische Induktion und die dielektrische Verschiebung. Im Vakuum gilt $\varepsilon = \mu = 1$. Die Lichtgeschwindigkeit im Medium ist

$$\bar{c} = 1/\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}, \tag{5.39}$$

im Vakuum $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Es wird die elektrische Raumladungsdichte ϱ_e als elektrische Ladung je Volumeneinheit eingeführt, außerdem das Vektorfeld $\mathbf{j}_e$ der elektrischen Stromdichte. Dann lauten die Maxwellschen Gleichungen für eine im Laborsystem ruhende Anordnung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_e, \tag{5.40}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \dot{\mathbf{D}}, \tag{5.42}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}. \tag{5.43}$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ wird durch Punktierung gekennzeichnet. Gl. (5.41) besagt, daß es keine magnetischen Ladungen eines Vorzeichens gibt, sondern nur magnetische Dipole, Quadrupole usw. existieren können. (5.40) bringt nach Satz 4.4 zum Ausdruck, daß elektrische Ladungen ein elektrisches Feld erzeugen. Nach (5.43) sind Ladungen aber nicht die einzig möglichen Ursachen für ein elektrisches Feld.

Beispiel 5.3: Wegen div **rot H** = 0 folgt aus (5.42)

$$\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j}_e + \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \operatorname{div} \mathbf{j}_e + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0,$$

also mit (5.40) die *Kontinuitätsgleichung*

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_e + \dot{\varrho}_e = 0, \tag{5.44}$$

die hier den Satz von der *Erhaltung der elektrischen Ladung* zum Ausdruck bringt, wenn ein elektrischer Strom fließt. Wegen div **rot E** = 0 muß nach (5.43) auch gelten

$$\operatorname{div} \mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \operatorname{div} (-\dot{\mathbf{B}}) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Diese Bedingung ist aber bereits mit (5.41) erfüllt.

Beispiel 5.4: Durch Einführung des *Poyntingschen Energiestrahlungsvektors* $S^* = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ haben wir nach (4.21)

$$\operatorname{div} \mathbf{S}^* = \mathbf{H} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{H}$$

und mit (5.42) und (5.43)

$$\operatorname{div} \mathbf{S}^* = -\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_e - \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = -(\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_e .$$

Wird das *Ohmsche Gesetz* $\mathbf{j}_e = \varkappa \mathbf{E}$ als Feldgleichung berücksichtigt, so erhalten wir mit (5.38) die *Bilanzgleichung*

$$-\dot{w}_{\mathrm{em}} = \operatorname{div} \mathbf{S}^* + \varkappa \mathbf{E}^2, \tag{5.45}$$

wenn

$$w_{\mathrm{em}} = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu \mathbf{H}^2) \tag{5.46}$$

die elektromagnetische Energiedichte bezeichnet. In Integralform geht (5.45) in

$$-\dot{W}_{\mathrm{em}} = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \mathbf{S}^* \, \mathrm{d}V + \iiint\limits_{(V)} \varkappa \mathbf{E}^2 \, \mathrm{d}V \tag{5.47}$$

und nach dem Integralsatz von Gauß (4.49) in

$$-\frac{\partial}{\partial t} W_{\mathrm{em}} = \oint\!\!\!\oint\limits_{(H)} \mathbf{S}^* \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \dot{Q}_J \tag{5.48}$$

über. Die Abnahme der elektromagnetischen Energie ist nach (5.48) auf elektromagnetische Energieausstrahlung und Umwandlung in Joulesche Wärme zurückzuführen.

Bewegt sich die Anordnung gegenüber dem Laborsystem mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$, so müssen wir $\dot{\mathbf{D}}$ in (5.42) und $\dot{\mathbf{B}}$ in (5.43) durch

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{D} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} \tag{5.49}$$

ersetzen. Während die Lorentztransformation (5.1) die Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie darstellt, basiert die „Absoluttheorie" auf der *Galileitransformation*

$$\bar{x} = x - ut, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t, \tag{5.50}$$

die aus (5.1) unter der Voraussetzung $u^2/c^2 \ll 1$ hervorgeht. Diese Näherung ist in der *Elektrotechnik* gut erfüllt, wenn man den Einfluß der Parallelverschiebung eines elektromagnetischen Systems mit konstanter Geschwindigkeit $\left(\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathrm{const}}\right)$ untersucht.

Aufgabe 5.6: Man benutze (4.24) für $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{D}$ und $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}$ bezüglich (5.49) in der Form

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \operatorname{\mathbf{rot}} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \tag{4.24}$$

um die Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \dot{\mathbf{D}} + \varrho_e \mathbf{u} + \operatorname{\mathbf{rot}} (\mathbf{D} \times \mathbf{u}), \tag{5.51}$$

$$\operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} + \operatorname{\mathbf{rot}} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{5.52}$$

mit 2 Zusatzgliedern gegenüber (5.42) und einem Zusatzglied gegenüber (5.43) herzuleiten.

5.5. Bilanzgleichungen

Wir führen eine stetig differenzierbare Orts- und Zeitfunktion $G = G(\mathbf{x}(t), t)$ ein, über deren physikalische Bedeutung noch verfügt werden kann. Für

$$\frac{\mathrm{d}(\varrho G)}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

erhalten wir nach (4.30)

$$\frac{\mathrm{d}(\varrho G)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\varrho G)}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{grad}\,(\varrho G).$$

Wegen (4.20) gilt

$$\mathrm{div}\,(\varrho G\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot\mathbf{grad}\,(\varrho G) + \varrho G\,\mathrm{div}\,\mathbf{w},$$

folglich

$$G\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\varrho G)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho G\mathbf{w}) - \varrho G\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}.$$

Damit ergibt sich die Beziehung

$$\varrho\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\varrho G)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho G\mathbf{w}) - G\left[\varrho\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet, wenn die Kontinuitätsgleichung in der Gestalt (5.37) berücksichtigt wird. Als neue Formulierung der *Kontinuitätsgleichung* erhalten wir nunmehr

$$\varrho\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\varrho G)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho G\mathbf{w}) \tag{5.53}$$

mit der verfügbaren *Transportgröße* G. Transportgrößen sind z. B. Masse, Impuls, innere Energie, Enthalpie, Entropie, bezogen auf die Masseneinheit. Temperatur und spezifisches Volumen $v = \dfrac{1}{\varrho}$ sind *keine* Transportgrößen.

Beispiel 5.5: Ersetzen wir G durch die vektorielle Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ als Impuls je Masseneinheit, so folgt aus (5.53)

$$\varrho\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial(\varrho\mathbf{w})}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{ww}) \tag{5.54}$$

mit dem Tensorfeld der Dyade $\mathbf{ww} = w_i w_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$. Damit geht die Bewegungsgleichung $\varrho\,\mathrm{d}\mathbf{w}/\mathrm{d}t = \mathrm{div}\,\mathbf{S}$ in die *Impulsbilanzgleichung*

$$-\frac{\partial(\varrho\mathbf{w})}{\partial t} = \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{ww}) - \mathrm{div}\,\mathbf{S} \tag{5.55}$$

über. Gl. (5.45) hat die Form einer *elektromagnetischen Energiebilanzgleichung*.

Aus der Bewegungsgleichung nach Navier-Stokes (4.45) soll die „Wirbeltransportgleichung“ hergeleitet werden. Wir ziehen die Lambsche Formel (4.28) heran und erhalten für (4.45)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}\, \mathbf{w}^2 - \mathbf{w} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{w}$$

$$= -\frac{1}{\varrho} \mathbf{grad}\, p + \nu \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \mathbf{w} + \frac{1}{3} \nu\, \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{w}. \tag{5.56}$$

ν und ϱ seien *Konstante*. Durch Rotorbildung über (5.56) entsteht

$$\mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{rot}\,(\mathbf{w} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{w}) = \nu\, \mathbf{rot}\,(\nabla^2 \mathbf{w}).$$

Aufgabe 5.7: Mit $\mathbf{rot}\, \mathbf{w} = \boldsymbol{\gamma}$ leite man die *Rayleighsche Wirbelgleichung* her:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \mathbf{w}. \tag{5.57}$$

Speziell für das *ebensymmetrische* (*aber räumliche*) *Problem*

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma(x_1, x_2)\, \mathbf{e}_3 = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1)\, \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x_1, x_2) = w_1(x_1, x_2)\, \mathbf{e}_1 + w_2(x_1, x_2)\, \mathbf{e}_2$$

wird

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \mathbf{w} = \gamma(x_1, x_2)\, \partial_3 \mathbf{w}(x_1, x_2) = \mathbf{0}. \tag{5.58}$$

Nur beim „ebenen Problem“ stellen $\boldsymbol{\gamma}$ eine Transportgröße und

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} = \mathbf{w} \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\gamma} \tag{5.59}$$

eine Bilanzgleichung dar.

5.6. Wirbelfelder. Integralsätze nach Stokes. Inkompatibilitätstensor

Dem Wirbelfeld $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ wird mittels $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{rot}\, \mathbf{w}$ ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ zugeordnet. Die Feldlinien des Vektorfeldes $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ heißen *Wirbellinien.* Eine einzelne gerade Wirbellinie senkrecht zur Zeichenebene ist in der Zeichenebene von konzentrischen kreisförmigen Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ umgeben. Eine im allgemeinen gekrümmte Wirbellinie erzeugt das Geschwindigkeitsfeld einer Zirkulationsströmung mit der Wirbelstärke (Zirkulation) Γ. Bei einer kontinuierlichen Wirbelverteilung wird die *Wirbeldichte*

$$|\boldsymbol{\gamma}| = \left| \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}A} \right| \tag{5.60}$$

als Zirkulation je Flächeneinheit erklärt, wobei man sich vorstellt, daß zunächst eine Schar diskreter Wirbellinien mit den Wirbelstärken $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ das Flächenelement $\mathrm{d}A$ durchsetzt, die dann durch „Auffüllung zu einer lückenlosen Packung“ im Grenzübergang ein Kontinuum bilden, wobei keine Überschneidungen auftreten. Diese Hilfsvorstellungen werden durch den *Integralsatz von Stokes*

$$\iint\limits_{(A)} \mathbf{rot}\, \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint\limits_{(C)} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{5.61}$$

präzisiert, der nach Band 5 bekannt ist, siehe auch (7.7). Hier bezeichnet C die geschlossene Randkurve der *offenen* Fläche A. Das geschlossene Linienintegral wird mit mathematisch positivem Umlaufsinn (Gegenuhrzeigersinn) definiert; andernfalls erhält das Integral negatives Vorzeichen. Ähnlich wie die Integrale des Gaußschen Satzes den Überschuß an Quellen eines Vorzeichens messen, definieren die Integrale des Satzes von Stokes

$$\iint_{(A)} \gamma \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint_{(C)} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \oint_{(C)} w_s \, \mathrm{d}s = \Gamma_{\ddot{u}} \tag{5.62}$$

den Überschuß an Wirbelstärken eines Drehsinns. Werden von der Randkurve C nämlich entgegengesetzt drehende Wirbel eingeschlossen, so gibt das geschlossene Linienintegral die Summe aller im Integrationsbereich vorhandenen vorzeichenbehafteten Wirbelstärken an, also den Überschuß der Wirbelstärken eines Vorzeichens, sofern $\Gamma_{\ddot{u}} \neq 0$ ist.

Wegen

$$\mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{w} = [\mathrm{d}\mathbf{A} \nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}] = (\mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla) \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{w}}$$

gilt auch

$$\iint_{(A)} (\mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla) \cdot \mathbf{w} = \oint_{(C)} \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}. \tag{5.63}$$

Verallgemeinert läßt sich die Operatoridentität

$$\iint_{(A)} \mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla = \oint_{(C)} \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{5.64}$$

begründen, aus der sich weitere Integralsätze ergeben, z. B.

$$\iint_{(A)} \mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla\varphi = \oint_{(C)} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \varphi$$

oder

$$-\iint_{(A)} \mathbf{grad}\, \varphi \times \mathrm{d}\mathbf{A} = \oint_{(C)} \varphi \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{5.65}$$

ferner

$$\iint_{(A)} (\mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla) \times \overset{\downarrow}{\mathbf{w}} = \oint_{(C)} \mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathbf{w} \tag{5.66}$$

und für ein zweistufiges Tensorfeld $\mathbf{T}$:

$$\iint_{(A)} (\mathrm{d}\mathbf{A} \times \nabla) \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{T}} = \oint_{(C)} \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{T}. \tag{5.67}$$

Satz 5.4: *Der Rotor des Geschwindigkeitsfeldes einer stationären Strömung stellt eine Wirbeldichte dar:*

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{x}). \tag{5.68}$$

Allgemein wird **rot v** *als Wirbelfeld angesprochen, das ein zugeordnetes Vektorfeld* **v** *erzeugt.*

Beispiel 5.6: Bei stationärer elektrischer Strömung lautet die Maxwellsche Gleichung (5.42)

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}_e(x). \qquad \overline{(5.68)}$$

Der elektrische „Strom“, nämlich die *Stromstärke*

$$I = \iint\limits_{(A)} \mathbf{j}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}, \qquad (5.69)$$

entspricht bei Vergleich von $\overline{(5.68)}$ mit (5.68) der Zirkulation Γ. Elektrodynamisch und hydrodynamisch entsprechen sich die Größen

$$\mathbf{j}_e \mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{\gamma}, \quad I \mathrel{\hat{=}} \Gamma, \quad \mathbf{H} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{w}, \qquad (5.70)$$

man denke an das Biot-Savartsche Gesetz in beiden Fassungen! Die elektrische Stromdichte $\mathbf{j}_e$ stellt also ein Wirbelfeld dar, das ein zugeordnetes Magnetfeld $\mathbf{H}$ erzeugt.

Satz 5.5: *Der Rotor eines Tensorfeldes 1. Stufe ergibt ein Tensorfeld 1. Stufe.*

Das folgt aus der koordinatenfreien Darstellung (4.53) des Nablatensors 1. Stufe und dem Tensorcharakter des Vektorfeldes $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, so daß $\nabla\mathbf{w}$, $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\mathbf{w}$ und $\nabla \cdot \mathbf{w} = \operatorname{div}\mathbf{w}$ Tensorfelder 2., 1. und nullter Stufe sind.

Von großer Bedeutung für Theorie und Anwendung ist die Erweiterung des Wirbelfeldbegriffes $\mathbf{rot}\,\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w}$ auf Tensorfelder 2. Stufe durch den Begriff der *Inkompatibilität* des Tensorfeldes $\mathbf{T}$ gemäß

$$\nabla \times \overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{T}} \times \nabla = \mathbf{ink}\,\mathbf{T}. \qquad (5.71)$$

Wenn wir auch $\mathbf{def}\,\mathbf{s} = \frac{1}{2}\left(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{s}} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)$ als eine Erweiterung des vektoriellen Gradientenbegriffes $\mathbf{grad}\,\varphi$ auf Tensoren 2. Stufe ansehen, gelten folgende sich entsprechende Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\mathbf{grad} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{rot} = 0, \\ \mathbf{ink}\,\mathbf{def} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{ink} = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.72)$$

Beispiel 5.7: Wegen seiner Bedeutung berechnen wir für $\mathbf{D} = d_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k$ den *Inkompatibilitätstensor*

$$\begin{aligned} \mathbf{ink}\,\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{D} \times \nabla = {} & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1(\partial_3\partial_2 d_{32} + \partial_2\partial_3 d_{23} - \partial_3\partial_3 d_{22} - \partial_2\partial_2 d_{33}) \\ & + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(\partial_3\partial_3 d_{21} + \partial_1\partial_2 d_{33} - \partial_3\partial_2 d_{31} - \partial_1\partial_3 d_{23}) \\ & + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3(\partial_2\partial_2 d_{31} + \partial_1\partial_3 d_{22} - \partial_2\partial_3 d_{21} - \partial_1\partial_2 d_{32}) \\ & + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1(\partial_3\partial_3 d_{12} + \partial_2\partial_1 d_{33} - \partial_3\partial_1 d_{32} - \partial_2\partial_3 d_{13}) \\ & + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2(\partial_3\partial_1 d_{31} + \partial_1\partial_3 d_{13} - \partial_3\partial_3 d_{11} - \partial_1\partial_1 d_{33}) \qquad (5.73) \\ & + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3(\partial_1\partial_1 d_{32} + \partial_2\partial_3 d_{11} - \partial_2\partial_1 d_{31} - \partial_1\partial_3 d_{12}) \\ & + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1(\partial_2\partial_2 d_{13} + \partial_3\partial_1 d_{22} - \partial_3\partial_2 d_{12} - \partial_2\partial_1 d_{23}) \\ & + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2(\partial_1\partial_1 d_{23} + \partial_3\partial_2 d_{11} - \partial_3\partial_1 d_{21} - \partial_1\partial_2 d_{13}) \\ & + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3(\partial_2\partial_1 d_{21} + \partial_1\partial_2 d_{12} - \partial_2\partial_2 d_{11} - \partial_1\partial_1 d_{22}). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8: Man beweise mittels (5.73) und bestätige mit Nablaoperationen die Indentitäten

$$\mathbf{ink}\,\mathbf{def}\,\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{ink}\,\mathbf{D} = \mathbf{0}. \tag{5.74}$$

Aufgabe 5.9: Man überprüfe an drei ausgewählten Komponenten, daß **ink D** = **0** ist, wenn $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{s}} + \overset{\downarrow}{\mathbf{s}}\nabla\right)$ eingesetzt wird, z. B.

$$d_{11} = \partial_1 s_1, \quad d_{22} = \partial_2 s_2, \quad 2d_{12} = \partial_1 s_2 + \partial_2 s_1$$

für die letzte Komponente in (5.73).

Wenn **D** ein symmetrischer Tensor 2. Stufe ist, ist es auch **ink D**. Welche Koordinaten des Tensors **ink D** gehen durch zyklische Vertauschung auseinander hervor?

Wir wollen $d_{ki} = d_{ik}$ voraussetzen. Die Tensorgleichung

$$\mathbf{ink}\,\mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{5.75}$$

heißt *Kompatibilitätsbedingung*. Nach (5.73) erhalten wir die Bedingungsgleichungen der Kompatibilität:

$$R^*_{kipq} = \partial_i\partial_p d_{qk} + \partial_k\partial_q d_{pi} - \partial_q d_{pk} - \partial_k\partial_p d_{qi} = 0, \tag{5.76}$$

z. B. für $kipq$ = 1212, 2323, 3131, 1123, 2231, 3312 bei Beachtung der Reihenfolge, also 6 unabhängige Bedingungen nach (5.73). Andererseits genügen die Koordinaten R^*_{kipq} nach (5.76) den Symmetriebeziehungen

$$\begin{aligned} R^*_{kipq} &= -R^*_{kiqp} = -R^*_{ikpq} = +R^*_{ikqp}, \\ R^*_{kipq} &+ R^*_{kpqi} + R^*_{kqip} = 0, \end{aligned} \tag{5.77}$$

wie man durch Vertauschungen von Indizes in (5.76) sofort bestätigt. Wegen (5.77) gibt es auch nur 6 unabhängige Bedingungsgleichungen der Form $R^*_{kipq} = 0$. Die R^*_{kipq} sind die Koordinaten eines Tensors 4. Stufe, der aus den Koordinaten R_{kipq} des Riemann-Tensors (8.18) durch Linearisierung bei Annahme kleiner Verzerrungen $|d_{ik}|$ hervorgeht.

