MATHEMATIK

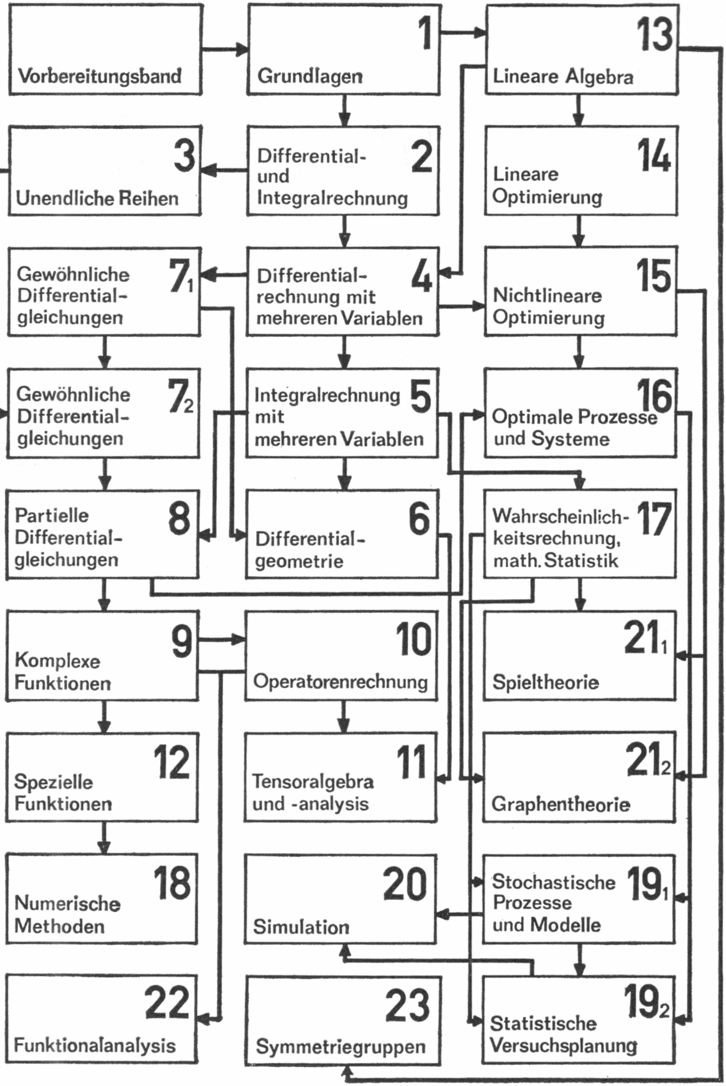
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

7/2

WENZEL

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER, ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 7/2

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

---

PROF. DR. H. WENZEL

Gewöhnliche Differentialgleichungen 2

3., ÜBERARBEITETE AUFLAGE

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1985

Verantwortlicher Herausgeber:

Dr. rer. nat. Günter Zeidler, Dozent für Wirtschaftsmathematik an der Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“, Berlin-Karlshorst

Autor:

Dr. rer. nat. habil. Horst Wenzel, ordentlicher Professor für Analysis an der Technischen Universität Dresden

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, August 1984 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der ersten Auflage 1976

Math. Ing. Nat. wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 7/2

ISSN 0138-1318

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1976

3. Auflage

VLN 294-375/32/85 · LSV 1064

Lektor: Dorothea Ziegler

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Bestell-Nr. 665 799 9

00650

Vorwort

Über das Arbeiten mit diesem Band und die Bedeutung von Groß- und Kleindruck sei auf das Vorwort von Teil 1 verwiesen.

Im vorliegenden Band werden für gewöhnliche Differentialgleichungen neue Lösungsmethoden entwickelt und neue Aufgaben behandelt. Beide haben ihren Ursprung in entsprechenden Problemen der Praxis. Deshalb werden bereits hier drei typische Vertreter derartiger Probleme dargelegt. Sie werden im Verlaufe des Bandes mehrfach bearbeitet.

Ist der Balken im Beispiel 3.20 am Rand $x = l$ eingespannt, hat er einen Rechteckquerschnitt mit einer großen Querschnittshöhe – im Vergleich zu seiner Breite – und wird er beispielsweise lediglich am Rand $x = 0$ durch eine Einzelkraft F auf Biegung beansprucht, so kann bei großem F der Balken seitlich auskippen. Bezeichnet man mit $\vartheta(x)$ den Torsionswinkel, mit GJ_t die Torsionssteifigkeit, mit EJ die Biegesteifigkeit und mit ν die Querkontraktionszahl, so ergibt sich – unter der Voraussetzung unbehinderter Torsion an der Einspannung – die folgende lineare homogene Differentialgleichung

$$GJ_tEJ\vartheta''(x) + (1 - \nu^2)\,F^2x^2\vartheta(x) = 0, \tag{V.1}$$

deren Koeffizienten nicht alle konstant sind, selbst wenn die Steifigkeiten konstant sein sollten. Der Exponentialansatz (3.67) für die Lösung führt hier also nicht zum Ziel.

Behandelt man die kleinen Schwingungen eines mathematischen Pendels (Beispiel 1.8; Aufgabe 3.3) und ersetzt man die masselose Stange durch ein Seil, so ergibt sich für die seitliche Auslenkung $w = w(x, t)$ des Seiles – falls man sich für synchrone Schwingungen interessiert, wo alle Seilteilchen mit derselben Kreisfrequenz ω und einheitlicher Phase schwingen – $w(x, t) = y(x)\cos(\omega(t - t_0))$, wobei $y = y(x)$ der linearen homogenen Differentialgleichung mit *variablen* Koeffizienten

$$(L - x)y'' - y' + \frac{\omega^2}{g}y = 0 \text{ mit } L = l + \frac{m}{\varrho} \tag{V.2}$$

genügt, falls man voraussetzt, daß die Seildichte ϱ konstant ist.

Bei der quantentheoretischen Behandlung eines Elektrons (Masse m) im Coulombfeld $U = -\dfrac{Ze^2}{r}$ (Z: Anzahl der Protonen im Kern; e: Elementarladung) des Kerns wird die Schrödingergleichung mit dem Ansatz $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y_l(\vartheta, \varphi)$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$; $Y_l(\vartheta, \varphi)$: Kugelflächenfunktionen [siehe Definition 6.14]; (r, ϑ, φ) räumliche Polarkoordinaten) gelöst, wobei $R(r) = R_l(r)$ der folgenden linearen homogenen Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten genügt:

$$r^2R'' + 2rR' + [\lambda r^2 + 2ar - l(l + 1)]\,R = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{V.3}$$

mit

$$\lambda = \frac{8\pi^2 m}{h^2}E \quad \text{und} \quad a = \frac{4\pi^2 m}{h^2}Ze^2 \tag{V.4}$$

(E: Gesamtenergie des Elektrons; h: Planksches Wirkungsquantum).

Im Kapitel 5 werden die Lösungen solcher Differentialgleichungen durch Entwicklung in Reihen bestimmt. Zunächst wird an Beispielen die Koeffizientenberechnung ausführlich behandelt. Die zugehörige Theorie gehört in das Gebiet der Gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen. Um jedoch Kenntnisse aus dem Band Funktionentheorie nicht voraussetzen zu müssen, werden die Formulierungen im Reellen durchgeführt; sie sind jedoch so angelegt, daß nach Kenntnis der Funktionentheorie der Übergang zur komplexen Darstellung keine Schwierigkeiten bereitet. Auf Beweise mußte zwar verzichtet werden, jedoch ist dies ohne Einbuße an Verständnis möglich.

Die Differentialgleichungen (V.1), (V.2), (V.3) sind durch Zusatzbedingungen zu ergänzen. Zum Kipp-Problem (V.1) gehören die Randbedingungen

$$\vartheta'(0) = 0, \quad \vartheta(l) = 0 \tag{V.5}$$

und zu den Schwingungen des herabhängenden Seiles (V.2)

$$y(0) = 0, \quad gy'(l) = \omega^2 y(l), \tag{V.6}$$

während zur Differentialgleichung aus (V.3) die Forderungen

$$\lim_{r \to +0} R(r) \text{ existiert} \tag{V.7}$$

und

$$R(r) \text{ bleibt beschränkt für } r \to +\infty \tag{V.8}$$

hinzuzunehmen sind.

Wie aus 1.3.3. zu entnehmen ist, werden durch (V.1), (V.5) sowie (V.2), (V.6) und schließlich auch durch (V.3), (V.7), (V.8) Eigenwertaufgaben formuliert. Als Eigenwertparameter kann in (V.1) das positive F, in (V.2) das positive ω und in (V.3) das reelle E angesehen werden. Den Rand- und Eigenwertaufgaben (siehe auch 1.3.2. und 1.3.3.) ist das Kapitel 6 gewidmet. Es beginnt mit Beispielen und Aufgaben; unter ihnen befindet sich eine *nichtlineare* Randwertaufgabe und eine Eigenwertaufgabe, die *nichtreelle* Eigenwerte besitzt. Es wird gezeigt, wie man eine Eigenwerttheorie in Analogie zu den Eigenwertaufgaben bei Matrizen (Band 13) aufbauen kann. Auch hier kann man – wie z. B. in (6.30) – zu einer Eigenwertgleichung gelangen, die – im Gegensatz zu Matrizen-Eigenwert-Gleichungen – im allgemeinen unendlich viele Eigenwerte als Lösungen besitzen. Allerdings kann es auch vorkommen, daß die Eigenwerte bei Differentialgleichungen auch aus anderen Bedingungen – wie z. B. in (V.7), (V.8) – zu ermitteln sind. Bezüglich numerischer Verfahren konnten nur die theoretischen Grundlagen vermittelt werden; zur praktischen Durchrechnung sei auf Band 18 und die dort angegebene Literatur verwiesen. Der Entwicklungssatz (Satz 6.9) kann als Verallgemeinerung der Fourierentwicklung aus Band 3 angesehen werden. Die wichtigsten Beispiele im Zusammenhang mit dem Entwicklungssatz werden angeführt. Sie werden für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Band 8) bereitgestellt. Auf eine ausführliche Durchrechnung, insbesondere bei den vorkommenden Normen, mußte verzichtet werden.

Bei den Beispielen und Aufgaben wird weniger auf innermathematische Probleme Wert gelegt, vielmehr stehen Anwendungsaufgaben im Vordergrund. Hinweise auf Band 7/1 beziehen sich auf die dritte und vierte Auflage.

Dresden, Februar 1984 Der Autor

Inhalt

5. Potenzreihenansätze und Verallgemeinerungen

5.1. Potenzreihenentwicklung der Lösung

5.1.1. Koeffizientenberechnung

Im Band 7/1 standen elementare Integrationsmethoden im Mittelpunkt. Für nicht in dieser Weise lösbare Differentialgleichungen wird man – wie bereits im Abschnitt 1.4. des Bandes 7/1 erwähnt wurde – neben numerischen Verfahren auch an gewisse Reihenentwicklungen der Lösungen denken. Wir studieren hier zunächst die Entwicklung der Lösung in Potenzreihen. Zu Beginn wird die Methode an der Anfangswertaufgabe aus dem Beispiel 2.9 illustriert, also an einer Differentialgleichung, deren Lösung nachweisbar nicht durch elementare Funktionen und Integrationen angebbar ist (Abschnitt 2.5.1.).

Beispiel 5.1: Unter der Annahme, daß die Lösung $y = y(x)$ der Anfangswertaufgabe

$$y' = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad y(0) = 0 \tag{5.1}$$

an der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe (Band 3, Abschnitt 4.)

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu \tag{5.2}$$

entwickelbar ist, sollen die Koeffizienten c_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) berechnet werden. Man setzt hierzu den Ansatz (5.2) in die Differentialgleichung aus (5.1) ein, ordnet danach auf beiden Seiten nach Potenzen von x und führt schließlich einen Koeffizientenvergleich durch. Wir erläutern jetzt die einzelnen Schritte ausführlich. Einsetzen von (5.2) in die Differentialgleichung aus (5.1) ergibt

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\right)' = \frac{1}{4}\left(x^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\right)^2\right). \tag{5.3}$$

Um die linke Seite nach Potenzen von x zu ordnen, brauchen wir nur daran zu erinnern, daß Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert werden dürfen (Band 3, Satz 4.8). Also ergibt sich für die linke Seite von (5.3) der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, \nu x^{\nu-1}. \tag{5.4}$$

In (5.4) könnte man den Summationsbuchstaben ν auch erst von $\nu = 1$ an laufen lassen; das ist klar, denn der konstante Summand c_0 der Potenzreihe aus (5.2) fällt bei der Differentiation weg. Es ist aber auch nicht falsch, mit der Formel aus (5.4) zu arbeiten, denn für $\nu = 0$ ist das allgemeine Glied gleich $0 \cdot c_0 x^{-1}$ und damit gleich null. Der Einwand, daß der Ausdruck $0 \cdot c_0 x^{-1}$ im Falle $x = 0$ nicht erklärt ist, muß zwar anerkannt werden, diese Tatsache ist hier jedoch als „Schönheitsfehler" aufzufassen. Um nicht auf die Schreibweise in (5.4) verzichten zu müssen, wird festgesetzt, daß in diesem Zusammenhang unter $0 \cdot c_0 x^{-1}$ auch dann noch der Wert 0 verstanden werden soll, wenn $x = 0$ ist.

Beim Ordnen der rechten Seite von (5.3) nach Potenzen von x wird man zunächst das Quadrat der dortigen Potenzreihe auswerten. Das macht keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, wenn man die Multiplikation von Potenzreihen (Band 3, Abschnitt 4.4.1.) beherrscht. Es ergibt sich

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)^2 = c_0^2 + (c_0 c_1 + c_1 c_0)\, x + (c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0)\, x^2 + \ldots,$$

das ist zusammengefaßt

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_\mu c_{\nu-\mu} \right) x^\nu. \tag{5.5}$$

Damit kann die rechte Seite von (5.3) nach Potenzen von x geordnet werden. Sie ist in ausführlicher Schreibweise

$$= \tfrac{1}{4} c_0^2 + \tfrac{1}{4} (c_0 c_1 + c_1 c_0)\, x + \tfrac{1}{4} (1 + c_0 c_2 + c_1^2 + c_2 c_0)\, x^2 + \ldots$$

und zusammengefaßt

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_\mu c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} x^\nu, \tag{5.6}$$

wobei in (5.6) das **Kroneckersymbol**

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq l \\ 1 & \text{für} \quad k = l \end{cases} \tag{5.7}$$

benutzt wurde. Wegen (5.4) und (5.6) folgt aus (5.3)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \nu x^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_\mu c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} x^\nu. \tag{5.8}$$

Dem Koeffizientenvergleich in (5.8) steht im Wege, daß links die Potenzen $x^{\nu-1}$, rechts dagegen die Potenzen x^ν auftreten. Es wird deshalb auf der linken Seite von (5.8) der neue Summationsbuchstabe ϱ durch

$$\varrho = \nu - 1, \quad \text{d. h.} \quad \nu = \varrho + 1, \tag{5.9}$$

eingeführt. Läuft ν von 0 bis unendlich, so läuft ϱ von -1 bis unendlich. Also geht (5.8) in

$$\sum_{\varrho=-1}^{\infty} c_{\varrho+1} (\varrho + 1)\, x^\varrho = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_\mu c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} x^\nu \tag{5.10}$$

über. Auf die Bezeichnung des Summationsbuchstabens kommt es nicht an. Wir können also ohne einen Fehler zu begehen auf der linken Seite von (5.10) ϱ durch einen anderen Summationsbuchstaben ersetzen. Im Hinblick auf die Vorbereitung des Koeffizientenvergleichs ersetzen wir ϱ durch ν:

$$\varrho = \nu. \tag{5.11}$$

Es ergibt sich

$$\sum_{\nu=-1}^{\infty} c_{\nu+1} (\nu + 1)\, x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_\mu c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} x^\nu. \tag{5.12}$$

Wer einen Widerspruch zwischen (5.9) und (5.11) zu erkennen glaubt, dem sei gesagt, daß ab Gleichung (5.10) die Gleichung (5.9) ihre „Schuldigkeit" getan hat und „vergessen" werden sollte. Ein solches Vorgehen ist tatsächlich zulässig, denn (5.9) dient lediglich zum Nachweis, daß die linken Seiten von (5.8) und (5.10) einander gleich sind. Davon kann man sich auch direkt überzeugen, indem man beide unendlichen Reihen ausführlich aufschreibt. In analoger Weise dient (5.11) lediglich zum Nachweis dafür, daß die linken Seiten von (5.10) und (5.12) übereinstimmen.

Dem Koeffizientenvergleich in (5.12) steht jetzt nur noch der verschiedene Summationsbeginn (bei $\nu = -1$ bzw. $\nu = 0$) im Wege. Da jedoch das allgemeine Glied der linken Seite von (5.12) im Falle $\nu = -1$ gleich null ist, kann auf der linken Seite von (5.12) die Summation bei $\nu = 0$ beginnen:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu+1}(\nu + 1)\, x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\mu} c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} x^{\nu}. \tag{5.13}$$

Nun ist der Koeffizientenvergleich in (5.13) durchführbar (Band 3, Abschnitt 4.2.2.). Es ergibt sich

$$c_{\nu+1}(\nu + 1) = \frac{1}{4} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\mu} c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und damit

$$c_{\nu+1} = \frac{1}{4(\nu + 1)} \left\{ \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\mu} c_{\nu-\mu} \right) + \delta_{\nu 2} \right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.14}$$

Aus (5.14) kann $c_{\nu+1}$ nicht unmittelbar entnommen werden. Die Berechnung gelingt erst, wenn bereits $c_0, \ldots, c_{\nu}$ bekannt sind. Formeln mit diesem Sachverhalt heißen **Rekursionsformeln**. Einsetzen des Ansatzes (5.2) in die Anfangsbedingung aus (5.1) führt zu

$$c_0 = 0. \tag{5.15}$$

Man schreibt nunmehr (5.14) der Reihe nach für $\nu = 0$, $\nu = 1$, $\nu = 2$, ... auf und benutzt bei der Berechnung die jeweils bereits bekannten c-Werte. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\nu = 0:&\quad c_1 = \frac{1}{4 \cdot 1} c_0^2 = 0 \ \text{[siehe (5.15)]}, \\
\nu = 1:&\quad c_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} (c_0 c_1 + c_1 c_0) = 0, \\
\nu = 2:&\quad c_3 = \frac{1}{4 \cdot 3} \{(c_0 c_2 + c_1 c_1 + c_2 c_0) + 1\} = \frac{1}{12}, \\
\nu = 3:&\quad c_4 = \frac{1}{4 \cdot 4} (c_0 c_3 + c_1 c_2 + c_2 c_1 + c_3 c_0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

* *Aufgabe 5.1:* Man führe die in (5.16) begonnene Rechnung fort und zeige, daß

$$c_5 = 0, \quad c_6 = 0 \quad \text{und} \quad c_7 = \frac{1}{4032} \tag{5.17}$$

gilt.

Einsetzen von (5.15), (5.16) und (5.17) in (5.2) liefert den folgenden Beginn der Potenzreihenentwicklung der Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4032} x^7 + \ldots. \tag{5.18}$$

Um einen Vergleich mit dem Ergebnis des Beispiels 2.9 zu haben, werten wir (5.18) an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4032}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots = \frac{1}{96} + \frac{1}{516096} + \dots$$
$$= 1{,}0416\overline{6} \cdot 10^{-2} + 1{,}9376\ldots \cdot 10^{-6} + \dots . \tag{5.19}$$

Damit ergibt sich für $y(\frac{1}{2})$ der Näherungswert $1{,}04186 \cdot 10^{-2}$.

Bemerkung zu Beispiel 5.1: Bei der Betrachtung von (5.18) wird man intuitiv vermuten, daß die Potenzreihe in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ konvergiert. Aus (5.19) glaubt man entnehmen zu können, daß die Potenzreihe an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ konvergiert, und zwar so stark, daß die nicht berücksichtigten Glieder insgesamt keinen wesentlichen Einfluß auf die mitgeführten Stellen des Näherungswertes haben. Es ist wünschenswert, eine Theorie zu haben, mit deren Hilfe die genannten Vermutungen bewiesen werden können. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf den Satz 5.1., das Beispiel 5.4. und auf die im Band 3 (4.3.2.) gemachten Aussagen über die genäherte Funktionswertberechnung mittels Taylorreihen (Potenzreihen).

Aufgabe 5.2: Unter der Annahme, daß die Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe *

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{5.20}$$

an der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, berechne man die Entwicklung von $y(x)$ bis zum Glied c_6x^6. Weiterhin gebe man mit den Hilfsmitteln aus Band 7/1 die Lösung von (5.20) durch eine elementare Funktion an und entwickele sie an der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe bis zur sechsten Potenz. Man vergleiche die Ergebnisse beider Lösungsmethoden.

Im Beispiel 5.1 mußten wir beim Übergang von (5.3) zu (5.8) eine Potenzreihe quadrieren. Im folgenden Beispiel ist eine kompliziertere Operation durchzuführen, nämlich das Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere (Band 3, 4.4.3.).

Beispiel 5.2 (vgl. Beispiel 3.2): Unter der Annahme, daß die Lösung $\varphi(t)$ der Anfangswertaufgabe

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad l\dot{\varphi}(0) = v_0 \neq 0 \tag{5.21}$$

an der Stelle $t = 0$ in eine Potenzreihe

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu \tag{5.22}$$

entwickelbar ist, sollen die Koeffizienten c_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) berechnet werden. Zunächst liefern die Anfangsbedingungen aus (5.21) für die Koeffizienten c_0 und c_1 aus (5.22) die Werte

$$c_0 = 0, \; c_1 = \frac{v_0}{l} . \tag{5.23}$$

Zur Vorbereitung für das Einsetzen von (5.22) in (5.21) wird man die Funktion $\sin\varphi$ an der Stelle $\varphi = c_0$ – das ist wegen (5.23) hier die Stelle $\varphi = 0$ – in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\sin\varphi = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu + 1)!}\, \varphi^{2\mu+1}. \tag{5.24}$$

Beim Einsetzen von (5.22) in die Differentialgleichung aus (5.21) erhält man unter Berücksichtigung von (5.23) und (5.24) in ausführlicher Schreibweise zunächst

$$
\begin{aligned}
&ml(2c_2 + 6c_3t + 12c_4t^2 + 20c_5t^3 + 30c_6t^4 + 42c_7t^5 + \dots) \\
&= -mg\left\{\left[\frac{v_0}{l}t + c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5 + \dots\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{3!}[\dots]^3 + \frac{1}{5!}[\dots]^5 - + \dots\right\},
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

wobei der durch Punkte angedeutete Inhalt der eckigen Klammern auf der rechten Seite von (5.25) gleich dem Inhalt der dortigen ersten eckigen Klammer ist. Wir wollen nun an diesem Beispiel zeigen, daß es vorteilhaft sein kann, bereits während des Ordnens der rechten Seite von (5.25) nach Potenzen von t mit dem Koeffizientenvergleich zu beginnen und dessen Ergebnisse beim weiteren Ordnen zu benutzen. Es ist klar, daß die dritten und höheren Potenzen der eckigen Klammern auf der rechten Seite von (5.25) keinen Beitrag zur nullten, ersten und zweiten Potenz von t ergeben. Damit kann in (5.25) der Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen t^0, t und t^2 sofort ausgeführt werden. Es ergibt sich

$$
c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{gv_0}{6l^2}, \quad c_4 = 0. \tag{5.26}
$$

Also vereinfachen sich die eckigen Klammern auf der rechten Seite von (5.25) zu

$$
[\dots] = \frac{v_0}{l}t - \frac{gv_0}{6l^2}t^3 + c_5t^5 + \dots \tag{5.27}
$$

und die Entwicklungen von $[\dots]^3$ und $[\dots]^5$ beginnen folgendermaßen:

$$
[\dots]^3 = \frac{v_0^3}{l^3}t^3 - \frac{gv_0^3}{2l^4}t^5 + \dots, \tag{5.28}
$$

$$
[\dots]^5 = \frac{v_0^5}{l^5}t^5 + \dots, \tag{5.29}
$$

während die höheren Potenzen von $[\dots]$ erst von t^7 ab Glieder liefern. Unter Beachtung von (5.27), (5.28) und (5.29) kann somit in (5.25) der Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen t^3, t^4 und t^5 weitergeführt werden. Wir erhalten

$$
c_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{g^2v_0}{l^3} + \frac{gv_0^3}{l^4}\right), \quad c_6 = 0, \quad c_7 = -\frac{1}{5040}\left(\frac{g^3v_0}{l^4} + 11\frac{g^2v_0^3}{l^5} + \frac{gv_0^5}{l^6}\right). \tag{5.30}
$$

Also beginnt die Potenzreihenentwicklung (5.22) folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{v_0}{l}t - \frac{gv_0}{6l^2}t^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{g^2v_0}{l^3} + \frac{gv_0^3}{l^4}\right)t^5 \\
&\quad - \frac{1}{5040}\left(\frac{g^3v_0}{l^4} + 11\frac{g^2v_0^3}{l^5} + \frac{gv_0^5}{l^6}\right)t^7 + \dots .
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

* *Aufgabe 5.3:* Man löse durch elementare Methoden die zu (5.21) gehörige linearisierte Anfangswertaufgabe

$$
ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad l\dot{\varphi}(0) = v_0 \tag{5.32}
$$

und entwickle das Ergebnis an der Stelle $t = 0$ in eine Potenzreihe. Weiterhin ist die Potenzreihenentwicklung

$$
\sum_{v=0}^{\infty} d_v t^v \tag{5.33}
$$

der Differenz zwischen der Lösung (5.31) von (5.21) und der Lösung von (5.32) zu bilden, und es sind die Koeffizienten d_0 bis d_7 zu berechnen.

In den Beispielen 5.1 und 5.2 wurden die Lösungen $y(x)$ bzw. $\varphi(t)$ an den Stellen $x = x_0 = 0$ bzw. $t = t_0 = 0$ entwickelt. Im nächsten Beispiel wird die Stelle $x = x_0 = 1$ genommen. Das Beispiel soll weiterhin zeigen, daß es nicht genügt, sich lediglich mit dem Formalismus der Koeffizientenberechnung zu beschäftigen; man muß darüber hinaus gewisse Sätze zur Kenntnis nehmen, die ab 5.1.2. behandelt werden.

Beispiel 5.3: Unter der Annahme, daß die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$(x^2 - 2x + 1)\,y' = y - x + 1, \quad y(1) = 0 \tag{5.34}$$

an der Stelle $x = 1$ in eine Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - 1)^\nu \tag{5.35}$$

entwickelbar ist, sollen die Koeffizienten c_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) berechnet werden. Die Anfangsbedingung aus (5.34) führt mit (5.35) zu

$$c_0 = 0. \tag{5.36}$$

Unter Berücksichtigung von (5.36) wird (5.35) in die Differentialgleichung aus (5.34) eingesetzt:

$$\begin{aligned}&(x^2 - 2x + 1)\,[c_1 + 2c_2(x - 1) + 3c_3(x - 1)^2 + \ldots]\\ &= [c_1(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + c_3(x - 1)^3 + \ldots] - x + 1.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Zur Vorbereitung des Ordnens beider Seiten von (5.37) nach Potenzen von $x - 1$ werden zunächst die beiden Ausdrücke $x^2 - 2x + 1$ und $-x + 1$ aus (5.34) an der Stelle $x = 1$ in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 &= (x - 1)^2,\\ -\quad x + 1 &= -(x - 1).\end{aligned} \tag{5.38}$$

Daß in (5.38) die Entwicklungen abbrechen, ist nur durch die Einfachheit der zu entwickelnden Ausdrücke bedingt. Natürlich sieht man (5.38) auch direkt ein; aber in komplizierteren Fällen wird man tatsächlich an die genannte Taylorentwicklung der Ausdrücke in der Differentialgleichung denken müssen. Nunmehr wird (5.38) in (5.37) eingesetzt und beiderseits nach Potenzen von $x - 1$ geordnet:

$$\begin{aligned}&c_1(x - 1)^2 + 2c_2(x - 1)^3 + 3c_3(x - 1)^4 + \ldots\\ &= (c_1 - 1)(x - 1) + c_2(x - 1)^2 + c_3(x - 1)^3 + c_4(x - 1)^4 + \ldots\end{aligned} \tag{5.39}$$

In (5.39) wird bezüglich der Potenzen von $x - 1$ der Koeffizientenvergleich durchgeführt. Man erhält

$$0 = c_1 - 1, \quad c_1 = c_2, \quad 2c_2 = c_3.$$

Ja, es ist hier sogar möglich, allgemein

$$\nu c_\nu = c_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

anzugeben. Folglich ergibt sich für die unbekannten Koeffizienten c_ν:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 3!, \quad c_5 = 4!$$

und allgemein

$$c_\nu = (\nu - 1)! \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5.40}$$

Einsetzen von (5.36) und (5.40) in den Ansatz (5.35) liefert das Ergebnis

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu - 1)!\,(x - 1)^\nu. \tag{5.41}$$

Nun ist aber die Reihe (5.41) für alle x mit $x \neq 1$ *divergent*, d. h., der Konvergenzradius der erhaltenen Potenzreihe ist gleich null. Dies ist beispielsweise mittels des Quotientenkriteriums für das Konvergenzverhalten unendlicher Reihen sofort nachprüfbar. Also stellt sich die Annahme, daß $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ in eine Potenzreihe entwickelbar sei, als *falsch* heraus. Das Ergebnis (5.41) ist *unbrauchbar*.

* *Aufgabe 5.4:* Man führe das Beispiel 5.3 durch, indem man die Anfangsbedingung $y(1) = 0$ jetzt in $y(1) = 1$ abändert. Man zeige, daß nunmehr bereits der Rechnungsgang zu einem Widerspruch führt.

Nach dem Beispiel 5.3 erhebt sich die Frage, wie man im allgemeinen rechtzeitig erkennen oder vermeiden kann, daß ein Potenzreihenansatz unbrauchbar wird. Hierzu müßte man der Anfangswertaufgabe selbst schon entnehmen können, ob eine Potenzreihenentwicklung der Lösung existiert. Hiermit beschäftigt sich der nächste Abschnitt.

5.1.2. Existenz- und Unitätssätze

Wir wollen Sätze über die Möglichkeit von Potenzreihenansätzen beim Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen formulieren. Es gilt

S. 5.1 **Satz 5.1:** *Die Anfangswertaufgabe für die Funktion $y = y(x)$, bestehend aus der expliziten Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5.42}$$

und den n Anfangsbedingungen

$$(y^{(\nu)}(x))_{x=x_0} = y_0^{(\nu)} \quad (y_0^{(\nu)} \text{ gegebene Zahlen, } \nu = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5.43}$$

hat in einer x-Umgebung von $x = x_0$ genau eine Lösung $y = y(x)$, und diese ist an der Stelle $x = x_0$ in eine Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu \tag{5.44}$$

(Konvergenzradius größer als null) entwickelbar, falls die rechte Seite f von (5.42) bezüglich x an der Stelle x_0, bezüglich y an der Stelle $y_0^{(0)}$, bezüglich y′ an der Stelle $y_0^{(1)}$, …, bezüglich $y^{(n-1)}$ an der Stelle $y_0^{(n-1)}$ jeweils in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

Beispiel 5.4: Jede Anfangswertaufgabe

$$y' = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.45}$$

hat genau eine Lösung; sie ist an der Stelle $x = x_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar, denn die Funktion

$$\tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

ist an der Stelle $x = x_0$ und an der Stelle $y = y_0$ jeweils in eine Potenzreihe entwickelbar. Damit ist gesichert, daß die Lösung (5.18) der Anfangswertaufgabe (5.1) aus Beispiel 5.1 in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ konvergiert.

Beispiel 5.5: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$(x^2 - 2x + 1)\,y' = y - x + 1, \quad y(x_0) = y_0. \tag{5.46}$$

Um den Satz 5.1 anwenden zu können, lösen wir die Differentialgleichung aus (5.46) nach y' auf:

$$y' = \frac{y - x + 1}{x^2 - 2x + 1}. \tag{5.47}$$

Die rechte Seite von (5.47) ist für alle $x = x_0$ und $y = y_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar mit Ausnahme der Nullstelle des Nenners, d. h. mit Ausnahme von $x_0 = 1$. Also ist jede Lösung der Anfangswertaufgabe an der Stelle $x = x_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar, falls $x_0 \neq 1$ ist. Damit ist verständlich, daß der Potenzreihenansatz im Beispiel 5.3 versagte.

