MATHEMATIK

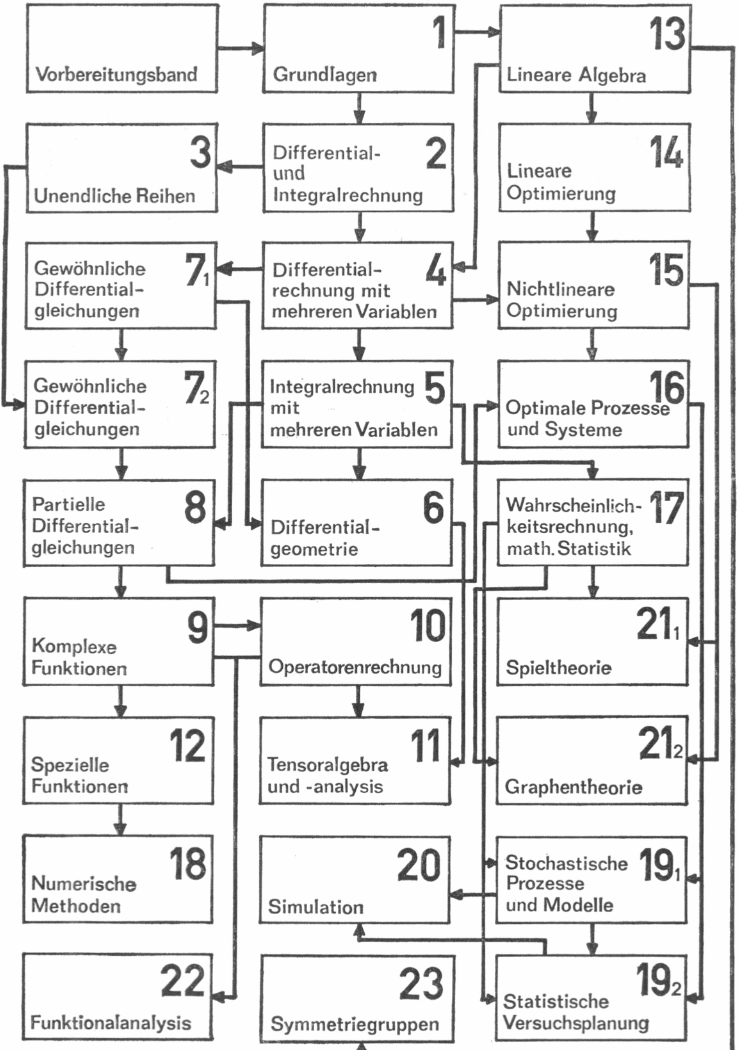
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

7/1

WENZEL

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER, ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 7/1

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

PROF. DR. H. WENZEL

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1

4., ÜBERARBEITETE AUFLAGE

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1985

Verantwortlicher Herausgeber:
Dr. rer. nat. Günter Zeidler, Dozent für Wirtschaftsmathematik
an der Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“, Berlin

Autor:
Dr. rer. nat. habil. Horst Wenzel, ordentlicher Professor für Analysis
an der Technischen Universität Dresden

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, August 1984 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der 1. Auflage 1974

Math. Ing. Nat. wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 7/1
ISSN 0138-1318

VLN 294-375/31/85 · LSV 1064
4. Auflage
Lektor: Dorothea Ziegler
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,
Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97
Bestell-Nr. 665 674 2