Eine ausführliche Darstellung findet sich in dem vierbändigen Werk „Ein Kurs über Kontinuumsmechanik" von L. I. Sedow, Universität Moskau (Englische Übersetzung: Wolters-Noordhoff Publishing Groningen The Netherlands). Der Tensorkalkül wird hier weitgehend in unserer Auffassung benutzt. Während wir uns in den Anwendungen auf die Eulersche Darstellung beschränken mußten, wird in dem genannten Werk auch die Lagrangesche Darstellung ausführlich erörtert und angewandt.

6. Einführung in die Tensoralgebra mit ko- und kontravarianter Basis

6.1. Ko- und kontravariante Basisvektoren und Tensorkoordinaten

Es wird unter der Voraussetzung $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] \neq 0$ eine beliebige Basis $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ zugrunde gelegt. Die Basisvektoren $\mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2, 3$) haben beliebige Längen (Normen) und definieren im allgemeinen ein schiefwinkliges KS B. In diesem Bezugssystem habe ein Vektor $\mathbf{v}$ die Komponentendarstellung

$$\mathbf{v} = \nu_1\mathbf{b}_1 + \nu_2\mathbf{b}_2 + \nu_3\mathbf{b}_3 \tag{6.1}$$

mit den Koordinaten ν_1, ν_2, ν_3. Die Lösung dieser Vektorgleichung ist uns aus (3.15), (3.16) bekannt:

$$\nu_1 = \frac{[\mathbf{v}\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \nu_2 = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{v}\mathbf{b}_3]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \nu_3 = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{v}]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}. \tag{6.2}$$

Wir führen die neue Bezeichnung

$$\nu_i := v^i \tag{6.3}$$

ein und verabreden das *neue Summationsübereinkommen* als

Vereinbarung 6.1: Über zwei gleiche lateinische Buchstabenindizes wird nur dann automatisch von 1 bis 3 summiert, wenn einer der Indizes tiefgestellt, der andere hochgestellt ist. (Über 2 gleiche Buchstabenindizes, die in gleicher Höhe stehen, darf künftig *nicht* summiert werden!).

Damit wird (6.1)

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{b}_1 + v^2\mathbf{b}_2 + v^3\mathbf{b}_3 = v^i\mathbf{b}_i \tag{6.4}$$

und (6.2)

$$v^1 = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad v^2 = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad v^3 = \mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}. \tag{6.5}$$

Wir definieren die zu den Basisvektoren $\mathbf{b}_i$ *reziproken Vektoren* $\mathbf{b}^i$ gemäß

$$\mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{b}^2 = \frac{\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]}, \quad \mathbf{b}^3 = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]} \tag{6.6}$$

und erhalten für (6.5)

$$v^1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}^1, \quad v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}^2, \quad v^3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}^3,$$

also

$$v^i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{b}^i \tag{6.7}$$

bezüglich (6.4). Diese ursprüngliche Darstellung enthält keine offenen Fragen mehr. Der Vektor $\mathbf{v}$ ist aber auch mit den Koordinaten

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}_i = v_i \tag{6.8}$$

vollständig bestimmt. Sie entsprechen den Parallelprojektionen in einem schiefwinkligen KS, während die v^i den senkrechten Projektionen entsprechen. Wie sieht die Darstellung eines Vektors $\mathbf{v}$ mittels (6.8) aus?

Zur Beantwortung dieser Frage wird (6.5) skalar mit $\mathbf{b}_i$ multipliziert, z. B.

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}^2 = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]} = 0, \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}^2 = \frac{[\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]} = 1$$

usw. Es gilt

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k = \delta_i^k = \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_i, \tag{6.9}$$

wo jetzt δ_i^k das *Kroneckersymbol* bedeuten soll. Bilden wir nach (6.4)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = v_k \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_i = v_k \delta_i^k = v_i,$$

so wird die gestellte Frage mit der Komponentendarstellung

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{b}^i \tag{6.10}$$

des Vektors $\mathbf{v}$ beantwortet, d. h. die Koordinaten $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = v_i$ hat der Vektor nicht im ursprünglichen Basissystem B der Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, sondern im zugeordneten reziproken System B^* der Basisvektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ (vgl. Bd. 13, 2.3.7.2.).

Aufgaben 6.1: Es ist nachzuweisen, daß die *Reziprozitätsbeziehungen*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k = \delta_i^k, \ [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\,[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] = 1 \tag{6.11}$$

und die *Korrespondenzformeln* zu (6.6)

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3}{[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{b}^3 \times \mathbf{b}^1}{[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2}{[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]} \tag{6.12}$$

gelten.

Ist $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ eine Basis, so bilden auch die reziproken Vektoren $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ eine Basis nach (6.11), und zwar beide ein (R) oder beide ein (L), denn aus $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] \gtrless 0$ folgt $[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] \gtrless 0$. In den Darstellungen

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{b}^i = v^i \mathbf{b}_i \tag{6.13}$$

heißen die v_i *kovariante*, die v^i *kontravariante* Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$. Entsprechend heißen die $\mathbf{b}_i$ *kovariante*, die $\mathbf{b}^i$ *kontravariante* Basisvektoren. Diese Bezeichnungen werden sich aus dem Transformationsverhalten bei Übergang von B auf $\bar{B}$ und B^* auf $\bar{B}^*$ ergeben. Wenn es sich um *kartesische Einheitsvektoren* handelt, fallen die Parallelprojektionen mit den Normalprojektionen zusammen, und es gilt nach (6.6) und (6.12)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i = \mathbf{b}^i.$$

6.2. Die Transformationsgesetze für die Tensorkoordinaten

An Stelle der früheren c_{ik} müssen wir *neue Transformationskoeffizienten* β_i^k einführen, mit denen der Übergang von B auf $\bar{B}$ durch eine *homogene lineare Koordinatentransformation* gemäß

$$\bar{\mathbf{b}}_i = \beta_i^k \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{b}_i = \bar{\beta}_i^k \bar{\mathbf{b}}_k \tag{6.14}$$

und von B^* auf $\bar{B}^*$ gemäß

$$\bar{\mathbf{b}}^i = \bar{\beta}_k^i \mathbf{b}^k, \quad \mathbf{b}^i = \beta_k^i \bar{\mathbf{b}}^k \tag{6.15}$$

für $i = 1, 2, 3$ vollzogen wird. Der Buchstabe β soll an Basis und Bezugssystem erinnern. Die Transformationsmatrix $\underline{Z} = ((\beta_i^k))$ sei regulär, also $\|\beta_i^k\| \neq 0$. Das 2. Gleichungssystem von (6.14) ist die Auflösung des 1. Gleichungssystems, so daß $\bar{\beta}_i^k$ die *Elemente der inversen Matrix* zur Ausgangsmatrix mit den Elementen β_i^k bedeuten. Da die $\mathbf{b}_i$ und $\mathbf{b}^i$ in einer festen Beziehung zueinander stehen, ist (6.15) aus der Vorgabe (6.14) zu folgern. Auch in den neuen Bezugssystemen $\bar{B}$ und $\bar{B}^*$ muß

$$\bar{\mathbf{b}}_i \cdot \bar{\mathbf{b}}^k = \delta_i^k \tag{6.16}$$

gelten. Da die Transformationsmatrizen $\underline{Z} = ((\beta_i^k))$ und $\underline{Z}^{-1} = ((\bar{\beta}_i^k))$ zueinander invers sind, bestehen die Beziehungen $\underline{Z}\underline{Z}^{-1} = \underline{Z}^{-1}\underline{Z} = \underline{I}$, also

$$\beta_i^l \bar{\beta}_l^k = \bar{\beta}_i^l \beta_l^k = \delta_i^k . \tag{6.17}$$

Aufgabe 6.2: Mit dem Ansatz $\bar{\mathbf{b}}^i = \gamma_k^i \mathbf{b}^k$ bestätige man das erste Gleichungssystem von (6.15) als Folgerung aus (6.14) mittels (6.16) und (6.17).

Jetzt können wir die Transformationsgesetze angeben, nach denen sich die Koordinaten eines Vektors $\mathbf{v}$ transformieren müssen, um der Invarianzforderung $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ an einen Tensor 1. Stufe zu genügen. Mit (6.14) und (6.15) folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{v}} &= \bar{v}^i \bar{\mathbf{b}}_i = \bar{v}^i \beta_i^k \mathbf{b}_k = \mathbf{v} = v^k \mathbf{b}_k ,\\
\bar{\mathbf{v}} &= \bar{v}_i \bar{\mathbf{b}}^i = v_i \bar{\beta}_k^i \mathbf{b}^k = \mathbf{v} = v_k \mathbf{b}^k ,\\
\mathbf{v} &= v^i \mathbf{b}_i = v^i \bar{\beta}_i^k \bar{\mathbf{b}}_k = \bar{\mathbf{v}} = \bar{v}^k \bar{\mathbf{b}}_k\\
\mathbf{v} &= v_i \mathbf{b}^i = v_i \beta_k^i \bar{\mathbf{b}}^k = \bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_k \bar{\mathbf{b}}^k .
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Faktoren von $\mathbf{b}^k$ bzw. $\mathbf{b}_k$ erhalten wir die *Transformationsgesetze*

$$\bar{v}_i = \beta_i^k v_k , \quad v_i = \bar{\beta}_i^k \bar{v}_k , \tag{6.18}$$

$$\bar{v}^i = \bar{\beta}_k^i v^k , \quad v^i = \beta_k^i \bar{v}^k \tag{6.19}$$

für die Koordinaten eines Tensors 1. Stufe.

Durch Vergleich von (6.18) und (6.19) allein mit (6.14), d. h. mit den „ursprünglichen" Basisvektoren $\mathbf{b}_i$, nennt man das Transformationsverhalten der Koordinaten v_i *kovariant* (zu den $\mathbf{b}_i$), das Transformationsverhalten der Koordinaten v^i dagegen *kontravariant* (zu den $\mathbf{b}_i$). Verschiedene Größen, die sich gemeinsam nach dem Transformationsgesetz (6.18) oder gemeinsam nach (6.19) richten, heißen *kogredient*. Transformiert sich eine Größe nach (6.18), eine andere Größe nach (6.19), so verhalten sie sich zueinander *kontragredient*. Die Matrix $(\underline{Z}^{-1})^{\mathrm{T}} = ((\bar{\beta}_k^i))$ heißt nämlich die kontragrediente Matrix zu $\underline{Z} = ((\beta_i^k))$. Mit diesen Matrizen sind die in (6.18) und (6.19) untereinander stehenden Vergleichssummen gebildet. Rein äußerlich erkennt man Kovarianz in (6.18) daran, daß die Summe nur mit ungestrichenen oder nur mit gestrichenen Größen gebildet wird, während bei Kontravarianz nach (6.19) in der Summe gestrichene und ungestrichene Größen zusammentreten. In $\mathbf{b}_i$ und v_i bzw. $\mathbf{b}^i$ und v^i weist bereits der tief bzw. hoch gestellte Index auf das ko- bzw. kontravariante Verhalten dieser Größen hin.

Das *Produkt* zweier Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ wird völlig analog zu (2.13) definiert. Jetzt gibt es aber vier Darstellungsmöglichkeiten für die Dyade $\mathbf{uv}$, nämlich

$$\mathbf{uv} = u^i \mathbf{b}_i v^k \mathbf{b}_k = u^i v^k \mathbf{b}_i \mathbf{b}_k , \quad \mathbf{uv} = u_i v_k \mathbf{b}^i \mathbf{b}^k ,$$

außerdem die gemischten Darstellungen

$$\mathbf{uv} = u_i v^k \mathbf{b}^i \mathbf{b}_k , \qquad \mathbf{uv} = u^i v_k \mathbf{b}_i \mathbf{b}^k .$$

Da das Flächenelement $\mathrm{d}A$ im folgenden nicht auftritt, können wir mit $\mathbf{A}$ einen Tensor 2. Stufe bezeichnen. Entsprechend den Darstellungsmöglichkeiten für $\mathbf{uv}$ gibt es für einen Tensor 2. Stufe die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{A} = a^{ik}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k = a_{ik}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k = a_i{}^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k = a^i{}_k\mathbf{b}_i\mathbf{b}^k. \tag{6.20}$$

Die Schreibweise a_i^k ist nur erlaubt, wenn $a_i{}^k = a^k{}_i$ gilt wie z. B. für das Kroneckersymbol δ_i^k. Die Transformationsgesetze für die Koordinaten eines Tensors 2. Stufe ergeben sich mit (6.14), (6.15) aus der Invarianzforderung $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$, also z. B.

$$\mathbf{A} = a^{ij}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = a^{ij}\bar{\beta}_i^k\bar{\mathbf{b}}_k\bar{\beta}_j^l\bar{\mathbf{b}}_l,$$

$$\mathbf{A} = a^{ij}\bar{\beta}_i^k\bar{\beta}_j^l\bar{\mathbf{b}}_k\bar{\mathbf{b}}_l = \bar{\mathbf{A}} = \bar{a}^{kl}\bar{\mathbf{b}}_k\bar{\mathbf{b}}_l$$

oder

$$\mathbf{A} = a_{ij}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^j = a_{ij}\beta_k^i\bar{\mathbf{b}}^k\beta_l^j\bar{\mathbf{b}}^l,$$

$$\mathbf{A} = a_{ij}\beta_k^i\beta_l^j\bar{\mathbf{b}}^k\bar{\mathbf{b}}^l = \bar{\mathbf{A}} = \bar{a}_{kl}\bar{\mathbf{b}}^k\bar{\mathbf{b}}^l.$$

Wir stellen die *Transformationsgesetze* für die Koordinaten eines Tensors 2. Stufe in den 4 möglichen Darstellungen zusammen:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{kl} &= \beta_k^i\beta_l^j a_{ij}, & a_{kl} &= \bar{\beta}_k^i\bar{\beta}_l^j\bar{a}_{ij},\\
\bar{a}^{kl} &= \bar{\beta}_i^k\bar{\beta}_j^l a^{ij}, & a^{kl} &= \beta_i^k\beta_j^l\bar{a}^{ij},\\
\bar{a}_k{}^l &= \beta_k^i\bar{\beta}_j^l a_i{}^j, & a_k{}^l &= \bar{\beta}_k^i\beta_j^l\bar{a}_i{}^j,\\
\bar{a}^k{}_l &= \bar{\beta}_i^k\beta_l^j a^i{}_j, & a^k{}_l &= \beta_i^k\bar{\beta}_l^j\bar{a}^i{}_j.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Ersichtlich braucht man immer nur eine der nebeneinander stehenden Transformationsgleichungen aufzuschreiben, da jeweils eine aus der anderen hervorgeht, wenn man alle Trägerbuchstaben mit einem zusätzlichen Querstrich versieht und $\bar{\bar{a}} = a$, $\bar{\bar{\beta}} = \beta$ beachtet. Auch ohne Rechnung entnimmt man aus den Transformationsgesetzen (6.21) das Bildungsgesetz der Transformationsformeln, was wir am Beispiel eines vierstufigen Tensors zeigen.

Beispiel 6.1: Es sei $\mathbf{R}$ ein Tensor 4. Stufe. Seine Koordinaten genügen z. B. folgenden Transformationsgesetzen

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{ijkl} &= \beta_i^m\beta_j^n\beta_k^p\beta_l^q r_{mnpq}, & \bar{r}^{ijkl} &= \bar{\beta}_m^i\bar{\beta}_n^j\bar{\beta}_p^k\bar{\beta}_q^l r^{mnpq},\\
\bar{r}^i{}_j{}^k{}_l &= \bar{\beta}_m^i\beta_j^n\bar{\beta}_p^k\beta_l^q r^m{}_n{}^p{}_q, & \bar{r}_i{}^{jkl} &= \beta_i^m\bar{\beta}_n^j\bar{\beta}_p^k\bar{\beta}_q^l r_m{}^{npq}.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Ein Tensor 4. Stufe hat $3^4 = 81$ Koordinaten. Für seine Charakteristik bezüglich Ko- und Kontravarianz gibt es $2^4 = 16$ Möglichkeiten, von denen wir in (6.22) nur 4 angegeben haben. Die Komponentendarstellung geht aus der Koordinatendarstellung eindeutig hervor, z. B.

$$\mathbf{R} = r_{ijkl}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^j\mathbf{b}^k\mathbf{b}^l = r^{ijkl}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l$$

$$= r^i{}_j{}^k{}_l\mathbf{b}_i\mathbf{b}^j\mathbf{b}_k\mathbf{b}^l = r_i{}^{jkl}\mathbf{b}^i\mathbf{b}_j\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l,$$

so daß man die Basisvektoren jederzeit hinzufügen oder weglassen kann, wenn man nur in Koordinaten rechnen will. Die *Varianten* sind die Tensorkoordinaten und Basisvektoren. *Invariant* sind die Tensoren und die von ihnen erzeugten Multilinearformen. Der Vergleich von (6.18) und (6.19) mit (6.14) und (6.15) zeigt, daß sich die kovarianten (kontravarianten) Koordinaten eines Tensors 1. Stufe nach dem gleichen Gesetz transformieren wie die kovarianten (kontravarianten) Basisvektoren. Das ist eine *Verallgemeinerung des Satzes 1.2.* Alles über Multilinearformen im Zusammenhang mit Tensoren Gesagte könnte hier in sinngemäßer Verallgemeinerung wiederholt werden. Die Erweiterung von kartesischen auf beliebige Basissysteme, von orthogonalen auf beliebige homogene lineare Koordinatentransformationen ist erheblich. Es wäre aber ermüdend und aus Platzgründen gar nicht möglich, alle Übertragungen mit Definitionen, Sätzen und Beweisen sinngemäß zu wiederholen. Wir müssen uns darauf beschränken, den Kalkül mitzuteilen und das wesentlich Neue hervorzuheben.