Aufgabe 5.5 (vgl. Aufgabe 5.2): Gegeben sei die Anfangswertaufgabe *

$$(1 - x^2)\,y'' - xy' = 2, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{5.48}$$

Für welche Wertetripel (x_0, y_0, y'_0) sind die Voraussetzungen vom Satz 5.1 verletzt?

Es entsteht naturgemäß die Frage, ob man bereits der Anfangswertaufgabe (5.42), (5.43) den Konvergenzradius des Lösungsansatzes (5.44) entnehmen kann. Eine vollständige Antwort liefert die Theorie im allgemeinen Fall nicht. Man kann allerdings angeben, wie groß der Konvergenzradius mindestens ist. Wenn die vorliegende Differentialgleichung nichtlinear ist, so ist die gelieferte Formel verhältnismäßig kompliziert; wir geben sie hier nicht an.

Zur Illustration dieses Sachverhaltes betrachten wir die Anfangswertaufgabe

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0. \tag{5.49}$$

Obwohl die rechte Seite der Differentialgleichung aus (5.49) für alle Stellen $x = x_0$ und $y = y_0$ jeweils in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so ist jedoch die Lösungsreihe $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ keinesfalls überall konvergent. Die Lösung von (5.49) ist nämlich $y = \tan x$, und der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von $\tan x$ an der Stelle $x = 0$ ist gleich $\pi/2$.

Ist die Differentialgleichung linear, so sind die Verhältnisse wesentlich übersichtlicher. Wir formulieren den hierher gehörigen Satz nur im Falle von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denn hiermit ist einerseits die Methode für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung bereits gut erkennbar, andererseits genügen die in den Anwendungen wichtigen Funktionen der mathematischen Physik gewöhnlichen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung.

S. 5.2 **Satz 5.2:** *Wenn in der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für* $y = y(x)$

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = g(x) \tag{5.50}$$

die Quotienten

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)}, \quad \frac{g(x)}{p_0(x)} \tag{5.51}$$

an der Stelle $x = x_0$ *alle in Potenzreihen entwickelbar sind, so kann die allgemeine Lösung von* (5.50) *an der Stelle* $x = x_0$ *in eine Potenzreihe*

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^\nu \tag{5.52}$$

entwickelt werden. Der Konvergenzradius der Lösungspotenzreihe (5.52) *ist mindestens gleich dem kleinsten Konvergenzradius der Entwicklungen aus* (5.51).

Beispiel 5.6: Gegeben sei die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 + x^2)\, y'' + \frac{1}{x - 2}\, y' + y = 0. \tag{5.53}$$

An der Stelle $x = 0$ ist die allgemeine Lösung von (5.53) in eine Potenzreihe entwickelbar. Der Konvergenzradius ist mindestens gleich 1, denn die Entwicklungen der Funktionen

$$\frac{1}{(x - 2)(1 + x^2)}, \quad \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{0}{1 + x^2} \tag{5.54}$$

an der Stelle $x = 0$ haben die Konvergenzradien 1, 1 und ∞.

Bemerkung zu Beispiel 5.6: Man kann beim Vorliegen von rationalen Funktionen – solche liegen in (5.54) vor – den Konvergenzradius der Entwicklung direkt aus den Formeln ablesen, ohne erst die Entwicklung praktisch durchzuführen und Konvergenzkriterien zu benutzen. Sind nämlich in der Darstellung der rationalen Funktion $R(x)$ durch $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ die Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ teilerfremd, d. h. haben sie keine gemeinsamen reellen oder komplexen Nullstellen, so ist der Konvergenzradius der Entwicklung von $R(x)$ an der Stelle $x = x_0$ gleich dem Abstand zwischen x_0 und der x_0 nächstgelegenen Nullstelle des Nenners $Q(x)$. Wesentlich ist hierbei jedoch, daß man auch alle nichtreellen Lösungen von $Q(x) = 0$ in Betracht zieht. So sind in (5.54) bei der rationalen Funktion

$$\frac{1}{(x - 2)(1 + x^2)}$$

die Nullstellen des Nenners gleich 2, i und $-$i. Also ist der Abstand zwischen $x = 0$ und der $x = 0$ nächstgelegenen Nullstelle des Nenners – es ist dies hier i (oder auch $-$i) – gleich 1. Der Beweis der hier mitgeteilten Bemerkung kann mit Hilfsmitteln der Funktionentheorie (Band 9) geführt werden.

Linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Koeffizienten Polynome sind, genügen wichtige Funktionen der mathematischen Physik (Band 12). Hier besteht somit die Möglichkeit, einen Zugang zu ihnen mittels der Theorie der Differentialgleichungen herzustellen. Wir zeigen dies am

Beispiel 5.7: Für die **Legendresche Differentialgleichung**

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,y = 0 \tag{5.55}$$

sind bei Wahl von $x_0 = 0$ die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt. Da die Entwicklungen der Funktionen

$$\frac{2x}{x^2-1}, \quad -\frac{n(n+1)}{x^2-1}, \quad \frac{0}{x^2-1} \tag{5.56}$$

an der Stelle $x = 0$ die Konvergenzradien 1, 1 und ∞ haben, ist die Konvergenz der Lösungspotenzreihe

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu \tag{5.57}$$

für alle x mit $|x| < 1$ gesichert. Einsetzen von (5.57) in (5.55) führt zunächst zu

$$(x^2 - 1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\,c_\nu x^{\nu-2} + 2x \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu c_\nu x^{\nu-1} - n(n+1) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu = 0. \tag{5.58}$$

Allgemein gesprochen müssen nunmehr in (5.58) die Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung (5.55) an der Stelle $x = x_0$ (im vorliegenden Fall ist $x_0 = 0$) in Potenzreihen (Taylorreihen) entwickelt werden. Das ist im jetzigen Beispiel trivial, denn die genannten Koeffizienten $x^2 - 1$, $2x$, $-n(n+1)$ stimmen bereits mit den herzustellenden Taylorentwicklungen überein. Als Vorbereitung zum Koeffizientenvergleich wird in (5.58) nach Potenzen von x geordnet. Die Rechnung ergibt zunächst

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\,c_\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\,c_\nu x^{\nu-2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2\nu c_\nu x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} n(n+1)\,c_\nu x^\nu = 0. \tag{5.59}$$

Die zweite Summe aus (5.59) wird umgeformt. Zunächst wird durch $\varrho = \nu - 2$, d. h. $\nu = \varrho + 2$, der neue Summationsbuchstabe ϱ eingeführt und anschließend ϱ durch ν ersetzt:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)\,c_\nu x^{\nu-2} &= \sum_{\varrho=-2}^{\infty} (\varrho+2)(\varrho+1)\,c_{\varrho+2} x^\varrho \\ &= \sum_{\nu=-2}^{\infty} (\nu+2)(\nu+1) c_{\nu+2} x^\nu. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Beachtet man, daß in der letzten Summe aus (5.60) im Falle $\nu = -2$ und $\nu = -1$ das allgemeine Glied jeweils den Wert 0 ergibt und somit dort die Summation erst bei $\nu = 0$ zu beginnen braucht, so ist durch Einsetzen von (5.60) in (5.59) ein Ordnen nach Potenzen von x nunmehr möglich. Es ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [\nu(\nu - 1) c_\nu - (\nu + 2)(\nu + 1) c_{\nu+2} + 2\nu c_\nu - n(n + 1) c_\nu] x^\nu = 0. \tag{5.61}$$

In (5.61) führt der Koeffizientenvergleich zur Rekursionsformel

$$c_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu + 1) - n(n + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} c_\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.62}$$

Zur bequemen Auswertung von (5.62) wird der Zähler der rechten Seite umgeformt. Hierzu fassen wir ihn bezüglich n als Polynom zweiten Grades auf. Seine beiden Nullstellen liegen bei $n = \nu$ und $n = -\nu - 1$. Aus der bekannten Tatsache, daß man mittels der Nullstellen von Polynomen eine Produktdarstellung der Polynome herstellen kann, folgt somit aus (5.62)

$$c_{\nu+2} = -\frac{(n - \nu)(n + \nu + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} c_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.63}$$

Wir setzen zunächst in (5.63) der Reihe nach $\nu = 0$, $\nu = 2$, …, $\nu = 2\mu$ und bekommen

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\tfrac{1}{2} n(n + 1) c_0,\\
c_4 &= -\frac{1}{3 \cdot 4}(n - 2)(n + 3) c_2 = \frac{1}{4!}(n - 2) n(n + 1)(n + 3) c_0,\\
c_6 &= -\frac{1}{5 \cdot 6}(n - 4)(n + 5) c_4\\
&= -\frac{1}{6!}(n - 4)(n - 2) n(n + 1)(n + 3)(n + 5) c_0,\\
&\;\vdots\\
c_{2\mu} &= (-1)^\mu \frac{1}{(2\mu)!}(n - [2\mu - 2])(n - [2\mu - 4]) \cdot \ldots\\
&\quad \cdot (n - 2) n(n + 1)(n + 3) \ldots (n + [2\mu - 1]) c_0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots).
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Setzen wir andererseits in (5.63) der Reihe nach $\nu = 1$, $\nu = 3$, …, $\nu = 2\mu + 1$, so folgt schließlich

$$\begin{aligned}
c_{2\mu+1} &= (-1)^\mu \frac{1}{(2\mu + 1)!}(n - [2\mu - 1])(n - [2\mu - 3]) \cdot \ldots\\
&\quad \cdot (n - 1)(n + 2)(n + 4) \ldots (n + 2\mu) c_1 \quad (\mu = 1, 2, \ldots).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Gemäß Satz 5.2 ergibt sich aus (5.57), (5.64) und (5.65) die allgemeine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung (5.55) zu

$$y(x) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu}x^{2\mu} + c_1x + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu+1}x^{2\mu+1}, \quad |x| < 1$$

$$[c_{2\mu} \text{ und } c_{2\mu+1} \text{ aus (5.64) und (5.65)}]. \tag{5.66}$$

Die Lösungen (5.66) der linearen homogenen Differentialgleichung (5.55) bilden einen zweidimensionalen linearen Raum (Satz 3.7), und eine Basis (Fundamentalsystem) wird durch die beiden Funktionen

$$c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu}x^{2\mu} \quad [c_{2\mu} \text{ aus (5.64)}], \quad |x| < 1, \tag{5.67}$$

und

$$c_1x + \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu+1}x^{2\mu+1} \quad [c_{2\mu+1} \text{ aus (5.65)}], \quad |x| < 1, \tag{5.68}$$

gebildet, falls man sich für c_0 und c_1 jeweils eine von null verschiedene Zahl eingesetzt denkt.

Bemerkung 5.1: Der Lösungsgang ist sinnvoll, wenn für n eine beliebig reelle (oder auch komplexe) Zahl genommen wird. In den Anwendungen ist aber meist $n = 0, 1, 2, \ldots$

Bemerkung 5.2: Ist $n = 2m$ mit $m = 0, 1, 2, \ldots$, so reduziert sich die Potenzreihe in (5.67) auf ein Polynom $P_n(x)$ vom $n = 2m$-ten Grade. Wählt man nunmehr c_0 derart, daß dieses Polynom an der Stelle $x = 1$ den Wert 1 annimmt, d. h.

$$P_n(1) = P_{2m}(1) = 1 \tag{5.69}$$

gilt, so ergibt sich das **Legendresche Polynom vom** $n = 2m$-ten **Grad (Legendresche Funktion erster Art mit dem Index** $n = 2m$)

$$P_n(x) = P_{2m}(x) = c_0 + \sum_{\mu=1}^{m} c_{2\mu}x^{2\mu} \quad [c_{2\mu} \text{ mit } n = 2m \text{ aus (5.64)}], \tag{5.70}$$

wobei für c_0 im Falle $m = 0$ der Wert 1 und im Falle $m > 0$

$$c_0 = (-1)^m \frac{1}{2^m m!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1) \tag{5.71}$$

einzusetzen ist.

Bemerkung 5.3: Ist n eine positive ungerade Zahl, also $n = 2m + 1$ mit $m = 0, 1, 2, \ldots$, so reduziert sich die Potenzreihe in (5.68) auf ein Polynom $P_n(x)$ vom $n = (2m + 1)$-ten Grade. Wählt man dann c_1 derart, daß

$$P_n(1) = P_{2m+1}(1) = 1 \tag{5.72}$$

gilt, so ergibt sich das **Legendresche Polynom vom** $n = (2m + 1)$-ten **Grad (Legendresche Funktion erster Art mit dem Index** $n = 2m + 1$)

$$P_n(x) = P_{2m+1}(x) = c_1x + \sum_{\mu=1}^{m} c_{2\mu+1}x^{2\mu+1} \; [c_{2\mu+1} \text{ mit } n = 2m + 1 \text{ aus (5.65)}], \tag{5.73}$$

wobei für c_1 der Wert

$$c_1 = (-1)^m \frac{1}{2^m m!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m+1) \tag{5.74}$$

einzusetzen ist.

* *Aufgabe 5.6:* Man beweise die **Formel von Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{5.75}$$

in den Fällen $n = 0, 1, 2, 3, 4$ mittels der Formeln (5.70), (5.71), (5.73), (5.74) und durch direkte Berechnung der rechten Seite von (5.75).

* *Aufgabe 5.7:* Es ist zu zeigen: Das Basiselement (5.68) ist im Falle $n = 0$ eine elementare Funktion. Setzt man für c_1 den Wert 1 ein, so ergibt sich

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1) \tag{5.76}$$

(Legendresche Funktion zweiter Art mit dem Index null für $|x| < 1$).

* *Aufgabe 5.8:* Es ist zu zeigen: Das Basiselement (5.67) ist im Falle $n = 1$ eine elementare Funktion. Setzt man für c_0 den Wert -1 ein, so ergibt sich

$$Q_1(x) = xQ_0(x) - 1 \quad (-1 < x < 1) \tag{5.77}$$

(Legendresche Funktion zweiter Art mit dem Index eins für $|x| < 1$).

Bemerkung 5.4: In Fortführung der Bemerkungen 5.2 und 5.3 sowie der Aufgaben 5.7 und 5.8 läßt sich mit (5.67) und (5.68) zeigen:

S. 5.3 **Satz 5.3:** *Im Falle $n = 0, 1, 2, \ldots$ kann eine Basis des Lösungsraumes der Legendreschen Differentialgleichung (5.55) durch das Legendresche Polynom $P_n(x)$ und die Legendresche Funktion zweiter Art $Q_n(x)$ angegeben werden. $Q_n(x)$ ist eine elementare Funktion. Speziell gilt*

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_2(x)\,Q_0(x) - \tfrac{3}{2}\,x, \\ Q_3(x) &= P_3(x)\,Q_0(x) - \tfrac{5}{2}\,x^2 + \tfrac{2}{3}, \\ Q_4(x) &= P_4(x)\,Q_0(x) - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \tag{5.78}$$

* *Aufgabe 5.9:* Mit der Abkürzung $\lambda^4 = \dfrac{(1 - \nu^2)\,F^2}{GJ_t EJ}$ $(GJ_t EJ = \text{const})$ entwickele man die Lösung der Differentialgleichung (V.1) des Vorwortes in eine Potenzreihe $\vartheta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$, die der Bedingung $\vartheta'(0) = 0$ aus (V.5) genügen soll. Wie groß ist der Konvergenzradius der erhaltenen Reihe mindestens? Was ergibt sich für c_ν mit $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 16$?

5.2. Verallgemeinerte Potenzreihenansätze

5.2.1. Stellen der Bestimmtheit

Die Theorie aus 5.1.2. muß erweitert werden. Oft interessieren nämlich gerade die Lösungen in der Umgebung solcher Stellen x_0, für die die Voraussetzungen aus 5.1.2. nicht erfüllt sind. Es wäre in einem solchen Fall nicht rationell, in der Nachbarschaft von x_0 eine Stelle x_1 zu wählen, für die man die Theorie aus 5.1.2. anwenden könnte. Der Konvergenzbereich der Entwicklung der Lösung an der Stelle x_1 wird im allgemeinen bereits an x_0 anstoßen, also erfaßt man nur einen Teil der interessierenden Umgebung von x_0. Als Beispiel seien die Differentialgleichung (V.3) des Vorwortes bezüglich der Entwicklungsstelle $r = 0$ und die Legendresche Differentialgleichung (5.55) bezüglich $x = 1$ und $x = -1$ genannt. Weitere Beispiele hierzu enthalten die Bände 8 und 12 bei der Behandlung von Zylinder- und Kugelproblemen.

Wir behandeln nur den homogenen Fall. Das ist keine wesentliche Einschränkung, da der inhomogene Fall mittels der Variation der Konstanten (3.3.8.) auf den homogenen Fall zurückgeführt werden kann. Ausgangspunkt ist die

Definition 5.1: *Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $y = y(x)$:* **D. 5.1.**

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0. \tag{5.79}$$

Die Stelle $x = x_0$ heißt **Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung** (5.79), *falls in der Umgebung von x_0 (x_0 selbst ausgenommen) folgende Entwicklungen gelten:*

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \sum_{\nu=-2}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu. \tag{5.80}$$

Ist in (5.80) $a_{-1} \neq 0$, *so sagt man,* $\dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}$ *hat an der Stelle x_0 einen* **Pol erster Ordnung;** *steht jedoch nicht fest, ob a_{-1} von null verschieden ist, so spricht man von einem Pol höchstens erster Ordnung. Analog sagt man, die Funktion* $\dfrac{p_2(x)}{p_0(x)}$ *aus* (5.80) *habe an der Stelle $x = x_0$ einen* **Pol zweiter Ordnung** *oder einen Pol höchstens zweiter Ordnung, je nachdem, ob $b_{-2} \neq 0$ feststeht oder nicht.*

Im folgenden Beispiel wird vorgeführt, wie die Entwicklungen (5.80) in praktischen Fällen hergestellt werden.

Beispiel 5.8: Die Legendresche Differentialgleichung (5.55) werde in der Umgebung von $x = x_0 = 1$ untersucht. Hierzu sind gemäß (5.80) die Entwicklung von

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{2x}{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = -\frac{n(n+1)}{x^2 - 1} \tag{5.81}$$

mit $x_0 = 1$ herzustellen. Zunächst werden die Nenner in (5.81) an der Stelle $x_0 = 1$ in Potenzreihen (Taylorreihen) entwickelt:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{2x}{2(x-1) + (x-1)^2}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \frac{-n(n+1)}{2(x-1) + (x-1)^2}. \tag{5.82}$$

Im nächsten Schritt muß in den Nennern aus (5.82) eine möglichst hohe Potenz der Größe $x - x_0$, also hier von $x - 1$, ausgeklammert werden; und zwar soll der noch übrigbleibende Faktor des Nenners eine Potenzreihe in $x - x_0$ sein – hier im Beispiel ist es speziell ein Polynom – deren absolutes Glied von null verschieden ist. Gemäß dieser Vorschrift muß also in den Nennern von (5.82) die erste Potenz von $x - 1$ ausgeklammert werden:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{1}{x-1} \frac{2x}{2+(x-1)}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \frac{1}{x-1} \frac{-n(n+1)}{2+(x-1)}. \tag{5.83}$$

In (5.83) sind auf den rechten Seiten die zweiten Brüche an der Stelle $x_0 = 1$ jeweils in Potenzreihen entwickelbar. Man kann die praktische Herstellung der Entwicklung mit Hilfe der Taylorformel vornehmen oder auch sich der Methode der Potenzreihendivision bedienen, falls man vorher noch die Zähler an der Stelle $x_0 = 1$ entwickelt. Insgesamt ergibt sich

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{1}{x-1}\left(1 + \frac{1}{2}(x-1) + \ldots\right),$$
$$\frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \frac{1}{x-1}\left(-\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1)(x-1) + \ldots\right), \tag{5.84}$$

wobei gemäß der Bemerkung zu Beispiel 5.6 die Konvergenz der Reihe in (5.84) für alle x mit $0 < |x-1| < 2$ gesichert ist.

Also sind die Brüche (5.82) an der Stelle $x_0 = 1$ tatsächlich in der Gestalt (5.80) entwickelbar. Es ist somit $x_0 = 1$ für die Legendresche Differentialgleichung (5.55) eine Stelle der Bestimmtheit.

5.2.2. Lösungsansatz für ein Basiselement

S. 5.4 **Satz 5.4:** *Ist $x = x_0$ für die Differentialgleichung* (5.79) *eine Stelle der Bestimmtheit, so kann mindestens ein Basiselement des zweidimensionalen Lösungsraumes in der Gestalt*

$$y(x) = |x - x_0|^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-x_0)^\nu, \quad c_0 \neq 0, \tag{5.85}$$

angegeben werden. Der Konvergenzradius der unendlichen Reihe aus (5.85) *ist mindestens gleich dem kleinsten Konvergenzradius der Entwicklungen der beiden Funktionen*

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \tag{5.86}$$

an der Stelle $x = x_0$.

Zusatz 1 zu Satz 5.4: Gemäß (5.80) sind die Entwicklungen von (5.86) – abgesehen von höchstens zwei Summanden – Potenzreihen; der Begriff des Konvergenzradius ist also sinnvoll.

Zusatz 2 zu Satz 5.4: In (5.85) muß man damit rechnen, daß α auch nichtreelle Werte annimmt. Zur Berechnung von $|x - x_0|^\alpha$ verweisen wir auf die Definition 3.7. Ist r der Konvergenzradius der unendlichen Reihe aus (5.85), so ist die Lösung $y(x)$ aus (5.85) für alle x mit $0 < |x - x_0| < r$ (die Stelle $x = x_0$ selbst also ausgenommen) gültig.

Zusatz 3 zu Satz 5.4: Zur Bestimmung von c_ν und α aus (5.85) genügt es, sich auf den Fall $x > x_0$ zu beschränken und damit bei der Herleitung

$$|x - x_0|^\alpha = (x - x_0)^\alpha \tag{5.87}$$

zu setzen. Wir können somit für die Bestimmung von c_ν und α den Ansatz (5.85) in der Gestalt

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - x_0)^{\nu+\alpha}, \quad c_0 \neq 0, \tag{5.88}$$

angeben. Man entwickelt die Koeffizienten $p_0(x)$, $p_1(x)$ und $p_2(x)$ der Differentialgleichung (5.79) an der Stelle $x = x_0$, setzt danach (5.88) in (5.79) ein, kürzt durch $(x - x_0)^\alpha$, ordnet nach Potenzen von $x - x_0$ und führt anschließend einen Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen von $x - x_0$ durch. Es zeigt sich, daß wegen $c_0 \neq 0$ [siehe (5.85)] der Exponent α einer quadratischen Gleichung genügen muß. Ihre Lösungen α_1 und α_2 seien so bezeichnet, daß für ihre Realteile $\operatorname{Re}\alpha_1$ und $\operatorname{Re}\alpha_2$ die Beziehung

$$\operatorname{Re}\alpha_1 \geqq \operatorname{Re}\alpha_2 \tag{5.89}$$

gilt. Hiermit formulieren wir den

Zusatz 4 zu Satz 5.4: In (5.85) ist der Exponent α gleich der Lösung α_1 der quadratischen Gleichung für α zu setzen.

Beispiel 5.9: Gemäß Satz 5.4 soll für die Legendresche Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - n(n + 1)\, y = 0 \tag{5.90}$$

an der Stelle der Bestimmtheit $x_0 = 1$ (siehe Beispiel 5.8) ein Basiselement des zweidimensionalen Lösungsraumes bestimmt werden. Nach der Entwicklung der Koeffizienten an der Stelle $x_0 = 1$, d. h. nach Herstellung von

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 2(x - 1) + (x - 1)^2,\ 2x = 2 + 2(x - 1),\\ -n(n + 1) = -n(n + 1) \end{aligned} \tag{5.91}$$

wird der Ansatz (siehe 5.88)

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - 1)^{\nu+\alpha},\ c_0 \neq 0, \tag{5.92}$$

in (5.90) eingesetzt und anschließend die Gleichung durch $(x - 1)^\alpha$ dividiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\infty} 2c_\nu(\nu + \alpha)(\nu + \alpha - 1)(x - 1)^{\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\nu + \alpha)(\nu + \alpha - 1)(x - 1)^\nu \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2c_\nu(\nu + \alpha)(x - 1)^{\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2c_\nu(\nu + \alpha)(x - 1)^\nu \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{\infty} -n(n + 1)c_\nu(x - 1)^\nu = 0. \end{aligned} \tag{5.93}$$

In der ersten und dritten Summe von (5.93) wird mit $\varrho = \nu - 1$, d. h. $\nu = \varrho + 1$, der neue Summationsbuchstabe ϱ eingeführt und danach ϱ durch ν ersetzt:

$$\sum_{\nu=-1}^{\infty} 2c_{\nu+1}(\nu + 1 + \alpha)(\nu + \alpha)(x - 1)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\nu + \alpha)(\nu + \alpha - 1)(x - 1)^\nu$$
$$+ \sum_{\nu=-1}^{\infty} 2c_{\nu+1}(\nu + 1 + \alpha)(x - 1)^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2c_\nu(\nu + \alpha)(x - 1)^\nu$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} -n(n + 1)\, c_\nu(x - 1)^\nu = 0. \tag{5.94}$$

Der Vergleich der Koeffizienten der Potenzen von $x - 1$ in (5.94) ergibt im Falle $\nu = -1$

$$2c_0\alpha(-1 + \alpha) + 2c_0\alpha = 0$$

und damit wegen $c_0 \neq 0$ [siehe (5.92)]

$$\alpha^2 = 0. \tag{5.95}$$

Die Gleichung (5.95) ist für unser Beispiel die im Zusatz 3 zu Satz 5.4 genannte quadratische Gleichung. Also gilt hier

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0. \tag{5.96}$$

Gemäß dem Zusatz 4 zu Satz 5.4 ist nunmehr in (5.92) für α der Wert $\alpha_1 = 0$ einzusetzen. Damit führt in (5.94) der Koeffizientenvergleich in den Fällen $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ schließlich zur Rekursionsformel

$$c_{\nu+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\nu + 1)^2}[\nu(\nu + 1) - n(n + 1)]\, c_\nu. \tag{5.97}$$

Unter Hinweis auf den Übergang von (5.62) zu (5.63) ist einzusehen, daß für (5.97)

$$c_{\nu+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\nu + 1)^2}(n - \nu)(n + \nu + 1)\, c_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.98}$$

geschrieben werden kann. Aus (5.98) ergibt sich für $c_1, c_2, \ldots$

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\, n(n + 1)\, c_0,$$
$$c_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}(n - 1)(n + 2)\, c_1 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}(n - 1)\, n(n + 1)(n + 2)\, c_0,$$
$$c_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{3^2}(n - 2)(n + 3)\, c_2$$
$$= \frac{1}{2^3}\frac{1}{(3!)^2}(n - 2)(n - 1)\, n(n + 1)(n + 2)(n + 3)\, c_0,$$
$$\vdots$$
$$c_\nu = \frac{1}{2^\nu}\frac{1}{(\nu!)^2}(n - \nu + 1)(n - \nu + 2)\ldots(n - 1)\, n(n + 1)\ldots(n + \nu - 1)$$
$$\cdot (n + \nu)\, c_0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{5.99}$$

Schließlich ist (5.99) und $\alpha = \alpha_1 = 0$ im Falle $x_0 = 1$ in (5.85) einzusetzen. Da nur ein *Basiselement* des zweidimensionalen Lösungsraumes gefordert wurde, ist $c_0 \neq 0$ noch festzulegen, man sagt, zu *normieren*, z. B.

$$c_0 = 1. \tag{5.100}$$

Also lautet das gesuchte Basiselement des Lösungsraumes

$$y(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{(\nu!)^2} (n - \nu + 1)(n - \nu + 2) \ldots n(n + 1) \ldots (n + \nu) \cdot (x - 1)^\nu. \tag{5.101}$$

Aufgabe 5.10: Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe aus (5.101) mindestens? *

Aufgabe 5.11: Im Fall $n = 0, 1, 2, \ldots$ stimmt (5.101) mit den Legendreschen Polynomen überein (siehe Bemerkungen 5.2 und 5.3 sowie Aufgabe 5.7). Man weise dies in den Fällen $n = 0, 1, 2, 3$ nach. *

Aufgabe 5.12: Man beginne gemäß Satz 5.4 ein Basiselement im allgemeinen Fall (5.79), (5.80) herzustellen und zeige, daß die quadratische Gleichung für α die folgende Gestalt hat *

$$\alpha^2 + (a_{-1} - 1)\,\alpha + b_{-2} = 0. \tag{5.102}$$

Aufgabe 5.13: Für die Differentialgleichung (V.3) des Vorwortes bestimme man ein Basiselement $R_1(r)$ des Lösungsraumes durch Entwickeln an der Stelle $r = 0$. Es genügt für die Koeffizienten c_ν der Entwicklung die Angabe einer Rekursionsformel. *

5.2.3. Herstellung eines zweiten Basiselementes

Zur Herstellung eines zweiten (vom ersten linear unabhängigen) Basiselementes ist eine Fallunterscheidung erforderlich. Es handelt sich um die Differenz der Lösungen der quadratischen Gleichung für α (siehe Zusatz 3 zu Satz 5.4):

1. Fall: $\alpha_1 - \alpha_2$ ist *nicht ganzzahlig*, (5.103)

2. Fall: $\alpha_1 - \alpha_2$ ist *ganzzahlig*. (5.104)

Davon ist der Fall (5.103) einfacher zu behandeln als (5.104). Das mag verwunderlich erscheinen. Man denke in diesem Zusammenhang an den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ bei linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wo die Lösungen λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung für λ im Falle $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ sofort zur Basis $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ Anlaß geben, während der Fall $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ als komplizierter angesehen werden kann, weil dann die Basis $e^{\lambda_1 x}$, $x\,e^{\lambda_1 x}$ vorliegt.

Satz 5.5 (*Fortsetzung von Satz 5.4*): *Ist die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ der Lösungen der quadratischen Gleichung für α nicht ganzzahlig, so hat ein zweites* (*vom ersten linear unabhängiges*) *Basiselement des Lösungsraumes der Differentialgleichung* (5.79) *die Gestalt des Ansatzes* (5.85). *Für α ist jetzt α_2 einzusetzen. Die Koeffizienten ergeben sich wiederum durch einen Koeffizientenvergleich. Auch im jetzigen Fall ist der Konvergenzradius der unendlichen Reihe aus* (5.85) *mindestens gleich dem kleinsten Konvergenzradius der Entwicklungen der beiden Funktionen* (5.86). **S. 5.5**

Der Fall (5.104) ist, wie bereits oben bemerkt wurde, komplizierter. Es gilt nämlich der

S. 5.6. **Satz 5.6** (*Fortsetzung von Satz 5.5*): *Ist die Differenz* $\alpha_1 - \alpha_2$ *der Lösungen der quadratischen Gleichung für* α *ganzzahlig und bezeichnet man das gemäß Satz* 5.4 *existierende Basiselement* (5.85) *jetzt durch*

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\alpha_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\alpha_1)(x - x_0)^\nu, \quad c_0(\alpha_1) \neq 0, \tag{5.105}$$

so hat ein zweites Basiselement $y_2(x)$ *die Gestalt*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \left[\frac{C}{(y_1(x))^2} e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} \right] dx, \quad C \neq 0. \tag{5.106}$$

Man kann als zweites Basiselement auch

$$y_2(x) = A y_1(x) \ln |x - x_0| + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\alpha_2)(x - x_0)^\nu \tag{5.107}$$

angeben.[1]) *In der letzten Reihe aus* (5.107) *ist der Konvergenzradius mindestens gleich dem kleinsten Konvergenzradius der Entwicklungen der beiden Funktionen* (5.86).

Wir vertiefen die Einsicht in Satz 5.6 durch einige Erläuterungen:

Bemerkung 5.5: In (5.106) und (5.107) sind die beiden Fälle $x > x_0$ und $x < x_0$ jeweils in einer einzigen Formel zusammengefaßt. Es ist möglich, die Integrationskonstanten in den genannten Fällen jeweils verschieden zu wählen.

Bemerkung 5.6: In (5.107) kann es vorkommen, daß $A = 0$ ist, daß also das logarithmische Glied wegfällt und damit die einfachere Struktur des Satzes 5.5 vorliegt, obwohl (5.104) gilt.