6.3. Tensor der Metrikkoeffizienten

Es fehlt noch die Komponentendarstellung eines Basisvektors $\mathbf{b}^i$ in B und eines Basisvektors $\mathbf{b}_i$ in B^*. Diesen Zusammenhang sollen die Koeffizienten g^{ik} und g_{ik} herstellen gemäß

$$\mathbf{b}^i = g^{ik}\mathbf{b}_k, \quad \mathbf{b}_i = g_{ik}\mathbf{b}^k. \tag{6.23}$$

Methodisch gesehen, läßt sich mittels $g^{ik}\mathbf{b}_k = \mathbf{b}^i$ der Index von $\mathbf{b}_k$ „heraufziehen" und mittels $g_{ik}\mathbf{b}^k = \mathbf{b}_i$ der Index von $\mathbf{b}^k$ „herunterziehen", indem man mit g^{ik} bzw. g_{ik} „überschiebt". Schreiben wir (6.23) in der Form $\mathbf{b}^k = g^{kl}\mathbf{b}_l$, $\mathbf{b}_l = g_{li}\mathbf{b}^i$ und $\mathbf{b}^k = \delta^k_i\mathbf{b}^i$, so folgt

$$\mathbf{b}^k = g^{kl}\mathbf{b}_l = g^{kl}g_{li}\mathbf{b}^i = \delta^k_i\mathbf{b}^i,$$

also

$$g^{kl}g_{li} = \delta^k_i, \tag{6.24}$$

d. h. die Matrizen $((g^{kl}))$ und $((g_{li}))$ sind zueinander invers, wie es nach (6.23) sein muß. Nun können wir auch das *Skalarprodukt der Basisvektoren* in B oder B^* mit (6.9) angeben

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = g_{ij}\mathbf{b}^j \cdot \mathbf{b}_k = g_{ij}\delta^j_k = g_{ik},$$

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^k = g^{ij}\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}^k = g^{ij}\delta^k_j = g^{ik},$$

so daß die Beziehungen $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_i$, $g_{ik} = g_{ki}$ und $\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^k = \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}^i$, $g^{ik} = g^{ki}$ gelten. Aus später ersichtlichen Gründen heißen die in (6.23) eingeführten Koeffizienten „Metrikkoeffizienten", und zwar die g_{ik} *kovariante Metrikkoeffizienten* und die g^{ik} *kontravariante Metrikkoeffizienten.* Die Metrikkoeffizienten sind *symmetrisch:*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = g_{ik} = g_{ki}, \quad \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}^k = g^{ik} = g^{ki}. \tag{6.25}$$

Nach (6.8) und (6.23) wird

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i = v^l\mathbf{b}_l \cdot g_{ik}\mathbf{b}^k = v^l g_{ik}\delta^k_l = v^k g_{ik},$$

analog

$$v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}^i = v_l\mathbf{b}^l \cdot g^{ik}\mathbf{b}_k = v_l g^{ik}\delta^l_k = v_k g^{ik}.$$

Mit Hilfe der Metrikkoeffizienten läßt sich der Index auch bei den Koordinaten eines Vektors herauf- und herunterziehen:

$$v_k g^{ik} = v^i, \quad v^k g_{ik} = v_i. \tag{6.26}$$

Wir untersuchen den „*Einheitstensor*" **G**, der den Forderungen

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{v} \tag{6.27}$$

genügen soll, in der ko- und kontravarianten Gestalt

$$\mathbf{G} = \gamma_{kl}\mathbf{b}^k\mathbf{b}^l = \gamma^{kl}\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l .$$

Es folgt

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \gamma_{kl}\mathbf{b}^k\mathbf{b}^l \cdot v^i\mathbf{b}_i = \gamma_{kl}v^i\mathbf{b}^k\delta_i^l = \gamma_{kl}v^l\mathbf{b}^k = \mathbf{v} = v_k\mathbf{b}^k,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{G} = v_i\mathbf{b}^i \cdot \gamma^{kl}\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l = \gamma^{kl}v_i\delta_k^i\mathbf{b}_l = \gamma^{kl}v_k\mathbf{b}_l = \mathbf{v} = v^l\mathbf{b}_l,$$

also nach (6.26)

$$v_k = \gamma_{kl}v^l = g_{kl}v^l, \quad v^l = \gamma^{kl}v_k = g^{kl}v_l .$$

Wegen $\gamma_{kl} = g_{kl}, \gamma^{kl} = g^{kl}$ bilden die Metrikkoeffizienten einen Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{G} = g_{ik}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k = g^{ik}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k, \tag{6.28}$$

der als „Metriktensor" (*Tensor der Metrikkoeffizienten*) bezeichnet wird und die Eigenschaft des Einheitstensors nach (6.27) besitzt. Wegen (6.25) ist der Metriktensor **G** symmetrisch.

Die neuen Kroneckersymbole δ_i^k genügen der Symmetriebedingung

$$\delta_i{}^k = \delta^k{}_i = \delta_i^k . \tag{6.29}$$

Sie sind die Koordinaten des *Einheitstensors*

$$\mathbf{I} = \delta_i^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k = \delta_i^k\mathbf{b}_k\mathbf{b}^i = \mathbf{b}^k\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k\mathbf{b}^k. \tag{6.30}$$

Da auch $\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{v}$ gelten muß, wie man leicht nachrechnet, besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{G} = \mathbf{I}. \tag{6.31}$$

I wird gemischt, **G** wird rein kovariant oder kontravariant dargestellt.

6.4. Tensorprodukte. Der ko- und kontravariante E-Tensor

Daß nur „gleichartige" Tensoren addiert werden können, besagt auch, daß man sich auf die *gleiche Basis* beziehen muß, z. B.

$$\sigma_i{}^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k + \tau_i{}^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k = (\sigma_i{}^k + \tau_i{}^k)\,\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k .$$

Wenn statt der $\mathbf{e}_i$ die Basisvektoren $\mathbf{b}^i$ und $\mathbf{b}_k$ eingeführt werden, läßt sich das *Produkt* zweier Tensoren völlig analog definieren, z. B.

$$\sigma_i{}^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k\tau^l{}_{mn}\mathbf{b}_l\mathbf{b}^m\mathbf{b}^n = \sigma_i{}^k\tau^l{}_{mn}\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l\mathbf{b}^m\mathbf{b}^n$$

bei Beachtung der Reihenfolge. Das *innere Produkt* der beiden Tensoren wird nach (6.25)

$$\sigma_i{}^k\mathbf{b}^i\mathbf{b}_k \cdot \tau^l{}_{mn}\mathbf{b}_l\mathbf{b}^m\mathbf{b}^n = \sigma_i{}^k\tau^l{}_{mn}g_{kl}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^m\mathbf{b}^n .$$

Für das *skalare Produkt* (zweier Vektoren) haben wir die Darstellungsmöglichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u^i\mathbf{b}_i\cdot v^k\mathbf{b}_k = u^iv^k\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_k = g_{ik}u^iv^k, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_i\mathbf{b}^i\cdot v_k\mathbf{b}^k = u_iv_k\mathbf{b}^i\cdot\mathbf{b}^k = g^{ik}u_iv_k \end{aligned} \tag{6.32}$$

und die gemischten Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u^i\mathbf{b}_i\cdot v_k\mathbf{b}^k = u^iv_k\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}^k = u^iv_k\delta_i^k = u^iv_i, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_i\mathbf{b}^i\cdot v^k\mathbf{b}_k = u_iv^k\mathbf{b}^i\cdot\mathbf{b}_k = u_iv^k\delta_k^i = u_iv^i, \end{aligned} \tag{6.33}$$

also gilt auch

$$g^{ik}u_iv_k = u^kv_k, \quad g_{ik}u^iv^k = u_kv^k. \tag{6.34}$$

Satz 6.1: *Mit Hilfe der Metrikkoeffizienten lassen sich die Indizes der Tensorkoordinaten systematisch herauf- oder herunterziehen nach dem Muster*

$$\begin{aligned} g_{ij}g_{kl}a^{jl} &= a_{ik}, \quad g^{ij}g^{kl}a_{jl} = a^{ik}, \\ g_{ij}g^{kl}a^j{}_l &= a_i{}^k, \quad g^{ij}g_{kl}a_j{}^l = a^i{}_k. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Die δ_i^k bewirken nur einen *Austausch* der Indizes, z. B.

$$\begin{aligned} \delta_i^k a^{il} &= a^{kl}, \quad \delta_l^k a^{il} = a^{ik}, \\ \delta_j^i a_{ik} &= a_{jk}, \quad \delta_l^k\delta_j^i a_{ik} = a_{jl}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Das *vektorielle Produkt* berechnen wir in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} = u^i\mathbf{b}_i\times v^k\mathbf{b}_k &= u^iv^k(\mathbf{b}_i\times\mathbf{b}_k) = (u^1v^2 - u^2v^1)(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2) \\ &+ (u^2v^3 - u^3v^2)(\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3) + (u^3v^1 - u^1v^3)(\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1) \end{aligned}$$

und nach (6.6)

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\begin{vmatrix} \mathbf{b}^1 & u^1 & v^1 \\ \mathbf{b}^2 & u^2 & v^2 \\ \mathbf{b}^3 & u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \tag{6.37}$$

analog

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = u_iv_k(\mathbf{b}^i\times\mathbf{b}^k) = [\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]\begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 & u_1 & v_1 \\ \mathbf{b}_2 & u_2 & v_2 \\ \mathbf{b}_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{6.38}$$

Das *Spatprodukt* wird nach (6.37)

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = [\mathbf{uvw}] = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\begin{vmatrix} \mathbf{b}^1\cdot\mathbf{w} & u^1 & v^1 \\ \mathbf{b}^2\cdot\mathbf{w} & u^2 & v^2 \\ \mathbf{b}^3\cdot\mathbf{w} & u^3 & v^3 \end{vmatrix}$$

wegen (6.7)

$$[\mathbf{uvw}] = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} \tag{6.39}$$

und entsprechend

$$[\mathbf{uvw}] = [\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{6.40}$$

Der Maßfaktor $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]$ bzw. $[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]$ ergibt sich hier ganz von selbst. Mit (6.37) bis (6.40) werden die vorweggenommenen Formulierungen (1.35a, b) legitimiert.

Wir bilden das doppelte Spatprodukt

$$\frac{[\mathbf{xyz}]\,[\mathbf{uvw}]}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\,[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^iu_i & x^iv_i & x^iw_i \\ y^iu_i & y^iv_i & y^iw_i \\ z^iu_i & z^iv_i & z^iw_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{x}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{y}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{y}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{z}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{z}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{z}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix}. \tag{6.41}$$

Speziell wird

$$[\mathbf{uvw}]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix}, \tag{6.42}$$

also ist nach (6.25)

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^2 = \|\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_k\| = \|g_{ik}\|.$$

Die *Determinante der kovarianten Metrikkoeffizienten* wird mit

$$\|g_{ik}\| = g \tag{6.43}$$

bezeichnet, so daß

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^2 = \|g_{ik}\| = g > 0 \tag{6.44}$$

und wegen (6.44)

$$[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]^2 = \|g^{ik}\| = \frac{1}{g} > 0 \tag{6.45}$$

gilt. Die Matrix der Metrikkoeffizienten ist regulär. Bilden die Basisvektoren in der Index-Reihenfolge 1, 2, 3 ein Rechts- oder Linkssystem, so erhalten wir die „Maßfaktoren"

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] &= +\sqrt{g}\ \text{(R)} \quad \text{oder} \quad = -\sqrt{g}\ \text{(L)}, \\ [\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] &= +\frac{1}{\sqrt{g}}\ \text{(R)} \quad \text{oder} \quad = -\frac{1}{\sqrt{g}}\ \text{(L)}. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Wie sieht der E-Tensor in ko- und kontravarianter Darstellung aus? Wir schreiben

$$\mathsf{E} = e^{ikl}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l = e_{ikl}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\mathbf{b}^l. \tag{6.47}$$

Zur Unterscheidung von den früheren Koordinaten ε_{ijk} benutzen wir den Buchstaben e. Nach (6.46) treffen wir die

Vereinbarung 6.2: Die Basisvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ und $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, so daß gilt

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] = +\sqrt{g}, \quad [\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] = +1/\sqrt{g} \tag{6.48}$$

Definition 6.1: Die Koordinaten des vollständig antisymmetrischen Tensors 3. Stufe E nach (6.47) sind

$$e_{ikl} = [\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l], \quad e^{ikl} = [\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\mathbf{b}^l], \tag{6.49}$$

und zwar nach (6.48)

$$\begin{aligned} &e_{123} = \sqrt{g}, \quad e^{123} = 1/\sqrt{g}, \\ &e_{123} = e_{231} = e_{312} = -e_{213} = -e_{321} = -e_{132}, \\ &e^{123} = e^{231} = e^{312} = -e^{213} = -e^{321} = -e^{132}, \end{aligned} \tag{6.50}$$

$e_{ikl} = 0$ und $e^{ikl} = 0$, wenn zwei oder drei Indizes gleichzahlig sind.

Diese Tensorkoordinaten müssen also entsprechend (6.21) und (6.22) den *Transformationsgesetzen*

$$\begin{aligned} &\bar{e}_{ikl} = \beta_i^m \beta_k^n \beta_l^p e_{mnp}, \quad e_{ikl} = \bar{\beta}_i^m \bar{\beta}_k^n \bar{\beta}_l^p \bar{e}_{mnp} \\ &\bar{e}^{ikl} = \bar{\beta}_m^i \bar{\beta}_n^k \bar{\beta}_p^l e^{mnp}, \quad e^{ikl} = \beta_m^i \beta_n^k \beta_p^l \bar{e}^{mnp} \end{aligned} \tag{6.51}$$

genügen. Der Beweis ist etwas anspruchsvoller; darauf können wir nicht mehr eingehen.

Die Rechenregeln mit den Tensorkoordinaten (6.49) werden methodisch völlig analog aufgestellt, wie wir es früher an den ε_{ijk} gezeigt haben. So ergibt sich für das *vektorielle Produkt* $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} = w^i \mathbf{b}_i = w_i \mathbf{b}^i$ die Koordinatendarstellung

$$w^i = e^{ikl} u_k v_l, \quad w_i = e_{ikl} u^k v^l \tag{6.52}$$

und für das *Spatprodukt*

$$[\mathbf{uvw}] = e^{ikl} u_i v_k w_l = e_{ikl} u^i v^k w^l. \tag{6.53}$$

Sind $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ Tensoren 1. Stufe, so ist $[\mathbf{uvw}]$ ein (invarianter) *Skalar*. Die Basisvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ oder $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ sind insgesamt *nicht* Tensoren 1. Stufe. Folglich stellen $[\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \mathbf{b}_k] = e_{ijk}$ und $[\mathbf{b}^i \mathbf{b}^j \mathbf{b}^k] = e^{ijk}$ keine skalaren Invarianten dar. In der Tat sind sie die varianten Koordinaten des **E**-Tensors, die sich nach (6.51) transformieren müssen. Nach Satz 6.1 erhalten wir

$$g^{il} g^{jm} g^{kn} e_{lmn} = e^{ijk}, \quad g_{il} g_{jm} g_{kn} e^{lmn} = e_{ijk}. \tag{6.54}$$

Statt (2.33), (2.35), (2.39), (2.40) gelten die entsprechenden *Produktformeln*

$$e_{ijk} e^{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_i^l & \delta_j^l & \delta_k^l \\ \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \end{vmatrix}, \tag{6.55}$$

$$e_{ijk} e^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m, \tag{6.56}$$

$$e_{ijk} e^{ijn} = 2\delta_k^n, \quad e_{ijk} e^{ijk} = 6. \tag{6.57}$$

Zum Beispiel nimmt die Beziehung (2.41) jetzt die Form an

$$e^{ikl} v_l = v^{ik}, \quad v_l = \tfrac{1}{2} e_{ikl} v^{ik}. \tag{6.58}$$

7. Einführung in die Tensoranalysis mit ko- und kontravarianter Basis

7.1. Krummlinige Flächenkoordinaten. Vektor des Flächenelements. Zirkulation

Wir erinnern an *Kugelkoordinaten* (räumliche Polarkoordinaten) r, ϑ, φ, die mit

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\vartheta \tag{7.1}$$

für $0 \leqq r < \infty$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ erklärt sind. Auf der Kugelfläche $r = R = \text{const}$ können wir krummlinige *Flächenkoordinaten* ϑ, φ mittels

$$x_1 = R \sin\vartheta \cos\varphi, \quad x_2 = R \sin\vartheta \sin\varphi, \quad x_3 = R\cos\vartheta \tag{7.2}$$

in der Form $x_1 = x_1(\vartheta, \varphi)$, $x_2 = x_2(\vartheta, \varphi)$, $x_3 = x_3(\vartheta, \varphi)$ einführen. Ein Festwert $\vartheta = \vartheta_0$ ergibt einen Breitenkreis, während $\varphi = \varphi_0$ einen Meridiankreis der Kugel $r = R$ definiert. Allgemein wird mit

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = x_3(u, v) \tag{7.3}$$

oder vektoriell mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ die Gleichung einer Fläche im R^3 mit den krummlinigen Koordinaten u und v beschrieben. Für $v = v_0$ erhalten wir in $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0)$ eine Raumkurve mit dem freien Parameter u, die wir *u-Linie* nennen, für $u = u_0$ in $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v)$ entsprechend eine *v-Linie*. Die u-Linien ($v = v_1, v_2, \ldots$) und v-Linien ($u = u_1, u_2, \ldots$) bedecken die Fläche mit einem *Netz* von *Koordinatenlinien*, die ganz der Fläche in Bild 7.1 angehören. Die mit $v = v_0$ markierte u-Linie und die mit

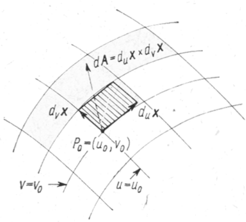


Bild 7.1:
Flächenelement in krummlinigen Koordinaten

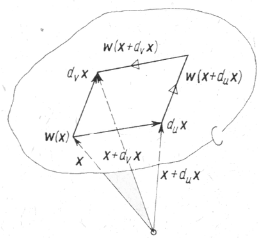


Bild 7.2:
Zum Integralsatz von Stokes

$u = u_0$ markierte v-Linie schneiden sich in dem Flächenpunkt P_0, der mit den krummlinigen Koordinaten u_0, v_0 bestimmt ist. Wir wollen u und v hier als *Flächenkoordinaten* bezeichnen. Auf der Fläche sind $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ und $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ *Tangentenvektoren* der u- und v-Linie. Ist nämlich $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ irgendeine Parameterdarstellung für eine Raumkurve, so ist $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ Tangentenvektor in jedem Punkt der Kurve. Damit sind auf der Fläche *differentielle Tangentenvektoren*

$$\mathrm{d}_u\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\,\mathrm{d}u \quad \text{und} \quad \mathrm{d}_v\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}v \tag{7.4}$$

der u- und v-Linie definiert. Tragen wir $\mathrm{d}_u\mathbf{x}$ und $\mathrm{d}_v\mathbf{x}$ von einem Flächenpunkt P ab, so spannen sie ein infinitesimales Parallelogramm in der Tangentenebene, die in P gelegt wird, auf, wie in Bild 7.1 ersichtlich.