Bemerkung 5.7: Die Bestimmung von $y_2(x)$ kann bei bekanntem $y_1(x)$ durch Berechnung des Integrals in (5.106) geschehen. Man kann aber auch (5.107) als Ansatz auffassen, ihn in die Differentialgleichung (5.79) einsetzen und schließlich einen Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen von $x - x_0$ vornehmen. Wie im Zusatz 3 zu Satz 5.4 genügt es, wenn man sich bei der Rechnung auf den Fall $x > x_0$ beschränkt, also $|x - x_0|^{\alpha_2}$ durch $(x - x_0)^{\alpha_2}$ ersetzt. Um zu prüfen, ob $A = 0$ oder $A \neq 0$ ist, kann man entweder das Integral (5.106) diskutieren oder A beim Einsetzen von (5.107) in die Differentialgleichung als Parameter auffassen und bei der weiteren Rechnung mitnehmen.

Bemerkung 5.8: Im Gegensatz zu $c_0(\alpha_1) \neq 0$ [siehe (5.105)] kann es vorkommen, daß $c_0(\alpha_2) = 0$ [siehe (5.107)] gilt. Es ist allerdings $c_0(\alpha_2) \neq 0$ gesichert, falls die Lösungen α_1 und α_2 (der quadratischen Gleichung für α) nicht zusammenfallen.

* *Aufgabe 5.14:* Für die Entwicklungen der Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung (5.90) an der Stelle $x = 1$ wurde in (5.96) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ berechnet und in (5.101) ein Basiselement $y(x) = y_1(x)$ angegeben. Man überlege sich ohne Rechnung, ob im vorliegenden Fall $A = 0$ oder $A \neq 0$ gilt!

---

[1]) Im Fall $x < x_0$ ist unter $(x - x_0)^\alpha$ der Ausdruck $|x - x_0|^\alpha e^{i\pi\alpha}$ zu verstehen.

Beispiel 5.10: Für die Legendresche Differentialgleichung im Falle $n = 1$

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - 2y = 0 \tag{5.108}$$

ist

$$y_1(x) = P_1(x) = x \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{5.109}$$

eine Lösung (Bemerkung 5.3; Aufgabe 5.6). Mittels (5.106) soll ein von $P_1(x)$ linear unabhängiges Basiselement des zweidimensionalen Lösungsraumes von (5.108) hergestellt werden. Die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x \int \left[\frac{C}{x^2}\, e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx}\right] dx = Cx \int \frac{1}{x^2}\, e^{-\ln|x^2-1|}\, dx \\ &= Cx \int \frac{1}{x^2\,|x^2 - 1|}\, dx = \pm Cx \int \frac{1}{x^2(x^2 - 1)}\, dx, \end{aligned} \tag{5.110}$$

wobei nach dem letzten Gleichheitszeichen in (5.110) das obere bzw. untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem ob $|x| > 1$ bzw. $|x| < 1$ gilt. Die Partialbruchzerlegung führt weiter zu

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \mp Cx \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \mp Cx \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) + C_1. \end{aligned} \tag{5.111}$$

Im Falle $|x| < 1$ – also im Falle der Gültigkeit des unteren Vorzeichens – ergibt sich aus (5.111) die Legendresche Funktion zweiter Art $Q_1(x)$ aus (5.77), wenn man $C = 1$ und $C_1 = 0$ wählt und beachtet, daß man sich wegen $|x| < 1$ von den Absolutstrichen in (5.111) folgendermaßen befreien kann:

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 1, \quad |x| < 1. \tag{5.112}$$

Im Falle $|x| > 1$ – also im Falle der Gültigkeit des oberen Vorzeichens in (5.111) – wählen wir $C = -1$ und $C_1 = 0$ und erhalten bei Beachtung der Befreiungsmöglichkeit von den Absolutzeichen aus (5.111)

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} - 1, \quad |x| > 1 \tag{5.113}$$

(**Legendresche Funktion zweiter Art mit dem Index 1** für $|x| > 1$).

Aufgabe 5.15: Man zeige, daß man bei Wahl von $x_0 = 1$ die Funktionen aus (5.112) und (5.113) in der Gestalt (5.107) angeben kann. Wie lauten A und $c_\nu(\alpha_2)$? *

Aufgabe 5.16: Man leite analog zum Beispiel 5.10 die **Legendreschen Funktionen zweiter Art mit dem Index 2** her [vgl. (5.78)]: *

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{3}{2}x, \quad |x| < 1, \tag{5.114}$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2 - 1) \ln \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{3}{2}x, \quad |x| > 1. \tag{5.115}$$

Graphische Darstellungen von $P_n(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ und $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ $(|x| > 1)$ sind im Band 12 angegeben.

* *Aufgabe 5.17:* In Fortführung von Aufgabe 5.13 bestimme man in den Fällen $l = 1, 2, 3, \ldots$ ein zweites Basiselement $R_2(r)$ des Lösungsraumes von (V.3) an der Stelle $r = 0$ in der Darstellung (5.107) durch Angabe von Rekursionsformeln.

5.3. Entwicklung im Unendlichen

5.3.1. Problemstellung und Begriffsbildung

Benötigt man die Funktionswerte $y(x)$ der Lösung der Differentialgleichung

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0 \tag{5.116}$$

für große Werte von x, etwa für alle Werte x mit $x > X_0$ (z. B. in (V. 3) Funktionswerte von $R(r)$ für große r), so ist die Anwendung von 5.1. und 5.2. nicht geeignet. Entwickelt man nämlich an einer Stelle $x = x_0$ und ist der Konvergenzradius r der Lösungsreihe kleiner als unendlich, so wird $y(x)$ im Intervall $x_0 - r < x < x_0 + r$ dargestellt; insbesondere ist also die gefundene Lösungsformel für $x > x_0 + r$ *nicht* brauchbar. Auch wenn der Konvergenzradius der Lösungsreihe gleich unendlich sein sollte, ist das Ergebnis nicht befriedigend, denn wenn x von der Entwicklungsstelle x_0 weit entfernt ist, so ist in diesem Fall zwar die Konvergenz der Lösungsreihe gesichert, jedoch ist die Konvergenz so „schlecht", daß man zur Herstellung eines brauchbaren Näherungswertes für $y(x)$ eine vom Aufwand her nicht vertretbare große Anzahl von Gliedern berücksichtigen muß.

Um hier weiterzukommen, werden wir einerseits den Begriff „Unendlich ist Stelle der Bestimmtheit" (5.3.2.) einführen und andererseits eine Klasse von Differentialgleichungen herausgreifen, für die Unendlich *keine* Stelle der Bestimmtheit ist, für die aber an der Stelle Unendlich eine asymptotische Entwicklung (5.3.3.; 5.3.4.) möglich ist. Wir beginnen dieses Programm mit der Erläuterung, was man unter der Entwicklung der Lösung $y(x)$ *im Unendlichen* versteht. Setzt man

$$u(t) = y(x) \quad \text{mit} \quad t = \frac{1}{x}, \tag{5.117}$$

so genügt die Funktion $u(t)$ einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\tilde{p}_0(t)\, u'' + \tilde{p}_1(t)\, u' + \tilde{p}_2(t)\, u = 0. \tag{5.118}$$

D. 5.2 **Definition 5.2:** *Unter einer (einseitigen) Umgebung von* $+\infty$ *versteht man die Menge aller reellen* x *mit* $x > X_0$.

Durch $t = \dfrac{1}{x}$ wird die Menge aller x mit $x > X_0$ $(X_0 > 0)$ auf die rechtsseitige Umgebung $0 < t < \dfrac{1}{X_0}$ von $t = 0$ abgebildet. Hieraus folgt: *Die Differentialgleichung* (5.116) *und deren Lösungen verhalten sich in einer Umgebung von* $x = +\infty$ *wie die Differentialgleichung* (5.118) *und deren Lösungen in einer rechtsseitigen Umgebung von* $t = 0$.

Aufgabe 5.18: Wie wird man zweckmäßig die Definition 5.2 und den anschließenden Text auf den Fall einer Umgebung von $x = -\infty$ übertragen? *

Beispiel 5.11: Für die Legendresche Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n(n+1)\,y = 0 \tag{5.119}$$

werde die zugehörige Differentialgleichung der Gestalt (5.118) hergestellt. Die Anwendung der Kettenregel liefert wegen (5.117)

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,u(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = u'(t)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -t^2u'(t), \tag{5.120}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(-t^2u'(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(-t^2u'(t))\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= (-2tu'(t) - t^2u''(t))\,(-t^2) = t^4u'' + 2t^3u'(t). \end{aligned} \tag{5.121}$$

Einsetzen von (5.121), (5.120), (5.117) und $x = \dfrac{1}{t}$ in (5.119) ergibt

$$(t^2 - t^4)\,u'' - 2t^3u' - n(n+1)\,u = 0 \tag{5.122}$$

und damit eine Differentialgleichung der Gestalt (5.118) mit

$$\tilde{p}_0(t) = t^2(1 - t^2), \; \tilde{p}_1(t) = -2t^3, \; \tilde{p}_2(t) = -n(n+1). \tag{5.123}$$

Aufgabe 5.19: Man führe das Beispiel 5.11 durch, falls (5.119) durch (5.116) ersetzt wird. Was ergibt sich somit für $\tilde{p}_0(t)$, $\tilde{p}_1(t)$, $\tilde{p}_2(t)$ aus (5.118)? *

5.3.2. Unendlich ist Stelle der Bestimmtheit

Definition 5.3: *Die Differentialgleichung* (5.116) *hat im Unendlichen* (*d. h. sowohl für plus unendlich als auch für minus unendlich*) *eine Stelle der Bestimmtheit, wenn für die Differentialgleichung* (5.118) *die Stelle $t = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit ist.* **D. 5.3**

Beispiel 5.12 (Fortsetzung von Beispiel 5.11): Die Legendresche Differentialgleichung (5.119) hat im Unendlichen eine Stelle der Bestimmtheit, denn wegen [siehe (5.123)]

$$\frac{\tilde{p}_1(t)}{\tilde{p}_0(t)} = \frac{-2t^3}{t^2(1-t^2)} = \frac{-2t}{1-t^2} = -2t\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2\nu} = -2t - 2t^3 - \ldots,$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}_2(t)}{\tilde{p}_0(t)} &= -\frac{n(n+1)}{t^2(1-t^2)} = -\frac{n(n+1)}{t^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2\nu} \\ &= -\frac{n(n+1)}{t^2} - n(n+1) - \ldots \end{aligned}$$

ist für die Differentialgleichung (5.122) die Stelle $t = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit.

Als Anwendung der Definition 5.3 sollen die Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung (5.119) im Spezialfall $n = 1$ im Unendlichen entwickelt werden. Das geschieht im

Beispiel 5.13: Zur Differentialgleichung (5.119) im Fall $n = 1$

$$(x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - 2y = 0 \tag{5.124}$$

gehört mit (5.117) wegen (5.122) die folgende Differentialgleichung für $u = u(t)$

$$(t^2 - t^4)\, u'' - 2t^3 u' - 2u = 0. \tag{5.125}$$

Wegen Satz 5.4 wird der Ansatz

$$u(t) = |t|^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu, \quad c_0 \neq 0, \quad |t| < 1, \tag{5.126}$$

gemacht und die Rechnung gemäß dem Zusatz 3 zu Satz 5.4 mit

$$u(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{\nu+\alpha}, \quad c_0 \neq 0, \quad 0 < t < 1, \tag{5.127}$$

begonnen. Einsetzen von (5.127) in (5.125), anschließende Division durch t^α und Ordnen nach Potenzen von t ergibt schließlich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + \alpha)(\nu + \alpha - 1)\, c_\nu t^\nu - \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu + \alpha - 2)(\nu + \alpha - 3)\, c_{\nu-2} t^\nu$$
$$-2 \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu + \alpha - 2)\, c_{\nu-2} t^\nu - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu = 0. \tag{5.128}$$

Beim Beginn des Koeffizientenvergleichs in (5.128) mit $\nu = 0$ erhält man wegen $c_0 \neq 0$ eine quadratische Gleichung für α mit den Lösungen

$$\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = -1, \tag{5.129}$$

wobei die Bezeichnung in (5.129) gemäß der Verabredung (5.89) gewählt wurde. Einsetzen von $\alpha_1 = 2$ für α in (5.128) und Weiterführung des Koeffizientenvergleichs liefert

$$c_1 = 0, \ c_\nu = \frac{\nu + 1}{\nu + 3}\, c_{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \tag{5.130}$$

und damit

$$c_{2\mu+1} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \ c_{2\mu} = \frac{3}{2\mu + 3}\, c_0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{5.131}$$

Wir setzen (5.131) sowie $\alpha = \alpha_1 = 2$ in (5.126) ein und erhalten [wegen $\alpha = 2$ sind jetzt in (5.126) die Absolutstriche entbehrlich]

$$u(t) = t^2 c_0 \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{3}{2\mu+3}\, t^{2\mu}\right), \quad c_0 \neq 0, \quad |t| < 1, \tag{5.132}$$

so daß sich wegen (5.117)

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\, c_0 \left(1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{3}{2\mu + 3}\, \frac{1}{x^{2\mu}}\right), \quad c_0 \neq 0, \quad |x| > 1, \tag{5.133}$$

ergibt. Das gefundene Basiselement (5.133) des Lösungsraumes von (5.124) kann in geschlossener Form angegeben werden. Hierzu gehe man von den Entwicklungen

$$\ln(1+t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{t^\nu}{\nu}, \quad \ln(1-t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu}, \quad |t| < 1,$$

und damit

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu+1} t^{2\mu+1}, \quad |t| < 1, \tag{5.134}$$

aus. Aus (5.134) folgt mit $t = \frac{1}{x}$

$$\frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - 1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu+1} \frac{1}{x^{2\mu}}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu+3} \frac{1}{x^{2\mu+2}}, \quad |x| > 1. \tag{5.135}$$

Die rechte Seite von (5.135) stimmt mit (5.133) überein, falls man dort $c_0 = \frac{1}{3}$ wählt. Dann ist also wegen (5.113) das Basiselement (5.133) mit der Legendreschen Funktion zweiter Art $Q_1(x)$ (für $|x| > 1$) identisch:

$$y(x) = y_1(x) = Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - 1, \quad |x| > 1. \tag{5.136}$$

Zur Bestimmung eines weiteren (vom ersten linear unabhängigen) Basiselements $u_2(t)$ des Lösungsraumes der Differentialgleichung (5.125) wird der Satz 5.6 herangezogen. Die Gleichung (5.106) lautet für unsere jetzige Anwendung bei Beachtung von (5.123)

$$u_2(t) = u_1(t) \int \left[\frac{C}{(u_1(t))^2} \, e^{-\int \frac{-2t^3}{t^2(1-t^2)} dt} \right] dt, \tag{5.137}$$

wobei $u_1(t)$ mit dem $u(t)$ aus (5.132) im Falle $c_0 = \frac{1}{3}$ zu identifizieren ist.

Aufgabe 5.20: Man zeige, daß in der eckigen Klammer in (5.137) eine gerade Funktion von t steht. *

Aus dem Ergebnis von Aufgabe 5.20 folgt, daß bei der gliedweisen Integration der Entwicklung (an der Stelle $t = 0$) der eckigen Klammer aus (5.137) kein logarithmisches Glied auftreten kann. Infolgedessen ist im vorliegenden Fall bei Anwendung der Gleichung (5.107) $A = 0$ zu setzen, obwohl die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2 = 3$ ganzzahlig ist (vgl. Bemerkung 5.6). Es kann also zur Bestimmung des zweiten Basiselementes die Gleichung (5.128) herangezogen werden, wo nunmehr für α der Wert $\alpha_2 = -1$ einzusetzen ist. Der Koeffizientenvergleich liefert

$$c_1 = 0 \tag{5.138}$$

und

$$\nu(\nu-3)\, c_\nu = (\nu-3)(\nu-2)\, c_{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{5.139}$$

Im Falle $\nu = 2$ ergibt (5.139)

$$2(2-3)\, c_2 = (2-3)(2-2)\, c_0$$

d. h.,

$$c_2 = 0. \tag{5.140}$$

Im Falle $\nu = 3$ folgt aus (5.139) $0 = 0$, d. h., man erhält keine Information. Mit anderen Worten: Im Falle $\nu = 3$ ist (5.139) für

$$c_3 = \text{beliebig} \tag{5.141}$$

gültig. Von $\nu = 4$ ab kann (5.139) nach c_ν aufgelöst werden:

$$c_\nu = \frac{\nu - 2}{\nu} c_{\nu-2} \quad (\nu = 4, 5, \ldots). \tag{5.142}$$

Aus (5.140) und (5.142) ergibt sich

$$c_{2\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{5.143}$$

(5.141) und (5.142) führen schließlich zu

$$c_{2\mu+1} = \frac{3}{2\mu + 1} c_3 \quad (\mu = 1, 2, \ldots). \tag{5.144}$$

Einsetzen von (5.138), (5.143), (5.144) in (5.126) mit $\alpha = \alpha_2 = -1$ ergibt für das gesuchte weitere Basiselement $u_2(t)$

$$u_2(t) = \frac{1}{|t|}\left(c_0 + c_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{3}{2\mu + 1} t^{2\mu+1}\right), \quad |t| < 1,$$

und damit wegen (5.117)

$$y_2(x) = |x| \left(c_0 + c_3 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{3}{2\mu + 1} \frac{1}{x^{2\mu+1}}\right), \quad |x| > 1. \tag{5.145}$$

Das ist unter Beachtung von (5.135) und (5.136) gleichbedeutend mit

$$y_2(x) = c_0|x| + 3c_3 Q_1(x) = c_0|x| + 3c_3 y_1(x). \tag{5.146}$$

Wählt man in (5.146) $c_0 \neq 0$ und c_3 beliebig, so hat man das gewünschte von $y_1(x)$ linear unabhängige weitere Basiselement $y_2(x)$. Wir setzen $c_0 = 1$ im Falle $x > 0$ und $c_0 = -1$ im Falle $x < 0$ sowie $c_3 = 0$. Es ergibt sich für $y_2(x)$ das Legendresche Polynom ersten Grades (Aufgabe 5.6):

$$y_2(x) = P_1(x) = x. \tag{5.147}$$

5.3.3. Unendlich ist Stelle der Unbestimmtheit vom Rang 1

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = 0, \tag{5.148}$$

wobei für $x > X_0$ die konvergenten Entwicklungen

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{1}{x^\nu}, \quad \frac{p_2(x)}{p_0(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{1}{x^\nu} \tag{5.149}$$

vorliegen sollen.

Aufgabe 5.21: Man zeige, daß für die Differentialgleichung (5.148) mit (5.149) die Stelle $x = +\infty$ genau dann eine Stelle der Bestimmtheit ist, wenn *

$$a_0 = 0, \; b_0 = 0, \; b_1 = 0 \tag{5.150}$$

gilt.

Definition 5.4: *Ist* (5.150) *nicht erfüllt, so heißt in* (5.148), (5.149) *die Stelle* $x = +\infty$ *Stelle der Unbestimmtheit vom Rang 1.* **D. 5.4**

Eine grobe Näherung entsteht, wenn wir in (5.149) nur die absoluten Glieder berücksichtigen, d. h. wenn wir uns zunächst mit der folgenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschäftigen:

$$\tilde{y}'' + a_0\tilde{y}' + b_0\tilde{y} = 0. \tag{5.151}$$

Der aus dem Band 7/1 bekannte Ansatz

$$\tilde{y}(x) = e^{\beta x} \tag{5.152}$$

liefert eine Lösung von (5.151), falls β der quadratischen Gleichung

$$\beta^2 + a_0\beta + b_0 = 0 \tag{5.153}$$

genügt. Durch (5.152), (5.153) lassen wir uns anregen, für die Lösungen $y(x)$ aus (5.148)

$$y(x) = e^{\beta x}\, u(x) \tag{5.154}$$

zu schreiben, in der Hoffnung, daß die Differentialgleichung für $u(x)$ einfacher[1]) als (5.148), (5.149) ausfällt. Setzt man (5.154) – wobei β eine Lösung von (5.153) ist – in die Differentialgleichung (5.148), (5.149) ein, so ergibt sich für $u(x)$ wiederum eine Differentialgleichung der Struktur (5.148), (5.149), wobei aber der „neue Wert b_0" gleich null ist:

$$\tilde{p}_0(x)\, u'' + \tilde{p}_1(x)\, u' + \tilde{p}_2(x)\, u = 0 \tag{5.155}$$

mit

$$\frac{\tilde{p}_1(x)}{\tilde{p}_0(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{a}_\nu \frac{1}{x^\nu}, \quad \frac{\tilde{p}_2(x)}{\tilde{p}_0(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{b}_\nu \frac{1}{x^\nu} \quad (x > X_0). \tag{5.156}$$

Man beachte, daß in der zweiten unendlichen Reihe aus (5.156) die Summation erst bei $\nu = 1$ beginnt.

Aufgabe 5.22: Man zeige: Der Koeffizient $\tilde{a}_0$ aus (5.156) ist genau dann von null verschieden, wenn die Lösungen der quadratischen Gleichung (5.153) voneinander verschieden sind. *

Sollte

$$\tilde{a}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{b}_1 = 0 \tag{5.157}$$

sein, so hat die Differentialgleichung (5.155), (5.156) gemäß Aufgabe 5.21 für $x = +\infty$ eine Stelle der Bestimmtheit. Wegen Definition 5.3 und Satz 5.4 hat dann mindestens ein Basiselement des Lösungsraumes von (5.155), (5.156) die Gestalt

---

[1]) Im Falle $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ ist wegen (5.153) $\beta = 0$ und damit gemäß (5.154) $y(x) = u(x)$. Also ist in diesem Fall die Differentialgleichung für $u(x)$ *nicht einfacher* als diejenige für $y(x)$, aber auch *nicht schwieriger*.

$$u(x) = \tilde{u}(t) = t^{\tilde{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu \quad \left(t = \frac{1}{x}\right), \tag{5.158}$$

d. h.

$$u(x) = x^\alpha v(x) \quad (\alpha = -\tilde{\alpha}) \tag{5.159}$$

mit

$$v(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{1}{x^\nu}. \tag{5.160}$$

Angeregt durch (5.159), (5.160) versuchen wir auch dann, wenn (5.157) nicht erfüllt ist, mit dem Ansatz (5.159), (5.160) weiterzukommen, in der Hoffnung, α so bestimmen zu können, daß die Differentialgleichung für $v(x)$ einfacher als die Differentialgleichung (5.155), (5.156) ist. Einsetzen von (5.159) in (5.155) führt auf eine Differentialgleichung für $v(x)$, deren Struktur mit derjenigen von (5.155), (5.156) übereinstimmt. Es zeigt sich, daß man durch geeignete Wahl von α erreichen kann, daß der „neue Koeffizient $\tilde{b}_1$“ gleich null ist, allerdings benötigt man hier die Voraussetzung

$$\tilde{a}_0 \neq 0. \tag{5.161}$$

Es gilt also

$$\tilde{\tilde{p}}_0(x)\, v'' + \tilde{\tilde{p}}_1(x)\, v' + \tilde{\tilde{p}}_2(x)\, v = 0 \tag{5.162}$$

mit

$$\frac{\tilde{\tilde{p}}_1(x)}{\tilde{\tilde{p}}_0(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{\tilde{a}}_\nu \frac{1}{x^\nu}, \quad \frac{\tilde{\tilde{p}}_2(x)}{\tilde{\tilde{p}}_0(x)} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \tilde{\tilde{b}}_\nu \frac{1}{x^\nu}, \tag{5.163}$$

wobei darauf hingewiesen sei, daß in der zweiten Reihe aus (5.163) die Summation erst bei $\nu = 2$ beginnt.

Ist (5.161) nicht erfüllt, so setze man

$$u(x) = \hat{y}(\tau) \quad \text{mit} \quad \tau = \sqrt{x}. \tag{5.164}$$

Es zeigt sich, daß die Differentialgleichung für $\hat{y}(\tau)$ mit der obigen Theorie weiter behandelt werden kann.

In Fortführung des im Anschluß an (5.159), (5.160) begonnenen Versuches wird (5.160) in (5.162) eingesetzt. Es ist tatsächlich nur ein Versuch, denn im allgemeinen wird $x = +\infty$ für (5.162), (5.163) keine Stelle der Bestimmtheit sein. Es zeigt sich, daß nach dem Ordnen nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ und anschließendem Koeffizientenvergleich ein Gleichungssystem entsteht, das nach den Koeffizienten c_ν aufgelöst werden kann. Damit ist die Theorie aber noch nicht beendet. Die Kenntnis, daß die Koeffizienten des Ansatzes (5.160) stets berechenbar sind, genügt nicht. Es ist noch die Konvergenzfrage zu diskutieren. Wenn die unendliche Reihe (5.160) abbricht, d. h. wenn nur endlich viele Summanden von null verschieden sind, so ist die Konvergenz trivialerweise für alle $x \neq 0$ gesichert.

Falls die Reihe (5.160) nicht abbricht, so wird sie im allgemeinen für jedes x divergieren, d. h. mit

$$v(x) = \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \frac{1}{x^\nu} + R_k(x) \tag{5.165}$$

gilt im allgemeinen *nicht*

$$\lim_{k \to +\infty} R_k(x) = 0, \tag{5.166}$$

ja, in den meisten Fällen gilt sogar

$$\lim_{k \to +\infty} |R_k(x)| = +\infty. \tag{5.167}$$

Beim ersten Kennenlernen dieses Sachverhaltes ist man überzeugt, daß die hergestellte Entwicklung im Falle der Divergenz unbrauchbar ist. Dem ist jedoch nicht so. Man kann nämlich zeigen, daß eine **asymptotische Entwicklung** vorliegt. Das bedeutet: Für jedes feste $k = 1, 2, \ldots$ strebt in (5.165) das Restglied $R_k(x)$ für $x \to +\infty$ gegen null, und zwar von höherer Ordnung als der Ausdruck $\frac{1}{x^k}$ des letzten Summanden aus der Näherung $\sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \frac{1}{x^\nu}$ *für* $v(x)$; es gilt also für jedes $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{R_k(x)}{x^{-k}} = \lim_{x \to +\infty} R_k(x)\, x^k = 0 \text{ (vgl. Band 3; 4.6.2.).} \tag{5.168}$$

Aus (5.168) kann man entnehmen, daß bei fest gewähltem k die Näherung

$$v(x) \approx \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \frac{1}{x^\nu} \tag{5.169}$$

um so besser ist, je größer x gewählt wird. Allerdings wird man sich insbesondere dafür interessieren, wie bei festem x in der Näherung (5.169) das k zweckmäßig zu wählen ist. Wegen (5.167) darf man k gewiß nicht zu groß wählen. Das günstigste k ergibt sich bei festem x durch Bestimmung des Minimums von $|R_k(x)|$ als Funktion von k. Besonders übersichtliche Verhältnisse liegen vor, wenn es sich um eine **alternierende** (Band 3, 2.5.) asymptotische Reihe handelt (vgl. (5.231) und den dort anschließenden Text). Hinsichtlich weiterer Einzelheiten über die Restgliedherstellung und die Untersuchung asymptotischer Reihen wird auf die Bände 3 (Abschnitt 4.6.), 10 und 12 verwiesen.

Sind die beiden Lösungen von (5.153) voneinander verschieden, so erhält man auf diese Weise eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung (5.148), (5.149).

Beispiel 5.14: Die Gleichung (V.3) des Vorwortes, nämlich

$$r^2 R'' + 2rR' + [\lambda r^2 + 2ar - l(l+1)]\, R = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots) \tag{5.170}$$

hat die Struktur von (5.148), (5.149) mit

$$a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_\nu = 0\ (\nu = 2, 3, \ldots),\ b_0 = \lambda,\ b_1 = 2a,\ b_2 = -l(l+1),$$
$$b_\nu = 0\ (\nu = 3, 4, \ldots).$$

Die quadratische Gleichung (5.153) lautet somit im vorliegenden Fall

$$\beta^2 + \lambda = 0. \tag{5.171}$$

Einsetzen von $R(r) = e^{\beta r}u(r)$ (vgl. (5.154)) in (5.170) führt wegen

$$R' = e^{\beta r}(\beta u + u'),\ R'' = e^{\beta r}(\beta^2 u + 2\beta u' + u'') \tag{5.172}$$

unter Beachtung von (5.171) zu

$$r^2 u'' + (2\beta r^2 + 2r)\,u' + (2(\beta + a)\,r - l(l+1))\,u = 0, \tag{5.173}$$

wobei bereits durch $e^{\beta r}$ dividiert wurde.

Um (5.161) zu garantieren, setzen wir wegen (5.173) und (5.171) zunächst

$$\lambda \neq 0 \tag{5.174}$$

voraus. (Der Fall $\lambda = 0$ wird in der Aufgabe 5.23 behandelt.) Einsetzen von $u(r) = r^\alpha v(r)$ [vgl. (5.159)] in (5.173) führt schließlich zu

$$\begin{aligned} &r^2 v'' + (2\beta r^2 + 2(\alpha+1)r)v' \\ &+ [2((\alpha+1)\,\beta + a)\,r + \alpha(\alpha+1) - l(l+1)]\,v = 0. \end{aligned} \tag{5.175}$$

Gemäß der allgemeinen Theorie muß α so bestimmt werden, daß

$$2((\alpha+1)\,\beta + a) = 0,\ \text{d. h. } \alpha = -1 - \frac{a}{\beta} \tag{5.176}$$

ist. Beim Einsetzen von $v(r) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^{-\nu}$ [vgl. (5.160)] in (5.175), (5.176) beginnt die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} r^2 v'' &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu+1)\,c_\nu r^{-\nu}, \\ 2\beta r^2 v' &= \sum_{\nu=0}^{\infty} -2\beta\nu c_\nu r^{-\nu+1} = \sum_{\nu=-1}^{\infty} -2\beta(\nu+1)\,c_{\nu+1} r^{-\nu}, \\ 2(\alpha+1)\,r v' &= \sum_{\nu=0}^{\infty} -2(\alpha+1)\,\nu c_\nu r^{-\nu}, \\ (\alpha(\alpha+1) - l(l+1))\,v &= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha(\alpha+1) - l(l+1))\,c_\nu r^{-\nu}. \end{aligned} \tag{5.177}$$

Durch Addition der vier linken Seiten von (5.177) erhält man bei Beachtung von (5.176) die linke Seite der Differentialgleichung aus (5.175), die gleich null sein soll. Folglich muß die Summe der rechten Seiten aus (5.177) gleich null sein. Der anschließende Koeffizientenvergleich führt zu

$$\begin{aligned} c_0 &= \text{beliebig} \\ c_{\nu+1} &= \frac{1}{2\beta(\nu+1)}(\alpha^2 + \alpha(1-2\nu) + (\nu-1)\,\nu - l(l+1))\,c_\nu \\ &(\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{5.178}$$

Folglich erhält man die allgemeine Lösung von (5.170) in der Gestalt

$$R(r) = \tilde{C}_1 \tilde{R}_1(r) + \tilde{C}_2 \tilde{R}_2(r) \tag{5.179}$$

mit

$$\tilde{R}_k(r) = e^{\beta_k r} r^{\alpha_k} v_k(r) \quad (k = 1, 2), \tag{5.180}$$

wobei

$$\alpha_k = -1 - \frac{a}{\beta_k} \tag{5.181}$$

ist. Hierbei sind β_1 und $\beta_2 = -\beta_1$ Lösungen von (5.171), und für $\tilde{C}_k v_k(r)$ $(k = 1, 2)$ liegt die asymptotische Reihe

$$\tilde{C}_k v_k(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^{-\nu} \tag{5.182}$$

vor, wobei einerseits

$$c_{\nu+1} = \frac{1}{2\beta_k(\nu+1)} (\alpha_k^2 + \alpha_k(1 - 2\nu) + (\nu - 1)\,\nu - l(l+1))\, c_\nu$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2) \tag{5.183}$$

gilt und andererseits

$$c_0 = \tilde{C}_k \quad (k = 1, 2) \tag{5.184}$$

zu setzen ist.

Aufgabe 5.23: Die Differentialgleichung (5.170) soll im Fall $\lambda = 0$ durch Entwickeln an der Stelle $r = \infty$ gelöst werden. Gemäß der allgemeinen Theorie stelle man zunächst aus (5.170) eine Differentialgleichung für $\hat{R}(\tau)$ her, wobei $\hat{R}(\tau) = R(r)$ mit $\tau = \sqrt{r}$ ist, und bestimme $\hat{R}(\tau)$. *

5.3.4. Unendlich ist Stelle der Unbestimmtheit vom Rang $k + 1$.

Definition 5.5: *Liegt die Differentialgleichung* **D. 5.5**

$$p_0(x)y'' + x^k p_1(x)\,y' + x^{2k} p_2(x)\,y = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{5.185}$$

mit (5.149) *vor und sind die Koeffizienten*

$$a_0, \ldots, a_{k-1}, b_0, \ldots, b_{2k-1} \text{ nicht alle gleich null,} \tag{5.186}$$

so heißt $x = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit vom Rang $k + 1$.