Definition 7.1: *Mit*

$$\mathrm{d}_u\mathbf{x} \times \mathrm{d}_v\mathbf{x} = \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{7.5}$$

definieren wir das vektorielle Flächenelement in einem Punkt der Fläche. Der Vektor $\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}A\,\mathbf{n}$ *des Flächenelements ist Stellungsvektor der Tangentenebene, also normal gerichtet. Der Normaleneinheitsvektor* $\mathbf{n}$ *wird so definiert, daß die Vektoren* $\mathrm{d}_u\mathbf{x}, \mathrm{d}_v\mathbf{x}, \mathbf{n}$ *in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.*

Beispiel 7.1: Auf der Kugel $r = R$ sind die u- und v-Linien (mit $u = \vartheta$, $v = \varphi$) Meridiankreise ($\varphi = \text{const}$) und Breitenkreise ($\vartheta = \text{const}$). In Kugelflächenkoordinaten (7.2) ist $\mathrm{d}_u s = \mathrm{d}_\vartheta s = R\,\mathrm{d}\vartheta$ das Linienelement des Meridiankreises durch P. Der Radius eines Breitenkreises ist $R \sin\vartheta$. Das Linienelement des Breitenkreises durch P wird daher $\mathrm{d}_v s = \mathrm{d}_\varphi s = R \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$. Der Durchlaufungssinn der u- und v-Linien wird so festgelegt, daß $\mathrm{d}_u s > 0$ und $\mathrm{d}_v s > 0$ sind. Bezeichnen $\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_\vartheta$ und $\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_\varphi$ die Tangenteneinheitsvektoren der u- und v-Linie, so gilt

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r = \mathbf{r}^0$$

mit $\mathbf{e}_r$ in Richtung des Kugelradius. Wir erhalten das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{A} &= \mathrm{d}_u\mathbf{x} \times \mathrm{d}_v\mathbf{x} = \mathrm{d}_\vartheta\mathbf{x} \times \mathrm{d}_\varphi\mathbf{x}\\ &= R\,\mathrm{d}\vartheta\mathbf{e}_\vartheta \times R \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathbf{e}_\varphi = R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}$$

also

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = R^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\mathbf{e}_r = \mathrm{d}A\mathbf{r}^0. \tag{7.6}$$

Beispiel 7.2: Die in Bild 7.1 angedeutete gekrümmte Fläche besitzt das von den infinitesimalen Tangentenvektoren $\mathrm{d}_u\mathbf{x}$ und $\mathrm{d}_v\mathbf{x}$ in P aufgespannte Parallelogramm als Flächenelement mit dem Inhalt ΔA. Ihre Randkurve ΔC umschließt nach Bild 7.2 in einer wirbelbehafteten Strömung den Zirkulationsanteil

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma &= \oint_{(\Delta C)} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}\\ &= \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}_u\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathrm{d}_u\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}_v\mathbf{x} - \mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathrm{d}_v\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}_u\mathbf{x} - \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}_v\mathbf{x}\\ &= [\mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathrm{d}_u\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x})] \cdot \mathrm{d}_v\mathbf{x} - [\mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathrm{d}_v\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x})] \cdot \mathrm{d}_u\mathbf{x},\end{aligned}$$

wobei wir für das vektorielle Linienelement jetzt $\mathrm{d}\mathbf{x}$ (statt $\mathrm{d}\mathbf{s}$) schreiben. Für den nachfolgenden Integrationsprozeß genügt es, die nach Taylor linearisierten Anteile gemäß

$$\mathbf{w}(\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{w} + \dots$$

zu nehmen, da die Glieder höherer als 1. Ordnung in $(\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \nabla)$ keinen Beitrag zum Integral liefern. Wir schreiben also

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Gamma &= (\mathrm{d}_u\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{w}) \cdot \mathrm{d}_v\mathbf{x} - (\mathrm{d}_v\mathbf{x} \cdot \nabla\mathbf{w}) \cdot \mathrm{d}_u\mathbf{x}\\ &= (\mathrm{d}_u\mathbf{x} \cdot \nabla)\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{w}} \cdot \mathrm{d}_v\mathbf{x}\right) - (\mathrm{d}_v\mathbf{x} \cdot \nabla)\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{w}} \cdot \mathrm{d}_u\mathbf{x}\right)\\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})\end{aligned}$$

mit der Umwandlungsformel (1.41). Setzen wir für **a**, **b**, **c**, **d** die darüber stehenden Vektoren ein, so folgt mit (7.5)

$$\mathrm{d}\Gamma = \oint_{(\mathrm{d}C)} \mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = (\mathrm{d}_u\mathbf{x} \times \mathrm{d}_v\mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) = \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{rot}\,\mathbf{w}. \tag{7.7}$$

Durch Integration über den gesamten Flächenbereich (A) leitet man mittels (7.7) den Integralsatz von Stokes (5.61) her.

Es sei bemerkt, daß es sich bei $\delta\Gamma = \mathbf{rot}\,\mathbf{w} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$ und $\delta Q = \operatorname{div} \mathbf{w}\, \mathrm{d}V$ um *Differentialformen*, nicht um *Differentiale* handelt. Bei *linearen* Differentialformen soll das Zeichen δ andeuten, daß *nicht* ein totales Differential vorliegt; z. B. ist die differentielle Kompressionsarbeit $\delta W_k = -p\,\mathrm{d}v$ in der Thermodynamik *kein* totales Differential der Zustandsvariablen p, v, T. *Zustandsfunktionen* lassen sich als totales Differential darstellen, z. B. die innere Energie und die Entropie. Trotz dieser Bemerkungen wird man auf die bequeme Schreibweise $q(\mathbf{x}) = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}V$ nicht gern verzichten wollen.

7.2. Krummlinige Koordinaten des Raumes R^3 und der Ebene R^2

Statt der vorher besprochenen Flächenkoordinaten u, v legen wir jetzt *räumliche* krummlinige Koordinaten u, v, w mit den Transformationsgleichungen

$$x_1 = x_1(u, v, w), \quad x_2 = x_2(u, v, w), \quad x_3 = x_3(u, v, w) \tag{7.8}$$

oder vektoriell

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w) \tag{7.9}$$

zugrunde. Als Beispiel denken wir an die Kugelkoordinaten (7.1) mit $u = \vartheta$, $v = \varphi$, $w = r$. Jetzt bedeutet allgemein $w = w_0$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w_0)$ eine Fläche im R^3, die wir „Koordinatenfläche" nennen. Ebenso stellen $u = u_0$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v, w)$ und $v = v_0$

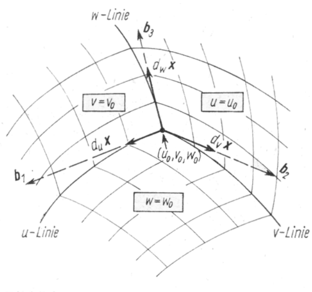


Bild 7.3:
Differentielle Tangentenvektoren

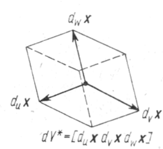


Bild 7.4:
Volumelement in krummlinigen Koordinaten

mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0, w)$ Koordinatenflächen dar, die sich nach Bild 7.3 im Punkt P_0 schneiden, der also mit den krummlinigen Koordinaten u_0, v_0, w_0 bestimmt ist. Die Koordinatenflächen $v = v_0$ und $w = w_0$ schneiden sich in der Raumkurve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0, w_0)$ mit dem freien Parameter u, die wir *jetzt* als *u-Linie* bezeichnen.

Entsprechend erhalten wir die anderen Koordinatenlinien, nämlich die *v-Linie* als Schnitt der Koordinatenflächen $w = w_0$ und $u = u_0$ sowie die *w-Linie* als Schnitt der Koordinatenflächen $u = u_0$ und $v = v_0$. Die so konstruierten drei Koordinatenlinien schneiden sich ebenfalls im Punkt P_0, wo wir die differentiellen Tangentenvektoren der u-, v-, w-Linie gemäß

$$\mathrm{d}_u\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\,\mathrm{d}u,\quad d_v\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}_w\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial w}\,\mathrm{d}w \tag{7.10}$$

nach Bild 7.3 abtragen. Wir ergänzen sie in Bild 7.4 zu einem infinitesimalen Parallelepiped (Spat) mit dem Spatvolumen

$$\mathrm{d}V^* = [\mathrm{d}_u\mathbf{x}\;\mathrm{d}_v\mathbf{x}\;\mathrm{d}_w\mathbf{x}] = \left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\;\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\;\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial w}\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{7.11}$$

Hier ist das Volumenverhältnis

$$\frac{[\mathrm{d}_u\mathbf{x}\,\mathrm{d}_v\mathbf{x}\,\mathrm{d}_w\mathbf{x}]}{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w} = \left[\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\;\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\;\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial w}\right] = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)} \tag*{$\overline{(7.11)}$}$$

gleich der Jacobischen *Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial u & \partial x_2/\partial u & \partial x_3/\partial u \\ \partial x_1/\partial v & \partial x_2/\partial v & \partial x_3/\partial v \\ \partial x_1/\partial w & \partial x_2/\partial w & \partial x_3/\partial w \end{vmatrix}. \tag{7.12}$$

Die eindeutige Auflösung des Gleichungssystems (7.8) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w)$ nach den Koordinaten u, v, w (oder umgekehrt) ist nur möglich, wenn die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)} \neq 0 \tag{7.13}$$

ist, da sonst die „Abbildung" degeneriert. Der Übergang von einem Rechtssystem zu einem Rechts- oder Linkssystem wird dadurch angezeigt, daß (7.13) speziell >0 oder <0 ist. Die krummlinigen Koordinaten u, v, w heißen *orthogonal*, wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v} = 0,\quad \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial w} = 0,\quad \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial w}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial u} = 0 \tag{7.14}$$

erfüllt sind. Dann stehen die Tangentenvektoren der u-, v-, w-Linien in jedem Punkt des Definitionsbereichs aufeinander senkrecht. Die Koordinaten der folgenden Beispiele sind orthogonal. Später wollen wir die Tangentenvektoren $\partial\mathbf{x}/\partial u$, $\partial\mathbf{x}/\partial v$, $\partial\mathbf{x}/\partial w$ der u-, v-, w-Linie durch P als *neue Basisvektoren* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ einführen, so daß die *Funktionaldeterminante* (7.12) *in* $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]$ *übergeht*. Die neue Basis ist dann im allgemeinen nach $\overline{(7.11)}$ weder orthogonal noch normiert.

Aus Band 5 ist die Umrechnung eines räumlichen Bereichsintegrals auf krummlinige Koordinaten bekannt:

$$\iiint\limits_{(V)} \Phi(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iiint\limits_{(V^*)} \Phi^*(u, v, w)\,\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w, \tag{7.15}$$

wenn

$$\Phi(x_1(u, v, w), x_2(u, v, w), x_3(u, v, w)) = \Phi^*(u, v, w)$$

und (V^*) den Bereich (V), ausgedrückt in krummlinigen Koordinaten u, v, w, bedeuten.

Aufgabe 7.1.: Bei Einführung von Kugelkoordinaten (7.1) definiere man die Koordinatenflächen (Kugel, Kegel, Meridianebenen) und Koordinatenlinien (Radialstrahlen, Breiten- und Meridiankreise). Mittels (7.14) zeige man die Orthogonalität der Kugelkoordinaten.

Aufgabe 7.2: Man berechne das Volumenelement

$$\mathrm{d}V^* = [\mathrm{d}_u\mathbf{x}\; \mathrm{d}_v\mathbf{x}\; \mathrm{d}_w\mathbf{x}] = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w \tag{7.16}$$

in Kugelkoordinaten mit dem Ergebnis

$$\mathrm{d}V^* = r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\,. \tag{7.17}$$

Bei *ebenen* Problemen führt man ebenfalls krummlinige Koordinaten u, v mit

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = 0 \tag{7.18}$$

ein, wobei ein krummliniges Koordinatennetz die x_1, x_2-Ebene überdeckt. Die vorstehenden Formeln lassen sich leicht übertragen, z. B. auf das ebene Bereichsintegral

$$\iint\limits_{(V)} \Phi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = \iint\limits_{(V^*)} \Phi^*(u, v)\, \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \tag{7.19}$$

wo die Jacobische Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\, \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u}\, \frac{\partial x_1}{\partial v} \tag{7.20}$$

auftritt. Jetzt bedeutet (V) bzw. (V^*) einen Bereich der x_1, x_2-Ebene, ausgedrückt in x_1, x_2 bzw. u, v. Der Inhalt des Flächenelements in krummlinigen Koordinaten ist

$$\mathrm{d}V^* = \hat{V}(\mathrm{d}_u\mathbf{x}, \mathrm{d}_v\mathbf{x}) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,. \tag{7.21}$$

Beispiel 7.3: Wir definieren (normierte) *elliptische Koordinaten* $u = \lambda$, $v = \vartheta$ gemäß

$$x_1 = \cosh\lambda \cos\vartheta, \quad x_2 = \sinh\lambda \sin\vartheta \tag{7.22}$$

für $0 \leqq \lambda < \infty$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$. Die Koordinatenlinien sind konfokale Ellipsen ($\lambda = \lambda_0$) und Hyperbeläste ($\vartheta = \vartheta_0$). Die Brennpunkte liegen auf der x_1-Achse in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_1 = +1$. Die Orthogonalität dieser Koordinaten folgt aus

$$\mathrm{d}_\lambda\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}_\vartheta\mathbf{x} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda}\, \frac{\partial x_1}{\partial\vartheta} + \frac{\partial x_2}{\partial\lambda}\, \frac{\partial x_2}{\partial\vartheta}\right) \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\vartheta = 0\,.$$

Aufgabe 7.3: Man berechne den Inhalt des Flächenelements in elliptischen Koordinaten

$$\mathrm{d}V^* = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\lambda, \vartheta)}\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\vartheta = [(\cosh\lambda)^2 - (\cos\vartheta)^2]\, \mathrm{d}\lambda\, \mathrm{d}\vartheta\,.$$

Aufgabe 7.4: In *ebenen Polarkoordinaten* r, φ mit

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi \quad \text{für} \quad 0 \leqq r < \infty, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi \tag{7.23}$$

berechne man den Inhalt des Flächenelements $\mathrm{d}V^* = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$ und zeige $\mathrm{d}_r\mathbf{x} \cdot \mathrm{d}_\varphi\mathbf{x} = 0$.

Aufgabe 7.5: In *Zylinderkoordinaten* r, φ, z mit

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z \tag{7.24}$$

für $0 \leqq r < \infty, 0 \leqq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$ berechne man das Volumenelement $\mathrm{d}V^* = r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z$ und zeige die Orthogonalität dieser Koordinaten. Welche Koordinatenflächen und Koordinatenlinien treten bei Zylinderkoordinaten auf?

7.3. Ortsabhängige Bezugssysteme

Die krummlinigen Koordinaten u, v, w werden künftig mit x^1, x^2, x^3 bezeichnet. Bei Übergang zu einem anderen Bezugssystem $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$, in den folgenden Beispielen speziell zu einem kartesischen KS, müssen die *Transformationsgleichungen* gegeben sein:

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2, x^3), \quad \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3), \quad \bar{x}^3 = \bar{x}^3(x^1, x^2, x^3)$$

bzw.

$$x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \quad x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \quad x^3 = x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3). \tag{7.25}$$

Zwischen dieser allgemeinen *Koordinatentransformation* und den verallgemeinerten *Transformationskoeffizienten* β_i^k muß ein Zusammenhang bestehen, siehe (7.41).

Das Bild 7.3 der krummlinigen Koordinaten, dargestellt in einem kartesischen Bezugssystem, entsteht durch Abbildung des Raumes mit den Punktkoordinaten u, v, w auf den Punktraum mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3. In Bild 7.5 sieht man die Ortsabhängigkeit eines Bezugssystems, das mit den *Tangentenvektoren* $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial w}$ der u-, v-, w-Linien gebildet wird, am Beispiel der Kugelkoordinaten ϑ, φ, r.

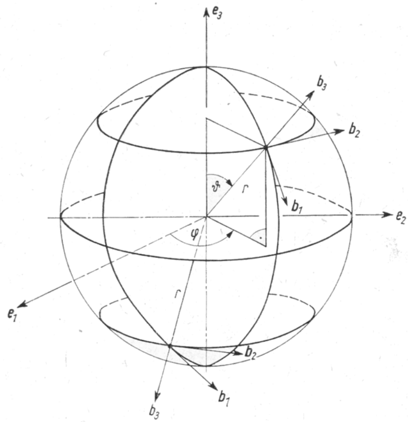


Bild 7.5: Kugelkoordinaten ϑ, φ, r:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}$$

Definition 7.2: *In der Bezeichnung* x^1, x^2, x^3 *statt* u, v, w *werden die* **ortsabhängigen kovarianten Basisvektoren** $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ *als Tangentenvektoren der Koordinatenlinien definiert:*

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^1} = \mathbf{b}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^2} = \mathbf{b}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^3} = \mathbf{b}_3. \tag{7.26}$$

Wir verabreden die **Schreibweise**

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, \quad \partial_i \mathbf{x} = \mathbf{b}_i. \tag{7.27}$$

Es gilt also

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(x^1, x^2, x^3). \tag{7.28}$$

Den Ortsvektor schreiben wir jetzt in **kartesischen** *Koordinaten*

$$\mathbf{x} = \bar{x}^i \mathbf{e}_i. \tag{7.29}$$

Beispiel 7.4: In *ebenen Polarkoordinaten* haben wir nach (7.23)

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad \bar{x}^1 = x^1 \cos x^2, \quad \bar{x}^2 = x^1 \sin x^2,$$

also

$$\mathbf{x} = \bar{x}^1 \mathbf{e}_1 + \bar{x}^2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 x^1 \cos x^2 + \mathbf{e}_2 x^1 \sin x^2.$$

Die kovarianten Basisvektoren erhalten nach (7.27) die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \partial_1 \mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \cos x^2 + \mathbf{e}_2 \sin x^2, \\ \mathbf{b}_2 &= \partial_2 \mathbf{x} = -\mathbf{e}_1 x^1 \sin x^2 + \mathbf{e}_2 x^1 \cos x^2. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Das ist wegen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1(x^1, x^2)$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2(x^1, x^2)$ ein Beispiel für die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren.