Ein Basiselement des Lösungsraumes der Differentialgleichung (5.185) kann in der Gestalt

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{P_{k+1}(x)}\, x^{\varrho}\, v(x) \tag{5.187}$$

angegeben werden. Hierbei ist

$$P_{k+1}(x) = d_{k+1}x^{k+1} + d_k x^k + \ldots + d_1 x \tag{5.188}$$

mit

$$d_{k+1} = \frac{\beta}{k+1}, \tag{5.189}$$

wobei β eine Lösung von (5.153) ist. Weiterhin wird $v(x)$ durch die asymptotische Reihe

$$v(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\nu} \; (c_0 \neq 0) \tag{5.190}$$

dargestellt. Haben die beiden Lösungen von (5.153) voneinander verschiedene Realteile, so erhält man auf diese Weise eine Basis des Lösungsraumes.

Beispiel 5.15: Die **Hermitesche Differentialgleichung**

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.191}$$

besitzt an der Stelle $x = \infty$ eine Stelle der Unbestimmtheit vom Rang $k + 1$ mit $k = 1$, denn mit den obigen Bezeichnungen ist $a_0 = -2$, $a_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = 2n$, $b_\nu = 0$ $(\nu = 3. 4. \ldots)$. Also lauten hier die Lösungen von (5.153)

$$\beta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_2 = 2. \tag{5.192}$$

Die Rechnung wird im Fall $\beta_1 = 0$ weitergeführt. Wegen (5.187), (5.188), (5.189) wird jetzt der Ansatz

$$y = e^{d_1 x} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\nu+\varrho}, \quad c_0 \neq 0, \tag{5.193}$$

gemacht. Einsetzen in (5.191) führt nach Division durch $e^{d_1 x} x^\varrho$ schließlich zu

$$d_1^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\nu} + 2d_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu-1} (-\nu + 1 + \varrho)\, x^{-\nu} + \sum_{\nu=2}^{\infty} (-\nu + 2 + \varrho)(-\nu + 1 + \varrho)\, c_{\nu-2} x^{-\nu}$$

$$-2d_1 \sum_{\nu=-1}^{\infty} c_{\nu+1} x^{-\nu} - 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (-\nu + \varrho)\, x^{-\nu} + 2n \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\sigma} = 0. \tag{5.194}$$

Der Beginn des Koeffizientenvergleichs $(\nu = -1, 0, 1)$ liefert

$$-2d_1 c_0 = 0, \text{ d. h. wegen } c_0 \neq 0 \text{ ist } d_1 = 0 \text{ und } c_0 = \text{beliebig}, \tag{5.195}$$

$$-2c_0\varrho + 2n\, c_0 = 0, \text{ d. h. wegen } c_0 \neq 0 \text{ ist } \varrho = n, \tag{5.196}$$

$$2c_1 = 0, \text{ d. h. } c_1 = 0. \tag{5.197}$$

Bei Beachtung der Ergebnisse (5.195), (5.196), (5.197) ergibt die Fortführung des Koeffizientenvergleichs schließlich die Rekursionsformel

$$c_\nu = -\frac{1}{2\nu}(-\nu + 2 + n)(-\nu + 1 + n)\, c_{\nu-2} \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{5.198}$$

Aus (5.197), (5.198) folgt

$$c_{2m+1} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.199}$$

(5.198) zeigt – in Verbindung mit (5.199) –, daß von $\nu = n + 1$ ab alle c_ν verschwinden, also

$$c_\nu = 0 \quad (\nu = n + 1, n + 2, \ldots) \tag{5.200}$$

ist. Das bedeutet schließlich, daß sich in (5.193) ein Polynom vom Grad n ergibt. Wählt man $c_0 = 2^n$, so spricht man vom **Hermiteschen Polynom** $H_n(x)$.

* *Aufgabe 5.24:* Mittels Beispiel 5.15 berechne man $H_n(x)$ in den Fällen $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

5.4. Fakultätenfunktion, Besselsche Differentialgleichung

Als Vorbereitung zur Behandlung der Besselschen Differentialgleichung nennen wir den

S. 5.7 **Satz 5.7:** *Es gibt genau eine Funktion* (**Fakultätenfunktion** [*auch* **Gammafunktion** *genannt*])

$$x! = \Gamma(x + 1), \tag{5.201}$$

die für jedes $x \neq -1, -2, \ldots$ *in eine Potenzreihe entwickelbar ist, an den Stellen* $x = -1, -2, \ldots$ *jeweils einen Pol erster Ordnung besitzt und die folgende Eigenschaften hat:*

$$x! = n! \quad \textit{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.202}$$

$$(x+1)! = x!(x+1) \quad \textit{für alle} \quad x \neq -1, -2, \ldots, \tag{5.203}$$

$$x! > 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln(x!) > 0 \quad \textit{für} \quad -1 < x < +\infty. \tag{5.204}$$

Zusatz zum Satz 5.7: Für $x > -1$ gilt

$$x! = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t \tag{5.205}$$

(**Eulersches Integral zweiter Gattung**), speziell

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}. \tag{5.206}$$

Aufgabe 5.25: Es gilt $\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi} f(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Man bestimmte $f(n)$. *

Die Lösungen der **Besselschen Differentialgleichung**

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{5.207}$$

heißen **Zylinderfunktionen** (mit dem Index n). Für $x = 0$ liegt in (5.207) eine Stelle der Bestimmtheit vor. Infolgedessen hat mindestens ein Basiselement des Lösungsraumes der Differentialgleichung (5.207) die Gestalt

$$y(x) = |x|^\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \quad c_0 \neq 0. \tag{5.208}$$

Da in der Differentialgleichung n^2 auftritt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$n \geqq 0 \tag{5.209}$$

voraussetzen. Die Lösungen der zum Ansatz (5.208) gehörigen quadratischen Gleichung für α lauten mit (5.209)

$$\alpha_1 = n, \; \alpha_2 = -n. \tag{5.210}$$

Einsetzen von (5.208) im Falle $\alpha_1 = n$ führt mit der Festsetzung $c_0 = \dfrac{1}{2^n n!}$ zur **Besselfunktion (Zylinderfunktion erster Art** [mit dem Index n])

$$y(x) = J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{2^{2\mu} \mu! (n+\mu)!} x^{2\mu} \quad (x > 0). \tag{5.211}$$

Bemerkung 1 zu (5.211): Der Konvergenzradius der unendlichen Reihe ist gemäß Satz 5.4 gleich unendlich. Ist $n \geqq 0$ nicht ganzzahlig, so muß Satz 5.7 beachtet werden, der dem Ausdruck $(n + \mu)!$ aus (5.211) auch dann noch einen Sinn verleiht, wenn der Wert von $n + \mu$ nicht ganz ist.

Bemerkung 2 zu (5.211): Der Faktor $\left(\frac{x}{2}\right)^n$ ist für uns bei nichtganzem n nur sinnvoll, wenn $x > 0$ ist. Gemäß (5.208) ist es naheliegend, im Falle $x < 0$ diesen Faktor durch $\left(\frac{|x|}{2}\right)^n$ zu ersetzen. Dann läge zwar wieder eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung vor, sie würde aber (verabredungsgemäß) nicht mehr als Besselfunktion anzusehen sein. Es sei hier lediglich mitgeteilt, daß man aus funktionentheoretischen Gründen (Band 9) auch im Falle $x < 0$ in (5.211) mit $\left(\frac{x}{2}\right)^n$ arbeitet und unter dieser Potenz den sogenannten Hauptwert

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(\frac{|x|}{2}\right)^n e^{\mathrm{i}n\pi} \quad (x < 0) \tag{5.212}$$

versteht.

Die Differenz der α-Werte aus (5.210) beträgt

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2n. \tag{5.213}$$

Ist sie nicht ganz, also

$$n \neq 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}, 3, \ldots, \tag{5.214}$$

so hat ein weiteres Basiselement des Lösungsraumes der Besselschen Differentialgleichung wegen Satz 5.5 die Struktur (5.208) mit $\alpha = -n$. Die Rechnung zeigt, daß in diesem Fall als zweites Basiselement

$$y_2(x) = J_{-n}(x) \tag{5.215}$$

genommen werden kann. Oft ist es üblich, anstatt im Falle (5.214) mit den beiden gefundenen Basiselementen

$$J_n(x) \quad \text{und} \quad J_{-n}(x) \tag{5.216}$$

zu arbeiten, als Basiselemente die Funktionen

$$J_n(x),\ N_n(x) \tag{5.217}$$

zu wählen, wobei $N_n(x)$ durch

$$N_n(x) = \frac{1}{\sin(n\pi)}\left[\cos(n\pi)\, J_n(x) - J_{-n}(x)\right] \tag{5.218}$$

definiert ist und **Neumannsche Funktion (Zylinderfunktion zweiter Art** [mit nichtganzzahligem Index n]) heißt. Beim ersten Kennenlernen entsteht die Frage, welche Gründe es gibt, für $N_n(x)$ die relativ umständliche Formel (5.218) zu wählen. Es ist mit (5.218) möglich, durch den Grenzübergang in (5.225) vom nichtganzzahligen n zu ganzzahligem n überzugehen.

Statt (5.216) oder (5.217) kann man auch als Basis die sog. **Hankelschen Funktionen (Zylinderfunktionen dritter Art)**

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \mathrm{i}\, N_n(x) \tag{5.219}$$

und

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \mathrm{i}\, N_n(x) \tag{5.220}$$

nehmen. Gilt

$$n = m + \tfrac{1}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.221}$$

so ist die Differenz (5.213) ganzzahlig. Man muß daher gemäß Satz 5.6 damit rechnen, daß der Ansatz (5.208) durch einen komplizierteren – mit logarithmischem Glied – zu ersetzen ist. Hier tritt jedoch der bereits in Bemerkung 5.6 erwähnte Fall auf, daß $A = 0$ ist, daß also das logarithmische Glied wegfällt und damit (ausnahmsweise) auch im Falle (5.221) mit dem Ansatz (5.208) gearbeitet werden kann. Als Ergebnis notieren wir:

Auch bei halbzahligem Index $n = m + \frac{1}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ können als Basiselemente des Lösungsraumes der Besselschen Differentialgleichung die Funktionen aus (5.216) oder (5.217) oder (5.219), (5.220) genommen werden.

Aufgabe 5.26: Man beweise $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$ *

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \; H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \; H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Wenn sich im Band 7/1 als Basis des Lösungsraumes einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung die beiden Funktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ ergeben, so ist bekannt, daß $\cos x$, $\sin x$ eine zugehörige reelle Basis ist. Dieser Hinweis vermittelt im Zusammenhang mit Aufgabe 5.26 einen Eindruck von der Wahl der Basen (5.216) oder (5.217) oder (5.219), (5.220).

Wir gehen zur Behandlung des Falles

$$n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.222}$$

über. Die Funktionen aus (5.216) können jetzt nicht mehr als Basis des Lösungsraumes der Besselschen Differentialgleichung benutzt werden. Es kann zwar mit (5.211) $J_{-n}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gebildet werden, wenn man daran erinnert, daß die Fakultätenfunktion $x!$ gemäß Satz 5.7 an den Stellen $x = -1, -2, \ldots$ Pole besitzt, und wenn man im Einklang damit in (5.211)

$$\frac{1}{(n+\mu)!} = 0 \tag{5.223}$$

setzt, falls $n + \mu$ in (5.223) gleich einer negativen ganzen Zahl ist; die Rechnung zeigt aber, daß

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.224}$$

gilt. Also sind in diesem Fall $J_n(x)$ und $J_{-n}(x)$ voneinander linear abhängig und können somit keine Basis des Lösungsraumes bilden.

Im Falle (5.222) versagt die Definition der Neumannschen Funktion $N_n(x)$ aus (5.218) [der Nenner verschwindet], so daß auch (5.217) und (5.219), (5.220) als Basis im Falle (5.222) ausscheiden.

Definiert man nun im Falle (5.222) durch [vgl. (5.218)]

$$N_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{1}{\sin(p\pi)} [\cos(p\pi) J_p(x) - J_{-p}(x)] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.225}$$

die **Neumannsche Funktion (Zylinderfunktion zweiter Art** mit dem Index $n = 0, 1, 2, \ldots$), so kann man die Funktionen aus (5.217) und (5.219), (5.220) als Basis für den Lösungsraum der Besselschen Differentialgleichung benutzen.

Der Grenzwert in (5.225) kann etwa mittels der Regel von l'Hospital berechnet werden. Der Satz 5.6 zeigt, daß $N_n(x)$ in der Gestalt (5.107) angebbar sein muß. Zur Illustration führen wir die folgenden Formeln an:

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(C + \ln \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu}\right\}, \quad x > 0, \tag{5.226}$$

wobei in (5.226) die Konstante C gleich der **Eulerschen Konstanten**

$$C = \lim_{m\to\infty} \left\{\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} - \ln m\right\} = 0{,}5772\ldots \tag{5.227}$$

ist. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$\begin{aligned} N_n(x) = {} & \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(n-\nu-1)!}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-n} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!(\nu+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu} [\Psi(\nu) + \Psi(\nu+n)], \quad x > 0, \end{aligned} \tag{5.228}$$

wobei in (5.228) die **(Gaußsche) Psi-Funktion** $\Psi(x)$ benutzt wurde, das ist die **logarithmische Ableitung der Fakultätenfunktion** (vgl. Satz 5.7)

$$\Psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln (x!) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{mit } C \text{ aus (5.227)}. \tag{5.229}$$

Bemerkung zu (5.226) *und* (5.228)*:* Man kann (5.226) und (5.228) auch für $x < 0$ benutzen, wenn man unter $\ln (x/2)$ in diesem Falle den sogenannten Hauptwert des Logarithmus versteht:

$$\ln \frac{x}{2} = \ln \frac{|x|}{2} + \mathrm{i}\pi \quad (x < 0). \tag{5.230}$$

Für große positive x konvergieren die $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ darstellenden Reihen. Jedoch hat dies nur theoretischen Wert. Für die numerische Auswertung sind diese Reihen für große x nicht geeignet, da infolge zu großer Entfernung von der Entwicklungsstelle $x = 0$ die Konvergenzgeschwindigkeit zu langsam ist. In diesem Fall benutzt man asymptotische Entwicklungen an der Stelle $+\infty$. Es sei noch die asymptotische Entwicklung der Besselfunktion angegeben:

$$\begin{aligned} J_{\pm n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \Bigg\{ & \cos\left(x \mp \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2x)^{2\nu}} \frac{(n + 2\nu - \frac{1}{2})!}{(2\nu)!\,(n - 2\nu - \frac{1}{2})!}\right] \\ & - \sin\left(x \mp \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2x)^{2\nu+1}} \frac{(n + 2\nu + \frac{1}{2})!}{(2\nu+1)!\,(n - 2\nu - \frac{3}{2})!}\right]\Bigg\}, \\ & n > 0. \end{aligned} \tag{5.231}$$

Bricht man die asymptotischen Reihen [...] aus (5.231) ab, so ist der absolute Betrag des Fehlers der entstehenden Näherung kleiner als der Betrag des jeweils ersten vernachlässigten Gliedes.

* *Aufgabe 5.27:* Es gilt

$$Z_n'(x) = -Z_{n+1}(x) + \frac{n}{2} Z_n(x), \tag{5.232}$$

wobei $Z_n(x)$ eine beliebige Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist. Man beweise dies im Fall $Z_n(x) = J_n(x)$.

Aufgabe 5.28: *

a) Mittels (5.227) beweise man

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k}-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=-2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}-\frac{1}{\nu+1}+\ln\frac{(m+\nu)(m+\nu+1)}{m^2}+r_m \quad \text{mit} \quad \lim_{m\to\infty} r_m=0.$$

b) Was ergibt sich aus a) für $\Psi(\nu)+\Psi(\nu+1)$ $(\nu=1,2,\ldots)$?

c) Mittels b) führe man den Beweis in Aufgabe 5.27 im Fall $Z_0(x)=N_0(x)$.

Aufgabe 5.29: $y=y(x)$ sei Lösung der Differentialgleichung (V.2) des Vorwortes. *

a) Welcher Differentialgleichung genügt $w=w(u)$, falls man $y(x)=w(u)$ mit $u=L-x$ setzt?

b) Welcher Differentialgleichung genügt $Z=Z(z)$, falls $Z(z)=w(u)$ mit $z=a\sqrt{u}$ sein soll?

c) Für welche Werte a aus b) ergibt sich für $Z(z)$ eine Besselsche Differentialgleichung?

d) Mittels der Ergebnisse von a) bis c) gebe man die allgemeine Lösung von (V.2) an.

Aufgabe 5.30: Es sind die positiv-reellen Nullstellen von $J_0(x)$ gesucht. *

a) Aus (5.231) ermittele man für sie erste Näherungen x_1, indem man von den asymptotischen Reihen nur die absoluten Glieder berücksichtigt.

b) Man verbessere die Näherung aus a), indem man in den asymptotischen Reihen jeweils die ersten beiden von null verschiedenen Glieder berücksichtigt und danach einen Iterationsschritt des Newton-Verfahrens (Band 2) durchführt.

c) Man werte die Ergebnisse für die ersten vier Nullstellen numerisch aus und gebe jeweils vier Dezimalstellen an.

6. Rand- und Eigenwertaufgaben

Es ist aus Band 7/1 bekannt, daß Anfangswertaufgaben genau eine Lösung besitzen. Bei Randwertaufgaben ist der Sachverhalt komplizierter (siehe Aufgabe 3.15). Beschäftigt man sich mit *linearen* Randwertaufgaben, so ergeben sich Sätze, die völlig analog zu denen bei linearen Gleichungssystemen (Band 13) sind. In Analogie zur allgemeinen Eigenwertaufgabe bei Matrizen (Band 13) kann man eine Eigenwerttheorie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen aufbauen und Fourierentwicklungen nach Systemen von Eigenfunktionen vornehmen.

6.1. Beispiele

Bereits im Band 7/1 werden in den Definitionen 1.6 und 1.7 Rand- und Eigenwertaufgaben eingeführt. Wir beginnen mit einer Randwertaufgabe.

Beispiel 6.1 (Kettenlinie): Ein vollkommen biegsames Seil mit konstanter Dichte und der Länge l hängt im Schwerefeld zwischen zwei Masten, die die jeweiligen Höhen h_1 und h_2 besitzen und deren gegenseitige Entfernung a beträgt. Die Gestalt des Seiles werde durch die Funktion $w = w(x)$ $(0 \leqq x \leqq a)$ angegeben. Die Gleichgewichtsbedingungen zeigen, daß die unbekannte Horizontalkomponente der Seilkraft einerseits konstant ist und andererseits durch $w''[1 + (w')^2]^{-\frac{1}{2}}$ angegeben werden kann. Somit ergeben sich für $w = w(x)$ $(0 \leqq x \leqq a)$ die nichtlineare Differentialgleichung

$$\left(\frac{w''}{\sqrt{1 + (w')^2}}\right)' = 0, \tag{6.1}$$

die Randbedingungen

$$w(0) = h_1, \quad w(a) = h_2 \tag{6.2}$$

und als (Rand)-Bedingung in Integralgestalt

$$\int_0^a \sqrt{1 + (w')^2}\,\mathrm{d}x = l. \tag{6.3}$$

* *Aufgabe 6.1:* Man gebe zwischen a, h_1, h_2 und l eine Ungleichung an, die garantiert, daß die Randwertaufgabe (6.1), (6.2), (6.3) keine Lösung besitzt.

Gemäß Abschnitt 3.2.3. setzen wir

$$p(x) = w'(x) \tag{6.4}$$

und erhalten aus (6.1)

$$p' = C_1 \sqrt{1 + p^2}. \tag{6.5}$$

Trennung der Veränderlichen (Abschnitt 2.3.1.) führt von (6.5) zu

$$\operatorname{arsinh} p = C_1 x + C_2,$$

und damit ist

$$p(x) = \sinh\,(C_1 x + C_2). \tag{6.6}$$

Aus (6.6) ergibt sich mit (6.4) im Falle $C_1 = 0$

$$w(x) = x \sinh C_2 + C_3, \text{ und es ist} \tag{6.7}$$

$$w(x) = \frac{1}{C_1} \cosh (C_1 x + C_2) + C_3, \text{ falls } C_1 \neq 0 \tag{6.8}$$

gilt. Die Konstanten C_1, C_2, C_3 sind mittels der Randbedingungen (6.2), (6.3) zu berechnen. Der Fall (6.7) liegt vor, falls

$$l = \sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2} \tag{6.9}$$

gilt, und es ergibt sich die geradlinige Verbindung der Aufhängepunkte

$$w(x) = \frac{1}{a}(h_2 - h_1)\, x + h_1 . \tag{6.10}$$

Einsetzen von (6.8) in (6.2) führt zu den beiden Gleichungen

$$h_1 - C_3 = \frac{1}{C_1} \cosh C_2 \tag{6.11}$$

und

$$h_2 - C_3 = \frac{1}{C_1} \cosh (C_1 a + C_2). \tag{6.12}$$

Beachten wir die Beziehung

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \tag{6.13}$$

und die Tatsache, daß der Kosinushyperbolikus stets positiv ist, so erhalten wir aus (6.8) und (6.3)

$$\frac{1}{C_1} (\sinh (C_1 a + C_2) - \sinh C_2) = l. \tag{6.14}$$

Zur Vorbereitung für die Bestimmung von C_1, C_2, C_3 aus dem nichtlinearen Gleichungssystem (6.11), (6.12), (6.14) notieren wir zunächst (s. Bd. 1.)

$$\cosh \alpha - \cosh \beta = 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{6.15}$$

und

$$\sinh \alpha - \sinh \beta = 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2} . \tag{6.16}$$

Nunmehr bilden wir die Differenz von (6.12) und (6.11) und wenden (6.15) an:

$$h_2 - h_1 = \frac{2}{C_1} \sinh \left(\frac{1}{2} C_1 a + C_2\right) \sinh \left(\frac{1}{2} C_1 a\right) . \tag{6.17}$$

Mittels (6.16) wird die linke Seite von (6.14) umgeformt:

$$\frac{2}{C_1} \cosh \left(\frac{1}{2} C_1 a + C_2\right) \sinh \left(\frac{1}{2} C_1 a\right) = l. \tag{6.18}$$

Das Quadrat von (6.17) wird vom Quadrat von (6.18) subtrahiert. Es ergibt sich bei Beachtung von (6.13)

$$l^2 - (h_2 - h_1)^2 = \frac{4}{C_1^2} \sinh^2 \left(\frac{1}{2} C_1 a \right). \tag{6.19}$$

Die Gleichung (6.19) zeigt, daß $l^2 - (h_2 - h_1)^2$ positiv sein muß; in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Aufgabe 6.1 und dem bereits behandelten Fall (6.7), (6.9), (6.10). Mit der Abkürzung

$$z = \tfrac{1}{2} C_1 a \tag{6.20}$$

kann man für (6.19)

$$\sinh z = z \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 - \left(\frac{h_2 - h_1}{a}\right)^2} \tag{6.21}$$

schreiben. Wir weisen darauf hin, daß die Folgerung (6.21) auch dann noch richtig ist, wenn C_1 und damit z negativ sein sollte. Aus dem Ergebnis von Aufgabe 6.1 kann abgelesen werden, daß der Wert der Wurzel in (6.21) größer als 1 ist. Damit ist klar, daß die transzendente Gleichung (6.21) genau zwei reelle, von null verschiedene Lösungen z_1 und z_2 besitzt, die sich lediglich im Vorzeichen unterscheiden. Die Ermittelung des Wertes von z_1 und damit von z_2 kann bei gegebenen Zahlenwerten für a, h_1, h_2 und l mit einem numerischen Verfahren (Band 2) geschehen. Also ergibt sich wegen (6.20)

$$C_1 = \frac{2}{a} z_1 \quad \text{oder} \quad C_1 = \frac{2}{a} z_2 = -\frac{2}{a} z_1,$$

kurz

$$C_1 = \pm \frac{2}{a} z_1 \quad (z_1 > 0). \tag{6.22}$$

Bei bekanntem C_1 erhält man C_2 aus (6.17) in eindeutiger Weise. Nunmehr kann C_3 aus (6.11) berechnet werden. Die Werte für C_1, C_2, C_3 sind schließlich in (6.8) einzusetzen. Wegen (6.22) haben sich insgesamt *zwei* Lösungen der Randwertaufgabe (6.1), (6.2), (6.3) ergeben. Im Falle $C_1 > 0$ ist wegen (6.8) die erhaltene Kurve $w = w(x)$ nach oben geöffnet, im Falle $C_1 < 0$ jedoch nach unten.

Im erstgenannten Fall sind die Seilkräfte Zugkräfte, im zweiten Fall Druckkräfte. Wenn man berücksichtigt, daß Seile nur Zugkräfte übertragen können, so ist klar, daß die Lösung mit $C_1 < 0$ unbrauchbar ist.

Beispiel 6.2 (Eulerscher Knickstab): Ein vertikal angebrachter Stab ($0 \leqq x \leqq l$) ist am unteren Rand ($x = 0$) eingespannt und an seinem oberen Rand ($x = l$) frei. Er wird oben durch eine vertikale Einzelkraft F auf Druck ($F > 0$) belastet. Die Biegesteifigkeit EJ sei konstant. Die Kraft F sei richtungstreu, d. h. auch dann noch vertikal gerichtet, wenn der Stab eine Durchbiegung $w = w(x)$ ($0 \leqq x \leqq l$) erfährt. Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes führt das zugehörige Stabilitätsproblem gemäß der Theorie zweiter Ordnung der technischen Mechanik auf die Differentialgleichung

$$w'''' + \lambda w'' = 0, \quad 0 \leqq x \leqq l; \quad \lambda = \frac{F}{EJ} > 0 \tag{6.23}$$

und die Randbedingungen

$$w(0) = 0, \; w'(0) = 0, \; w''(l) = 0, \; w'''(l) + \lambda w'(l) = 0. \tag{6.24}$$

Die Randwertaufgabe (6.23), (6.24) hat für jedes λ die Lösung $w(x) \equiv 0$ $(0 \leqq x \leqq l)$. Damit ergibt sich aus der Definition 1.7, daß durch (6.23), (6.24) eine **Eigenwertaufgabe** mit dem **Eigenwertparameter** $\lambda > 0$ gegeben ist.

Der Ansatz $w = e^{rx}$ führt mit (6.23) zur charakteristischen Gleichung (3.69):

$$r^4 + \lambda r^2 = 0. \tag{6.25}$$

Wegen $\lambda > 0$ hat (6.25) die Lösungen

$$r_1 = 0, \quad \text{Vielfachheit } l_1 = 2 \tag{6.26}$$

und

$$r_2 = \mathrm{i}\sqrt{\lambda}, \; l_2 = 1; \; r_3 = -\mathrm{i}\sqrt{\lambda}, \; l_3 = 1. \tag{6.27}$$

Hieraus ergibt sich schließlich für die Gesamtheit der reellen Lösungen der Differentialgleichungen aus (6.23)

$$w(x) = D_1 + D_2 x + D_3 \cos\sqrt{\lambda}x + D_4 \sin\sqrt{\lambda}x. \tag{6.28}$$

Einsetzen von (6.28) in die Randbedingungen (6.24) liefert das folgende lineare homogene Gleichungssystem für die Unbekannten $D_1, \ldots, D_4$, wobei die dritte Gleichung durch $-\lambda$ und die vierte Gleichung durch λ dividiert wurde $(\lambda > 0)$:

$$\begin{aligned} D_1 \qquad\qquad + D_3 \qquad\qquad\qquad &= 0, \\ D_2 \qquad\qquad\qquad + \sqrt{\lambda} D_4 &= 0, \\ \cos(\sqrt{\lambda}l)\, D_3 + \sin(\sqrt{\lambda}l)\, D_4 &= 0, \\ D_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Ist die Koeffizientendeterminante des Systems (6.29) ungleich null, so sind alle D_ν $(\nu = 1, \ldots, 4)$ gleich null und damit liegt wegen (6.28) die triviale Lösung $w \equiv 0$ $(0 \leqq x \leqq l)$ vor; das ist uninteressant, hierdurch wird keine Eigenlösung geliefert. Bei der weiteren Untersuchung ist daher die Koeffizientendeterminante von (6.29) gleich null zu setzen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 & \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.30}$$

Die Gleichung (6.30) heißt **Eigenwertgleichung**. Ihre Lösungen λ sind die **Eigenwerte** der Eigenwertaufgabe (6.23), (6.24). Entwickelt man die Determinante aus (6.30) nach ihrer ersten Spalte, so reduziert sie sich auf eine Determinante dritter Ordnung, die man zweckmäßig nach ihrer letzten Zeile entwickelt. Man erhält

$$-\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \cos(\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{6.31}$$

Wegen $\lambda > 0$ folgt aus (6.31)

$$\sqrt{\lambda}\,l = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.32}$$

Also ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda = \lambda_k = \frac{1}{l^2}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.33}$$

Zur Bestimmung der zum Eigenwert λ_k gehörigen **Eigenlösungen** $w_k(x)$ ist zunächst der Wert für λ_k aus (6.33) in das Gleichungssystem (6.29) einzusetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} D_1 + D_3 \quad &= 0, \\ D_2 + \frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) D_4 &= 0, \\ 0 \cdot D_3 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) D_4 &= 0, \\ D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Aus der vierten, zweiten, dritten und ersten Gleichung von (6.34) ergibt sich der Reihe nach

$$D_2 = 0,\ D_4 = 0,\ D_3 = C_k\ (C_k \text{ beliebig}),\ D_1 = -C_k. \tag{6.35}$$

Wir setzen (6.35) und (6.33) in (6.28) ein und erhalten alle zum Eigenwert λ_k gehörigen Eigenfunktionen

$$w_k(x) = C_k\left(-1 + \cos\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l}\right) \quad (C_k \neq 0). \tag{6.36}$$

Nimmt man zu (6.36) noch die Funktion $w \equiv 0$ hinzu, so bilden alle diese Funktionen einen eindimensionalen Raum, den zum Eigenwert λ_k gehörigen **Eigenraum.** Wenn man aus ihm eine Funktion, die nicht identisch null ist, herausgreift, z. B. die Funktion mit $C_k = 1$, so ergibt sich als **Basis des zu λ_k gehörigen Eigenraumes:**

$$-1 + \cos\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.37}$$

Bemerkung 1 zu Beispiel 6.2: Ist $\lambda = \dfrac{F}{EJ}$ (siehe (6.23)) kleiner als der kleinste Eigenwert $\lambda_0 = \dfrac{\pi^2}{4l^2}$ (siehe (6.33)), d. h., gilt

$$F < \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}, \tag{6.38}$$

so ist $w \equiv 0$ die einzige Lösung, d. h., der Stab knickt nicht aus. Wird der Wert von F aus (6.38) größer und nimmt er schließlich die Eulersche Knicklast

$$F = F_{\text{krit.}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \tag{6.39}$$

an, so weist das Vorhandensein der zu λ_0 gehörigen Lösungen $w_0(x)$ aus (6.36) darauf hin, daß der Stab auszuknicken beginnt. Da jedoch die Eigenwertaufgabe unendlich viele Lösungen liefert – die Konstante C_0 ist beliebig – wird durch das vorliegende mathematische Modell die konkrete

Knickfigur nicht erfaßt. Woran liegt das? Beim Aufstellen der Differentialgleichung wurde für die Krümmung der Kurve $w = w(x)$ nicht die Formel

$$\frac{w''}{\sqrt{1 + w'^2}^3} \tag{6.40}$$

benutzt, sondern unter der Voraussetzung, daß $|w'|$ gegenüber 1 sehr klein ist, anstatt (6.40) w'' genommen. Das ist auch der Grund dafür, daß die Eigenwertaufgabe (6.23), (6.24) den überkritischen Bereich

$$F > \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \tag{6.41}$$

nicht wirklichkeitsgetreu beschreibt; denn es ist in der Praxis sicher nicht so, daß bei geringfügiger Überschreitung der Eulerschen Knicklast (6.39) nur die Lösung $w \equiv 0$ existiert, also kein Ausknicken vorliegt.

Bemerkung 2 zu Beispiel 6.2: Die Bemerkung 1 darf nicht dahingehend verallgemeinert werden, daß bei Eigenwertaufgaben nur der kleinste Eigenwert interessant sei und die Eigenfunktionen keine praktische Bedeutung hätten. Bei der Zurückführung von partiellen Differentialgleichungen (Band 8) auf gewöhnliche Differentialgleichungen treten Eigenwertaufgaben auf, deren Eigenwerte und Eigenräume alle benötigt werden. So müssen dort Funktionen – nach Art der Fourierentwicklungen aus Band 3 – durch unendliche Reihen dargestellt werden, deren Teilsummen Linearkombinationen von Eigenfunktionen der Eigenwertaufgabe sind.

Es kann vorkommen, daß Eigenwertaufgaben auch *nichtreelle* Eigenwerte besitzen. Wir stellen hierzu die folgende

Aufgabe 6.2: Man zeige, daß durch *

$$y'' + ay' + \lambda y = 0 \quad (0 \leqq x \leqq l,\ a \neq 0) \tag{6.42}$$

und

$$y(0) - y(l) = 0,\ y'(0) - y'(l) = 0 \tag{6.43}$$

eine Eigenwertaufgabe gegeben ist, und daß

$$\lambda = \lambda_k = \frac{4\pi^2}{l^2} k^2 - \frac{2a\pi}{l} k\mathrm{i} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.44}$$

Eigenwerte sind, zu denen jeweils eindimensionale Eigenräume gehören, deren Basen durch

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{l} 2k\pi \mathrm{i} x} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.45}$$

angegeben werden können.

Aufgabe 6.3: Im Beispiel 6.2 sei nunmehr der Stab oben nicht frei sondern gelenkig gelagert. In (6.24) ist daher die Randbedingung $w'''(l) + \lambda w'(l) = 0$ durch *

$$w(l) = 0 \tag{6.46}$$

zu ersetzen.

a) Man zeige, daß es eine Funktion von λ

$$u = u(\lambda) \quad (\lambda > 0) \tag{6.47}$$

derart gibt, daß die Eigenwertgleichung in die Gestalt

$$\tan u = f(u) \quad (u > 0) \tag{6.48}$$

umgeformt werden kann. Wie lautet $f(u)$?

b) Man skizziere die Funktionen $y = \tan u$ und $y = f(u)$ $(u > 0)$. Man lese aus der Skizze und mittels einer Zahlentafel die kleinste Lösung von $\tan u = f(u)$ ab. Wie groß ist damit der kleinste positive Eigenwert λ_{min} und damit die Eulersche Knicklast $F_{\text{krit.}}$?

* *Aufgabe 6.4:* Von der Eigenwertaufgabe für $y = y(x)$

$$y'''' + \lambda y = 0 \quad (0 \leqq x \leqq l, \lambda > 0), \tag{6.49}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(l) = 0,\ y'''(l) = 0 \tag{6.50}$$

bestimme man die beiden kleinsten positiven Eigenwerte λ und reelle Basen der zugehörigen Eigenräume. Man arbeite mit den Funktionen cos, sin, cosh und sinh.

* *Aufgabe 6.5:* In Fortführung von Aufgabe 5.9 soll deren Lösung $\vartheta(x)$ auch noch der weiteren Randbedingung $\vartheta(l) = 0$ aus (V.5) genügen.

a) Welche Eigenwertgleichung ergibt sich für F, falls man mit der Abkürzung $u = \lambda^4 l^4$ arbeitet?

b) Man bestimme eine erste Näherung u_1 für die kleinste positive Lösung u des Ergebnisses von a), indem man die dortige Potenzreihe nach dem quadratischen Glied abbricht.

c) Man löse die Gleichung des Ergebnisses von a) nach dem u des linearen Gliedes der Potenzreihe auf. Es entsteht eine Gleichung des Gestalt $u = \varphi(u)$. Man überzeuge sich, daß in der Nähe von $u = u_1$ die Ableitung $\varphi'(u)$ dem absoluten Betrag nach kleiner als 1 ist und damit das Iterationsverfahren $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Zahlenfolge $u_1, u_2, \ldots$ liefert, die gegen die kleinste positive Lösung konvergiert (Band 2). Man breche die Reihe von $\varphi(u)$ nach dem Glied, das u^4 enthält ab, und berechne $u_2, \ldots, u_6$.

d) Aus c) ermittele man die kritische Kipplast $F_{\text{krit.}}$ (vgl. die Bemerkung 1 zum Beispiel 6.2).

6.2. Behandlung von Randwertaufgaben durch Zurückführen auf Anfangswertaufgaben

Beherrscht man die Behandlung von Randwertaufgaben (RWA) durch Zurückführen auf Anfangswertaufgaben (AWA), so kann man beispielsweise bei der numerischen Lösung von RWA auch alle Methoden heranziehen, die sich mit der numerischen Lösung von AWA befassen (Band 7/1, 2.5.; Band 18). Zunächst erläutern wir den Fall der *linearen* RWA am

Beispiel 6.3 (vgl. Beispiel 1.11): Für die Durchbiegung $w(x)$ eines Balkens, der sich längs der x-Achse erstreckt $(0 \leqq x \leqq l)$ und das Flächenträgheitsmoment $EJ(x)$ (E: Elastizitätsmodul) besitzt, gilt die gewöhnliche lineare Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(EJ(x)w'')'' = p(x), \tag{6.51}$$

wobei $p(x)$ die senkrecht zur Balkenachse wirkende Streckenlast angibt. Der Balken sei am linken Rand $(x = 0)$ fest eingespannt, d. h. es gilt

$$w(0) = 0,\ w'(0) = 0. \tag{6.52}$$

Am rechten Rand ($x = l$) liege eine elastische Senk- und Drehstützung vor, d. h. es gelten mit den Bezeichnungen für die *Momentenfunktion*

$$M(x) = EJw'' \tag{6.53}$$

und die *Querkraftfunktion*

$$Q(x) = M'(x) \tag{6.54}$$

die weiteren Bedingungen

$$Q(l) - c_1 w(l) = 0 \quad (c_1\text{: Druckfederkonstante}), \tag{6.55}$$

$$M(l) + c_2 w'(l) = 0 \; (c_2\text{: Drehfederkonstante}). \tag{6.56}$$

Zunächst werden *drei Anfangswertaufgaben* gelöst. Bezeichnet man deren Lösungen mit $w_p(x)$, $w_1(x)$ und $w_2(x)$, so sei

$$\text{I. } (EJ(x)\, w_p'')'' = p(x),\; w_p(0) = 0,\; w_p'(0) = 0,\; M_p(0) = 0,\; Q_p(0) = 0, \tag{6.57}$$

$$\text{II. } (EJ(x) w_1'')'' = 0,\; w_1(0) = 0,\; w_1'(0) = 0,\; M_1(0) = 1,\; Q_1(0) = 0, \tag{6.58}$$

$$\text{III. } (EJ(x) w_2'')'' = 0,\; w_2(0) = 0,\; w_2'(0) = 0,\; M_2(0) = 0,\; Q_2(0) = 1. \tag{6.59}$$

Aus (6.57), (6.58), (6.59) in Verbindung mit (6.53), (6.54) folgt, daß alle Funktionen $w(x)$, die sowohl der Differentialgleichung (6.51) als auch den Anfangsbedingungen (6.52) genügen, durch

$$w(x) = w_p(x) + C_1 w_1(x) + C_2 w_2(x)$$
$$(C_1, C_2 \text{ beliebige Konstanten}) \tag{6.60}$$

angegeben werden können. Zur Lösung der RWA (6.51), (6.52), (6.55), (6.56) wird (6.60) in (6.55) und (6.56) eingesetzt. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für C_1 und C_2. Setzt man schließlich die ermittelten Werte für C_1 und C_2 in (6.60) ein, so erhält man die Lösung der ursprünglich gegebenen Randwertaufgabe (6.51), (6.52), (6.55), (6.56).

Aufgabe 6.6: Man löse die RWA des Beispiels 6.3 und ermittele $M(x)$ und $Q(x)$ im folgenden Spezialfall: *

$$l = 5\,\mathrm{m}, EJ(x) = \mathrm{const} = 1250\,\mathrm{MNm}^2, c_1 = 500\,\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}, c_2 = 5000\,\mathrm{MNm} \tag{6.61}$$

und

$$p(x) = q + F\delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \text{mit} \quad q = \mathrm{const} = 2\,\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad F = 5\,\mathrm{MN}, \tag{6.62}$$

wobei

$$F\delta\left(x - \frac{l}{2}\right) \tag{6.63}$$

folgendes bedeutet (vgl. 3.3.9.): Man arbeite zunächst mit derjenigen Streckenlast, die im (kleinen) Intervall

$$\frac{l}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq x \leqq \frac{l}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.64}$$

den konstanten Wert $\frac{F}{\varepsilon}$ annimmt und in den übrigen Punkten des Intervalls $0 \leqq x \leqq l$ gleich null gesetzt wird. Im Ergebnis ist dann der Grenzübergang $\varepsilon \to +0$ durchzuführen. Technisch bedeutet (6.63) den Angriff einer Einzellast F senkrecht zur Balkenachse im Punkte $x = \frac{l}{2}$.

Der nichtlineare Fall ist komplizierter, da man dann nicht mehr das Superpositionsprinzip zur Verfügung hat. Wir illustrieren das am

Beispiel 6.4: Für $y = y(x)$ $(0 \leqq x \leqq a)$ sei eine RWA gegeben, bestehend aus der (im allgemeinen nichtlinearen) expliziten Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6.65}$$

und den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \tag{6.66}$$

$$y(a) = b. \tag{6.67}$$

Zunächst beschäftigt man sich mit einer Schar von Anfangswertaufgaben. Ist ω der Scharparameter, so sei die Lösung der zu ω gehörigen AWA durch

$$Y = Y(x, \omega) \tag{6.68}$$

bezeichnet. Damit kann die Schar von AWA angegeben werden. Y genüge als Funktion von x der Differentialgleichung (6.65), d. h. es gelte

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = f\left(x, Y, \frac{\partial Y}{\partial x}\right). \tag{6.69}$$

Als Anfangsbedingung für $Y(x, \omega)$ werde

$$Y(0, \omega) = 0, \frac{\partial}{\partial x} Y(0, \omega) = \omega \tag{6.70}$$

vorgeschrieben. Man wird nun für einige ω-Werte die AWA (6.69), (6.70) lösen und prüfen, für welches $\omega = \omega_0$ die Lösung $Y(x, \omega_0)$ an der Stelle $x = a$ der Zahl b aus der Randbedingung (6.67) am nächsten kommt, also

$$Y(a, \omega_0) = b + \Delta b \quad \text{mit} \quad „|\Delta b| \text{ klein}“ \tag{6.71}$$

gilt.

Zur Verbesserung des Wertes $\omega = \omega_0$ studieren wir, wie sich Y bei festem x ändert, falls ω in der Umgebung von $\omega = \omega_0$ variiert. Hierzu wird man die Funktion

$$\eta(x, \omega) = \frac{\partial Y}{\partial \omega} \tag{6.72}$$

diskutieren. Aus (6.72) folgt durch partielle Differentiation von (6.69) nach ω:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 Y(x, \omega)}{\partial \omega \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} f(x, Y(x, \omega), \frac{\partial}{\partial x} Y(x, \omega)) \tag{6.73}$$

und weiter mit der Kettenregel

$$= \frac{\partial f(x, Y, Y')}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f(x, Y, Y')}{\partial Y'} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{6.74}$$

wobei nach der Berechnung von $\frac{\partial f(x, Y, Y')}{\partial Y}$ und $\frac{\partial f(x, Y, Y')}{\partial Y'}$ für Y bzw. Y' die Ausdrücke $Y(x,\omega)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x} Y(x, \omega)$ einzusetzen sind. Im Falle $\omega = \omega_0$ ergibt sich somit wegen (6.72), (6.73), (6.74) für

$$\eta(x) = \eta(x, \omega_0) \tag{6.75}$$

die gewöhnliche explizite *lineare* Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\eta''(x) = A(x)\, \eta(x) + B(x)\, \eta'(x), \tag{6.76}$$

wobei man $A(x)$ bzw. $B(x)$ dadurch herstellt, daß man in die Funktionen $\frac{\partial}{\partial Y} f(x, Y, Y')$ bzw. $\frac{\partial}{\partial Y'} f(x, Y, Y')$ für Y den Ausdruck $Y(x, \omega_0)$ und für Y' den Ausdruck $\frac{\partial}{\partial x} Y(x, \omega_0)$ einsetzt. Durch partielle Differentiation der Anfangsbedingungen (6.70) nach ω ergeben sich bei Beachtung von (6.72) die folgenden Anfangsbedingungen für (6.75)

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1. \tag{6.77}$$

Die Funktion $\eta(x)$ genügt also einer *linearen* AWA, bestehend aus der zu (6.65) gehörigen **Störungsgleichung (Variationsgleichung)** (6.76) und den Anfangsbedingungen (6.77). Hat man $\eta(x)$ berechnet, so interessiert insbesondere der Funktionswert an der Stelle $x = a$, d. h. [siehe (6.75)]

$$\eta(a) = \eta(a, \omega_0). \tag{6.78}$$

Der Ausdruck $Y(a, \omega_0 + \Delta\omega)$ wird jetzt bezüglich $\Delta\omega$ nach Taylor an der Stelle $\Delta\omega = 0$ entwickelt. Die Rechnung ergibt wegen (6.72), (6.75), (6.78)

$$Y(a, \omega_0 + \Delta\omega) = Y(a, \omega_0) + \eta(a)\, \Delta\omega + \ldots \tag{6.79}$$

und damit wegen (6.71)

$$Y(a, \omega_0 + \Delta\omega) = b + \Delta b + \eta(a)\, \Delta\omega + \ldots. \tag{6.80}$$

Die Funktion $Y(x, \omega_0 + \Delta\omega)$ ist also dann eine bessere Näherung als $Y(x, \omega_0)$ für die Lösung $y(x)$ der RWA (6.65), (6.66), (6.67), wenn man

$$\Delta\omega = -\frac{1}{\eta(a)} \Delta b \tag{6.81}$$

setzt.

6.3. Behandlung von Randwertaufgaben durch Diskretisation (Differenzenverfahren)

Wir legen eine weitere Methode zur Lösung von RWA vor. Ihr Wesen besteht darin, in der Differentialgleichung und in den Randbedingungen alle *Differentialquotienten* durch (verallgemeinerte) *Differenzenquotienten* zu ersetzen. Ehe wir im Beispiel 6.6 die Methode vorführen, nennen wir als Vorbereitung die folgende

Definition 6.1: *Unter einem* **finiten Ausdruck** r**-ter Ordnung** ($r = 0, 1, \ldots$) *für die n-te Ableitung der Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = x_\nu$ versteht man eine Summe der Gestalt* **D. 6.1**

$$\sum_{k=1}^{n+r+1} C_k y(x_\nu + \alpha_k h), \tag{6.82}$$

deren Taylorentwicklung bezüglich h mit der Entwicklungsstelle $h = 0$ folgendermaßen beginnt:

$$\sum_{k=1}^{n+r+1} C_k y(x_\nu + \alpha_k h) = y^{(n)}(x_\nu)\, h^n + d_{n+r+1} h^{n+r+1} + d_{n+r+2} h^{n+r+2} + \dots \tag{6.83}$$

Bemerkung 1 zur Definition 6.1.: Bei gegebenen Werten für α_k $(k = 1, \dots, n + r + 1)$ gibt es mindestens ein $(n + r + 1)$-tupel $(C_1, C_2, \dots, C_{n+r+1})$ derart, daß (6.83) gilt.

Bemerkung 2 zur Definition 6.1: (6.83) liefert die Möglichkeit, die n-te Ableitung der Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = x_\nu$ näherungsweise durch einen finiten Ausdruck r-ter Ordnung darzustellen:

$$y^{(n)}(x_\nu) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=1}^{n+r+1} C_k y(x_\nu + \alpha_k h) + R \quad \text{mit} \quad R = -d_{n+r+1} h^{r+1} + \dots \, . \tag{6.84}$$

Beispiel 6.5: Im Fall $n = 2$, $r = 0$ und $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ liefert die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} C_k y(x_\nu + (k-2)h) &= y(x_\nu) \sum_{k=1}^{3} C_k + h y'(x_\nu) \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2) \\ &+ \frac{1}{2!} h^2 y''(x_\nu) \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2)^2 + \frac{1}{3!} h^3 y'''(x_\nu) \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2)^3 \\ &+ \frac{1}{4!} h^4 y''''(x_\nu) \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2)^4 + \dots \end{aligned} \tag{6.85}$$

Um in (6.85) die Struktur aus (6.83) zu erhalten, muß

$$\sum_{k=1}^{3} C_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} C_k (k-2)^2 = 2! \tag{6.86}$$

gefordert werden. In (6.86) stehen drei lineare Gleichungen für C_1, C_2, C_3. Es ergibt sich

$$C_1 = 1, \; C_2 = -2, \; C_3 = 1. \tag{6.87}$$

Beachtet man, daß „zufällig" $\sum_{k=1}^{3} C_k (k-2)^3 = 0$ ist, lautet (6.84) im vorliegenden Beispiel

$$y''(x_\nu) = \frac{1}{h^2} (y(x_\nu - h) - 2y(x_\nu) + y(x_\nu + h)) + R \tag{6.88}$$

mit

$$R = -\frac{1}{12} h^2 y''''(x_\nu) + \dots \, . \tag{6.89}$$

* *Aufgabe 6.7:* Analog zum Beispiel 6.5 behandle man die folgenden Fälle:

a) $n = 1$, $r = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$,

b) $n = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 2$,

c) $n = 4$, $r = 0$, $\alpha_k = k - 3$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Die Anwendung der Definition 6.1 bei der Lösung von Randwertaufgaben zeigen wir am

Beispiel 6.6: Gegeben sei die Randwertaufgabe für $y(x)$

$$y'' = f(x), \; y(0) = 0, \; y(a) = b. \tag{6.90}$$

Es wird eine *Diskretisation* vorgenommen, d. h., man teilt das Intervall $0 \leqq x \leqq a$ in n Teile durch die $n + 1$ Teilpunkte

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = a. \tag{6.91}$$

Wählt man die Teilintervalle alle gleich lang, so gilt

$$x_\nu = \nu h \quad (\nu = 0, 1, \dots, n) \quad \text{mit} \quad h = \frac{a}{n}. \tag{6.92}$$

Man begnügt sich nun damit, für die Lösung $y(x)$ der RWA lediglich an den Stellen x_ν $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ Näherungswerte Y_ν $(\nu = 0, 1, \dots, n)$ für die Funktionswerte $y(x_\nu)$ $(\nu = 0, \dots, n)$ zu bestimmen. Man nähert hierzu alle Ableitungen, die in der RWA vorkommen, durch finite Ausdrücke (siehe Definition 6.1) an. Ersetzt man beispielsweise y'' aus (6.90) an den Stellen $x_\nu = \nu h$ $(\nu = 1, 2, \dots, n - 1)$ durch die rechte Seite von (6.88) [ohne R], so ergibt sich nach Multiplikation mit h^2 mit den oben eingeführten Bezeichnungen

$$Y_{\nu-1} - 2Y_\nu + Y_{\nu+1} = h^2 f(x_\nu), \quad (\nu = 1, \dots, n - 1). \tag{6.93}$$

Die Randbedingungen aus (6.90) geben zu

$$Y_0 = 0, \; Y_n = b \tag{6.94}$$

Anlaß. Für $n = 8$ beispielsweise lautet (6.93) unter Beachtung von (6.94) ausführlich

$$\begin{aligned}
-2Y_1 + Y_2 &= h^2 f(x_1),\\
Y_1 - 2Y_2 + Y_3 &= h^2 f(x_2),\\
Y_2 - 2Y_3 + Y_4 &= h^2 f(x_3),\\
Y_3 - 2Y_4 + Y_5 &= h^2 f(x_4),\\
Y_4 - 2Y_5 + Y_6 &= h^2 f(x_5),\\
Y_5 - 2Y_6 + Y_7 &= h^2 f(x_6),\\
Y_6 - 2Y_7 &= h^2 f(x_7) - b.
\end{aligned} \tag{6.95}$$

Im Gleichungssystem (6.95) sind in jeder Gleichung höchstens drei Unbekannte miteinander verknüpft. Die Matrix des Gleichungssystems enthält viele Nullen; die von null verschiedenen Elemente ordnen sich in einem Band an, das von links oben nach rechts unten führt. Derartige **Bandmatrizen** treten immer auf, wenn eine Randwertaufgabe der Diskretisation unterworfen wird. Mit diesen grundsätzlichen Erörterungen müssen wir uns hier begnügen. Zur numerischen Auswertung und Fehlerabschätzung verweisen wir auf die Bände 13 und 18 und die dort zitierte Literatur.

6.4. Lineare Rand- und Eigenwertaufgaben

D. 6.2 **Definition 6.2:** *Eine Randwertaufgabe für eine Funktion $y = y(x)$* (Definition 1.6) *heißt* **linear,** *wenn die Differentialgleichung linear ist, also*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x) = g(x), \quad a_n(x) \neq 0, \tag{6.96}$$

gilt und wenn beim Einsetzen der allgemeinen Lösung

$$y(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x) \tag{6.97}$$

mit

$$y_\mathrm{h}(x) = C_1 y_{\mathrm{h}1}(x) + \ldots + C_n y_{\mathrm{h}n}(x) \tag{6.98}$$

in die vorliegenden Randbedingungen sich ein lineares Gleichungssystem für die $C_1, \ldots, C_n$ ergibt.

Die lineare Randwertaufgabe heißt **homogen,** *falls die Differentialgleichung homogen ist und wenn das Gleichungssystem für die $C_1, \ldots, C_n$ homogen ist; andernfalls heißt sie* **inhomogen.**

D. 6.3 **Definition 6.3:** *Unter einer* **linearen Eigenwertaufgabe** *versteht man eine lineare homogene Randwertaufgabe, wobei eine Konstante λ* (**Eigenwertparameter** *λ genannt), deren Werte einer Menge von reellen Zahlen oder auch komplexen Zahlen zu entnehmen sind, entweder in der Differentialgleichung oder in den Randbedingungen oder sowohl in der Differentialgleichung als auch in den Randbedingungen auftritt. Alle diejenigen λ-Werte, für die es nichttriviale Lösungen der Randwertaufgabe, d. h. Lösungen*

$$y(x) \quad \textit{mit} \quad y(x) \not\equiv 0$$

gibt, heißen **Eigenwerte,** *die zugehörigen nichttrivialen Lösungen der Randwertaufgabe heißen* **Eigenlösungen.**

Zusatz zur Definition 6.3: Nimmt man zu den Eigenlösungen, die zum Eigenwert λ_k gehören, noch die Lösung $y \equiv 0$ hinzu, so bilden sie einen linearen Raum, **Eigenraum** genannt. Die Dimension des Eigenraumes heißt *Vielfachheit* des zugehörigen Eigenwertes λ_k.

* *Aufgabe 6.8:* Wird durch (6.1), (6.2), (6.3) aus Beispiel 6.1 eine lineare Randwertaufgabe gegeben? Ist sie gegebenenfalls linear homogen oder linear inhomogen?

* *Aufgabe 6.9:* Wird durch (6.23), (6.24) aus Beispiel 6.2 eine lineare Eigenwertaufgabe gegeben?

Eine lineare inhomogene Randwertaufgabe behandeln wir im

Beispiel 6.7: In einer Vollkugel vom Radius R werde in ihrem Inneren pro Volumen- und Zeiteinheit die konstante Wärmemenge Q erzeugt. Im stationären Zustand stellt sich infolge der Wärmeleitung ein nur vom Abstand r vom Mittelpunkt abhängiges Temperaturfeld $T = T(r)$ ein, das der linearen inhomogenen Differentialgleichung

$$rT''(r) + 2T'(r) = -\frac{Q}{\alpha} r \quad 0 \leqq r \leqq R \tag{6.99}$$

und der Randbedingung

$$-\alpha T'(R) = \beta T(R) \tag{6.100}$$

genügt. Hierbei sind $\alpha > 0$ bzw. $\beta > 0$ konstante Wärmeleitungs- bzw. Übergangszahlen. Die Differentialgleichung (6.99) ist zwar bezüglich $0 < r \leqq R$ eine explizite, bezüglich $0 \leqq r \leqq R$ jedoch eine implizite Differentialgleichung (Definition 1.2). Damit ist die Existenz- und Unitätsaussage aus Satz 3.1 für die Stelle $r = 0$ nicht anwendbar. Insbesondere kann aus (6.99) für die Stelle $r = 0$ nicht die Stetigkeit jeder Lösung $T = T(r)$ gefolgert werden. Es ist deshalb nicht überflüssig, neben (6.100) noch die Randbedingung

$$„\lim_{r \to +0} T(r) \text{ existiert}“ \tag{6.101}$$

zu fordern. Multiplikation von (6.99) mit r liefert eine Eulersche Differentialgleichung. Mit den Hilfsmitteln aus Band 7/1 ergibt sich für (6.99) die allgemeine Lösung

$$T(r) = C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{Q}{6\alpha} r^2. \tag{6.102}$$

In (6.102) existiert der Grenzwert (6.101) genau im Fall

$$C_2 = 0. \tag{6.103}$$

Danach setzen wir (6.102) mit (6.103) in die Randbedingung (6.100) ein und erhalten

$$C_1 = Q\left[\frac{R}{3\beta} + \frac{1}{6\alpha} R^2\right]. \tag{6.104}$$

Aus (6.102), (6.103), (6.104) folgt als Lösung der linearen inhomogenen Randwertaufgabe (6.99), (6.100), (6.101)

$$T(r) = Q\left[\frac{R}{3\beta} + \frac{1}{6\alpha}(R^2 - r^2)\right]. \tag{6.105}$$

Aufgabe 6.10: Für das zur Kugel aus Beispiel 6.7 gehörige Verschiebungsvektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ergibt sich *

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = f(r)\,\mathbf{r} \quad (r = |\mathbf{r}|) \tag{6.106}$$

mit

$$\lim_{r \to +\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{o} \tag{6.107}$$

und

$$rf''(r) + 4f'(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma T'(r) \tag{6.108}$$

[$0 < \nu < \frac{1}{2}$: Querdehnzahl, $\gamma > 0$ Wärmeausdehnungszahl, $T(r)$ siehe (6.105)]. Gesucht ist die Radialspannung (G: Schubmodul)

$$\sigma_r(r) = \frac{2G}{1-2\nu}[(1+\nu)f(r) + (1-\nu)rf'(r) - (1+\nu)\gamma T(r)], \tag{6.109}$$

falls auf der Kugeloberfläche der konstante Druck $p > 0$ wirkt, also die Randbedingung

$$\sigma_r(R) = -p \tag{6.110}$$

gilt.

Im Beispiel 6.1. ergaben sich genau zwei Lösungen. Bei *linearen* Randwertaufgaben kommt dies nicht vor. Es gilt der

S. 6.1 **Satz 6.1 (Alternativsatz):** *Entweder hat die lineare inhomogene Randwertaufgabe genau eine Lösung – und damit die zugehörige homogene Randwertaufgabe nur die triviale Lösung* $y \equiv 0$ *– oder die zugehörige homogene Randwertaufgabe hat nichttriviale Lösungen, während die inhomogene nur noch für besondere Werte der rechten Seiten des Gleichungssystems lösbar ist – nämlich genau dann, wenn die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Koeffizientenmatrix einander gleich sind* (Band 13) *– und dann unendlich viele Lösungen besitzt.*

Beispiel 6.8: Die Durchbiegung $w = w(x)$ des beiderseitig gelenkig gelagerten Druckstabes (Druckkraft F) mit der konstanten Biegesteifigkeit EJ und einer Querbelastung $q = q(x)$ genügt der linearen Randwertaufgabe

$$w'''' + \lambda w'' = q(x),\ 0 \leqq x \leqq l,\ \lambda = \frac{F}{EJ}, \tag{6.111}$$

$$w(0) = 0,\ w''(0) = 0,\ w(l) = 0,\ w''(l) = 0. \tag{6.112}$$

Wir führen die Rechnung im Fall

$$q(x) = q_1 \sin\frac{\pi x}{1} + q_2 \sin\frac{2\pi x}{l} \quad (q_1, q_2 \text{ Konstanten}) \tag{6.113}$$

durch. Mit den Hilfsmitteln aus Band 7/1 erhalten wir im Fall

$$\lambda > 0,\ \lambda \neq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2,\ \lambda \neq \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \tag{6.114}$$

für (6.111) die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} w(x) &= C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda} x) \\ &\quad + q_1 \frac{l^4}{\pi^4 - \lambda \pi^2 l^2} \sin\frac{\pi x}{l} + q_2 \frac{l^4}{(2\pi)^4 - \lambda (2\pi)^2 l^2} \sin\frac{2\pi x}{l}. \end{aligned} \tag{6.115}$$

Einsetzen von (6.115) in die Randbedingungen (6.112) ergibt das lineare Gleichungssystem für $C_1, \ldots, C_4$:

$$\begin{aligned} C_1 \qquad + C_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\ - \lambda C_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\ C_1 + C_2 l + C_3 \cos(\sqrt{\lambda} l) + C_4 \sin(\sqrt{\lambda} l) &= 0, \\ - C_3 \lambda \cos(\sqrt{\lambda} l) - C_4 \lambda \sin(\sqrt{\lambda} l) &= 0. \end{aligned} \tag{6.116}$$

Die Koeffizientendeterminanten von (6.116) ist gleich

$$-\lambda^2 l \sin(\sqrt{\lambda} l) \tag{6.117}$$

und damit im vorliegenden Fall (6.114)

$$\text{ungleich null, falls } \lambda \neq \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 3, 4, \ldots), \tag{6.118}$$

$$\text{gleich null, falls } \lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 3, 4, \ldots) \tag{6.119}$$

ist. Falls (6.118) gilt, hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, nämlich $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Mit diesen Werten führt (6.115) zu genau einer Lösung der linearen Randwertaufgabe. Falls jedoch (6.119) gilt, erhält man aus (6.116) die unendlich vielen Lösungen $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 =$ beliebig, die in (6.115) eingesetzt zu unendlich vielen Lösungen der Randwertaufgabe führen. Damit haben wir im Fall (6.114) die Lösungen der Randwertaufgabe (6.111), (6.112) gefunden. Liegt der Fall

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tag{6.120}$$

vor, so lautet die allgemeine Lösung von (6.111)

$$\begin{aligned} w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\frac{\pi x}{l} + C_4 \sin\frac{\pi x}{l} + q_1 \frac{l^3}{2\pi^3} x \cos\frac{\pi x}{l} \\ + q_2 \frac{l^4}{12\pi^4} \sin\frac{2\pi x}{l} \end{aligned} \tag{6.121}$$

und führt nach dem Einsetzen in die Randbedingungen zu

$$\begin{aligned} C_1 \qquad\qquad + C_3 &= 0, \\ -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 C_3 &= 0, \\ C_1 + C_2 l \qquad - C_3 &= \frac{l^4}{2\pi^3} q_1, \\ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 C_3 &= -\frac{l^2}{2\pi} q_1. \end{aligned} \tag{6.122}$$

Aus (6.122) liest man die folgenden beiden Fälle ab:

„(6.122) ist nicht lösbar, falls $q_1 \neq 0$ ist“ (6.123)

„(6.122) hat unendlich viele Lösungen, falls $q_1 = 0$ ist“, (6.124)

nämlich $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 =$ beliebig. Also erhält man im Fall (6.123) keine und im Fall (6.124) unendlich viele Lösungen der Randwertaufgabe.

Die Diskussion des Falles $\lambda = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$ kann dem Leser überlassen werden.

Bemerkung 1 zum Beispiel 6.8: Analog der Bemerkung 1 zum Beispiel 6.2 ist die Aufgabe (6.111), (6.112) für die Anwendung nur im Fall $0 < \lambda < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ brauchbar. Aus (6.115) folgt:

Selbst wenn im Störglied (6.113) das $q_1 \neq 0$ seinem absoluten Betrag nach sehr klein ist, so überwiegt in der Lösungsformel der q_1 enthaltende Summand, falls nur λ nahe genug bei $\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ liegt. Es wird empfohlen, mit $0 < \lambda < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ die Lösung (6.115) zunächst im Fall $q_1 = 0$ zu skizzieren und sich dann zu überlegen, wie im Fall „sehr kleines $|q_1| \neq 0$, aber λ in der Nähe von $\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$“ in der Lösungsformel (6.115) ein *Durchschlagen* von $w(x)$ infolge des q_1 enthaltenden Summanden eintritt.