Mit $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$ nach (7.25) können wir

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{x}(x^1, x^2, x^3) \tag{7.31}$$

schreiben. Damit erhält der Vektor des Linienelements die Form

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = (\partial_k \mathbf{x})\, \mathrm{d}x^k = \mathrm{d}x^k \mathbf{b}_k. \tag{7.32}$$

Definition 7.3: *Um das totale Differential einer skalaren Ortsfunktion*

$$\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{grad}\, \varphi = \mathrm{d}x^i \partial_i \varphi \tag{7.33}$$

herzustellen, definieren wir den **Gradienten** *und* **Nabla-Operator**

$$\mathbf{grad}\, \varphi = \mathbf{b}^i \partial_i \varphi, \quad \nabla = \mathbf{b}^i \partial_i, \tag{7.34}$$

so daß

$$\mathrm{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{grad}\, \varphi = \mathrm{d}x^i \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k \partial_k \varphi = \mathrm{d}x^i \partial_k \varphi \delta_i^k = \mathrm{d}x^i \partial_i \varphi$$

mit (7.33) *übereinstimmt, wenn*

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k = \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}_i = \delta_i^k \tag{7.35}$$

gefordert wird. Das ist der Fall, wenn wir die **kontravarianten Basisvektoren** *wieder als reziproke Vektoren zu den kovarianten Basisvektoren nach* (6.6) *definieren. Die Basisvektoren* $\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ *werden demgemäß per Definition nach* (6.6) *eingeführt.*

Satz 7.1: *Auch für ortsabhängige Basissysteme gelten die Reziprozitätsbeziehungen* (6.11) *und* (6.12). *Unabhängigkeit vom KS bedeutet jetzt auch Unabhängigkeit davon, ob wir Kugel- oder Zylinderkoordinaten oder sonstige Koordinaten wählen.*

Satz 7.2: *Auch in der Form* $\mathbf{\nabla} = \mathbf{b}^i\partial_i$ *ist der Nabla-Operator ein Tensor 1. Stufe, so daß seine Koordinaten den Transformationsgesetzen* (6.18)

$$\bar{\partial}_i = \beta_i^k \partial_k, \quad \partial_i = \bar{\beta}_i^k \bar{\partial}_k \tag{7.36}$$

genügen. Ist $\mathbf{v}$ *ein Tensorfeld 1. Stufe, so sind* $\mathbf{\nabla v}$, $\mathbf{\nabla} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ *Tensorfelder der Stufe 2, 1, 0.*

Die gebräuchliche Scheindefinition $\mathbf{grad}\, x^k = \mathbf{b}^k$ können wir nicht akzeptieren; denn sie besagt

$$\mathbf{b}^i \partial_i x^k = \mathbf{b}^i \delta_i^k = \mathbf{b}^k.$$

Man kann aber nicht $\mathbf{b}^k$ mittels $\mathbf{b}^i$ definieren! Wie früher gilt auch jetzt

$$\partial_i x^k = \delta_i^k. \tag{7.37}$$

Nach (7.32) erhalten wir das Quadrat des Linienelements

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{b}_i\, dx^i \cdot \mathbf{b}_k\, dx^k = (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k)\, dx^i\, dx^k, \\ ds^2 &= g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Die Koeffizienten g_{ik} der quadratischen Form (7.38) heißen Metrikkoeffizienten, weil sie die Struktur des Linienelements in der Differentialgeometrie bestimmen. Da die $\mathbf{b}_i$ Tangentenvektoren der Koordinatenlinien sind, gilt *speziell* für *orthogonale* Koordinaten

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_k = g_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \tag{7.39}$$

und

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2. \tag{7.40}$$

Bei Benutzung orthogonaler Koordinaten vereinfachen sich die folgenden Rechnungen erheblich. Wir wollen diesen Vorteil aber nur in Beispielrechnungen ausnutzen.

Bei Übergang von einem Bezugssystem B zu einem anderen $\bar{B}$ (und umgekehrt) hatten wir die Transformationsformeln (6.19) für die Vektorkoordinaten

$$\bar{v}^i = \bar{\beta}_k^i v^k, \quad v^i = \beta_k^i \bar{v}^k$$

bereitgestellt. Der Vektor des Linienelements $d\mathbf{x}$ hat nach (7.25) die Tensorkoordinaten

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\, dx^k, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\, d\bar{x}^k.$$

Satz 7.3: *Durch Vergleich werden die* **Transformationskoeffizienten bei Benutzung krummliniger Koordinaten** *in*

$$\bar{\beta}_k^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}, \quad \beta_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \tag{7.41}$$

festgelegt, wobei $((\beta_k^i))$ *und* $((\bar{\beta}_k^i))$ *zueinander inverse Matrizen bedeuten, so daß die Beziehung* (6.17) *mit* (7.41) *in*

$$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\, \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\, \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l} = \delta_i^k \tag{7.42}$$

übergeht.

7.4. Die Christoffelsymbole

Die Tensoranalysis bietet eine systematische Methode, Tensorfelder von kartesischen auf krummlinige Koordinaten umzurechnen. Wenn wir die *Divergenz* eines

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{b}^i \partial_i \cdot (\mathbf{b}_k v^k)$$

Vektorfeldes bilden, müssen wir (hier und im folgenden) die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren beachten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mathbf{b}^i \cdot (\partial_i \mathbf{b}_k)\, v^k + (\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_k)\, \partial_i v^k \\ &= v^k \mathbf{b}^i \cdot \partial_i \mathbf{b}_k + \delta^i_k \partial_i v^k = \partial_k v^k + v^k \mathbf{b}^i \cdot \partial_i \mathbf{b}_k . \end{aligned}$$

Wir zerlegen $\partial_i \mathbf{b}_k$ im System der Basisvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ gemäß

$$\partial_i \mathbf{b}_k = \Gamma^l_{ik} \mathbf{b}_l \tag{7.43}$$

mit Hilfe der *Christoffelsymbole* Γ^l_{ik}. Es sei darauf hingewiesen, daß $\partial_i \mathbf{b}_k$ kein Tensor 1. Stufe ist und die Γ^l_{ik} keinen Tensor 3. Stufe bilden. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Schwarz gilt auf Grund der Definition (7.27)

$$\partial_k \mathbf{b}_i = \partial_i \mathbf{b}_k . \tag{7.44}$$

Wegen (7.43) gilt auch

$$\partial_k \mathbf{b}_i = \Gamma^l_{ki} \mathbf{b}_l .$$

Damit folgt aus (7.43) und (7.44) die *Symmetrieeigenschaft*

$$\Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{ki} \tag{7.45}$$

der Christoffelsymbole. Für die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ erhalten wir nunmehr den Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_k v^k + v^k \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_l \Gamma^l_{ik} = \partial_k v^k + v^k \Gamma^l_{lk} . \tag{7.46}$$

Wie läßt sich $\partial_i \mathbf{b}^k$ zum Unterschied von (7.43) darstellen? Wir machen den Ansatz

$$\partial_i \mathbf{b}^k = \Gamma^{*k}_{il} \mathbf{b}^l \tag{7.47}$$

und beachten

$$\partial_i(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}^l) = (\partial_i \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{b}^l + \mathbf{b}_k \cdot \partial_i \mathbf{b}^l = \partial_i(\delta^l_k) = 0,$$

$$(\partial_i \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{b}^l = -(\partial_i \mathbf{b}^l) \cdot \mathbf{b}_k . \tag{7.48}$$

Mit (7.43) bzw. (7.47) bilden wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \partial_i \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}^l &= \Gamma^j_{ik} \mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}^l = \Gamma^l_{ik}, \\ \partial_i \mathbf{b}^l \cdot \mathbf{b}_k &= \Gamma^{*l}_{ij} \mathbf{b}^j \cdot \mathbf{b}_k = \Gamma^{*l}_{ik} \end{aligned}$$

und finden wegen (7.48)

$$\Gamma^{*l}_{ik} = -\Gamma^l_{ik}, \tag{7.49}$$

also

$$\partial_i \mathbf{b}_k = \Gamma^l_{ik} \mathbf{b}_l, \quad \partial_i \mathbf{b}^k = -\Gamma^k_{il} \mathbf{b}^l. \tag{7.50}$$

Satz 7.4: *Die Christoffelsymbole lassen sich durch die Metrikkoeffizienten ausdrücken gemäß*

$$\Gamma^l_{ik} = \tfrac{1}{2} g^{ln}(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{in} - \partial_n g_{ik}). \tag{7.51}$$

Zum Beweis bilden wir die partielle Ableitung

$$\partial_i g_{kn} = \partial_i(\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_n) = \partial_i \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_n + \mathbf{b}_k \cdot \partial_i \mathbf{b}_n$$

und berücksichtigen (7.43)

$$\partial_i g_{kn} = \Gamma^l_{ik} \mathbf{b}_l \cdot \mathbf{b}_n + \mathbf{b}_k \cdot \Gamma^l_{in} \mathbf{b}_l = \Gamma^l_{ik} g_{ln} + \Gamma^l_{in} g_{kl},$$

analog

$$\partial_k g_{ni} = \Gamma^l_{kn} g_{li} + \Gamma^l_{ki} g_{nl}, \quad \partial_n g_{ik} = \Gamma^l_{ni} g_{lk} + \Gamma^l_{nk} g_{il}.$$

Überschieben wir den Ausdruck

$$\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik} = 2\Gamma^l_{ik} g_{ln}$$

mit g^{mn}, so folgt

$$g^{mn}(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik}) = 2\Gamma^l_{ik} g_{ln} g^{mn} = 2\Gamma^l_{ik} \delta^m_l,$$

$$\Gamma^m_{ik} = \tfrac{1}{2} g^{mn}(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik}) \text{ oder (7.51).}$$

Nachträglich können wir (7.51) als *Definitionsgleichung der Christoffelsymbole* und (7.50) als Anwendungsformeln ansehen.

Aufgabe 7.6: Für $l = k$ ist aus (7.51) die Formel

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2} g^{kn} \partial_i g_{kn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \sqrt{g} \tag{7.52}$$

herzuleiten. Man zeige, daß sich (7.51) für *orthogonale Koordinaten* auf

$$\Gamma^l_{ik} = \tfrac{1}{2} g^{(ll)}(\partial_i g_{kl} + \partial_k g_{il} - \partial_l g_{ik}) \tag{7.53}$$

reduziert, wo *nicht* über l zu summieren ist!

Um $\nabla^2 \psi = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \psi$ zu ermitteln, wird für (7.46) statt $\mathbf{v} = \mathbf{grad}\, \psi = \partial_k \psi \mathbf{b}^k = v_k \mathbf{b}^k$ die Form $v^k \mathbf{b}_k$ benötigt. Dafür bilden wir durch Heben des Index $v^k = g^{ik} v_i = g^{ik} \partial_i \psi$ und erhalten

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_k(g^{ik} \partial_i \psi) + g^{ik}(\partial_i \psi)\, \Gamma^l_{kl} = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \psi$$

oder mit (7.52)

$$\nabla^2 \psi = (\partial_k g^{ik})\, \partial_i \psi + g^{ik} \partial_k \partial_i \psi + g^{ik} \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_k \sqrt{g})\, \partial_i \psi. \tag{7.54}$$

Beispiel 7.5: Es soll $\nabla^2 \psi$ in ebenen Polarkoordinaten r, φ berechnet werden. Nach Beispiel 7.4 wird

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = -x^1 \cos x^2 \sin x^2 + x^1 \sin x^2 \cos x^2 = 0,$$

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = g_{12} = g_{21} = 0;$$

die Koordinaten $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ sind orthogonal. Es bleibt $g_{11} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1$, $g_{22} = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = (x^1)^2$,

$$\|g_{ik}\| = g = (x^1)^2, \quad \sqrt{g} = x^1 = r. \tag{7.55}$$

Nach (6.23) sind die Matrizen $((g_{ik}))$ und $((g^{ik}))$ zueinander invers, also gilt

$$((g_{ik})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}, \quad ((g^{ik})) = ((g_{ik}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} \end{pmatrix}. \tag{7.56}$$

Wegen $g^{11} = 1$, $g^{22} = (x^1)^{-2}$ und $\partial_1 g^{11} = \partial_2 g^{11} = \partial_2 g^{22} = 0$ bleibt von (7.54) nur

$$\nabla^2 \psi = g^{11}\partial_1\partial_1\psi + g^{22}\partial_2\partial_2\psi + \frac{g^{11}}{\sqrt{g}}(\partial_1\sqrt{g})\partial_1\psi$$

übrig, so daß sich mit (7.55) und (7.56)

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{7.57}$$

ergibt.

Aufgabe 7.7: Die Poissonsche Dgl. $\nabla^2\Phi = q(\mathbf{x})$ ist auf Zylinderkoordinaten (7.24) und Kugelkoordinaten (7.1) umzurechnen mit dem Ergebnis

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = q(r,\varphi,z) \tag{7.58}$$

und

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = q(r,\vartheta,\varphi). \tag{7.59}$$

Bei *orthogonalen Koordinaten* ergeben sich aus (7.53) folgende Vereinfachungen zur Berechnung der *Christoffelsymbole* Γ^l_{ik}:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(i)}_{ii} &= \frac{1}{2} g^{(ii)}\partial_i g_{ii} && \text{für} \quad i = k = l, \\ \Gamma^l_{ii} &= \frac{-1}{2} g^{(ll)}\partial_l g_{ii} && \text{für} \quad k = i, \quad l \neq i, \\ \Gamma^{(i)}_{ik} &= \frac{1}{2} g^{(ii)}\partial_k g_{ii} && \text{für} \quad l = i, \quad k \neq i, \end{aligned} \tag{7.60}$$

$\Gamma^l_{ik} = 0$, wenn alle 3 Indizes voneinander verschieden sind. Bei *geradlinigen* (schiefwinkligen oder orthogonalen) Koordinaten sind die g_{ik} konstant, so daß alle Γ^l_{ik} nach (7.51) verschwinden.

8. Riemannsche Krümmungstensoren

8.1. Kovariante Ableitungen

Das Feld der lokalen Dyade $\nabla\mathbf{v}$ ist zu berechnen:

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\partial_i(v_k\mathbf{b}^k) = \mathbf{b}^i\left(\partial_i\overset{\downarrow}{v}_k\mathbf{b}^k + v_k\partial_i\mathbf{b}^k\right).$$

Mit (7.50) ergibt sich

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\left(\partial_i\overset{\downarrow}{v}_k\mathbf{b}^k - v_k\Gamma^k_{il}\mathbf{b}^l\right)$$

oder

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\mathbf{b}^k(\partial_i v_k - v_l\Gamma^l_{ik}).$$

Man bezeichnet die Koordinaten dieses Tensors 2. Stufe als *kovariante Ableitungen der kovarianten Vektorkoordinaten*

$$\partial^*_i v_k = \partial_i v_k - v_l\Gamma^l_{ik} \tag{8.1}$$

und schreibt

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\partial^*_i v_k. \tag{8.2}$$

In gemischter Tensordarstellung bilden wir mit (7.50) die lokale Dyade

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\partial_i(v^k\mathbf{b}_k) = \mathbf{b}^i\left(\partial_i\overset{\downarrow}{v}{}^k\mathbf{b}_k + v^k\partial_i\mathbf{b}_k\right)$$

$$= \mathbf{b}^i\left(\partial_i\overset{\downarrow}{v}{}^k\mathbf{b}_k + v^k\Gamma^l_{ik}\mathbf{b}_l\right) = \mathbf{b}^i\mathbf{b}_k(\partial_i v^k + v^l\Gamma^k_{il}).$$

Man bezeichnet

$$\partial^*_i v^k = \partial_i v^k + v^l\Gamma^k_{il} \tag{8.3}$$

als *kovariante Ableitung der kontravarianten Vektorkoordinaten* und schreibt

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}^i\mathbf{b}_k\partial^*_i v^k. \tag{8.4}$$

Beispiel 8.1: Um das Wirbelfeld $\mathbf{rot}\,\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{w}$ zu berechnen, wird das Produkt $\nabla\mathbf{w}$ nach (8.2) und (8.1) auf das vektorielle Produkt gemäß

$$\nabla \times \mathbf{w} = (\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\,\partial^*_i w_k = (\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\,\partial_i w_k - (\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\,w_l\Gamma^l_{ik}$$

spezialisiert. Wegen

$$\Gamma^l_{12}(\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2) + \Gamma^l_{21}(\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^1) = \Gamma^l_{12}[(\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2) - (\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2)] = \mathbf{0}$$

usw. wird $(\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\,\Gamma^l_{ik} = \mathbf{0}$, also

$$\nabla \times \mathbf{w} = (\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\,\partial_i w_k. \tag{8.5}$$

Es gilt

$$\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_k = e_{ikl}\mathbf{b}^l, \quad \mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k = e^{ikl}\mathbf{b}_l, \tag{8.6}$$

denn aus

$$(\mathbf{b}^i \times \mathbf{b}^k)\cdot\mathbf{b}^m = e^{ikl}\mathbf{b}_l\cdot\mathbf{b}^m = e^{ikl}\delta^m_l$$

folgt (6.49)

$$[\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\mathbf{b}^m] = e^{ikm}, \text{ analog } [\mathbf{b}_i\mathbf{b}_k\mathbf{b}_m] = e_{ikm} \tag{8.7}$$

und speziell (6.11)

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\,[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] = e_{123}e^{123} = \sqrt{g}\,\frac{1}{\sqrt{g}} = 1 .$$

Dieser Beziehung entspricht

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v, w,)}\;\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 1$$

mit den zugehörigen Funktionaldeterminanten in früherer Schreibweise (7.12).

Mit (8.6) geht (8.5) in

$$\nabla \times \mathbf{w} = e^{ikl}(\partial_i v_k)\,\mathbf{b}_l \tag{8.8}$$

und

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,[\mathbf{b}_1(\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2) + \mathbf{b}_2(\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3) + \mathbf{b}_3(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1)]$$

über. (8.9)

8.2. Der Riemann-Christoffel-Tensor (RCT)

Wir bilden jetzt das Produkt $\nabla\mathbf{A}$, wo $\mathbf{A} = a_k{}^l\,\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l$ ein zweistufiges Tensorfeld in gemischter Darstellung sei:

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbf{A} &= \mathbf{b}^i\partial_i(a_k{}^l\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l)\\
&= \mathbf{b}^i\left(\partial_i \overset{\downarrow}{a}_k{}^l\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l + a_k{}^l\partial_i\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}{}^k\mathbf{b}_l + a_k{}^l\mathbf{b}^k\partial_i\mathbf{b}_l\right)\\
&= \mathbf{b}^i(\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l\partial_i a_k{}^l - a_k{}^l\Gamma^k_{ij}\mathbf{b}^j\mathbf{b}_l + a_k{}^l\mathbf{b}^k\Gamma^j_{il}\mathbf{b}_j)\\
&= \mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l(\partial_i a_k{}^l - a_j{}^l\Gamma^j_{ik} + a_k{}^j\Gamma^l_{ij}),
\end{aligned}$$

also das dreistufige Tensorfeld

$$\nabla\mathbf{A} = \mathbf{b}^i\mathbf{b}^k\mathbf{b}_l\partial_i^* a_k{}^l \tag{8.10}$$

mit den *kovarianten Ableitungen*

$$\partial_i^* a_k{}^l = \partial_i a_k{}^l - a_j{}^l\Gamma^j_{ik} + a_k{}^j\Gamma^l_{ij} \tag{8.11}$$

der *gemischten Tensorkoordinaten* $a_k{}^l$.