Bemerkung 2 zum Beispiel 6.8: Das Phänomen des Durchschlagens ist auch bei Störgliedern anderer Gestalt zu beobachten. Man denke sich hierzu diese in Fourierreihen derart entwickelt, daß (6.113) als Beginn dieser Entwicklungen aufgefaßt werden kann.

* *Aufgabe 6.11:* In Fortsetzung der Aufgaben 5.27 und 5.29 soll die lineare Eigenwertaufgabe (V.2), (V.6) aus dem Vorwort behandelt werden.

a) Wie lautet die Eigenwertgleichung für den Eigenwertparameter ω?

b) Wie lautet das Ergebnis von a) im Fall des Seiles ohne daranhängendem Massenpunkt, d. h., was ergibt sich beim Grenzübergang $m \to +0$ und damit $L \to l$?

c) Im Fall, daß die Punktmasse m die Seilmasse ϱl sehr stark überwiegt, – es ist dann L groß – benutze man im Ergebnis von a) die asymptotischen Entwicklungen (5.231), wobei von den dortigen asymptotischen Reihen nur die absoluten Glieder zu berücksichtigen sind, und beachte Aufgabe 5.27 sowie die Gleichung (5.225). Man notiere das Ergebnis in der Gestalt $\omega = f(\omega)$.

d) In $f(\omega)$ aus c) ersetze man $\sqrt{L-l}$ und $\sqrt{L} - \sqrt{L-l}$ durch die ersten von null verschiedenen Glieder ihrer Taylorentwicklungen bezüglich l an der Stelle $l = 0$.

e) Zur Bestimmung einer Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\omega = f(\omega)$ aus d) ersetze man $\dfrac{1}{f(\omega)}$ durch das erste von null verschiedene Glied seiner Potenzreihenentwicklung bezüglich ω an der Stelle $\omega = 0$. Man vergleiche das gefundene ω mit der Kreisfrequenz des mathematischen Pendels.

Beispiel 6.9: Im Anschluß an die Aufgaben 5.13, 5.17 und das Beispiel 5.14 wird die lineare Eigenwertaufgabe (V.3), (V.4), (V.7), (V.8) behandelt. Zunächst setzen wir

$$E < 0 \quad \text{und damit} \quad \lambda < 0 \tag{6.125}$$

voraus. Mit

$$\beta_1 = \sqrt{-\lambda},\ \beta_2 = -\sqrt{-\lambda} \tag{6.126}$$

ergibt sich wegen (5.180), (5.181) beim Einsetzen von (5.179) in (V.8) für $\tilde{C}_1$ der Wert null, weil $\tilde{R}_1(r)$ für $r \to +\infty$ nach Unendlich divergiert. Also haben die Eigenfunktionen die Struktur

$$\tilde{C}_2\tilde{R}_2(r) = \mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}r} r^\alpha v(r), \quad \alpha = -1 + \frac{a}{\sqrt{-\lambda}} \tag{6.127}$$

mit

$$\tilde{C}_2\, v(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \tilde{c}_\nu r^{-\nu}. \tag{6.128}$$

Andererseits zeigt die Lösung der Aufgaben 5.13 und 5.17, daß die Eigenfunktionen infolge der Randbedingung (V.7) in der Gestalt

$$C_1R_1(r) = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu \quad (0 \leqq r < \infty) \tag{6.129}$$

angebbar sein müssen. Aus (6.127), (6.129) folgt für die Entwicklung von $v(r)$ an der Stelle $r = 0$

$$v(r) = r^{-\alpha+l} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu, \quad \alpha = -1 + \frac{a}{\sqrt{-\lambda}}. \tag{6.130}$$

Einsetzen von (6.130) in (5.175), (5.176) führt schließlich zur Rekursionsformel

$$a_\nu = \frac{2\sqrt{-\lambda}\,(\nu + l - \alpha - 1)}{(\nu + l - \alpha)(\nu + l - \alpha - 1) + 2(\alpha + 1)(\nu + l - \alpha) + \alpha(\alpha + 1) - l(l + 1)}\, a_{\nu-1}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots). \qquad (6.131)$$

Sollte in (6.131) der Zähler für kein ν verschwinden, so ist (6.127) mit (6.130) gewiß keine Eigenfunktion, weil dann im Widerspruch zu (6.128) $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \infty$ gelten würde. Als Beweisskizze weisen wir darauf hin, daß für große ν in (6.131) das a_ν im wesentlichen durch

$$a_\nu = \frac{2\sqrt{-\lambda}}{\nu}\, a_{\nu-1}$$

festgelegt ist und daß damit dann a_ν im wesentlichen durch

$$\frac{(2\sqrt{-\lambda})^\nu}{\nu!}\, a_0 \qquad (6.132)$$

angegeben werden kann. Schließlich ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{-\lambda}r)^\nu}{\nu!} = e^{2\sqrt{-\lambda}r} \qquad (6.133)$$

eine Funktion mit $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-\alpha+l}\, e^{2\sqrt{-\lambda}r} \triangleq +\infty$.

Also ist für die Eigenfunktion notwendig, daß in (6.130) und damit auch in (6.128) die unendliche Reihe abbricht.

Der Zähler in (6.131) verschwindet für $\nu = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, falls

$$\alpha = k + l - 1 \qquad (6.134)$$

ist. Dann liefern (6.127) und (6.130)

$$\tilde{C}_2\tilde{R}_2(r) = e^{-\frac{a}{k+l}r}\, r^l \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu r^\nu. \qquad (6.135)$$

(6.135) genügt sowohl der Differentialgleichung (V.3) als auch den Randbedingungen (V.7), (V.8), liefert also Eigenfunktionen. Die zugehörigen Eigenwerte ergeben sich aus (6.134), (6.130) und (V.4) zu

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 (k + l)^2}\ (l = 0, 1, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots;\ \text{Elementarladung}). \qquad (6.136)$$

Damit ist die Diskussion des Falles (6.125) abgeschlossen.

Im Fall

$$E > 0 \quad \text{und damit} \quad \lambda > 0 \qquad (6.137)$$

ist in (5.180) $\beta_1 = i\sqrt{\lambda}$ bzw. $\beta_2 = -i\sqrt{\lambda}$.

Für r^{α_k} sind jetzt die Formeln

$$\frac{1}{r}\, r^{-\frac{a}{i\sqrt{\lambda}}},\quad \frac{1}{r}\, r^{\frac{a}{i\sqrt{\lambda}}},\ \text{d. h.}\ \frac{1}{r}\, e^{\frac{a i}{\sqrt{\lambda}}\ln r},\quad \frac{1}{r}\, e^{-\frac{a i}{\sqrt{\lambda}}\ln r} \qquad (6.138)$$

einzusetzen. Infolgedessen genügt nun die Lösung (5.179) der Differentialgleichung (V.3) der Beschränktheitsbedingung (V.8). Aus der Lösung von Aufgabe 5.13 kann damit gefolgert werden:

jedes $E > 0$ ist Eigenwert. (6.139)

Die zugehörigen Eigenfunktionen haben die Struktur

$$R_1(r) = r^l \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu \quad (0 \leqq r < +\infty). \tag{6.140}$$

Auch $E = 0$ ist Eigenwert, wie sich schließlich aus den Ergebnissen der Aufgaben 5.23 und 5.13 ablesen läßt.

6.5. Hermitesche Differentialoperatoren

Um einer gegebenen Eigenwertaufgabe bereits ohne Rechnung Aussagen über die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenfunktionen entnehmen zu können, wird man gewisse Klassen von Eigenwertaufgaben studieren und jeweils zugehörige Sätze beweisen.

Wir beginnen mit der

D. 6.4 **Definition 6.4:** *Ist eine lineare Eigenwertaufgabe gegeben, deren Randbedingungen nicht den Eigenwertparameter λ enthalten und deren Differentialgleichung die Gestalt*

$$L[y] = \lambda M[y] \tag{6.141}$$

mit

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(\nu)} \quad \text{und} \quad M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu(x)\, y^{(\nu)} \quad (m < n) \tag{6.142}$$

besitzt, so sind $L[u]$ und $M[u]$ Zuordnungsvorschriften, die zu **linearen Differentialoperatoren** *gehören. Den Definitionsbereich bilden neben $u \equiv 0$ die Vergleichsfunktionen $u \not\equiv 0$, das sind genügend oft differenzierbare Funktionen, die den gegebenen Randbedingungen, jedoch nicht notwendig der Differentialgleichung* (6.141) *genügen.*

Zusatzforderung für die Definition 6.4: Die Vergleichsfunktionen sollen über die Definition 6.4 hinaus so beschaffen sein, daß die Integrale

$$\int_J |u|^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int_J |M[u]|^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int_J |L[u]|^2 \,\mathrm{d}x \tag{6.143}$$

– gegebenenfalls als uneigentliche Integrale – existieren, wobei J das zur Eigenwertaufgabe gehörige Intervall ist.

Bemerkung zur Zusatzforderung: Durch diese Forderung kann es vorkommen, daß man gewisse Eigenwerte nicht erfaßt, weil deren Eigenfunktionen nicht (6.143) genügen. Wir weisen hierzu auf die Eigenwerte $E > 0$ aus (6.139) des Beispiels 6.9 hin. Man vergleiche damit auch die Begriffe Punktspektrum und kontinuierliches Spektrum im Band 22.

Damit ist die Grundlage geschaffen für die

D. 6.5 **Definition 6.5:** *Ein linearer Differentialoperator heißt (bezüglich des Intervalles J)* **hermitesch,** *falls für alle Vergleichsfunktionen $u(x)$, $v(x)$ stets*

$$\int_J \overline{L[u]}\, v \,\mathrm{d}x = \int_J \bar{u} L[v] \,\mathrm{d}x \tag{6.144}$$

gilt.

Bemerkung zur Definition 6.5: In der klassischen mathematischen Literatur findet man anstatt **„hermitescher Differentialoperator“** auch die Bezeichnungen **„symmetrischer Differentialoperator“** und **„selbstadjungierter Differentialoperator“**.

Definition 6.6: *Ein hermitescher Differentialoperator heißt* **positiv definit,** *wenn für alle Vergleichsfunktionen u* D. 6.6

$$\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x > 0 \tag{6.145}$$

gilt; er heißt **negativ definit,** *wenn in* (6.145) *das* $>$*-Zeichen durch das* $<$*-Zeichen zu ersetzen ist. Nimmt das Integral aus* (6.145) *für einige u positive Werte, für andere u jedoch negative Werte an, so heißt der hermitesche Differentialoperator* **indefinit.** *Gilt neben* (6.145) *auch* $\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x = 0$, *jedoch nicht* $\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x < 0$, *so spricht man von einem* **positiv semidefiniten** *hermiteschen Differentialoperator. Schließlich liegt ein* **negativ semidefiniter** *hermitescher Differentialoperator vor, wenn genau die Fälle* $\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x < 0$ *und* $\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x = 0$ *vorkommen.*

Beispiel 6.10: Wir diskutieren die Eigenwertaufgabe für $w(x)$ der Aufgabe 6.3. Sie besteht aus der Differentialgleichung (6.23)

$$w'''' = -\lambda w'' \quad (0 \leqq x \leqq l) \tag{6.146}$$

und den vier linearen homogenen Randbedingungen

$$w(0) = 0, \;\; w'(0) = 0, \;\; w(l) = 0, \;\; w''(l) = 0. \tag{6.147}$$

Der durch

$$M[u] = -u'', \; u(0) = 0, \; u'(0) = 0, \; u(l) = 0, \; u''(l) = 0 \tag{6.148}$$

gegebene lineare Differentialoperator zweiter Ordnung ist hermitesch, denn es gilt für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$, $v(x)$ $(0 \leqq x \leqq l)$ zunächst

$$\begin{aligned}\int_0^l \overline{M[u]}\, v \,\mathrm{d}x &= \int_0^l -\overline{u''} v \,\mathrm{d}x = [-\overline{u'}v]_0^l + \int_0^l \overline{u'}v' \,\mathrm{d}x \\ &= -\overline{u'(l)}\, v(l) + \overline{u'(0)}\, v(0) + (\overline{u(l)}\, v'(l) - \overline{u(0)}\, v'(0)) - \int_0^l \bar{u} v'' \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6.149}$$

Da nicht nur $u(x)$, sondern auch $v(x)$ Vergleichsfunktionen sein sollen, so genügen nicht nur $u(x)$, sondern auch $v(x)$ den Randbedingungen (6.147). Infolgedessen verschwinden auf der rechten Seite von (6.149) alle außerhalb des Integrals stehenden Summanden. Also kann die Rechnung folgendermaßen fortgesetzt werden:

$$\int_0^l \overline{M[u]}\, v \,\mathrm{d}x = \int_0^l \bar{u}(-v'') \,\mathrm{d}x = \int_0^l \bar{u} M[v] \,\mathrm{d}x. \tag{6.150}$$

Damit ist die Hermitezität von (6.148) bewiesen. $M[u]$ ist darüber hinaus positiv definit, denn zunächst gilt für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$

$$\begin{aligned}\int_0^l \overline{M[u]}\, u \,\mathrm{d}x &= \int_0^l -\overline{u''} u \,\mathrm{d}x = [-\overline{u'}u]_0^l + \int_0^l \overline{u'}u' \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^l |u'|^2 \,\mathrm{d}x \geqq 0.\end{aligned} \tag{6.151}$$

In (6.151) wird in $\geqq 0$ das Gleichheitszeichen von keiner Vergleichsfunktion $u(x)$ realisiert, denn sonst müßte der Integrand, der ja niemals negative Werte annimmt, für $0 \leqq x \leqq l$ gleich null sein. Infolgedessen wäre $u(x) = \text{const.}$ Aber diese Konstante müßte gleich null sein, weil $u(x)$ als Vergleichsfunktion den Randbedingungen (6.147) genügt. Da nach Definition 6.4 eine Vergleichsfunktion nicht identisch null ist, kann in der Tat (6.151) zu

$$\int_0 |u'|^2 \, \mathrm{d}x > 0 \tag{6.152}$$

abgeändert werden, und damit ist die positive Definitheit von (6.148) bewiesen.

* *Aufgabe 6.12:* In Fortführung der Untersuchungen des Beispiels 6.10 zeige man, daß der durch

$$L[u] = u'''', \; u(0) = 0, \; u'(0) = 0, \; u(l) = 0, \; u''(l) = 0 \tag{6.153}$$

gegebene lineare Differentialoperator vierter Ordnung hermitesch und positiv definit ist.

Nachdem wir in diesem Abschnitt den Begriff hermitescher Differentialoperator eingehend studiert haben, setzen wir in den nächsten Abschnitten das am Anfang von 6.5. genannte Programm fort.

6.6. Rayleighscher Quotient

Zur Berechnung der Eigenwerte einer Eigenwertaufgabe haben wir bisher zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen linearen homogenen Differentialgleichung bestimmt, mit Hilfe der Randbedingungen die Eigenwertgleichung aufgestellt und diese schließlich gelöst. Selbst bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann dieses Vorgehen zu aufwendigen Rechnungen führen. Man vergleiche hierzu die Aufgaben 6.3 und 6.4. Interessiert man sich nur für den kleinsten Eigenwert, so kann man das Lösen der Differentialgleichung und das Aufstellen der Eigenwertgleichung umgehen (Bemerkung 1 zum Satz 6.5). Zunächst benötigen wir die

D. 6.7 **Definition 6.7:** *Gegeben sei eine lineare Eigenwertaufgabe aus der Definition 6.4. Jeder Vergleichsfunktion $u(x)$ der Eigenwertaufgabe wird durch die Zuordnungsvorschrift*

$$R[u] = \frac{\int_J \overline{L[u]}\, u \, \mathrm{d}x}{\int_J \overline{M[u]}\, u \, \mathrm{d}x} \tag{6.154}$$

eine Zahl zugeordnet, falls der Nenner in (6.154) *nicht verschwindet. Das durch* (6.154) *gegebene Funktional* (Band 1) *heißt* **Rayleighscher Quotient.**

Hieraus folgt der

Satz 6.2: *Sind in der linearen Eigenwertaufgabe der Definition 6.4 die Operatoren L und M hermitesch sowie M positiv definit, so werden vom zugehörigen Rayleighschen Quotienten stets nur* **reelle** *Werte geliefert.* **S. 6.2**

Zum Beweis von Satz 6.2 wird nachgewiesen, daß in (6.154) der Zähler reell ist. Die Rechnung liefert infolge (6.144)

$$\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x = \int_J \bar{u} L[u] \,\mathrm{d}x = \overline{\int_J u \overline{L[u]} \,\mathrm{d}x}. \tag{6.155}$$

Also ist $\int_J \overline{L[u]}\, u \,\mathrm{d}x$ gleich seinem konjugiert-komplexen Wert und damit reell. Der Nenner in (6.154) ist positiv, denn $M[u]$ ist nach Voraussetzung positiv definit. Im Zusammenhang mit dem Satz 6.2 steht der

Satz 6.3: *Alle Eigenwerte von Eigenwertaufgaben aus Satz 6.2 sind reell.* **S. 6.3**

Zum Beweis sei λ ein Eigenwert und $y(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Wir gehen in (6.141) beiderseits zum konjugiert komplexen Wert über, multiplizieren danach beide Seiten mit $y(x)$ und integrieren über das zur Eigenwertaufgabe gehörige Intervall J:

$$\int_J \overline{L[y]}\, y \,\mathrm{d}x = \bar{\lambda} \int_J \overline{M[y]}\, y \,\mathrm{d}x. \tag{6.156}$$

Also ist

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_J \overline{L[y]}\, y \,\mathrm{d}x}{\int_J \overline{M[y]}\, y \,\mathrm{d}x}. \tag{6.157}$$

Aus (6.157) folgt in Verbindung mit Satz 6.2, daß $\bar{\lambda}$ reell und damit $\bar{\lambda} = \lambda$ ist. Als Folgerung entnehmen wir dem Beweisgang zu Satz 6.3 noch den

Satz 6.4: *Ist für eine Eigenwertaufgabe λ ein Eigenwert und $y(x)$ eine zugehörige Eigenfunktion, so liefert der Rayleighsche Quotient* (6.154) *an der Stelle $u = y$ den Eigenwert λ:* **S. 6.4**

$$\lambda = \frac{\int_J \overline{L[y]}\, y \,\mathrm{d}x}{\int_J \overline{M[y]}\, y \,\mathrm{d}x}. \tag{6.158}$$

Zur Vereinfachung der Sprechweise nennen wir die

Definition 6.8: *Eine* **Eigenwertaufgabe** *aus Satz 6.2 heißt* **positiv definit** [*bzw.* **positiv semidefinit**], *wenn der durch $L[u]$ aus* (6.141) *erzeugte hermitesche Differentialoperator positiv definit* [*bzw. positiv semidefinit*] *ist.* **D. 6.8**

Aufgabe 6.13: Man zeige: Alle Eigenwerte λ einer positiv definiten (bzw. positiv semidefiniten) Eigenwertaufgabe sind größer als null (bzw. größer oder gleich null). *

Wir nennen den für numerische Verfahren wichtigen

S. 6.5 **Satz 6.5:** *Gegeben sei eine positiv definite Eigenwertaufgabe für $y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$. Der Rayleighsche Quotient nimmt auf der Menge der Vergleichsfunktionen seinen kleinsten Wert an; dieser ist gleichzeitig der kleinste Eigenwert, wobei die Funktion u, für die der Rayleighsche Quotient seinen kleinsten Wert annimmt, eine zu diesem Eigenwert gehörende Eigenfunktion ist.*

Bemerkung 1 zum Satz 6.5: Die Minimaleigenschaft im Satz 6.5 wird bei der näherungsweisen Berechnung des kleinsten Eigenwertes ausgenutzt. Setzt man in den Rayleighschen Quotienten für $u(x)$ eine ziemlich *grobe* Näherung für eine zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion ein, so liefert (6.154) dennoch eine relativ *gute* Näherung für den kleinsten Eigenwert.

Bemerkung 2 zum Satz 6.5: Es ist zweckmäßig, in (6.154) den Zähler und den Nenner durch partielle Integration umzuformen und danach die Randbedingung heranzuziehen, ehe man den Rayleighschen Quotienten zur numerischen Auswertung benutzt.

Zur Illustration der Bemerkungen 1 und 2 nennen wir

Beispiel 6.11: Gegeben sei die positiv definite Eigenwertaufgabe

$$y'''' = \lambda y, \ (0 \leqq x \leqq 1), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(1) = 0, \ y'''(1) = 0. \tag{6.159}$$

Bei Beachtung von Bemerkung 2 liefert die Rechnung

$$R[u] = \frac{\int_0^1 \overline{u''''}\, u \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 \bar{u} u \, \mathrm{d}x} = \frac{1}{\int_0^1 |u|^2 \, \mathrm{d}x} \left\{ \underbrace{[\overline{u'''} u]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \overline{u'''} u' \, \mathrm{d}x \right\}$$

$$= \frac{1}{\int_0^1 |u|^2 \, \mathrm{d}x} \left\{ - \underbrace{[\overline{u''} u']_0^1}_{=0} + \int_0^1 \overline{u''} u'' \, \mathrm{d}x \right\}$$

und damit

$$R[u] = \frac{\int_0^1 |u''|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 |u|^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{6.160}$$

Als Vergleichsfunktion $u(x)$, die eine zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion annähern soll, wählen wir ein Polynom von möglichst niedrigem Grad. Die Gleichung (6.160) zeigt, daß Funktionen $u(x)$, die sich nur um konstante Faktoren unterscheiden, zu übereinstimmenden Werten $R[u]$ führen. Vier Randbedingungen sind zu erfüllen. Wir müssen also ein Polynom ansetzen, das mindestens fünf Koeffizienten enthält, d. h. ein Polynom vom mindestens vierten Grad. Die Rechnung zeigt, daß

$$u(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 \tag{6.161}$$

alle Randbedingungen erfüllt, also eine Vergleichsfunktion ist. Wir setzen (6.161) in (6.160) ein und erhalten schließlich

$$\int_0^1 |u''|^2 \, dx = \frac{144}{5}, \quad \int_0^1 |u|^2 \, dx = \frac{104}{45}, \quad R[u] = \frac{162}{13} = 12,46 \ldots$$

Zum Vergleich teilen wir den exakten Wert des kleinsten Eigenwertes mit: $\lambda = 12{,}36 \ldots$

Bemerkung 3 zum Satz 6.5: Wählt man in (6.161) ein Polynom von größerem Grad, so bleiben beim Einsetzen in (6.160) noch einige Koeffizienten unbestimmt, die dann so zu wählen sind, daß der Wert für $R[u]$ möglichst klein ist. Das hier angedeutete Vorgehen gehört zum **Verfahren von Ritz.** Wir müssen hierzu auf Band 18 und die dort angegebene Literatur verweisen.

Auch die in den folgenden Bemerkungen genannten Hinweise können hier nicht erörtert werden.

Bemerkung 4 zum Satz 6.5: Bei Beachtung von Bemerkung 2 gilt der Satz 6.5 auch dann noch, wenn man Funktionen $u(x)$ benutzt, die nur einen Teil der Randbedingungen, sie heißen **wesentliche Randbedingungen**, zu erfüllen brauchen. Man spricht in diesem Zusammenhang von *zulässigen Funktionen* $u(x)$. Die wesentlichen Randbedingungen enthalten nur Ableitungen bis zur $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-ten Ordnung, wenn n (gerade) die Ordnung der Differentialgleichung (6.141) ist. In (6.159) sind $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ die wesentlichen Randbedingungen.

Bemerkung 5 zum Satz 6.5: Man kann den Satz 6.5 auch auf alle Fälle übertragen, wo in den **restlichen Randbedingungen** (das sind die nichtwesentlichen) der Eigenwertparameter λ auftritt.

Bemerkung 6 zum Satz 6.5: Die Minimaleigenschaft des kleinsten Eigenwertes kann auf Minimaleigenschaften der weiteren Eigenwerte übertragen werden.

6.7. Einschließungssatz

Im vorigen Abschnitt liefert der Rayleighsche Quotient beim Einsetzen einer *Näherung* für eine zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenfunktion stets einen Wert, der *größer* als der gesuchte kleinste Eigenwert ausfällt. Der jetzt zu diskutierende Einschließungssatz liefert darüber hinaus einen weiteren Näherungswert, der *kleiner* ausfällt als der gesuchte Eigenwert.

Gegeben sei eine positiv definite Eigenwertaufgabe aus Satz 6.2 für $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$. Die Ordnung des Differentialausdruckes M aus (6.142) sei gleich null, d. h. (6.141) werde jetzt spezialisiert zu

$$L[y] = \lambda \, g_0(x) \, y \quad (g_0(x) \geqq 0). \tag{6.162}$$

Es sei nun λ_ν ein Eigenwert und $y_\nu(x)$ eine zu λ_ν gehörige Eigenfunktion:

$$L[y_\nu] = \lambda_\nu g_0(x) \, y_\nu. \tag{6.163}$$

Für (6.163) kann man auch

$$L\left[\frac{y_\nu}{\lambda_\nu}\right] = g_0(x) \, y_\nu \tag{6.164}$$

schreiben. Mit der Abkürzung

$$\frac{y_\nu}{\lambda_\nu} = \tilde{F}_1(x), \quad y_\nu(x) = \tilde{F}_0(x) \tag{6.165}$$

lautet (6.164)

$$L[\tilde{F}_1(x)] = g_0(x)\,\tilde{F}_0(x), \tag{6.166}$$

und es ist wegen (6.165)

$$\lambda_\nu = \frac{\tilde{F}_0(x)}{\tilde{F}_1(x)}. \tag{6.167}$$

Aus (6.165) folgt, daß $\tilde{F}_1(x)$ und $\tilde{F}_0(x)$ Vergleichsfunktionen sind.

Der Einschließungssatz geht nun davon aus, daß in (6.166) $\tilde{F}_1(x)$ durch irgendeine Vergleichsfunktion $F_1(x)$ ersetzt wird und in Anlehnung an (6.166) $F_0(x)$ durch

$$L[F_1(x)] = g_0(x)\,F_0(x) \tag{6.168}$$

definiert wird. $F_0(x)$ wird im allgemeinen keine Vergleichsfunktion sein. Bildet man in Analogie zu (6.167) den Quotienten

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)}, \tag{6.169}$$

so ist diese Funktion im allgemeinen nicht konstant. Es gilt jedoch

S. 6.6 **Satz 6.6 (Einschließungssatz):** *Hat die Funktion* (6.169) *im Intervall nur positive Funktionswerte, so liegt zwischen ihrem Maximum und ihrem Minimum mindestens ein Eigenwert λ_ν der betrachteten positiv definiten Eigenwertaufgabe, d. h., es gilt*

$$\min_{a \leqq x \leqq b} \frac{F_0(x)}{F_1(x)} \leqq \lambda_\nu \leqq \max_{a \leqq x \leqq b} \frac{F_0(x)}{F_1(x)}. \tag{6.170}$$

Bemerkung zu Satz 6.6: Es ist zweckmäßig, zunächst die Funktion $F_0(x)$ so zu wählen, daß sie möglichst viele Randbedingungen erfüllt. Aus (6.168) ergibt sich dann $F_1(x)$, wobei die entstehenden Integrationskonstanten derart zu wählen sind, daß $F_1(x)$ alle Randbedingungen erfüllt, also Vergleichsfunktion ist.

Beispiel 6.12 (Fortsetzung von Beispiel 6.11): Die Funktion (6.161) ist Vergleichsfunktion, wir wählen sie für $F_0(x)$:

$$F_0(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2. \tag{6.171}$$

Die Funktion $F_1(x)$ ist gemäß (6.168) jetzt wegen der Differentialgleichung aus (6.159) derart zu bestimmen, daß

$$F_1''''(x) = F_0(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 \tag{6.172}$$

gilt und $F_1(x)$ alle Randbedingungen aus (6.159) erfüllt. Die Rechnung liefert

$$F_1(x) = \frac{1}{1680}(x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 336x^3 + 728x^2). \tag{6.173}$$

Wegen (6.170) ergibt sich aus (6.171), (6.173), daß es mindestens einen Eigenwert λ der Eigenwertaufgabe (6.159) gibt, für den

$$\min_{0 \leqq x \leqq 1} \frac{1680(x^2 - 4x + 6)}{x^6 - 8x^5 + 28x^4 - 336x + 728} \leqq \lambda$$

$$\leqq \max_{0 \leqq x \leqq 1} \frac{1680(x^2 - 4x + 6)}{x^6 - 8x^5 + 28x^4 - 336x + 728},$$

d. h. (der Bruch ist für $0 \leqq x \leqq 1$ monoton fallend)

$$\frac{720}{59} \leqq \lambda \leqq \frac{180}{13}$$

und damit

$$12{,}2 < \lambda < 13{,}9 \tag{6.174}$$

gilt. In Verbindung mit dem Ergebnis aus dem Beispiel 6.11 kann (6.174) zu

$$12{,}2 < \lambda < 12{,}46 \tag{6.175}$$

verschärft werden.

6.8. Entwicklungssatz

Im Rahmen unserer Theorie werden nunmehr die Kenntnisse über Fouriersche Reihen aus Band 3 erweitert. Als Vorbereitung nennen wir die

Definition 6.9: *Unter dem* **relativ** *zum positiv definiten hermiteschen Differentialoperator $M[u]$ gebildeten* **Skalarprodukt** *zweier Vergleichsfunktionen $u(x)$, $v(x)$ versteht man* D. 6.9

$$\langle u|v\rangle = \int_J \overline{M[u]}\, v \,\mathrm{d}x,^{1)} \tag{6.176}$$

wobei J das zum Operator M gehörige Intervall ist.

Zusatz 1 zur Definition 6.9: Ist speziell $M[u] = \varrho(x)u$ $(\varrho(x) \geqq 0)$, so heißt

$$\langle u|v\rangle = \int_J \varrho(x)\, \bar{u}v \,\mathrm{d}x \tag{6.177}$$

das mit dem **Gewicht** $\varrho(x)$ gebildete **Skalarprodukt** von u und v.

Zusatz 2 zur Definition 6.9: Ist in (6.177) $\varrho(x) \equiv 1$ $(x \in J)$, so spricht man vom **Skalarprodukt**

$$\langle u|v\rangle = \int_J \bar{u}v \,\mathrm{d}x. \tag{6.178}$$

---

[1]) Anstatt $\langle u|v\rangle$ ist auch die Bezeichnung (u, v) gebräuchlich

Hieran schließen sich die beiden folgenden Definitionen an:

D. 6.10 **Definition 6.10:** *Zwei Funktionen u und v heißen relativ zu einem vorliegenden Skalarprodukt zueinander* **orthogonal,** *wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist:*

$$\langle u|v\rangle = 0. \tag{6.179}$$

D. 6.11 **Definition 6.11:** *Unter der* **Norm** *(relativ zu einem vorliegenden Skalarprodukt) versteht man die nichtnegative (reelle) Zahl*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}. \tag{6.180}$$

Wenn in den folgenden Definitionen von einer **Indexmenge Ind** gesprochen wird, so denke man beispielsweise an solche Mengen wie:

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots & \\ 0, & \pm 1, & \pm 2, & \pm 3, & \ldots & \\ -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & \ldots \end{array}$$

$$(\nu, \mu) \quad \text{mit} \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{und} \quad \mu = 1, 2. \tag{6.181}$$

D. 6.12 **Definition 6.12:** *Ein System von Funktionen $\varphi_\nu(x)$ $(x \in J,\ \nu \in \text{Ind})$ heißt (relativ zu einem vorliegenden Skalarprodukt) ein* **Orthogonalsystem,** *wenn*

$$\langle \varphi_\nu|\varphi_\mu\rangle \begin{cases} = 0 & \text{für} \quad \nu \neq \mu \\ > 0 & \text{für} \quad \nu = \mu \end{cases} \tag{6.182}$$

gilt.

D. 6.13 **Definition 6.13:** *Ein System von Funktionen $\psi_\nu(x)$ $(x \in J,\ \nu \in \text{Ind})$ heißt (relativ zu einem vorliegenden Skalarprodukt) ein* **Orthonormalsystem,** *wenn*

$$\langle \psi_\nu|\psi_\mu \rangle = \delta_{\nu\mu} \tag{6.183}$$

gilt.