Nun setzen wir $a_k{}^l = \partial_k^* v^l$ und berechnen $\partial_i^* a_k{}^l = \partial_i^*\partial_k^* v^l$ nach (8.11). Das ergibt bei Berücksichtigung von (8.3):

$$\begin{aligned}
\partial_i^*\partial_k^* v^l &= \partial_i\partial_k^* v^l - (\partial_j^* v^l)\,\Gamma^j_{ik} + (\partial_k^* v^j)\,\Gamma^l_{ij}\\
&= \partial_i(\partial_k v^l + v^j\Gamma^l_{jk}) - (\partial_j v^l + v^m\Gamma^l_{mj})\,\Gamma^j_{ik} + (\partial_k v^j + v^m\Gamma^j_{mk})\,\Gamma^l_{ij}\\
&= \partial_i\partial_k v^l + (\partial_i v^j)\,\Gamma^l_{jk} + (\partial_k v^j)\,\Gamma^l_{ij} - (\partial_j v^l)\,\Gamma^j_{ik} + v^j\partial_i\Gamma^l_{jk}\\
&\quad + v^m(\Gamma^j_{mk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^j_{ik}),
\end{aligned}$$

also

$$\partial_i^*\partial_k^* v^l = \partial_i\partial_k v^l + (\partial_i v^j)\,\Gamma^l_{jk} + (\partial_k v^j)\,\Gamma^l_{ij} - (\partial_j v^l)\,\Gamma^j_{ik} + v^m(\partial_i \Gamma^l_{mk} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^j_{ik}). \tag{8.12}$$

Durch Vertauschung der Reihenfolge der kovarianten Ableitungen erhalten wir

$$\partial_k^*\partial_i^* v^l = \partial_k\partial_i v^l + (\partial_i v^j)\,\Gamma^l_{kj} + (\partial_k v^j)\,\Gamma^l_{ji} - (\partial_j v^l)\,\Gamma^j_{ik} + v^m(\partial_k \Gamma^l_{mi} + \Gamma^j_{mi}\Gamma^l_{kj} - \Gamma^l_{mj}\Gamma^j_{ik}), \tag{8.13}$$

wobei wir den 3. vor dem 2. Summanden aufgeschrieben haben. Der 1., 2., 3., 4. und 7. Summand von (8.12) und (8.13) sind einander gleich, so daß die Differenz dieser beiden Gleichungen das wichtige Resultat

$$\partial_i^*\partial_k^* v^l - \partial_k^*\partial_i^* v^l = v^m(\partial_i \Gamma^l_{mk} - \partial_k \Gamma^l_{mi} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^j_{mi}\Gamma^l_{kj}) = v^m R^l_{mik} \tag{8.14}$$

liefert[1]). Auf Grund der Herleitung stellt (8.14) ein dreistufiges Tensorfeld dar.

Definition 8.1: *Folglich sind die*

$$R^l_{mik} = \partial_i \Gamma^l_{mk} - \partial_k \Gamma^l_{mi} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^j_{mi}\Gamma^l_{kj} \tag{8.15}$$

nach der Quotientenregel die Koordinaten eines vierstufigen Tensors $\mathbf{R}^{(4)} = R^l_{mik}\mathbf{b}_l\mathbf{b}^m\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k$, *der als* **Riemann-Christoffel-Tensor** (*RCT*) *bezeichnet wird.*

Aus (8.14) können wir den Schluß ziehen, daß die Reihenfolge der kovarianten Ableitungen genau dann vertauschbar ist, wenn der RCT verschwindet, d. h. aus $R^l_{mik} = 0$ folgt auch

$$\partial_i^*\partial_k^* v^l = \partial_k^*\partial_i^* v^l.$$

Laut Definition (8.15) gilt

$$R^l_{mik} = -R^l_{mki}, \tag{8.16}$$

so daß alle

$$R^l_{mkk} = 0 \tag{8.17}$$

sind.

Durch Überschieben mit g_{nl} erhalten wir die Koordinaten

$$g_{nl}R^l_{mik} = R_{nmik} \tag{8.18}$$

des vollständig kovarianten RCT, den wir als *Riemannschen Krümmungstensor 4. Stufe* $\mathbf{R} = R_{nmik}\mathbf{b}^n\mathbf{b}^m\mathbf{b}^i\mathbf{b}^k$ bezeichnen wollen. Durch Verjüngung geht aus (8.15) der *Riemannsche Krümmungstensor 2. Stufe* $\mathbf{R}^{(2)} = R_{mk}\mathbf{b}^m\mathbf{b}^k$ mit den Koordinaten

$$R^l_{mlk} = R_{mk} = \partial_l \Gamma^l_{mk} - \partial_k \Gamma^l_{ml} + \Gamma^j_{mk}\Gamma^l_{lj} - \Gamma^j_{ml}\Gamma^l_{kj} \tag{8.19}$$

hervor. Es sei erwähnt, daß dieser Tensor nach Einstein mit $R_{mk} = 0$ verschwindet, wenn das Gravitationsfeld im Vakuum nach der Allgemeinen Relativitätstheorie untersucht wird. In (5.76) finden Sie eine Ergänzung.

---

[1]) Wir schreiben hier ausnahmsweise R^l_{mik} statt $R^l{}_{mik}$.

8.3. Berechnung des RCT in zweidimensionalen Beispielräumen

Es soll nun je ein einfaches Beispiel dafür angegeben werden, daß die Koordinaten (8.15) des RCT in euklidischen Räumen sämtlich gleich null sind, hingegen in Riemannschen Räumen *nicht* sämtlich gleich null sind.

Beispiel 8.2: Als zweidimensionalen euklidischen Raum betrachten wir die $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$-Ebene, wo wir nach Beispiel 7.4 Polarkoordinaten r, φ einführen. Dann verfügen wir bereits in (7.56) über die Metrikkoeffizienten und können, da es sich um orthogonale Koordinaten handelt, die Christoffelsymbole nach (7.60) berechnen. Wir erhalten

$$\Gamma^1_{22} = -x^1, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = (x^1)^{-1}, \tag{8.20}$$

alle anderen Γ^l_{ik} sind gleich null. Im zweidimensionalen euklidischen Raum hat der vierstufige RCT $2^4 = 16$ Koordinaten R^l_{mik}. Nach (8.17) kennen wir bereits

$$R^1_{111} = R^1_{122} = R^1_{211} = R^1_{222} = 0,$$

$$R^2_{111} = R^2_{122} = R^2_{211} = R^2_{222} = 0.$$

Von den verbliebenen 8 Koordinaten berechnen wir nach (8.15) z. B.

$$R^1_{11k} = \partial_1 \Gamma^1_{1k} - \partial_k \Gamma^1_{11} + \Gamma^j_{1k}\Gamma^1_{1j} - \Gamma^j_{11}\Gamma^1_{kj}.$$

Bei Beachtung von (8.20) folgt

$$\begin{aligned} R^1_{112} &= \partial_1 \Gamma^1_{12} - \partial_2 \Gamma^1_{11} + \Gamma^j_{12}\Gamma^1_{1j} - \Gamma^j_{11}\Gamma^1_{2j} \\ &= \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = 0, \end{aligned}$$

weil in jedem Summanden mindestens ein Faktor verschwindet. Entsprechend findet man wegen (8.16)

$$R^1_{121} = -R^1_{112} = 0, \quad R^1_{221} = -R^1_{212} = 0,$$

$$R^2_{121} = -R^2_{112} = 0, \quad R^2_{221} = -R^2_{212} = 0.$$

Effektiv braucht man also nur 4 Koordinaten R^l_{mik} auszurechnen.

Jede gekrümmte Fläche kann als zweidimensionaler Raum aufgefaßt werden, wo wir nach Abschnitt 7.1. Flächenkoordinaten u, v einführen können. Wir betrachten nur geschlossene Oberflächen. Der einfachste gekrümmte zweidimensionale Raum ist dann die Kugel (mit konstanter Krümmung). Wenn wir gekrümmte Flächen als zweidimensionale Riemannsche Räume ansprechen, liegt der Gedanke nahe, auch dreidimensionale gekrümmte Riemannsche Räume zu definieren, wo der Riemann-Christoffel-Tensor nicht verschwindet.

Beispiel 8.3: Als Beispiel betrachten wir die Kugelfläche $r = R$ als *zweidimensionalen Riemannschen Raum*, indem wir die Kugelflächenkoordinaten $x^1 = \vartheta$, $x^2 = \varphi$ nach (7.2)

$$\bar{x}^1 = R \sin x^1 \cos x^2, \quad \bar{x}^2 = R \sin x^1 \sin x^2, \quad \bar{x}^3 = R \cos x^1$$

mit $\mathbf{x} = \bar{x}^1\mathbf{e}_1 + \bar{x}^2\mathbf{e}_2 + \bar{x}^3\mathbf{e}_3$, also

$$\mathbf{x} = R \sin x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_1 + R \sin x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_2 + R \cos x^1 \mathbf{e}_3$$

einführen. Die Tangentenvektoren der u- und v-Linien sind jetzt

$$\mathbf{b}_1 = \partial_1 \mathbf{x} = R \cos x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_1 + R \cos x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_2 - R \sin x^1 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}_2 = \partial_2 \mathbf{x} = -R \sin x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_1 + R \sin x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_2.$$

Es handelt sich um orthogonale Koordinaten, so daß für die Metrikkoeffizienten $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = g_{12} = g_{21} = 0$ gilt sowie

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = g_{11} = R^2, \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = g_{22} = (R \sin x^1)^2, \\ &((g_{ik})) = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sin x^1)^2 \end{pmatrix}, \\ &((g^{ik})) = ((g_{ik}))^{-1} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sin x^1)^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Im zweidimensionalen Raum gibt es $2^3 = 8$ Christoffelsymbole Γ^l_{ik}, wobei wir die Symmetrieeigenschaft (7.45) und die speziellen Formeln (7.60) für orthogonale Koordinaten berücksichtigen. Wir berechnen

$$\Gamma^1_{22} = \frac{-1}{2} g^{11} \partial_1 g_{22} = \frac{-1}{2} R^{-2} \partial_1 (R \sin x^1)^2,$$

$$\Gamma^1_{22} = -\sin x^1 \cos x^1. \tag{8.22}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_1 g_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{(R \sin x^1)^2} \partial_1 (R \sin x^1)^2,$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot x^1. \tag{8.23}$$

Analog berechnet man die übrigen Γ^l_{ik} nach (7.60) und stellt fest, daß sie alle außer (8.22) und (8.23) verschwinden.

Um zu zeigen, daß der RCT im betrachteten Beispielraum nicht verschwindet, genügt es, nur eine Tensorkoordinate herauszufinden, die ungleich null ist. Zum Beispiel erhalten wir nach (8.15)

$$\begin{aligned} R^1_{212} &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \partial_2 \Gamma^1_{21} + \Gamma^j_{22} \Gamma^1_{1j} - \Gamma^j_{21} \Gamma^1_{2j} \\ &= \partial_1 \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22} \Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{21} \Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^1_{212} &= \partial_1 \Gamma^1_{22} - \Gamma^2_{21} \Gamma^1_{22} \\ &= -\partial_1 (\sin x^1 \cos x^1) + \cot x^1 \sin x^1 \cos x^1 \\ &= -(\cos x^1)^2 + (\sin x^1)^2 + (\cos x^1)^2 = (\sin x^1)^2 \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, daß der RCT in dem zugrunde gelegten zweidimensionalen Riemannschen Raum nicht identisch verschwindet.

Aufgabe 8.1: Als Ergänzung zum Beispiel 8.3 berechne man die Tensorkoordinaten $R^1_{212} = -R^1_{221} = (\sin x^1)^2$, $R^2_{121} = -R^2_{112} = 1$, $R^l_{mik} = 0$ sonst. –

8.4. Zum Ricci-Kalkül

Durch den Zusammenhang

$$e_{hij}e_{klm}\eta^{hm} = R_{ijkl} \tag{8.24}$$

wird in der *Metallphysik* dem Riemannschen Krümmungstensor 4. Stufe mit den Koordinaten (8.18) der zweistufige Tensor $\mathbf{Y} = \eta^{hm}\mathbf{b}_h\mathbf{b}_m$ zugeordnet.

Aufgabe 8.2: Das Gleichungssystem (8.24) ist aufzulösen nach

$$\eta^{hm} = \tfrac{1}{4}e^{hij}e^{klm}R_{ijkl}. \tag{8.25}$$

Die krummlinigen Koordinaten einer Fläche seien ξ^1 und ξ^2. Damit lassen sich zweidimensionale Flächenvektoren und Flächentensoren definieren. Der RCT der gekrümmten Fläche erhält die gleiche Gestalt wie (8.15) mit dem einen Unterschied, daß man als Indizes griechische Buchstaben wählt, über die nur von 1 bis 2 zu summieren ist. Die Fläche ist ein zweidimensionaler Riemannscher Raum mit dem Linienelement ds gemäß

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}\xi^\alpha\, \mathrm{d}\xi^\beta. \tag{8.26}$$

Der RCT der im dreidimensionalen euklidischen Raum eingebetteten gekrümmten Fläche existiert, während der RCT des einbettenden euklidischen Raumes identisch verschwinden muß. Aus dieser Bedingung leitet Gauß den Zusammenhang der (einzig wesentlichen) Koordinate R_{1212} des Riemannschen Krümmungstensors der Fläche mit dem „Gaußschen Krümmungsmaß" $K = \dfrac{1}{R_1R_2}$ her, wo $1/R_1$ und $1/R_2$ die Hauptkrümmungen bedeuten. Mit dieser *Andeutung* müssen wir uns hier begnügen. Flächentheorie, Differentialgeometrie, Riemannsche Geometrie sind Gegenstand selbständiger Lehrbücher. In dieser Reihe behandelt Band 6 die Differentialgeometrie.

Als *Satz von Ricci* bezeichnet man den

Satz 8.1: *Die kovarianten Ableitungen der Metrikkoeffizienten verschwinden identisch:*

$$\partial^*_m g_{kl} = 0, \quad \partial^*_m g^{kl} = 0. \tag{8.27}$$

Zum Beweis werden die *kovarianten Ableitungen* eines *ko- und kontravarianten Tensors 2. Stufe* benötigt:

$$\partial^*_m a_{kl} = \partial_m a_{kl} - \Gamma^n_{lm}a_{kn} - \Gamma^n_{km}a_{nl}, \tag{8.28}$$

$$\partial^*_m a^{kl} = \partial_m a^{kl} + \Gamma^l_{nm}a^{kn} + \Gamma^k_{nm}a^{nl}. \tag{8.29}$$

Aufgabe 8.3: Man beweise $\partial^*_m g_{kl} = 0$.

Aufgabe 8.4: Man beweise $\partial^*_m g^{kl} = 0$.

Der Ricci-Kalkül besteht darin, daß man weder Basissysteme noch Buchstabensymbole für Tensoren benutzt, sondern konsequent in ko- und kontravarianter Koordinatendarstellung rechnet. Wenn man die kovarianten Ableitungen besitzt, besteht kaum noch ein Bedürfnis, die Ausdrücke in den Koordinaten mit Basiselementen zu ergänzen. Das Rechnen mit Tensorkoordinaten haben wir erläutert. Im

Ricci-Kalkül führt man noch eine Stenographie für partielle und kovariante Ableitungen ein, z. B.

$$\partial_m a_{kl} = a_{kl,m} \quad \text{und} \quad \partial_n \partial_m a^{kl} = a^{kl}{}_{,mn}$$

sowie (8.30)

$$\partial^*_m a_{kl} = a_{kl;m} \quad \text{und} \quad \partial^*_n \partial^*_m a^{kl} = a^{kl}{}_{;mn}\,.$$

Diese Schreibweise bringt eine erhebliche Platzersparnis. Damit wird das Schriftbild aber so konzentriert, daß der Anfänger Schwierigkeiten hat, den Inhalt herauszulesen. Man beachte die Umkehrung der Reihenfolge der Indizes gegenüber der Operatorschreibweise!

Ein Tensor n-ter Stufe des R^3 wird wie früher als abstraktes System von 3^n Zahlen definiert, die Tensorkoordinaten genannt werden, die bestimmten Transformationsgesetzen genügen und einer invarianten Multilinearform entnommen werden. Man bezeichnet jetzt einfach die Tensorkoordinaten als „den Tensor". Mit „dem Tensor" a_{ik} ist dann das System von neun Zahlen gemeint, das eine doppelt indizierte Größe umfaßt. Der Ricci-Kalkül ist das geeignete Instrument, bei ortsabhängiger Basis in krummlinigen Koordinaten zu rechnen und *weiterführend* die Tensorrechnung mit der Variationsrechnung zu verbinden, um die Grundgleichungen der Schalentheorie oder Metallphysik, der Hamiltonschen Theorie oder der Allgemeinen Relativitätstheorie nach Einstein zu formulieren, wobei Probleme der Dynamik in Probleme der Riemannschen Geometrie übersetzt werden. –

Eine ganz andere Situation liegt vor, wenn man wie in den Kapiteln 1 bis 5 *kartesische* Basissysteme zugrunde legt. Da es sich bei den meisten physikalisch-technischen Anwendungen um Drehungen des Bezugssystems handelt, da bei *orthogonalen Transformationen* aber die Beziehung

$$\bar{\beta}^i_k = \beta^k_i \tag{8.31}$$

für die Transformationskoeffizienten besteht, versagt der „Mechanismus" der Summenkonvention mit hoch- und tiefgestellten Indizes, wenn man (8.31) berücksichtigt. Außerdem hat es keinen Sinn, ko- und kontravariante Basisvektoren und Tensorkoordinaten zu benutzen, wenn $\mathbf{b}^i = \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ gilt. Als Musterbeispiel sei auf das Werk P [10] von Landau/Lifschitz hingewiesen, wo die ko- und kontravariante Schreibweise erst dann eingeführt wird, wenn sie bei Benutzung krummliniger Koordinaten Nutzen bringt, während bei Bezug auf kartesische Basissysteme die Methoden angewandt werden, die wir in den Kapiteln 1 bis 5 erläutert haben.

9. Hinweise zur Lösung der Übungsaufgaben

1.1: Man vertausche die Indizes bezüglich b in Beispiel 1.1. In der dreifachen Summe durchlaufen die Indizes ijk die 27 Tripel

111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233,
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333.

1.2: Nach (1.17) gilt $\det \underline{C} \det \underline{C}^{\mathrm{T}} = \det \underline{I}$. Wegen $\det \underline{C} = \det \underline{C}^{\mathrm{T}}$ folgt $\|c_{ik}\|^2 = \|\delta_{ik}\| = 1$, also $\det \underline{C} = \|c_{ik}\| = \pm 1$.

1.3: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$ mit $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$. Die Diagonalvektoren sind $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, also ist für einen Rhombus $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ mit $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

1.4: Ist $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] = -1$, so wird $[\bar{\mathbf{e}}_1\bar{\mathbf{e}}_2\bar{\mathbf{e}}_3] = -1$ oder $+1$ bei Drehung oder Spiegelung mit $\|c_{ik}\| = +1$ oder -1.

1.5: Die Vektoren $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ und $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ sind komplanar, so daß sich $\hat{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ ergibt. Aus $\hat{V}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{const}$ folgt, wenn man die Determinante entwickelt, $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = \text{const}$, also $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ oder $x_1/a + x_2/b + x_3/c = 1$.

1.6: Nach Aufgabe 1.5 gilt $\hat{V}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\mathbf{xpq}] = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{q}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{N} = \text{const}$, also ist $\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}^0 = l$ die *Hessesche Normalform.*

1.7: In (1.30) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}$ ersetze man $\mathbf{c}$ durch $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$. Das ergibt bereits (1.40a). Nach (1.30) gilt auch $\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d}$. Ersetzen wir hier $\mathbf{a}$ durch $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, so folgt (1.40b). Der Vergleich von (1.40a) mit (1.40b) zeigt, daß der Vektor $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ die Richtung der Schnittgeraden der von den Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ aufgespannten Ebenen besitzt.