Mit diesen Definitionen formulieren wir den

S. 6.7 **Satz 6.7:** *Bei Eigenwertaufgaben aus Satz 6.2 sind Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, relativ zum Skalarprodukt* (6.176) *zueinander orthogonal.*

Zum Beweis gehen wir von zwei voneinander verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 aus, die jeweils die zugehörigen Eigenfunktionen $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$ besitzen mögen. Es gilt also

$$L[y_1] = \lambda_1 M[y_1] \tag{6.184}$$

und

$$L[y_2] = \lambda_2 M[y_2]. \tag{6.185}$$

Wir gehen unter Beachtung von Satz 6.3 in (6.184) zum konjugiert-komplexen Wert über, multiplizieren danach mit $y_2(x)$ und integrieren über das zur Eigenwertaufgabe gehörige Intervall J:

$$\int_J \overline{L[y_1]}\, y_2 \,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_J \overline{M[y_1]}\, y_2 \,\mathrm{d}x. \tag{6.186}$$

(6.185) wird mit $\overline{y_1}$ multipliziert, und danach wird über J integriert:

$$\int_J \overline{y_1} L[y_2]\,dx = \lambda_2 \int_J \overline{y_1} M[y_2]\,dx. \tag{6.187}$$

Die Gleichungen (6.186) und (6.187) werden nunmehr voneinander subtrahiert: Da y_1, y_2 spezielle Vergleichsfunktionen und L, M hermitesche Differentialoperatoren sind, ergibt sich [vgl. (6.144)]

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_J \overline{M[y_1]}\, y_2\,dx$$

und damit wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\int_J \overline{M[y_1]}\, y_2 = 0. \tag{6.188}$$

Zusatz zu Satz 6.7: Nimmt man zur Gesamtheit der zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen die identisch verschwindende Funktion hinzu, so bilden sie einen linearen Raum mit der Dimension d. Im Fall $d > 1$ verabreden wir, stets eine solche Basis des Eigenraumes zu wählen, daß je zwei Basiselemente zueinander orthogonal sind.

Bei den beiden folgenden Sätzen beachte man den Zusatz auf Seite 75.

Satz 6.8: *Gegeben sei eine positiv semidefinite Eigenwertaufgabe aus Satz* 6.2. *Dann gibt es in vielen Fällen unendlich viele Eigenwerte; sie sind alle positiv oder null und haben keine Häufungsstelle im Endlichen. Man kann also alle Eigenwerte der Größe nach ordnen:* **S. 6.8**

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots, \tag{6.189}$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{6.190}$$

Aus dem Satz 6.7 und dem Zusatz zu Satz 6.7 kann man entnehmen, daß alle (gewählten) Basen aller Eigenräume der Eigenwertaufgabe ein *Orthogonalsystem* bilden. Wegen Satz 6.8 hat es unendlich viele Elemente. In diesem Zusammenhang nennen wir den

Satz 6.9 (Entwicklungssatz): *Bei positiv definiten Eigenwertaufgaben der Gestalt* (6.141) *kann man in vielen Fällen jede Vergleichsfunktion $u(x)$ in eine unendliche Reihe* **(Fourierreihe)** *nach demjenigen Orthogonalsystem entwickeln, das aus allen (gewählten) Basiselementen aller Eigenräume besteht; mit anderen Worten: Bezeichnet man die Elemente des Orthogonalsystems durch φ_μ, wobei μ alle Elemente einer gewissen Indexmenge* Ind *durchläuft, so gilt für jede Vergleichsfunktion $u(x)$ eine Darstellung durch die Fourierreihe* **S. 6.9**

$$u(x) = \sum_{\mu \in \mathrm{Ind}} c_\mu \varphi_\mu(x). \tag{6.191}$$

Die Reihe $\sum\limits_{\mu \in \mathrm{Ind}} |c_\mu| \, |\varphi_\mu(x)|$ *konvergiert im zugehörigen Intervall gleichmäßig. Die Zahlen* c_μ *heißen* **Fourierkoeffizienten** *und es gilt* (in Verallgemeinerung aus Band 3)

$$c_\mu = \frac{\langle \varphi_\mu | u \rangle}{\|\varphi_\mu\|^2}, \tag{6.192}$$

wobei das Skalarprodukt (6.176) *zugrunde liegt.*

Beispiel 6.13: Die positiv semidefinite Eigenwertaufgabe, bestehend aus der linearen homogenen Differentialgleichung

$$L[y] = \lambda M[y] \quad \text{mit} \quad L[u] = -u'', \; M[u] = u, \; -\frac{l}{2} \leqq x \leqq \frac{l}{2} \tag{6.193}$$

und den beiden linearen homogenen Randbedingungen

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right), \quad y'\left(-\frac{l}{2}\right) = y'\left(\frac{l}{2}\right), \tag{6.194}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_\nu = \frac{4\pi^2}{l^2} \nu^2 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.195}$$

Zu $\lambda_0 = 0$ gehört ein eindimensionaler Eigenraum. Als Basis dieses Eigenraumes kann man die Funktion identisch 1 wählen oder aber auch – um den Anschluß an Band 3 herzustellen – die Funktion

$$\varphi_0(x) \equiv \frac{1}{2} \quad \left(-\frac{l}{2} \leqq x \leqq \frac{l}{2}\right). \tag{6.196}$$

Zu jedem λ_ν mit $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ gehört jeweils ein zweidimensionaler Eigenraum. Bei der Bezeichnung einer orthogonalen Basis des jeweiligen Eigenraumes nutzen wir die in (6.181) angegebene Möglichkeit, als Indizes Zahlenpaare zu verwenden:

$$\varphi_{(\nu,1)}(x) = \cos\frac{2\pi\nu x}{l}, \; \varphi_{(\nu,2)}(x) = \sin\frac{2\pi\nu x}{l} \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{6.197}$$

Im vorliegenden Beispiel ist

$$\begin{aligned}
&\langle u|v \rangle = \int\limits_{-l/2}^{l/2} \overline{M[u]}\, v \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-l/2}^{l/2} \bar{u} v \,\mathrm{d}x, \quad \|u\| = \sqrt{\int\limits_{-l/2}^{l/2} |u|^2 \,\mathrm{d}x},\\
&\|\varphi_0(x)\| = \left\|\frac{1}{2}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{l}, \quad \|\varphi_{(\nu,1)}(x)\| = \left\|\cos\frac{2\pi\nu x}{l}\right\| = \sqrt{\frac{l}{2}},\\
&\|\varphi_{(\nu,2)}(x)\| = \left\|\sin\frac{2\pi\nu x}{l}\right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}.
\end{aligned} \tag{6.198}$$

Beim Aufschreiben der Fourierentwicklung von beliebigen Vergleichsfunktionen ist zu beachten, daß die Numerierung von Eigenfunktionen durch Zahlenpaare zur Folge hat, daß auch die zugehörigen Fourierkoeffizienten durch Zahlenpaare zu numerieren sind. Bei der Summation ist darauf zu achten, daß eine Doppelsumme auftritt:

$$u(x) = c_0\varphi_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{2} c_{(\nu,k)}\varphi_{(\nu,k)}(x)\right) \tag{6.199}$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{\|\varphi_0\|^2} \langle\varphi_0|u\rangle, \quad c_{(\nu,k)} = \frac{1}{\|\varphi_{(\nu,k)}\|^2} \langle\varphi_{(\nu,k)}|u\rangle. \tag{6.200}$$

Wir führen die Abkürzungen

$$a_0 = c_0, \; a_\nu = c_{(\nu,1)}, \; b_\nu = c_{(\nu,2)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{6.201}$$

ein und schreiben damit (6.199), (6.200) in der Gestalt

$$u(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos\frac{2\pi\nu x}{l} + b_\nu \sin\frac{2\pi\nu x}{l}\right) \tag{6.202}$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\|\varphi_0\|^2} \langle\varphi_0|u\rangle = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} u(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_\nu = \frac{1}{\left\|\cos\frac{2\pi\nu x}{l}\right\|^2} \left\langle \cos\frac{2\pi\nu x}{l} \middle| u \right\rangle = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} u(x) \cos\frac{2\pi\nu x}{l}\,\mathrm{d}x$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$b_\nu = \frac{1}{\left\|\sin\frac{2\pi\nu x}{l}\right\|^2} \left\langle \sin\frac{2\pi\nu x}{l} \middle| u \right\rangle = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} u(x) \sin\frac{2\pi\nu x}{l}\,\mathrm{d}x$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots) \tag{6.203}$$

(Band 3). In (6.197) könnte man auch die orthogonale Basis

$$\varphi_\nu(x) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\nu \mathrm{i} x}{l}}, \; \varphi_{-\nu}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\nu \mathrm{i} x}{l}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{6.204}$$

wählen. Wir haben in (6.204) zur Numerierung zwar keine Zahlenpaare benutzt, haben jedoch neben den positiven auch die negativen ganzen Zahlen herangezogen. Die Funktionen (6.204) kann man gemeinsam mit $\varphi_0(x) \equiv 1$ in

$$\varphi_\mu(x) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}} \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6.205}$$

zusammenfassen. An die Stelle von (6.199) bis (6.203) tritt jetzt

$$u(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}}, \quad c_\mu = \frac{1}{\left\|\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}}\right\|^2} \left\langle \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}} \middle| u \right\rangle = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \overline{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}}}\, u(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} u(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mu \mathrm{i} x}{l}}\,\mathrm{d}x \tag{6.206}$$

(vgl. Band 3).

Beispiel 6.14: Die positiv semidefinite Eigenwertaufgabe, bestehend aus der Legendreschen Differentialgleichung

$$L[y] = \lambda M[y] \quad \text{mit} \quad L[u] = -[(1-x^2)\,u']', \; M[u] = u, \; -1 \leqq x \leqq 1 \tag{6.207}$$

und den Randbedingungen

$$\lim_{x \to -1+0} y(x) \text{ existiert}, \lim_{x \to 1-0} y(x) \text{ existiert} \tag{6.208}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.209}$$

Zu jedem λ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) gehört jeweils ein eindimensionaler Eigenraum. Als Basiselement kann das Legendresche Polynom $P_n(x)$ (Legendresche Funktion erster Art mit dem Index n) genommen werden [(5.75)]. Im vorliegenden Beispiel ist

$$\langle u | v \rangle = \int_{-1}^{1} \overline{M[u]}\, v \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \bar{u} v \,\mathrm{d}x, \; \|u\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} |u|^2 \,\mathrm{d}x},$$

$$\|P_n(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [(x^2-1)^n] \right\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \tag{6.210}$$

Für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$ gilt

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad (-1 \leqq x \leqq 1), \; c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} u(x)\, P_n(x) \,\mathrm{d}x. \tag{6.211}$$

Beispiel 6.15: Die positiv definite Eigenwertaufgabe, bestehend aus der Differentialgleichung

$$L[y] = \lambda M[y] \quad \text{mit } L[u] = -[(1-x^2)\,u']' + \frac{k^2}{1-x^2}\,u \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$M[u] = u, \quad -1 \leqq x \leqq 1 \tag{6.212}$$

und den Randbedingungen

$$y(-1) = 0, \; y(1) = 0, \tag{6.213}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = k, k+1, \ldots). \tag{6.214}$$

Zu jedem λ_n ($n = k, k+1, \ldots$) gehört jeweils ein eindimensionaler Eigenraum. Als Basiselement kann die **zugeordnete Funktion von Legendre**

$$(1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \quad (n = k, k+1, \ldots)\; (P_n(x)\text{: Legendresches Polynom}) \tag{6.215}$$

genommen werden. Das hier maßgebende Skalarprodukt stimmt mit demjenigen aus Beispiel 6.14 überein. Es ist

$$\left\| (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \right\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!}} \quad (n \geqq k). \tag{6.216}$$

Für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$ gilt

$$u(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

mit

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_{-1}^{1} u(x) (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x)\, dx. \tag{6.217}$$

Definition 6.14: *Wenn man in (6.215) $x = \cos\vartheta$ setzt, danach einerseits mit $A_{n,k}e^{ik\varphi}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ und andererseits mit $B_{n,k}e^{-ik\varphi}$ $(k = 1, \ldots, n)$ multipliziert, wobei $A_{n,k}$ und $B_{n,k}$ beliebige Konstanten sind, so ergeben sich durch Addition der Ergebnisse* **Kugelflächenfunktionen n-ter Ordnung:** D. 6.14

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = A_{n,0}P_n(\cos\vartheta) + \sum_{k=1}^{n} \left\{(A_{n,k}\, e^{ik\varphi} + B_{n,k}\, e^{-ik\varphi}) (\sin\vartheta)^k \left(\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)\right)_{x=\cos\vartheta}\right\}$$
$$(0 \leqq \vartheta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi). \tag{6.218}$$

Aufgabe 6.14: Man zeige: *

$$Y_0(\vartheta, \varphi) = A_{0,0}, \tag{6.219}$$

$$Y_1(\vartheta, \varphi) = A_{1,0} \cos\vartheta + (A_{1,1}\, e^{i\varphi} + B_{1,1}\, e^{-i\varphi}) \sin\vartheta, \tag{6.220}$$

$$\begin{aligned} Y_2(\vartheta, \varphi) &= A_{2,0}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}\right) + (A_{2,1}\, e^{i\varphi} + B_{2,1}\, e^{-i\varphi})\, 3 \cos\vartheta \sin\vartheta \\ &\quad + (A_{2,2}\, e^{2i\varphi} + B_{2,2}\, e^{-2i\varphi})\, 3 \sin^2\vartheta \\ &= A_{2,0}\left(\frac{3}{4}\cos(2\vartheta) + \frac{1}{4}\right) + (A_{2,1}\, e^{i\varphi} + B_{2,1}\, e^{-i\varphi}) \frac{3}{2} \sin(2\vartheta) \\ &\quad + (A_{2,2}\, e^{2i\varphi} + B_{2,2}\, e^{-2i\varphi}) \frac{3}{2}(1 - \cos(2\vartheta)). \end{aligned} \tag{6.221}$$

Aufgabe 6.15: Man zeige: Mit der Festsetzung *

$$\langle u|v\rangle = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \overline{u(\vartheta, \varphi)}\, v(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\varphi\right) d\vartheta \tag{6.222}$$

gilt im Falle $m \neq n$ $(m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ stets

$$\langle Y_n|Y_m\rangle = 0. \tag{6.223}$$

Aufgabe 6.16: Man bestimme in der Fourierreihe *

$$u(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \varphi) \quad [Y_n \text{ siehe } (6.218)] \tag{6.224}$$

die Fourierkoeffizienten $A_{n,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ und $B_{n,k}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Im Anschluß an die Definition 6.14 nennen wir den

Satz 6.10: *Geht man von kartesischen Koordinaten (x, y, z) durch* S. 6.10

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta \tag{6.225}$$

zu räumlichen Polarkoordinaten (r, ϑ, φ) über, so wird durch

$$U_n(x, y, z) = r^n Y_n(\vartheta, \varphi) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{6.226}$$

eine Funktion definiert, die der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta U_n = 0 \quad \left(\Delta U_n = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2}\right) \tag{6.227}$$

genügt. (6.226) *heißt* **innere Kugelfunktion** n**-ter Ordnung.**

* *Aufgabe 6.17:* Im Anschluß an die Aufgabe 6.16 bestimme man alle inneren Kugelfunktionen der Ordnung n mit $n = 0, 1, 2$.

Beispiel 6.16: Die positiv semidefinite Eigenwertaufgabe, bestehend aus der hermiteschen Differentialgleichung (vgl. Beispiel 5.15)

$$L[y] = \lambda M[y] \text{ mit } L[u] = -(e^{-x^2} u')', \; M[u] = e^{-x^2} u, \; -\infty < x < +\infty \tag{6.228}$$

und der Forderung der **Normierbarkeit** als Randbedingung, d. h. der Forderung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |y|^2 \, dx \text{ existiert,} \tag{6.229}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_n = 2n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.230}$$

Die zugehörigen Eigenräume sind jeweils eindimensional; als Basiselement kann das Hermitesche Polynom $H_n(x)$ aus Beispiel 5.15 genommen werden. Im vorliegenden Beispiel ist

$$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{M[u]}\, v \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \bar{u} v \, dx, \quad \|u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |u|^2 \, dx},$$

$$\|H_n(x)\| = \left\|(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})\right\| = \sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{\pi}. \tag{6.231}$$

Für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$ gilt:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} u(x) \, H_n(x) \, dx. \tag{6.232}$$

Beispiel 6.17: Die positiv definite Eigenwertaufgabe, bestehend aus der linearen homogenen Differentialgleichung [vgl. (5.207)]

$$L[y] = \lambda M[y] \quad \text{mit} \quad L[u] = -(xu')' + \frac{p^2}{x} u, \; M[u] = xu,$$

$$(p \geqq 0, \text{ sonst beliebig reell, } 0 \leqq x \leqq l) \tag{6.233}$$

und den Randbedingungen

$$\lim_{x \to +0} y(x) \text{ existiert,} \quad y(l) = 0 \tag{6.234}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{1}{l^2} (\alpha_n^{(p)})^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.235}$$

wobei $\alpha_n^{(p)}$ die der Größe nach geordneten positiven Nullstellen der Besselfunktion $J_p(x)$ [vgl. (5.4)] sind:

$$J_p(\alpha_n^{(p)}) = 0. \tag{6.236}$$

Die zugehörigen Eigenräume sind eindimensional. Als Basis kann jeweils die Funktion

$$J_p\left(\alpha_n^{(p)}\frac{x}{l}\right) \quad (0 \leqq x \leqq l) \tag{6.237}$$

genommen werden. Im vorliegenden Beispiel ist

$$\langle u|v\rangle = \int_0^l \overline{M[u]}\, v\, \mathrm{d}x = \int_0^l x\bar{u}v\, \mathrm{d}x, \quad \|u\| = \sqrt{\int_0^l x|u|^2\, \mathrm{d}x},$$

$$\left\| J_p\left(\alpha_n^{(p)}\frac{x}{l}\right)\right\| = \frac{l}{\sqrt{2}}\left| J_{p+1}\left(\alpha_n^{(p)}\right)\right|. \tag{6.238}$$

Für beliebige Vergleichsfunktionen $u(x)$ gilt

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p\left(\alpha_n^{(p)}\frac{x}{l}\right) \quad (0 \leqq x \leqq l),$$

$$c_n = \frac{2}{l^2}\frac{1}{\left(J_{p+1}\left(\alpha_n^{(p)}\right)\right)^2}\int_0^l xu(x)\, J_p\left(\alpha_n^{(p)}\frac{x}{l}\right) \mathrm{d}x. \tag{6.239}$$

Aufgabe 6.18: Im Anschluß an (5.231) bestimme man $\alpha_n^{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ im Fall $p = \frac{1}{2}$ und näherungsweise im Fall $p = \frac{3}{2}$. *

Zusatz zu den Sätzen 6.8 und 6.9: Die Formulierung „in vielen Fällen" weist einerseits darauf hin, daß die Aussagen dieser beiden Sätze in wichtigen Fällen der Praxis gelten. Einen Eindruck hiervon vermitteln die Beispiele 6.13 bis 6.17. Andererseits wird damit gesagt, daß in diesen Sätzen für die Garantie ihrer Aussagen weitere Voraussetzungen fehlen. Es muß in diesem Zusammenhang auf die Literatur (z. B. [2], [3], [4], [7], [8]) verwiesen werden, wo auch teilweise diskutiert wird, in welchen Fällen Fourierentwicklung in die Darstellung durch ein zugehöriges Fourierintegral übergeht. Weiterhin sei auf den Band 22 hingewiesen. Zur Illustration dient

Beispiel 6.18: In (6.239) geht beim Grenzübergang $l \to \infty$ die Fourierreihe in das zugehörige Fourierintegral **(Hankel-Transformation)** über:

$$u(x) = \int_0^{\infty} c(y)\sqrt{xy}\, J_p(xy)\, \mathrm{d}_y \quad \text{mit} \quad c(y) = \int_0^{\infty} u(x)\sqrt{xy}\, J_p(xy)\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6.19: Mittels Aufgabe 5.26 behandle man im Beispiel 6.18 die Fälle $p = \pm(1/2)$. *

Lösungen der Aufgaben

5.1: $c_5 = \frac{1}{4\cdot 5}(c_0c_4 + \ldots + c_4c_0) = 0, \qquad c_6 = \frac{1}{4\cdot 6}(c_0c_5 + \ldots + c_5c_0) = 0,$

$$c_7 = \frac{1}{4\cdot 7}(c_0c_6 + \ldots + c_3c_3 + \ldots + c_6c_0) = \frac{1}{28}c_3^2 = \frac{1}{4032}.$$

5.2: $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 1,\ c_1 = 0.$

$(1 - x^2)\,y'' - xy' = 2 \Rightarrow \sum_{\nu=-2}^{\infty} c_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1)\,x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu[\nu(\nu-1)+\nu]\,x^\nu = 2 \Rightarrow c_2 = 1,\ c_{\nu+2}$
$= \frac{\nu^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\,c_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots) \Rightarrow c_3 = c_5 = 0,\ c_4 = \frac{1}{3},\ c_6 = \frac{8}{45};\ y' = p \Rightarrow (1-x^2)p' - xp$
$= 2,\ p(0) = 0;$

$(1 - x^2)\,p_h' - xp_h = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p_h}{p_h} = \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow p_h = \frac{C_1}{\sqrt{|1-x^2|}} \xRightarrow[x\,\in\,\text{Umgebg. von } 0]{} p_h$
$= \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}};\quad p_p(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow u = 2\arcsin x \Rightarrow p$
$= \frac{2\arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}}.\ p(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y = (\arcsin x)^2 + C_2.\ y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow y(x)$
$= 1 + (\arcsin x)^2 = 1 + \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots\right)^2 = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \ldots$

5.3: $\varphi(t) = \frac{v_0}{l\omega}\sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

$\varphi(t) = \frac{v_0}{l\omega}\left(\omega t - \frac{1}{3!}\,\omega^3t^3 + \frac{1}{5!}\,\omega^5t^5 - \frac{1}{7!}\,\omega^7t^7 + \ldots\right) = \frac{v_0}{l}\,t - \frac{gv_0}{6l^2}\,t^3 + \frac{1}{120}\,\frac{g^2v_0}{l^3}\,t^5$
$- \frac{1}{5040}\,\frac{g^3v_0}{l^4}\,t^7 + \ldots \Rightarrow d_\nu = 0\ (\nu = 0, 1, 2, 3, 4),\ d_5 = \frac{1}{120}\,\frac{gv_0^3}{l^4},\ d_6 = 0,\ d_7 =$
$- \frac{1}{5040}\left(\frac{11g^2v_0^3}{l^5} + \frac{gv_0^5}{l^6}\right).$

5.4: An die Stelle von (5.39) tritt $c_1(x-1)^2 + \ldots = 1 + (c_1 - 1)(x-1) + \ldots$ Der Beginn des Koeffizientenvergleichs führt zum Widerspruch $0 = -1$.

5.5: $(1, y_0, y_0'),\ (-1, y_0, y_0')$ (y_0, y_0' beliebig).

5.6: $P_0(x) \equiv 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2,\ P_3(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3,\ P_4(x)$
$= \frac{3}{8} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{8}x^4.$

5.7: Einerseits: $c_1 = 1 \Rightarrow c_{2\mu+1} = \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!}(-[2\mu-1])(-[2\mu-3])\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\mu)$
$= \frac{1}{(2\mu+1)!}[2\mu-1][2\mu-3]\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\mu) = \frac{1}{(2\mu+1)!}1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\mu) = \frac{(2\mu)!}{(2\mu+1)!}$

$= \dfrac{1}{2\mu+1} \Rightarrow c_1 x + \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu+1} x^{2\mu+1} = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu+1} x^{2\mu+1}$; andererseits: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots,\ \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots \Rightarrow \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\right) = 2\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu+1} x^{2\mu+1} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu+1} x^{2\mu+1}.$

5.8: Einerseits: $c_0 = -1 \Rightarrow c_{2\mu} = -\dfrac{(-1)^\mu}{(2\mu)!}(1 - [2\mu-2])(1 - [2\mu-4]) \cdot \ldots \cdot (1-2) \cdot 1 \cdot (1+1)(1+3) \cdot \ldots \cdot (1 + [2\mu-1]) = \dfrac{1}{(2\mu)!}(2\mu-3)(2\mu-5) \cdot \ldots \cdot (2-1) \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+3) \cdot \ldots \cdot (2\mu) = \dfrac{1}{(2\mu)!}\dfrac{(2\mu)!}{2\mu-1} = \dfrac{1}{2\mu-1} \Rightarrow c_0 + \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} c_{2\mu} x^{2\mu} = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu-1} x^{2\mu}$;

andererseits: $-1 + \dfrac{x}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -1 + x\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu+1} x^{2\mu+1} \xRightarrow[\nu=\mu+1]{} -1 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\nu-1} x^{2\nu} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\nu-1} x^{2\nu} = \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\mu-1} x^{2\mu}.$

5.9: $\vartheta'' + \lambda^4 x^2 \vartheta = 0$, $r = \infty$. c_0 beliebig, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = -\dfrac{\lambda^4 c_0}{3 \cdot 4}$, $c_5 = c_6 = c_7 = 0$, $c_8 = \dfrac{\lambda^8 c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}$, $c_9 = c_{10} = c_{11} = 0$, $c_{12} = -\dfrac{\lambda^{12} c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}$, $c_{13} = c_{14} = c_{15} = 0$, $c_{16} = \dfrac{\lambda^{16} c_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16}$.

5.10: 2.

5.11: $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2(x-1) = x$, $P_2(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3(x-1) + \dfrac{1}{2^2}\dfrac{1}{(2!)^2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x-1)^2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}x^2$, $P_3(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4(x-1) + \dfrac{1}{2^2}\dfrac{1}{(2!)^2} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (x-1)^2 + \dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{(3!)^2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(x-1)^3 = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}x^3$.

5.12: $\{c_0\alpha(\alpha-1)(x-x_0)^{\alpha-2} + \ldots\} + \{a_{-1}(x-x_0)^{-1} + \ldots\}\{c_0\alpha(x-x_0)^{\alpha-1} + \ldots\} + \{b_{-2}(x-x_0)^{-2} + \ldots\}\{c_0(x-x_0)^\alpha + \ldots\} = 0 \xRightarrow[:(x-x_0)^{\alpha-2}]{} c_0[\alpha(\alpha-1) + a_{-1}\alpha + b_{-2}] \cdot (x-x_0)^{-2} + \ldots = 0$. Koeffizientenvergleich $\xRightarrow[c_0 \neq 0]{} \alpha(\alpha-1) + a_{-1}\alpha + b_{-2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + (a_{-1}-1)\alpha + b_{-2} = 0$.

5.13: $R_1(r) = r^\alpha \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu$, $\alpha_1 = l$, $\alpha_2 = -(l+1)$;

c_0 beliebig, $c_1 = -\dfrac{a}{1+l}c_0$, $c_\nu = -\dfrac{\lambda c_{\nu-2} + 2ac_{\nu-1}}{\nu(\nu+2l+1)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$.

Setzt man $c_0 \neq 0$ fest, z. B. $c_0 = 1$, so ergibt sich ein Basiselement $R_1(r)$.

5.14: A $\neq 0$, sonst würde die Rechnung für $y_2(x)$ bis auf einen konstanten Faktor wieder $y_1(x)$ liefern.

5.15: $0 < |x-1| < 2 \Rightarrow Q_1(x) = \frac{x}{2}(-\ln|x-1| + \ln(1+x)) - 1 = -\frac{1}{2}P_1(x)\ln|x-1| - 1$

$+ \frac{1}{2}(1 + (x-1))\ln[2 + (x-1)]$ mit $\ln[2 + (x-1)] = \ln 2 + \ln\left[1 + \frac{1}{2}(x-1)\right] = \ln 2$

$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{2^\nu}\frac{1}{\nu}(x-1)^\nu. \Rightarrow Q_1(x) = -\frac{1}{2}P_1(x)\ln|x-1| - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\right)$

$\cdot(x-1) + \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{2^{\nu+1}}\frac{1}{\nu}(x-1)^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{1}{2^{\nu+1}}\frac{1}{\nu}(x-1)^{\nu+1}. \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, c_0(\alpha_2)$

$= -1 + \frac{1}{2}\ln 2,\ c_1(\alpha_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2,\ c_\nu(\alpha_2) = (-1)^\nu\frac{1}{2^{\nu+1}}\frac{\nu+1}{\nu(\nu-1)},\quad (\nu = 2, 3, \ldots).$

5.16: $y_2(x) = P_2(x)\int\frac{C}{(P_2(x))^2}\,e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}\,dx}\,dx = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,C\int\frac{4\,dx}{(3x^2-1)^2\,|x^2-1|}$

$$= \pm\frac{2}{9}C(3x^2-1)\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2(x+1)(x-1)} = \pm\frac{2}{9}C(3x^2-1)$$

$$\cdot\int\left\{\frac{9}{8}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\right\}dx = \pm\frac{1}{4}C(3x^2-1)$$

$$\cdot\left\{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right\} = \pm C\left\{\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3}{2}x\right\}.$$

$|x| < 1 \Rightarrow$ unteres Vorzeichen $\underset{C=1}{\Longrightarrow} Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x,$

$|x| > 1 \Rightarrow$ oberes Vorzeichen $\underset{C=-1}{\Longrightarrow} Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x.$

5.17: $R_2(r) = AR_1(r)\ln r + r^{\alpha_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(\alpha_2)\,r^\nu$, wobei $\alpha_2 = -l-1$, $c_0(\alpha_2)$ beliebig, $c_1(\alpha_2)$ $= \frac{a}{l+1}c_0(\alpha_2)$, $c_\nu(\alpha_2) = \frac{-\lambda c_{\nu-2}(\alpha_2) + 2ac_{\nu-1}(\alpha_2)}{\nu(\nu+2l+1)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots, 2l)$, $c_{2l+1}(\alpha_2)$ beliebig, $A = -\frac{1}{2}(c_{2l-1}(\alpha_2) + 2ac_{2l}(\alpha_2))$, $c_\nu(\alpha_2) = -\frac{\lambda c_{\nu-2}(\alpha_2) + 2ac_{\nu-1}(\alpha_2) + 2A(\nu-2l)\,c_{\nu-2l-1}}{\nu(\nu-2l-1)}$ $(\nu = 2l+2, \ldots)$. Es kann c_{2l+1} gleich null gesetzt werden, denn $c_{2l+1} \neq 0$ ist insgesamt nur Anlaß zu einem Zusatzsummanden der Gestalt $CR_1(r)$. Setzt man darüber hinaus $c_0(\alpha_2) \neq 0$ fest, etwa $c_0(\alpha_2) = 1$, so ergibt sich das Basiselement $R_2(r)$.

5.18: Unter einer (einseitigen) Umgebung von $-\infty$ versteht man die Menge aller reellen x mit $x < X_0$. Durch $t = \frac{1}{x}$ wird die Menge aller x mit $x < X_0$ $(X_0 < 0)$ auf die linksseitige Umgebung $\frac{1}{X_0} < t < 0$ von $t = 0$ abgebildet. Hieraus folgt: Die Differentialgleichung (5.116) und deren Lösungen verhalten sich in einer Umgebung von $x = -\infty$ wie die Differentialgleichung (5.118) und deren Lösungen in einer linksseitigen Umgebung von $t = 0$.

5.19: $\tilde{p}_0(t) = t^4 p_0\left(\frac{1}{t}\right)$, $\tilde{p}_1(t) = 2t^3 p_0\left(\frac{1}{t}\right) - t^2 p_1\left(\frac{1}{t}\right)$, $\tilde{p}_2(t) = p_2\left(\frac{1}{t}\right)$.

5.20: $\frac{-2t^3}{t^2(1-t^2)}$ ist ungerade $\Rightarrow \int -\frac{2t^3}{t^2(1-t^2)}\,dt$ ist gerade $\Rightarrow e^{-\int(\ldots)\,dt}$ ist gerade. $u_1(t)$ ist gerade $\Rightarrow$ Behauptung.

5.21: $$\frac{\tilde{p}_1(t)}{\tilde{p}_0(t)} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\,\frac{p_1\left(\frac{1}{t}\right)}{p_0\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu = -\frac{a_0}{t^2} + \frac{2-a_1}{t} - a_2 - a_3 t - \ldots,$$

$$\frac{\tilde{p}_2(t)}{\tilde{p}_0(t)} = \frac{p_2\left(\frac{1}{t}\right)}{t^4 p_0\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{t^4}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu = \frac{b_0}{t^4} + \frac{b_1}{t^3} + \frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t} + b_4 + b_5 t + \ldots$$

5.22: $\tilde{a}_0 = 2\beta + a_0$. $\tilde{a}_0 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{a_0}{2}$. (5.153) $\Rightarrow \beta = -\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 - b_0}$.