1.8: Mittels (1.30) wird $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{f} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{f}) = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] = \mathbf{a}\cdot[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{d}] = (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, speziell

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2. \tag{9.1}$$

2.1:
$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{a}_{ik}\bar{\mathbf{e}}_i\bar{\mathbf{e}}_k = \bar{a}_{ik}c_{ij}\mathbf{e}_j c_{kl}\mathbf{e}_l = \bar{a}_{ik}c_{ij}c_{kl}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l = a_{jl}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l = \mathbf{A}, \tag{9.2}$$
$$\mathbf{A} = a_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = a_{ik}c_{ji}\bar{\mathbf{e}}_j c_{lk}\bar{\mathbf{e}}_l = a_{ik}c_{ji}c_{lk}\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_l = \bar{a}_{jl}\bar{\mathbf{e}}_j\bar{\mathbf{e}}_l = \bar{\mathbf{A}}. \tag{9.3}$$

2.2:
$$\mathbf{B} = b_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = b_{ijk}c_{pi}\bar{\mathbf{e}}_p c_{qj}\bar{\mathbf{e}}_q c_{rk}\bar{\mathbf{e}}_r = b_{ijk}c_{pi}c_{qj}c_{rk}\bar{\mathbf{e}}_p\bar{\mathbf{e}}_q\bar{\mathbf{e}}_r = \bar{b}_{pqr}\bar{\mathbf{e}}_p\bar{\mathbf{e}}_q\bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{B}}. \tag{9.4}$$

2.3: Aus (2.20) folgt $\varepsilon_{123} = \|\delta_{ik}\| = 1$. Die Determinante (2.20) wechselt (wie jede Determinante) ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht. Ihr Wert bleibt ungeändert, wenn man zweimal zwei Spalten vertauscht. Er ist gleich null, wenn zwei oder drei Spalten gleich sind. Damit folgt (1.60) aus (2.20).

2.4:
$$\varepsilon_{ijk}u_iv_j\mathbf{e}_k = \varepsilon_{123}u_1v_2\mathbf{e}_3 + \varepsilon_{231}u_2v_3\mathbf{e}_1 + \varepsilon_{312}u_3v_1\mathbf{e}_2 + \varepsilon_{213}u_2v_1\mathbf{e}_3 + \varepsilon_{321}u_3v_2\mathbf{e}_1 + \varepsilon_{132}u_1v_3\mathbf{e}_2.$$

2.5:
$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} = \varepsilon_{ikl}v_l\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k\cdot u_m\mathbf{e}_m = \varepsilon_{ikl}u_mv_l\mathbf{e}_i\delta_{km} = \varepsilon_{ikl}u_kv_l\mathbf{e}_i = \mathbf{V}\cdot\mathbf{u},$$
$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \varepsilon_{ikl}v_ku_l\mathbf{e}_i = -\varepsilon_{ikl}u_kv_l\mathbf{e}_i = \mathbf{U}\cdot\mathbf{v} = -\mathbf{V}\cdot\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}) = u_m\mathbf{e}_m\cdot\varepsilon_{ikl}v_l\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \varepsilon_{ikl}u_iv_l\mathbf{e}_k.$$

Durch Vergleich findet man

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{V} = \varepsilon_{ikl}u_lv_k\mathbf{e}_i = \mathbf{U}\cdot\mathbf{v}.$$

2.6: Vertauschung von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in (2.38) ergibt

$$\mathbf{bac} + \mathbf{acb} + \mathbf{cba} - \mathbf{abc} - \mathbf{cab} - \mathbf{bca} = -(\mathbf{abc} + \mathbf{bca} + \mathbf{cab} - \mathbf{bac} - \mathbf{cba} - \mathbf{acb}),$$

also $\langle\mathbf{bac}\rangle = -\langle\mathbf{abc}\rangle$. Entsprechend zeigt man

$$\langle\mathbf{acb}\rangle = -\langle\mathbf{abc}\rangle, \langle\mathbf{cba}\rangle = -\langle\mathbf{abc}\rangle.$$

2.7: $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{w} = (u_iv_i)\,w_k\mathbf{e}_k,$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{vw}) = u_l\mathbf{e}_l\cdot v_iw_k\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = u_lv_iw_k(\mathbf{e}_l\cdot\mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}_k = u_lv_iw_k\delta_{li}\mathbf{e}_k = (u_iv_i)\,w_k\mathbf{e}_k, \text{ usw.}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{vw}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{uw}).$$

2.8: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2 = \varepsilon_{ijk}u_iv_j\delta_{kn}\varepsilon_{lmn}u_lv_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}u_iv_ju_lv_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,u_iv_ju_lv_m$

$$= u_iv_ju_iv_j - u_iv_ju_jv_i = (u_iu_i)\,(v_jv_j) - (u_iv_i)\,(u_jv_j) = \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$$

bei Anwendung der Strukturformel.

2.9: Mit (2.35) wird $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\delta_{il}a_jb_kc_md_n = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}a_jb_kc_md_n$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,a_jb_kc_md_n = a_jb_kc_jd_k = -\,a_jb_kc_kd_j$$

$$= (a_jc_j)\,(b_kd_k) - (a_jd_j)\,(b_kc_k) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

3.1: $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i\cdot v_k\mathbf{e}_k = v_k\mathbf{e}_i\delta_{ik} = v_k\mathbf{e}_k = \mathbf{v},$

$$v_i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = v_i\delta_{ik}\mathbf{e}_k = v_i\mathbf{e}_i = \mathbf{v}.$$

$$\delta_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot a_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = \delta_{ij}a_{kl}\delta_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = a_{il}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = \mathbf{A},$$

$$a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot\delta_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = \delta_{kl}a_{ij}\delta_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = a_{il}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l = \mathbf{A}.$$

3.2: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{S} = v_l\mathbf{e}_l\cdot s_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = s_{ik}v_l\delta_{li}\mathbf{e}_k = s_{ik}v_i\mathbf{e}_k,$

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = s_{kl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l\cdot v_i\mathbf{e}_i = s_{kl}v_i\mathbf{e}_k\delta_{li} = s_{ki}v_i\mathbf{e}_k,$$

also $\mathbf{v}\cdot\mathbf{S} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}$, falls $s_{ki} = s_{ik}$ gilt.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = u_i\mathbf{e}_i\cdot s_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\cdot v_l\mathbf{e}_l = u_iv_ls_{jk}\delta_{ij}\delta_{kl},$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = u_iv_ks_{ik}, \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = v_iu_ks_{ik}$$

$$= v_ku_is_{ki} = u_iv_ks_{ki} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} \text{ im Falle } s_{ki} = s_{ik}.$$

3.3: Gleichung (3.20) geht für sehr kleine $|\varphi|$, wenn wir φ durch $\delta\varphi$ ersetzen, in $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \delta\varphi(\mathbf{a}^0\times\mathbf{x})$ über. Für infinitesimale Drehungen gilt also $\delta\mathbf{x} = (\delta\varphi\mathbf{a}^0)\times\mathbf{x}$. Mit $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$ und $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ folgt $\mathbf{v} = \omega\mathbf{a}^0\times\mathbf{x} = \mathbf{u}\times\mathbf{x}$.

3.4: Unter den Voraussetzungen $\bar{x}_3 = x_3$, $x_3' = x_3$ erhält man

$$((c_{ik})) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((a_{ik})) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c_{il}c_{kl} = a_{il}a_{kl} = \delta_{ik}$ und $\|c_{ik}\| = \|a_{ik}\| = 1$.

3.5: $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{I}\cdot\mathbf{x}, \quad \mathbf{S}\cdot\mathbf{x} = \lambda\mathbf{I}\cdot\mathbf{x},$

$$(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{x} = (\sigma_{ln} - \lambda\delta_{ln})\,\mathbf{e}_l\mathbf{e}_n\cdot x_m\mathbf{e}_m$$

$$= (\sigma_{ln} - \lambda\delta_{ln})\,x_m\mathbf{e}_l\delta_{nm} = (\sigma_{ln} - \lambda\delta_{ln})\,x_n\mathbf{e}_l$$

$$= (\sigma_{ln}x_n - \lambda x_l)\,\mathbf{e}_l = \mathbf{0}$$

führt auf ein homogenes Gleichungssystem vom Typ (3.26).

3.6: $$2E_{\mathrm{kin}} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{u} = \omega^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}) = \omega^2\theta. \tag{9.5}$$

Nach (3.30) gilt auch $2E_{\mathrm{kin}} = m\omega^2(\mathbf{n}\times\mathbf{x})^2$. Wegen $\mathbf{q} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{u} = \omega\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$ folgt

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = q_n = \omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{n} = \omega\theta. \tag{9.6}$$

3.7: Ist $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$, so gilt speziell $\Theta = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3 = \tau_{33}$, $q_3 = \tau_{33}\omega$, $E_{\text{kin}} = \dfrac{\tau_{33}}{2}\omega^2 = \dfrac{\omega}{2} q_3$.

4.1: Erlaubt sind folgende Nabla-Operationen nach (4.20) bis (4.22):

$$\nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\varphi}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) = [\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}] = [\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\mathbf{v}] + [\nabla \mathbf{u}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}] = [\mathbf{v}\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}] - [\mathbf{u}\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}] = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

$$\nabla \times (\overset{\downarrow}{\varphi}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla\varphi).$$

4.2: $\partial_i(\varphi\psi) = \varphi\partial_i\psi + \psi\partial_i\varphi$. Mit $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk}u_i v_j \mathbf{e}_k = w_k\mathbf{e}_k = \mathbf{w}$ erhält $\nabla \times \mathbf{w} = \varepsilon_{lkn}\partial_l w_k \mathbf{e}_n$ nach (2.35) die Koordinaten $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lkn}\partial_l(u_i v_j) = u_n\partial_i v_i + v_i\partial_i u_n - v_n\partial_i u_i - u_i\partial_i v_n$.

4.3: a) $\partial_i x_k = 0$ für $i \neq k$, $\partial_1 x_1 = \partial_2 x_2 = \partial_3 x_3 = 1$.

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\partial r/\partial x_1 = x_1/r$, usw.

$$\begin{aligned} &\text{b) } \partial_i x_i = 3, \quad \partial_i x_k - \partial_k x_i = 0, \quad \partial_i x_k = \delta_{ik}, \\ &\nabla\mathbf{x} = \partial_i x_k \mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = \mathbf{I}. \\ &\text{c) } \partial_i r = x_i/r, \quad \mathbf{e}_i\partial_i r = \mathbf{x}/r = \mathbf{x}^0, \\ &\mathbf{e}_i\partial_i f(r) = f'(r)\,\mathbf{e}_i\partial_i r = f'(r)\,\mathbf{x}^0. \end{aligned} \tag{9.7}$$

4.4:

$$\nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\nabla}\overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) = \mathbf{e}_i\partial_i \cdot (\partial_k v_l \mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = \partial_k\partial_k(v_l\mathbf{e}_l) = \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \mathbf{v},$$

$$\nabla \cdot (\overset{\downarrow\downarrow}{\mathbf{v}}\nabla) = \mathbf{e}_i\partial_i \cdot (\overset{\downarrow\downarrow}{v}_k\partial_l\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l) = \partial_l(\partial_k v_k)\,\mathbf{e}_l = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

4.5: Nach (4.38) gilt

$$\begin{aligned} &\mathbf{rot\,rot\,(grad}\,\varphi) = \mathbf{0} = \mathbf{grad} \operatorname{div} (\mathbf{grad}\,\varphi) - \operatorname{div} \mathbf{grad}\,(\mathbf{grad}\,\varphi), \\ &\mathbf{grad}\,\nabla^2\varphi = \nabla^2\,\mathbf{grad}\,\varphi \end{aligned} \tag{9.8}$$

und

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} (\mathbf{rot\,rot\,v}) = 0 = \operatorname{div} (\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}) - \operatorname{div} (\operatorname{div} \mathbf{grad}\,\mathbf{v}), \\ &\nabla^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \nabla^2\,\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

5.1: Wenn man (5.4a)

$$\bar{x}_1 = Kx_1 + \mathrm{i}hKx_4, \quad \bar{x}_2 = x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3, \quad \bar{x}_4 = -\mathrm{i}hKx_1 + Kx_4$$

als Matrizengleichung schreibt, erhält man die Matrix $\underline{C}^{\mathrm{M}}$. Man beachte $(1 - h^2)\,K^2 = 1$.

5.2:

$$\begin{aligned} &\bar{U}_1\bar{V}_1 + \bar{U}_4\bar{V}_4 + \bar{U}_2\bar{V}_2 + \bar{U}_3\bar{V}_3 = K^2(U_1 + \mathrm{i}hU_4)(V_1 + \mathrm{i}hV_4) \\ &+ K^2(U_4 - \mathrm{i}hU_1)(V_4 - \mathrm{i}hV_1) + U_2V_2 + U_3V_3 \\ &= K^2(1 - h^2)(U_1V_1 + U_4V_4) + U_2V_2 + U_3V_3 \quad \text{mit} \quad K^2(1 - h^2) = 1. \end{aligned}$$

5.3: Nach (5.33) ist $(\operatorname{div} \mathbf{w})\, I : \nabla\mathbf{w} = (\operatorname{div} \mathbf{w})^2$, also

$$\varepsilon = \eta(\partial_i w_k + \partial_k w_i)\,\partial_k w_i - \tfrac{2}{3}\eta\,(\operatorname{div} \mathbf{w})^2. \tag{9.10}$$

5.4: $\mathbf{S}_u : \nabla\mathbf{w} = -p\mathbf{I} : \nabla\mathbf{w} = -p \operatorname{div} \mathbf{w}$, $\mathbf{S}_v : \nabla\mathbf{w} = \varepsilon$, $\mathbf{S} : \nabla\mathbf{w} = -p \operatorname{div} \mathbf{w} + \varepsilon$. Nach (5.37) bedeutet

$$-p \operatorname{div} \mathbf{w} = -p\,\frac{\mathrm{d}v}{v\,\mathrm{d}t} = \frac{-p\,\mathrm{d}v}{v\,\mathrm{d}t} = \frac{\delta W_k}{v\,\mathrm{d}t} \tag{9.11}$$

die Kompressions- bzw. Expansionsarbeit ($\delta W_k > 0$ bzw. < 0) je Volumen- und Zeiteinheit.

5.5: $\operatorname{div} (\varrho\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{grad}\,\varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{w}$. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho\mathbf{w}) = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \\ &\varrho v = 1, \quad \varrho\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}\varrho = 0, \quad \frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

5.6: $$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{D} = \mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} - \mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{D}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{D}),$$
$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{B} = \mathbf{u}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{B}),$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{D}\cdot\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\,.\,\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

5.7: $\dfrac{\partial\gamma}{\partial t} - \mathrm{rot}\,(\mathbf{w}\times\gamma) = \nu\nabla^2\gamma$. Wegen $\mathrm{div}\,\gamma = 0$ und $\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0$ wird nach (4.24) $\mathbf{rot}\,(\mathbf{w}\times\gamma) = \gamma\cdot\nabla\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot\nabla\gamma$, also

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \mathbf{w}\cdot\nabla\gamma - \gamma\cdot\nabla\mathbf{w} = \nu\nabla^2\gamma. \tag{9.13}$$

5.8: $$2\,\mathbf{ink}\,\mathbf{def}\,\mathbf{w} = \nabla\times\big(\nabla\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}} + \overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}}\nabla\big)\times\nabla = \nabla\times(\nabla\mathbf{w})\times\nabla + \nabla\times(\mathbf{w}\nabla)\times\nabla$$
$$= (\nabla\times\nabla)\big(\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}}\times\nabla\big) + \big(\nabla\times\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{\mathbf{w}}\big)(\nabla\times\nabla) = \mathbf{0}.$$

Nabla-Operationen haben nur dann „Beweiskraft", wenn man sich auf schon bewiesene Beziehungen stützen kann. – Nach (5.73) wird $\mathrm{div}\,\mathbf{ink}\,\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{ink}\,\mathbf{D}$

$$= \mathbf{e}_1\partial_1(\partial_3\partial_2 d_{32} + \partial_2\partial_3 d_{23} - \partial_3\partial_3 d_{22} - \partial_2\partial_2 d_{33})$$
$$+ \mathbf{e}_1\partial_2(\partial_3\partial_3 d_{12} + \partial_2\partial_1 d_{33} - \partial_3\partial_1 d_{32} - \partial_2\partial_3 d_{13})$$
$$+ \mathbf{e}_1\partial_3(\partial_2\partial_2 d_{13} + \partial_3\partial_1 d_{22} - \partial_3\partial_2 d_{12} - \partial_2\partial_1 d_{23}) + \ldots = \mathbf{0}.$$

5.9: Für die letzte Komponente in (5.73) gilt

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3(2\partial_1\partial_2 d_{12} - \partial_2\partial_2 d_{11} - \partial_1\partial_1 d_{22})$$
$$= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3[\partial_1\partial_2(\partial_1 s_2 + \partial_2 s_1) - \partial_2\partial_2\partial_1 s_1 - \partial_1\partial_1\partial_2 s_2] = \mathbf{0}.$$

Durch zyklische Vertauschung gehen z. B. die Koordinaten des Tensors $\mathbf{ink}\,\mathbf{D}$ bezüglich $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$ nach (5.73) ineinander über.

6.1: Nach dem Musterbeispiel für (6.9) berechnet man z. B. $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}^3 = 0$, $\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{b}^3 = 0$, $\mathbf{b}_3\cdot\mathbf{b}^3 = 1$ mit (6.6). Aus (6.6) folgt

$$[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] = [(\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)]/[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^3,$$
$$[(\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3)(\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)] = (\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3)\cdot((\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1)\times(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2))$$

und nach (1.40a)

$$(\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1)\times(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2) = [\mathbf{b}_3\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]\,\mathbf{b}_1 - [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]\,\mathbf{b}_3 = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\,\mathbf{b}_1, \tag{9.14}$$

also

$$[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3] = (\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{b}_1/[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^2 = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^{-1}. \tag{9.15}$$

Ferner gilt mit (9.14)

$$\mathbf{b}^2\times\mathbf{b}^3 = \frac{(\mathbf{b}_3\times\mathbf{b}_1)\times(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^2} = \frac{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\mathbf{b}_1}{[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]^2},$$

also nach (9.15)

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3]\,(\mathbf{b}^2\times\mathbf{b}^3) = \frac{\mathbf{b}^2\times\mathbf{b}^3}{[\mathbf{b}^1\mathbf{b}^2\mathbf{b}^3]}\ \text{usw.}$$

6.2: Wegen $\bar{\mathbf{b}}_l\cdot\bar{\mathbf{b}}^i = \delta^i_l$ und $\mathbf{b}_j\cdot\mathbf{b}^k = \delta^k_j$ wird mit (6.14) $\bar{\mathbf{b}}_l\cdot\bar{\mathbf{b}}^i = \bar{\mathbf{b}}_l\cdot\gamma^i_k\mathbf{b}^k = \beta^j_l\mathbf{b}_j\cdot\gamma^i_k\mathbf{b}^k = \beta^j_l\gamma^i_k\delta^k_j$, $\bar{\mathbf{b}}_l\cdot\bar{\mathbf{b}}^i = \beta^k_l\gamma^i_k = \delta^i_l$. Nach (6.17) ist $\beta^k_l\bar{\beta}^i_k = \delta^i_l$, also $\gamma^i_k = \bar{\beta}^i_k$ und $\bar{\mathbf{b}}^i = \bar{\beta}^i_k\mathbf{b}^k$, siehe (6.15).