5.23: $\tau^2\hat{R}'' + 3\tau\hat{R}' + (8a\tau^2 - 4l(l+1))\hat{R} = 0$, $\hat{R} = e^{\beta\tau}\hat{u}$, $\beta^2 + 8a = 0$, $\tau^2\hat{u}'' + (2\beta\tau^2 + 3\tau)\hat{u}' + (3\beta\tau - 4l(l+1))\hat{u} = 0$, $\hat{u} = \tau^\alpha\hat{v}$, $\tau^2\hat{v}'' + ((2\alpha+3)\tau + 2\beta\tau^2)\hat{v}' + [\alpha^2 + 2\alpha - 4l(l+1) + (2\alpha\beta + 3\beta)\tau]\hat{v} = 0$, $2\alpha\beta + 3\beta = 0$, $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\tau^2\hat{v}'' + 2\beta\tau^2\hat{v}' + \left(-\frac{3}{4} - 4l(l+1)\right)\hat{v} = 0$,

$\hat{v} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \tau^{-\nu}$, c_0 beliebig, $c_{\nu+1} = \frac{1}{2\beta(\nu+1)}\left(\nu(\nu+1) - \frac{3}{4}l(l+1)\right)c_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$,

$R(r) = \widetilde{C}_1\widetilde{R}_1(r) + \widetilde{C}_2\widetilde{R}_2(r)$, $\widetilde{C}_k\widetilde{R}_k(r) = e^{\beta_k\sqrt{r}}\,r^{-\frac{3}{4}}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\sqrt{r})^{-\nu}$ mit $\beta_1 = 2\sqrt{2}\sqrt{a}\,i$, $\beta_2 = -\beta_1$,

$c_{\nu+1} = \frac{1}{2\beta_k(\nu+1)}\left(\nu(\nu+1) - \frac{3}{4}l(l+1)\right)c_\nu$ und $c_0 = \widetilde{C}_k$ $(k = 1, 2)$.

5.24: $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.

5.25: $\left(\frac{1}{2}\right)! = \left(-\frac{1}{2}+1\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\left(\frac{1}{2}+1\right)! = \left(\frac{1}{2}\right)!\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$, $\left(\frac{1}{2}+2\right)! = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\pi}$,

$$\left(\frac{1}{2}+n\right)! = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2n+1}{2}\right)\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\,1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\,\frac{(2n+1)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\,\frac{(2n+1)!}{n!}.$$

5.26: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{2^{2\mu}\mu!(\frac{1}{2}+\mu)!}x^{2\mu}$, $\left(\frac{1}{2}+\mu\right)! = \left(-\frac{1}{2}\right)!\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\ldots$ $\cdot\left(\frac{1}{2}+\mu\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}}\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2\mu+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}}\,\frac{(2\mu+1)!}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}}\,\frac{(2\mu+1)!}{2^\mu\mu!} \Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x)$

$$= \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{(2\mu+1)!} x^{2\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu+1)!} x^{2\mu+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \left(-\frac{1}{2}+\mu\right)!$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}+\mu)!}{\frac{1}{2}+\mu} = \frac{2}{2\mu+1}\left(\frac{1}{2}+\mu\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\mu}\,\frac{(2\mu)!}{2^\mu \mu!} \Rightarrow J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{2^{2\mu}\mu!(-\frac{1}{2}+\mu)!} x^{2\mu}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{(2\mu)!} x^{2\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \; N_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)\right] = -J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\sin x - \mathrm{i}\cos x) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \; H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (\sin x + \mathrm{i}\cos x) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

5.27: $$J_n' = \frac{1}{2^n}\left\{\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{2^{2\mu-1}(\mu-1)!\,(n+\mu)!} x^{2\mu+n-1}\right.$$

$$\left. + n \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\,(n+\mu)!} x^{2\mu+n-1}\right\}, \tag{1}$$

$$-J_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} \frac{1}{2^{2\mu+1}\mu!(n+\mu+1)!} x^{2\mu+n+1}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{2^{2\nu-1}(\nu-1)!\,(n+\nu)!} x^{2\nu+n-1}, \tag{2}$$

$$\frac{n}{x} J_n(x) = \frac{n}{2^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\,(n+\mu)!} x^{2\mu+n-1}. \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung.

5.28: a) $$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k}-\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k+1}-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=\nu+1}^{m+\nu}\frac{1}{k} + \sum_{k=\nu+2}^{m+\nu+1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+\nu}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m+\nu+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\nu+1}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = C + \ln(m+\nu)$$

$$- \sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} + C + \ln(m+\nu+1) - \left(\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} + \frac{1}{\nu+1}\right) - 2(C+\ln m) + r_m$$

$$= -2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} - \frac{1}{\nu+1} + \ln\frac{(m+\nu)(m+\nu+1)}{m^2} + r_m \text{ mit } \lim_{m\to\infty} r_m = 0.$$

b) $$\Psi(\nu) + \Psi(\nu+1) = -2C - \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k}-\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu+k+1}-\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= -2C + 2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k} + \frac{1}{\nu+1}.$$

c) $$N_0'(x) = \frac{2}{\pi} J_0'(x)\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\pi x} J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1}\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\mu}\right\}, \tag{1}$$

$$N_1(x) = \frac{2}{\pi} J_1(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}\left[-2C + 2\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu+1}\right]\right\}, \tag{2}$$

$J_0'(x) = -J_1(x)$ (siehe Aufgabe 5.27), $\quad (3)$

$J_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}$ (4), $-\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1} 2 \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu}\right\}$
$= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!\,\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{1}{\mu}\right\} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!\,\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu}\right\}$
$-\frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!\,\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\mu}\right\}$
$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{x}(J_0(x) - 1)$ (5). Aus (1) bis (5) folgt $N_0'(x) = -N_1(x)$.

5.29: a) $y'(x) = w'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -w'(u)$, $y''(x) = w''(u)$, $uw'' + w' + \frac{\omega^2}{\mathrm{g}} w = 0$. b) $w'(u) = Z'(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = Z'\frac{a}{2\sqrt{u}} = Z'\frac{a^{2-}}{2z}$. $uw'' = Z''\frac{a^2}{4} - Z'\frac{a}{4}u^{-\frac{1}{2}} = Z''\frac{a^2}{4} - Z'\frac{a}{4}\frac{a}{z} \cdot \frac{a^2}{4}Z''$
$+ \left(-\frac{a^2}{4}\frac{1}{z} + \frac{a^2}{2z}\right)Z' + \frac{\omega^2}{\mathrm{g}}Z = 0$. $z^2 Z'' + zZ' + \frac{4\omega^2}{a^2\mathrm{g}} z^2 Z = 0$.
c) $a = \pm\frac{2\omega}{\sqrt{\mathrm{g}}}$. d) $y = C_1 J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{\mathrm{g}}}\sqrt{L-x}\right) + C_2 N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{\mathrm{g}}}\sqrt{L-x}\right)$.

5.30: $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, 1, \ldots)$. b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left\{1 - \frac{9}{64}\frac{1}{x^2}\right\}$
$+ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left\{\frac{1}{8}x - \frac{75}{1024}\frac{1}{x^3}\right\}$, $f(x_1) = \frac{1}{8}x_1 - \frac{75}{1024}\frac{1}{x_1^3}$,
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, $f'(x_1) = -1 + \frac{1}{64}\frac{1}{x_1^2} + \frac{225}{1024}\frac{1}{x_1^4}$.
c) 2,4041; 5,5201; 8,6537; 14,9309.

6.1: $l < \sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2}$.

6.2: $y = \mathrm{e}^{rx} \Rightarrow r^2 + ar + \lambda = 0$, Lösungen $r_1, r_2 \Rightarrow r^2 + ar + \lambda = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2 \Rightarrow r_1 + r_2 = -a(1), r_1 r_2 = \lambda(2)$. 1. Fall: $r_1 = r_2 \Rightarrow y = \mathrm{e}^{r_1 x}(C_1 + C_2 x) \Rightarrow (1 - \mathrm{e}^{r_1 l})C_1 - l\,\mathrm{e}^{r_1 l}C_2 = 0$, $r_1(1 - \mathrm{e}^{r_1 l})C_1 + (1 - [r_1 l + 1]\,\mathrm{e}^{r_1 l})C_2 = 0 \Rightarrow$ Koeff.-Det. $= (1 - \mathrm{e}^{r_1 l})^2 \neq 0$, denn $r_1 = r_2 = -\frac{a}{2} \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow$ 1. Fall liefert keine Eigenwerte. 2. Fall: $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} \Rightarrow (1 - \mathrm{e}^{r_1 l})C_1 + (1 - \mathrm{e}^{r_2 l})C_2 = 0$, $r_1(1 - \mathrm{e}^{r_1 l})C_1 + r_2(1 - \mathrm{e}^{r_2 l})C_2 = 0 \Rightarrow$ Koeff.-Det. $= D = (1 - \mathrm{e}^{r_1 l})(1 - \mathrm{e}^{r_2 l})(r_2 - r_1)$. Falls $D \neq 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow D \neq 0$ liefert keinen Eigenwert. $D = 0 \Rightarrow (1 - \mathrm{e}^{r_1 l}) = 0$ oder $(1 - \mathrm{e}^{r_2 l}) = 0$.

Fall 2a: $1 - \mathrm{e}^{r_1 l} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(r_1 l) + \mathrm{i}\,\mathrm{Jm}(r_1 l)} = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(r_1 l)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Jm}(r_1 l)} = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(r_1 l)}(\cos(\mathrm{Jm}(r_1 l)) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Jm}(r_1 l))) = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(r_1 l) = 0$ und $\mathrm{Jm}(r_1 l) = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \Rightarrow r_1 = \frac{1}{l}2k\pi\mathrm{i}$ $\underset{(1)}{\Rightarrow} r_2 = -a - \frac{1}{l}2k\pi\mathrm{i} \underset{(2)}{\Rightarrow}$ Eigenwerte $\lambda_k = r_1 r_2 = \frac{4\pi^2}{l^2}k^2 - \frac{a}{l}2k\pi\mathrm{i}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Fall 2b: $1 - \mathrm{e}^{r_2 l} = 0$. Im Fall 2a r_2 mit r_1 vertauschen $\Rightarrow$ Fall 2b liefert nichts Neues. Zu λ_k gehörige Eigenfunktionen: $0 \cdot C_1 + (1 - \mathrm{e}^{r_2 l})C_2 = 0$, $r_1 \cdot 0 \cdot C_1 + r_2(1 - \mathrm{e}^{r_2 l})C_2 = 0 \Rightarrow C_1 =$ beliebig $C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} \Rightarrow$ Basis: $\mathrm{e}^{\frac{1}{l}2k\pi\mathrm{i}x}$.

6.3: a) $u(\lambda) = \sqrt{\lambda}\, l,\ f(u) = u$. b) $\tan u = u \Rightarrow u_{\min} \approx 4{,}493 \Rightarrow \lambda_{\min} \approx \left(\frac{1}{l}\, 4{,}493\right)^2 \Rightarrow F_{\text{krit.}} = \frac{EJ}{l^2}\, u_{\min}^2 \approx \frac{EJ\pi^2}{(0{,}7l)^2}$.

6.4: Eigenwertgleichung: $\cosh(\sqrt[4]{\lambda}\, l)\cos(\sqrt[4]{\lambda}\, l) = -1$. $\sqrt[4]{\lambda_1}\, l \approx 1{,}875$, $\sqrt[4]{\lambda_2}\, l \approx 4{,}694$. Basis der zugehörigen eindimensionalen Eigenräume: $y_1(x) = a_1\,(\cos(\sqrt[4]{\lambda_1}\, x) - \cosh(\sqrt[4]{\lambda_1}\, x)) + a_2 \cdot (\sin(\sqrt[4]{\lambda_1}\, x) - \sinh(\sqrt[4]{\lambda_1}\, x))$ mit $a_1 = \sinh(\sqrt[4]{\lambda_1}\, l) - \sin(\sqrt[4]{\lambda_1}\, l) \approx 4{,}148$, $a_2 = \cos(\sqrt[4]{\lambda_1}\, l) - \cosh(\sqrt[4]{\lambda_1}\, l) \approx -3{,}037$;
$y_2(x) = a_3(\cos(\sqrt[4]{\lambda_2}\, x) - \cosh(\sqrt[4]{\lambda_2}\, x)) + a_4(\sin(\sqrt[4]{\lambda_2}\, x) - \sinh(\sqrt[4]{\lambda_2}\, x))$ mit $a_3 = \sinh(\sqrt[4]{\lambda_2}\, l) - \sin(\sqrt[4]{\lambda_2}\, l) \approx 53{,}640$, $a_4 = \cos(\sqrt[4]{\lambda_2}\, l) - \cosh(\sqrt[4]{\lambda_2}\, l) \approx -54{,}631$.

6.5: a) $1 - \frac{1}{3\cdot 4}u + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}u^2 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}u^3 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16}u^4 - + \ldots = 0$. b) $u^2 - 56u + 672 = 0$, $u_1 = 17{,}417$ (die weitere Lösung der quadratischen Gleichung ist unbrauchbar, da die kleinste positive Lösung gesucht ist).
c) $u_2 = 16{,}75$, $u_3 = 16{,}42$, $u_4 = 16{,}25$, $u_5 = 16{,}17$, $u_6 = 16{,}14$.
d) $F_{\text{krit}} = \frac{4{,}017}{l^2}\sqrt{\frac{GJ_tEJ}{1-\nu^2}}$.

6.6: $w_1(x) = \frac{1}{2EJ}x^2$, $w_2(x) = \frac{1}{6EJ}x^3$, $w_p = w_{pI} + w_{pII}$, $EJw_{pI}'''' = q$, $EJw_{pII}'''' = F\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$. $w_{pI} = B_0x^4 \Rightarrow EJ\cdot 24B_0 = q \Rightarrow w_{pI} = \frac{q}{24EJ}x^4$. $w_{pII} = u_1 + xu_2 + x^2u_3 + x^3u_4$, $u_1' + xu_2' + x^2u_3' + x^3u_4' = 0$, $u_2' + 2xu_3' + 3x^2u_4' = 0$, $2u_3' + 6xu_4' = 0$, $6u_4' = \frac{F}{EJ}\,\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$.
$\Rightarrow$ Für $0 \leqq x < \frac{l}{2}$ ist $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$. Für $\frac{l}{2} < x \leqq l$ gilt $u_4 = \frac{F}{6EJ}\int_0^x \delta\left(\tilde{x} - \frac{l}{2}\right)d\tilde{x} = \frac{F}{6EJ}$, $u_3 = -\frac{F}{2EJ}\int_0^x \tilde{x}\delta\left(\tilde{x} - \frac{l}{2}\right)d\tilde{x} = -\frac{lF}{4EJ}$, $u_2 = \frac{F}{2EJ}\int_0^x \tilde{x}^2\delta\left(\tilde{x} - \frac{l}{2}\right)d\tilde{x} = \frac{l^2F}{8EJ}$, $u_1 = -\frac{F}{6EJ}\int_0^x \tilde{x}^3\delta\left(\tilde{x} - \frac{l}{2}\right)d\tilde{x} = -\frac{l^3F}{48EJ}$. $\Rightarrow$ Für $0 \leqq x < \frac{l}{2}$ ist $w_{pII} = 0$. Für $\frac{l}{2} < x \leqq l$ ist $w_{pII} = \frac{F}{48EJ}(-l^3 + 6l^2x - 12lx^2 + 8x^3)$. $w = C_1w_1 + C_2w_2 + w_{pI} + w_{pII}$
$\underset{x=l}{\Longrightarrow} C_2 + ql + F - c_1\frac{1}{48EJ}(24l^2C_1 + 8l^3C_2 + 2ql^4 + Fl^3) = 0$, $C_1 + lC_2 + \frac{q}{2}l^2 + \frac{1}{2}Fl$

$+ c_2 \frac{1}{24EJ}(24lC_1 + 12l^2C_2 + 4ql^3 + 3Fl^2) = 0 \Rightarrow -5\frac{1}{\mathrm{m}} C_1 - \frac{22}{3} C_2 = \frac{265}{24}$ MN, $21C_1 + 55\mathrm{m}lC_2 = -\frac{800}{3}$ MNm. $\Rightarrow C_1 = \frac{97075}{8712}$ MNm $\approx$ 11,014 MNm, $C_2 = -\frac{26435}{2904}$ MN $\approx -9\,103$ MN, $\Rightarrow M(x) = 11{,}014\,\mathrm{MNm} - 9{,}103\,\mathrm{MN}\,x + \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}} x^2$ für $0 \leqq x < \frac{5}{2}$ m, $M(x) = -0{,}486\,\mathrm{MNm} - 4{,}103\,\mathrm{MN}x + \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}} x^2$ für $\frac{5}{2}\,\mathrm{m} < x \leqq 5\mathrm{m}$.

$Q(x) = -9{,}103\,\mathrm{MN} + 2\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}} x$ für $0 \leqq x < \frac{5}{2}$ m, $Q(x) = -4{,}103\,\mathrm{MN} + \frac{2\mathrm{MN}}{\mathrm{m}} x$ für $\frac{5}{2}\,\mathrm{m} < x \leqq 5\mathrm{m}$.

6.7: a) $C_1y(x_\nu - h) + C_1y(x_\nu + h) = y(x_\nu)(C_1 + C_2) + hy'(x_\nu)(-C_1 + C_2) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_\nu)(C_1 + C_2) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_\nu)(-C_1 + C_2) + \ldots \Rightarrow C_1 + C_2 = 0,\ -C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2},\ C_2 = \frac{1}{2}. \Rightarrow y'(x_\nu) = \frac{1}{2h}(-y(x_\nu - h) + y(x_\nu + h)) + R$ mit $R = -\frac{1}{6}h^2y'''(x_\nu) + \ldots$

b) $C_1y(x_\nu - 2h) + C_2y(x_\nu - h) + C_3y(x_\nu + h) + C_4y(x_\nu + 2h) = y(x_\nu)(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + hy'(x_\nu) \cdot (-2C_1 - C_2 + C_3 + 2C_4) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_\nu)(4C_1 + C_2 + C_3 + 4C_4) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_\nu) \cdot (-8C_1 - C_2 + C_3 + 8C_4) + \frac{1}{4!}h^4y''''(x_\nu)(16C_1 + C_2 + C_3 + 16C_4) + \frac{1}{5!}h^5y^{(5)}(x_\nu) \cdot (-32C_1 - C_2 + C_3 + 32C_4) + \ldots \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0,\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 2C_4 = 1,\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4C_4 = 0,\ -8C_1 - C_2 + C_3 + 8C_4 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{12},\ C_2 = -\frac{2}{3},\ C_3 = \frac{2}{3},\ C_4 = -\frac{1}{12} \Rightarrow y'(x_\nu) = \frac{1}{12h}(y(x_\nu - 2h) - 8y(x_\nu - h) + 8y(x_\nu + h) - y(x_\nu + 2h)) + R$ mit $R = \frac{1}{30}h^4y^{(5)}(x_\nu) + \ldots$

c) $\sum_{k=1}^{5} C_ky(x_\nu + (k-3)h) = y(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k + hy'(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^2 + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^3 + \frac{1}{4!}h^4y''''(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^4 + \frac{1}{5!}h^5y^{(5)}(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^5 + \frac{1}{6!}h^6y^{(6)}(x_\nu)\sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^6 + \ldots \Rightarrow \sum_{k=1}^{5} C_k = 0,\ \sum_{k=1}^{5} C_k(k-3) = 0,\ \sum_{x=1}^{5} C_k(k-3)^2 = 0,\ \sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^3 = 0,\ \sum_{k=1}^{5} C_k(k-3)^4 = 4! \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -4,\ C_3 = 6,\ C_4 = -4,\ C_5 = 1$ $\Rightarrow y''''(x_\nu) = \frac{1}{h^4}(y(x_\nu - 2h) - 4y(x_\nu - h) + 6y(x_\nu) - 4y(x_\nu + h) + y(x_\nu + 2h)) + R$ mit $R = -\frac{1}{6}h^2y^{(6)}(x_\nu) + \ldots$.

6.8: Die Randwertaufgabe ist nicht linear.

6.9: Es handelt sich um eine lineare Eigenwertaufgabe.

6.10: (6.108), (6.105) $\Rightarrow r^2 f''(r) + 4rf'(r) = -\frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma\frac{Q}{3\alpha}r^2$; (6.109), (6.105), (6.110) $\Rightarrow$ RB: $\frac{2G}{1-2\nu}$ $\cdot\left[(1+\nu)f(R) + (1-\nu)R(f'(r))_{r=R} - (1+\nu)\gamma\frac{QR}{3\beta}\right] = -P\cdot f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^3} - \frac{1}{30}\frac{1+\nu}{1-\nu}$ $\cdot\gamma\frac{Q}{\alpha}r^2$, $\lim\limits_{r\to 0} f(r)$ existiert $\Rightarrow C_2 = 0. \underset{\text{RB}}{\Longrightarrow} C_1 = -\frac{p(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{30}\frac{3-\nu}{1-\nu}\gamma\frac{Q}{\alpha}R^2 + \gamma\frac{QR}{3\beta}$

$\Rightarrow f(r) = -\frac{p(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} + \frac{\gamma QR}{2\beta}\frac{1}{30}\gamma\frac{Q}{\alpha(1-\nu)}[(3-\nu)R^2 - (1+\nu)r^2]. \Rightarrow \sigma_r(r)$ $= -p - \frac{2G\gamma Q}{15\alpha}\frac{1+\nu}{1-\nu}(R^2 - r^2)$.

6.11: a) $J_0' = -J_1$, $N_0' = -N_1$, $y' = \frac{\omega}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{L-x}}\left\{C_1 J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-x}\right)\right.$ $\left.+ C_2 N_1\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\sqrt{L-x}\right)\right\}$: Eigenwertgleichung: $\omega\sqrt{g}\frac{1}{\sqrt{L-l}}N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)$ $J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L}\right) - \omega^2 N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L}\right) - \omega\sqrt{g}\frac{1}{\sqrt{L-l}}J_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)N_0$ $\cdot\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L}\right) + \omega^2 N_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L}\right)J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right) = 0.$

b) (5.228) $\Rightarrow \lim\limits_{L\to l+0}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\,N_1\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)\right) = -\frac{2}{\pi}$. (5.226) $\Rightarrow \lim\limits_{L\to l+0}$ $\cdot\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\,N_0\left(\frac{2}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)\right) = 0$. (5.211) $\Rightarrow \lim\limits_{L\to l+0}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\,J_\nu\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l}\right)\right)$ $= 0$ $(\nu = 0{,}1)$. Eigenwertgleichung nach dem Grenzübergang: $J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{l}\right) = 0$.

c) $\omega\sqrt{g}\frac{1}{\sqrt{L-l}}\sin\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l} - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L} - \frac{\pi}{4}\right) - \omega^2\sin\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l} - \frac{\pi}{4}\right)$ $\cdot\cos\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L} - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\sqrt{g}\frac{1}{\sqrt{L-l}}\cos\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l} - \frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L} - \frac{\pi}{4}\right)$ $+ \sin\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L-l} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}\sqrt{L} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$ $\omega = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L-l}}\cot\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}}[\sqrt{L} - \sqrt{L-l}]\right)$.

d) $f(\omega) = \sqrt{\frac{g}{L}}\cot\frac{\omega l}{\sqrt{gL}}$.   e) $\frac{1}{f(\omega)} = \frac{1}{g}\omega + \ldots, \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Mathematisches Pendel im Fall kleiner Ausschläge: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (T: Schwingungsdauer), Frequenz: $\frac{1}{T}$, Kreisfrequenz: $2\pi\frac{1}{T}$.

6.12: $L[u] = u''''.\ \int_0^l \overline{L[u]}\, v\, \mathrm{d}x = \int_0^l \overline{u''''}\, v\, \mathrm{d}x = \underbrace{[\overline{u'''}v]_0^l}_{=0} - \int_0^l \overline{u'''}\, v'\, \mathrm{d}x = -\underbrace{[\overline{u''}\, v']_0^l}_{=0} +$

$\int_0^l \overline{u''}\, v''\, \mathrm{d}x = \underbrace{[\overline{u'}v'']_0^l}_{=0} - \int_0^l \bar{u}'\, v'''\, \mathrm{d}x = -\underbrace{[\bar{u}\, v''']_0^l}_{=0} + \int_0^l \bar{u}\, v''''\, \mathrm{d}x = \int_0^l \bar{u}L[v]\, \mathrm{d}x.\ \int_0^l \overline{L[u]}\, u\, \mathrm{d}x = \int_0^l \overline{u''}\, u''\, \mathrm{d}x$

$= \int_0^l |u''|^2\, \mathrm{d}x \geqq 0.$ Falls $\int_0^l |u''|^2\, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow u'' = 0 \Rightarrow u = C_1 + C_2 x \xRightarrow{u(0)=0} C_1 = 0 \xRightarrow{u'(0)=0} C_2$

$= 0 \Rightarrow u \equiv 0.$

6.13: In (6.158) ist jetzt der Nenner größer als null; der Zähler ist größer (bzw. größer oder gleich) null.

6.14: Man benutzt die Lösung von Aufgabe 5.6.

6.15: $\langle Y_n | Y_m \rangle = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \overline{A_{n,0}} P_n(\cos\vartheta) + \sum_{k=1}^{n} (\overline{A_{n,k}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} + \overline{B_{n,k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}) (\sin\vartheta)^k \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \right)_{x=\cos\vartheta} \right\} \right.$

$\left. \cdot \left\{ A_{m,0} P_m(\cos\vartheta) + \sum_{l=1}^{m} (A_{m,l}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} + B_{m,l}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi}) (\sin\vartheta)^l \left(\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} P_m(x) \right)_{x=\cos\vartheta} \right\} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \right] \mathrm{d}\vartheta = 2\pi \overline{A_{n,0}}\, A_{m,0}$

$\cdot \underbrace{\int_{x=-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, \mathrm{d}x}_{=0} + \sum_{l=1}^{m} \left(A_{m,l} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}l\varphi} \mathrm{d}\varphi}_{=0} + B_{m,l} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi} \mathrm{d}\varphi}_{=0} \right) \overline{A_{n,0}} \int_{x=-1}^{1} P_n(x) (\sqrt{1-x^2})^l \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} P_m(x)\, \mathrm{d}x$

$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{A_{n,k}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi} \mathrm{d}\varphi}_{=0} + \overline{B_{n,k}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi} \mathrm{d}\varphi}_{=0} \right) A_{m,0} \int_{x=-1}^{1} P_m(x) (\sqrt{1-x^2})^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x)\, \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left(\overline{A_{n,k}} A_{m,l} \right.$

$\left. \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(l-k)\varphi}\, \mathrm{d}\varphi}_{=0,\text{falls } l \neq k} + \overline{B_{n,k}} B_{m,l} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)\varphi}\, \mathrm{d}\varphi}_{=0,\text{falls } l \neq k} + \overline{A_{n,k}} B_{m,l} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k+l)\varphi}\, \mathrm{d}\varphi}_{=0} + \overline{B_{n,k}} A_{m,l} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+l)}\, \mathrm{d}\varphi}_{=0} \right)$

$\cdot \int_{x=-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{k+l}{2}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} P_m(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{\substack{k=1 \\ r=\min(n,m)}}^{r} (\overline{A_{n,k}} A_{m,k} \cdot 2\pi + \overline{B_{n,k}} B_{m,k} \cdot 2\pi)$

$\underbrace{\cdot \int_{x=-1}^{1} (1-x^2)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_n(x) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_m(x)\, \mathrm{d}x = 0.}_{=0}$

6.16: (6.224) multiplizieren mit $e^{-i\tilde{k}\varphi}(\sin\vartheta)^{\tilde{k}}\left[\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\right]_{x=\cos\vartheta}\sin\vartheta$, danach $\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}(\ldots)d\vartheta\right]d\varphi$.

$$\Rightarrow \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{-i\tilde{k}\varphi}(\sin\vartheta)^{\tilde{k}}\left[\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\right]_{x=\cos\vartheta}\sin\vartheta\, u(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\right]d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-i\tilde{k}\varphi}d\varphi\right.$$

$$\cdot\int\limits_{x=-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{\tilde{k}}{2}}\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\cdot A_{n,0}P_n(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[A_{n,k}e^{i(k-\tilde{k})\varphi} + B_{n,k}e^{-i(k+\tilde{k})\varphi}\right]d\varphi$$

$$\left.\cdot\int\limits_{x=-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{k+\tilde{k}}{2}}\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_n(x)\,dx\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}2\pi A_{n,\tilde{k}}\int\limits_{x=-1}^{1}(1-x^2)^{\tilde{k}}\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\frac{d^{k}}{dx^{k}}P_n(x)\,dx$$

$$= 2\pi A_{\tilde{n},\tilde{k}}\int\limits_{x=-1}^{1}(1-x^2)^{\tilde{k}}\left(\frac{d^{\tilde{k}}}{dx^{\tilde{k}}}P_{\tilde{n}}(x)\right)^2 dx \underset{(6.216)}{\Longrightarrow} 2\pi A_{\tilde{n},\tilde{k}}\frac{2}{2\tilde{n}+1}\,\frac{(\tilde{n}+\tilde{k})!}{(\tilde{n}-\tilde{k})!} \Rightarrow A_{n,k} = \frac{2n+1}{4\pi}$$

$$\cdot\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{-ik\varphi}(\sin\vartheta)^{k+1}\left[\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\right]_{x=\cos\vartheta}u(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\right]d\varphi \text{ analog:}$$

$$B_{n,k} = \frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} e^{-ik\varphi}(\sin\vartheta)^{k+1}\left[\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)\right]_{x=\cos\vartheta}u(\vartheta,\varphi)\,d\vartheta\right]d\varphi.$$

6.17: $U_0(x,y,z) = Y_0(\vartheta,\varphi) = A_{0,0}$, $U_1(x,y,z) = rY_1(\vartheta,\varphi) = A_{1,0}r\cos\vartheta + (A_{1,1}+B_{1,1})$ $\cdot r\cos\varphi\sin\vartheta + i(A_{1,1}-B_{1,1})\,r\sin\varphi\sin\vartheta = A_{1,0}z + (A_{1,1}+B_{1,1})\,x + i(A_{1,1}-B_{1,1})\,y$,

$U_2(x,y,z) = r^2Y_2(\vartheta,\varphi) = A_{2,0}\left(\frac{3}{2}r^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}r^2\right) + (A_{2,1}+B_{2,1})\,3r^2\cos\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta$ $+i(A_{2,1}-B_{2,1})\,3r^2\sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta + (A_{2,2}+B_{2,2})\,3r^2\cos(2\varphi)\sin^2\vartheta + i(A_{2,2}-B_{2,2})$ $\cdot 3r^2\sin(2\varphi)\sin^2\vartheta = A_{2,0}\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\right) + (A_{2,1}+B_{2,1})3xz + i(A_{2,1}-B_{2,1})\,3yz$ $+ (A_{2,2}+B_{2,2})\,3(x^2-y^2) + i(A_{22}-B_{2,2})\,3xy$.

6.18: $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \Rightarrow \alpha_n^{\frac{1}{2}} = n\pi \quad (n = 1, 2, \ldots)$, $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ $\cdot\left\{\cos(x-\pi) - [\sin(x-\pi)]\frac{2!}{2x}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \Rightarrow \alpha_n^{\frac{3}{2}}$ (n = 1, 2, …) genügt der Gleichung $\tan x = x\,(x > 0)$ [vgl. Lösung zur Aufgabe 6.3].

Literatur

[1] *Babitsch* u. a.: Lineare Differentialgleichungen der mathematischen Physik. (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie Verlag 1967.
[2] *Collatz:* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. 2. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1963.
[3] *Collatz:* Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag 1964.
[4] *Courant-Hilbert:* Methoden der mathematischen Physik I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1968.
[5] *Golubew:* Differentialgleichungen im Komplexen. (Über. a. d. Russ.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
[6] *Kneschke:* Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Bd. I, 3. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1965.
[7] *Lewin/Großberg:* Differentialgleichungen der mathematischen Physik. (Übers. a. d. Russ.). Berlin: VEB Verlag Technik 1952.
[8] *Michlin:* Variationsmethoden der mathematischen Physik. (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie Verlag 1962.
[9] *Rothe/Szabó:* Höhere Mathematik. Teil VI. Stuttgart: B. G. Teubner 1958.
[10] *Smirnow:* Lehrgang der Höheren Mathematik. (Übers. a. d. Russ.). Teil III, 2, 13. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979.

Register