7.1: $r = r_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$ stellen eine Kugel, einen Kegel, eine Meridianebene dar. Die Schnittkurven von je zwei dieser Koordinatenflächen ergeben eine φ-Linie (Breitenkreis), ϑ-Linie (Meridiankreis), r-Linie (Radialstrahl). Mittels (7.1) bestätigt man (7.14) für $u = r$, $v = \vartheta$, $w = \varphi$.

7.2: Nach (7.1) und (7.12) berechnet man

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2\sin\vartheta \text{ für Kugelkoordinaten.} \tag{9.16}$$

7.3: Nach (7.20) und (7.22) berechnet man

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\lambda, \vartheta)} = (\sinh\lambda)^2 (\cos\vartheta)^2 + (\cosh\lambda)^2 (\sin\vartheta)^2. \tag{9.17}$$

7.4 und **7.5:** Alle Rechenhinweise sind in den vorhergehenden Beispielen enthalten. In Zylinderkoordinaten treten Zylinder, Ebenen durch die x_3-Achse und Ebenen senkrecht zur x_3-Achse als Koordinatenflächen auf.

7.6: Nach (7.51) wird $\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}g^{kn}(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{in} - \partial_n g_{ik}) = \frac{1}{2}g^{kn}\partial_i g_{kn}$ wegen $g^{kn}\partial_k g_{in} = g^{nk}\partial_n g_{ik} = g^{kn}\partial_n g_{ik}$, da es auf die Bezeichnung gleicher Indizes nicht ankommt, und mit $g^{nk} = g^{kn}$. —Wegen (6.23) ist die Matrix $((g^{ik}))$ invers zu $((g_{ik}))$, also

$$((g^{kn})) = ((g_{kn}))^{-1} = \frac{1}{g}((G^{kn})), \quad g^{kn} = \frac{1}{g}G^{kn},$$

wenn G^{kn} die *Minoren* (Adjunkten) zu den Elementen g_{kn} bezeichnen. Man bildet

$$\partial_i g = \begin{vmatrix} \partial_i g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ \partial_i g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ \partial_i g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & \partial_i g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & \partial_i g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & \partial_i g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} & \partial_i g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & \partial_i g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & \partial_i g_{33} \end{vmatrix}$$

und entwickelt den 1., 2., 3. Summanden nach der 1., 2., 3. Spalte. Damit folgen $\partial_i g = G^{kn}\partial_i g_{kn} = g g^{kn}\partial_i g_{kn}$ und der zweite Ausdruck von (7.52). —Bei orthogonalen Koordinaten gilt $g_{ik} = 0$, $g^{ik} = 0$ für $i \neq k$, so daß in (7.51) $n = l$ gesetzt werden kann, wobei nicht mehr über $n = l$ summiert wird.

7.7: In *Zylinderkoordinaten* $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = x^3$ haben wir

$$\mathbf{x} = x^1 \cos x^2\, \mathbf{e}_1 + x^1 \sin x^2\, \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b}_1 = \partial_1 \mathbf{x} = \cos x^2\, \mathbf{e}_1 + \sin x^2\, \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{b}_2 = \partial_2 \mathbf{x} = -x^1 \sin x^2\, \mathbf{e}_1 + x^1 \cos x^2\, \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \partial_3 \mathbf{x} = \mathbf{e}_3.$$

$$g_{11} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1, \quad g_{22} = \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = (x^1)^2, \quad g_{33} = \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = 1, \ \sqrt{g} = x^1.$$

Wegen $((g^{ik})) = ((g_{ik}))^{-1}$ folgt $g^{11} = 1$, $g^{22} = (x^1)^{-2}$, $g^{33} = 1$.
In *Kugelkoordinaten* (7.1) $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$ gilt

$$\mathbf{x} = x^1 \sin x^2 \cos x^3\, \mathbf{e}_1 + x^1 \sin x^2 \sin x^3\, \mathbf{e}_2 + x^1 \cos x^2\, \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}_1 = \partial_1 \mathbf{x} = \sin x^2 \cos x^3\, \mathbf{e}_1 + \sin x^2 \sin x^3\, \mathbf{e}_2 + \cos x^2\, \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}_2 = \partial_2 \mathbf{x} = x^1 \cos x^2 \cos x^3\, \mathbf{e}_1 + x^1 \cos x^2 \sin x^3\, \mathbf{e}_2 - x^1 \sin x^2\, \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}_3 = \partial_3 \mathbf{x} = -x^1 \sin x^2 \sin x^3\, \mathbf{e}_1 + x^1 \sin x^2 \cos x^3\, \mathbf{e}_2.$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = (x^1)^2, \quad g_{33} = (x^1 \sin x^2)^2, \quad \sqrt{g} = (x^1)^2 \sin x^2.$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = (x^1)^{-2}, \quad g^{33} = (x^1 \sin x^2)^{-2}.$$

Gleichung (7.54) vereinfacht sich wegen $g^{ik} = 0$ für $i \neq k$ zu

$$\nabla^2\psi = \sum_{k=1}^{3} \left[\partial_k(g^{kk}\partial_k\psi) + g^{kk}\partial_k\partial_k\psi + g^{kk}\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\partial_k \sqrt{g}\right)\partial_k\psi\right], \tag{9.18}$$

wobei nur das Summenzeichen wirken soll. Durch Differenzieren erhält man die Ergebnisse (7.58) und (7.59).

8.1: Nach (8.15) wird mit (8.22) $R^2_{112} = \partial_1\Gamma^2_{12} - \partial_2\Gamma^2_{11} + \Gamma^j_{12}\Gamma^2_{1j} - \Gamma^j_{11}\Gamma^2_{2j} = \partial_1 \cot x^1 - 0 + \cot x^1 \cot x^1 - 0 = -(\sin x^1)^{-2} + (\cot x^1)^2 = -1$, $R^2_{121} = -R^2_{112} = +1$. Zur Übung berechne man noch $R^2_{212} = R^2_{221} = 0$.

8.2: Nach (8.24) wird

$$e^{hij}e^{klm}R_{ijkl} = e^{hij}e^{klm}e_{pij}e_{klq}\eta^{pq} = e^{hij}e_{pij}e^{klm}e_{klq}\eta^{pq} = 2\delta_p^h 2\delta_q^m \eta^{pq},$$

$$e^{hij}e^{klm}R_{ijkl} = 4\eta^{hm}. \qquad (9.19)$$

8.3: In der Kurzschrift nach (8.30) leitet man aus $g_{kl} = \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_l$ mit $\mathbf{b}_{k,m} = \Gamma^n_{km}\mathbf{b}_n$ her:

$$g_{kl,m} = \mathbf{b}_{k,m} \cdot \mathbf{b}_l + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_{l,m} = \Gamma^n_{km}\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_l + \Gamma^n_{lm}\mathbf{b}_k \cdot \mathbf{b}_n,$$

$$g_{kl,m} - \Gamma^n_{km}g_{nl} - \Gamma^n_{lm}g_{kn} = 0,$$

also

$$g_{kl;m} = 0. \qquad (9.20)$$

8.4:

$$g^{kl} = \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}^l, \quad b^k{}_{,m} = -\Gamma^k_{mn}\mathbf{b}^n,$$

$$g^{kl}{}_{,m} = \mathbf{b}^k{}_{,m} \cdot \mathbf{b}^l + \mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}^l{}_{,m} = -\Gamma^k_{mn}\mathbf{b}^n \cdot \mathbf{b}^l - \Gamma^l_{mn}\mathbf{b}^k \cdot \mathbf{b}^n,$$

$$g^{kl}{}_{,m} + \Gamma^k_{mn}g^{nl} + \Gamma^l_{mn}g^{kn} = 0,$$

also

$$g^{kl}{}_{;m} = 0. \qquad (9.21)$$

Literatur

Mathematische Grundlagen

M [1] *v. Borbély, S.:* Vorlesung über Dyadenrechnung, gehalten an der TH „Otto von Guericke" Magdeburg 1966.

M [2] *Brehmer, S.; Haar, H.:* Differentialformen und Vektoranalysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973.

M [3] *Duschek, A.; Hochrainer, A.:* Tensorrechnung in analytischer Darstellung. 3 Bände. Wien: Springer-Verlag.

M [4] *Eisenreich, G.:* Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1971.

M [5] *Jeger, M.; Eckmann, B.:* Einführung in die vektorielle Geometrie und lineare Algebra. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1967.

M [6] *Kästner, S.:* Vektoren, Tensoren, Spinoren. Berlin: Akademie-Verlag 1954.

M [7] *Klingbeil, E.:* Tensorrechnung für Ingenieure. Mannheim: BI Hochschultaschenbücher-Verlag 1966.

M [8] *Kneschke, A.:* Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Band III, 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft 1968.

M [9] *Lagally, M.:* Vorlesungen über Vektorrechnung, 5. Auflage. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1956.

M [10] *Rashewski, P. K.:* Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.

M [11] *Reichardt, H.:* Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung, 2. Auflage. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1968.

M [12] *Schlegelmilch, W.:* Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis. Berlin: VEB Verlag Technik 1954.

M [13] *Schmidt, H.:* Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung. Berlin: VEB Verlag Technik 1953.

Physikalische Anwendungen

P [1] *August, M.:* Theorie statischer Versetzungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966.
P [2] *Benedek, P.; László, A.:* Grundlagen des Chemieingenieurwesens. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1965.
P [3] *Cap, F.:* Einführung in die Plasmaphysik. WTB Bd. 72, 73, 74. Berlin: Akademie-Verlag.
P [4] *Fock, V.:* Theorie von Raum, Zeit, Gravitation. Berlin: Akademie-Verlag 1960.
P [5] *de Groot, S. R.; Mazur, P.:* Non-Equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1963.
P [6] *Hamel, G.:* Theoretische Mechanik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949.
P [7] *Hinze, J. O.:* Turbulence. 2. Aufl. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, INC. 1975.
P [8] *Joos, G.:* Lehrbuch der theoretischen Physik, 7. Auflage. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1950.
P [9] *Kotschin, N. J.; Kibel, I. A.; Rose, N. W.:* Theoretische Hydromechanik, Bd. I. Berlin: Akademie-Verlag 1954.
P [10] *Landau, L. D ; Lifschitz, E. M.:* Lehrbuch der theoretischen Physik, 9 Bände. Übers. a. d. Russ. Berlin: Akademie-Verlag.
P [11] *Macke, W.:* Teilchen, Wellen, Felder, Quanten, Statistik, Relativität, 6 Bände. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.- G.
P [12] *Schultz-Piszachich, W.:* Vektordifferentialoperationen im Zusammenhang mit den Bilanzgleichungen der chemischen Verfahrenstechnik. Chem. Technik, 25. Jg.; Teil I, Heft 8; Teil II, Heft 9; Teil III, Heft 10; 1973.
P [13] *Sommerfeld, A.:* Vorlesungen über theoretische Physik, 6 Bände. Leipzig: Akadem. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G.

Namen- und Sachregister

Abbildung, affine 30
Ableitung, kovariante 93, 94
Absoluttheorie 67
Achsenvektor 44
Adjunkten 104
Affinor 30
Arbeit, technische 14
Assoziativgesetz 15

Basis, ko- und kontravariante 73
Basissystem, kartesisches 12
Basisvektoren 8, 85
–, ko- und kontravariante 74, 87, 88
Bewegungsgleichung 55, 57
Bezugssysteme, ortsabhängige 87
Bilanzgleichungen 68
Bildvektor 30, 43
Bilinearform 21, 22
Bivektor 35
Blindoperator 53

Christoffelsymbole 90, 91
Cramersche Regel 42

Dehnungen 65
Determinante der kovarianten Metrikkoeffizienten 80
– – Transformationsmatrix 19
Deviationsmomente 48
Deviator 63, 64
dielektrische Verschiebung 66
Dielektrizitätskonstante 66
Dissipation 65, 66
Distributivgesetz 15
Divergenz 52
Divisionssatz 25
Drehimpulsvektor 48
Drehtensor 2. Stufe 42, 44
Drehtransformationen 10
Drehung eines starren Körpers 16
Drehvektor 16, 47
Drehwinkel 44
Druck, hydrostatischer 56, 64
Dyade 26, 29
–, lokale 52, 93
dynamische Zähigkeit 57

Ebenengleichung 19
Eigenvektoren 45
Eigenwerte 46
Einheitsmatrix 13
Einheitstensor 26, 38, 78
Einheitsvektor 7, 10
Einselement 38
Energie, elektromagnetische 67
–, kinetische 10
E-Tensor 33, 34, 78
euklidischer Raum 7, 96

Feldlinien 69
Feldstärke 66
Flächenelement, vektorielles 83
Flächenkoordinaten 82
Fundamentalinvariante 19
Funktional 20, 21, 23
Funktionaldeterminante, Jacobische 85

Galileitransformation 67
Geschwindigkeit 10
Gradient 53, 88

Hauptachsenform 45
Hauptachsentransformation 23
Hauptsatz der Tensoranalysis 52
Hessesche Normalform 20, 23, 100
Homogenität 42
Hüllenfluß 58

Impulsbilanzgleichung 68
Indizes herauf- oder herunterziehen 79
Inertialsysteme 61
Inkompatibilitätstensor 71
instationär 41
Integralsätze nach Gauß 58
– – Stokes 69
invariant 15, 21, 28, 46, 81
Invariante des Tensors, skalare 46
Invarianz 13, 15, 17, 22
Invarianzbedingung 12
isotrop 41

kinematische Zähigkeit 57
kinematischer Fluß 58
kogredient 75
Kollinearitätsbedingung 16
komplanar 18
Komponenten eines Vektors 7
Komponentendarstellung eines n-stufigen Tensors 28
Kontinuitätsgleichung 65, 66, 68, 102
kontragredient 75
konvektives Glied 55

Koordinaten eines Vektors 7
–, elliptische 86
–, ko- und kontravariante 74, 75
–, krummlinige 84, 87
–, orthogonale 89, 92
Koordinatenflächen und -linien 86
koordinatenfreie Darstellung 14, 15
Koordinatentransformation 9, 10, 11, 30, 74
Kräfte- und Momentengleichgewicht 62
Kroneckersymbol 9, 74
Kronecker-Tensor 6. Stufe 34
Kugelflächenkoordinaten 96
Kugelkoordinaten 82, 87, 104
Kugeltensor 63, 64

Lambsche Formel 55
Laplace-Operator 56
Levi-Civita, Zahlsymbole nach 31
Lichtgeschwindigkeit 60
lineare Abhängigkeit 18, 28
Linearform 21
Linienelement, vektorielles 83
Linkssystem 8
Lorentztransformationen 60

Maßfaktor 80
Matrix 11, 13
Maxwellsche Gleichungen der Elektrodynamik 66
Metrikkoeffizienten 77, 78, 80, 91
Minkowskiraum 60, 62
Minoren 104
Momentengleichgewicht 62
Multilinearform 21
Multiplikationssatz 25

Nabla-Operator 51, 52, 53, 56, 88
Navier-Stokes-Tensor 57, 64
Normaleneinheitsvektor 15, 58
Normalspannungen 39
Nulltensor 25, 27
Nullvektor 16

Ohmsches Gesetz 67
Operator, linearer, stetiger 51
Orientierung eines KS 7
orthogonal 13, 17, 85
Orthogonalitätsbedingung 16
orthonormiertes Rechtssystem 43
Ortsvektor 23

Parallelepiped 17
Permeabilität 66
Poissonsche Differentialgleichung 92
Polarkoordinaten, ebene 86

positiv definit 49
Poyntingscher Energiestrahlungsvektor 67
– Vektor 15
Produkt, allgemeines 25
–, doppeltskalares 65
–, inneres 27, 29, 78
–, skalares 9, 79
–, tensorielles 25, 78
–, vektorielles 15, 79, 81
Produktformeln 81
Produkttensor 25, 29
Projektion, skalare 14, 17
Punkttransformation 27, 30

quadratische Form 49
Quelldichte 52, 58
Quellenfeld 59
Quellstärke 58

Raumladungsdichte 66
Rechtssystem 8, 43
regulär 38
Relativitätstheorie, spezielle 62
Reynoldsscher Spannungstensor 31
Reziprozitätsbeziehungen 74
rheologisches Prinzip 64
Ricci-Kalkül 98, 99
Richtung 14
Richtungscosinus 10
Richtungssinn 14
Riemann-Christoffel-Tensor 94, 95
Riemannsche Krümmungstensoren 93, 95
Riemannsche Räume 96
Rotor 53, 71

Satz von der Erhaltung der Masse 66
Scherungen 65
Schubspannungen 39
singulär 38
Spannungsellipsoid 49
Spannungskräfte 40
Spannungstensor 31, 39
Spannungsvektor 39
Spannungszustand 40
Spat 17
Spatprodukt 17, 79, 81
Spatvolumen 17, 18, 85
Spiegelung 11
stationär (statisch) 41
Stellungsvektor 20
Stetigkeitsbedingungen 52
Stromdichte, elektrische 66
Strukturformel 16, 35, 36
Summationsvereinbarung 8, 73
Summenform 28
Summentensor 25, 29
Symmetriebedingung 38

Tangentenvektoren, differentielle 82, 85
Tensor, antisymmetrischer 31, 33, 41, 65
–, asymmetrischer 65
– der Deformationsgeschwindigkeiten 57, 64
– – Trägheitsmomente 47, 48
–, isotroper 41, 42
– *n*-ter Stufe 22, 28
– nullter Stufe 15
–, Spur des 63
–, vollständig antisymmetrischer 32
– 1. Stufe 9, 42
– 2. bzw. 3. Stufe 22, 33, 41, 42
Tensorellipsoid 47, 49
Tensorfeld 41, 71
Tensorkoordinaten, ko- und kontravariante 73
Trägheitsmoment, skalares 48
Transformationsgesetze 11, 21, 61, 81
Transformationsgleichungen 87
Transformationskoeffizienten 11, 61, 87, 89
Transformationsmatrix 12, 19
Translation 7
Transportglied 55
Transportgrößen 68
Trilinearform 21
Trivektor 35

u-Linie 82, 84
Überschiebung 26
Umwandlungsformel 20

v-Linie 82, 85
Vektor des Flächenelements 58
–, Norm des 14
Vektoralgebra 7
Vektorfunktion, multilineare 30
Vektorgradient 52
Verbindungssatz 16, 20, 36
Verjüngung 26
Verschiebungsvektor 64
Verzerrungstensor 64, 65
Vierertensoren 61

w-Linie 85
Winkelgeschwindigkeit 16
Wirbeldichte 52, 69
Wirbelfeld 69
Wirbelgleichung, Rayleighsche 69
Wirbeltransportgleichung 68
Wirkoperator 53

Zeitableitung, totale 55
Zirkulation 69
Zylinderkoordinaten 86, 104