00700

Vorwort zur 3. Auflage

Bei der Konstruktion mathematischer Modelle für Prozeßabläufe wird man zunächst eine Idealisierung derart vornehmen, daß man in der Lage ist, das vorliegende System für jeden Zeitpunkt t durch endlich viele Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ (Geschwindigkeit, Temperatur, Dichte, Spannung, Warenmenge usw.), im einfachsten Fall durch eine einzige Funktion $x(t)$ zu beschreiben. Eine grundlegende Frage ist die nach der Voraussage des Systemverhaltens, wenn man gewisse gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen dem Systemzustand und der Systemänderung kennt. Nehmen wir an, daß im idealisierten Fall die Zeit nicht diskontinuierlich, sondern kontinuierlich gemessen wird, so kommt als Maß der Systemveränderung die Ableitung der den Zustand beschreibenden Funktionen nach der Zeit in Frage, beim Vorliegen nur einer Funktion $x(t)$ also $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$. Macht man weiterhin die idealisierende Annahme, $\dot{x}(t)$ hänge einzig und allein vom augenblicklichen Zustand $x(t)$ des Systems und auf keinen Fall von dessen Vorgeschichte ab, so wird man auf die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x} = f(x, t)$ geführt (vgl. dagegen die Beispiele 1.3 und 1.4).

In der allgemeinen Theorie werden die gesuchten Funktionen durch $y(x)$ oder $y_1(x), y_2(x), \ldots$ bezeichnet. In den Beispielen und Aufgaben werden jedoch häufig andere Bezeichnungen gewählt – z. B. $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $w = w(x)$ – um für die Anwendungen auch in dieser Hinsicht genügend Flexibilität zu erreichen.

Der vorliegende Teil 1 der Gewöhnlichen Differentialgleichungen ist insbesondere für Studierende im Direkt- und Fernstudium bestimmt, die in ihrer Fachwissenschaft mathematische Hilfsmittel benötigen. Der Fernstudent wird den Lehrstoff systematisch studieren, wobei die Stoffauswahl von der jeweiligen Einrichtung vorgeschrieben wird. Der Direktstudent wird die in der Vorlesung erworbenen Kenntnisse mit Hilfe des vorliegenden Textes an gewissen Stellen wiederholen, ergänzen oder auch dadurch erweitern, daß er Unterschiede in der Darstellung, die zwischen der Vorlesung und dem vorliegenden Text auftreten, aufsucht und sich mit ihnen auseinandersetzt. Vielleicht nutzt der jeweilige Dozent auch die Möglichkeit, gewisse Teile im Selbststudium erarbeiten zu lassen.

Der Band ist in einen Grundteil und einen Zusatzteil gegliedert. Der zum Zusatzteil gehörige Text ist durch Kleindruck gekennzeichnet. Es ist dabei berücksichtigt, daß sich der Grundteil niemals prinzipiell auf den Zusatzteil stützt; gelegentliche Bezugnahmen auf einzelne Formeln können ohne Verständnisschwierigkeiten überlesen werden. Die für die Durcharbeitung des Grundteils benötigte Zeit liegt unter der geplanten Selbststudienzeit. Die einzelnen Grundstudienrichtungen haben die Möglichkeit, aus dem Zusatzteil gewisse Auswahlvarianten zusammenzustellen.

Durch die Darstellungsweise soll das folgerichtige mathematische Denken geschult werden. Auf Beweise und Beweisskizzen wird nur dann eingegangen, wenn es für das Verständnis erforderlich ist. Besonderer Wert wird auf die Anwendung gelegt. Das Inhaltsverzeichnis zeigt, daß Vollständigkeit nicht angestrebt wurde. Dem Bausteincharakter entsprechend werden die Anschlußstellen zu den anderen Bänden des Lehrwerkes aufgezeigt.

Dresden, September 1979 — Der Autor

Inhalt

1. Einleitung

1.1. Grundbegriffe und erste Einteilung

1.1.1. Implizite und explizite Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung dient – ähnlich wie algebraische Gleichungen – der Bestimmung mathematischer Objekte. Die gesuchten Größen sind jedoch nicht spezielle *Zahlenwerte*, sondern *Funktionen* von *einer* unabhängigen Veränderlichen. Diese Funktionen treten einschließlich gewisser Ableitungen in der Gleichung auf. Darin liegt die Spezifik der Differentialgleichung, die ihr auch den Namen gab. Derartige Gleichungen ergeben sich bei der Modellierung zahlreicher physikalischer und technischer Prozesse; aber auch in der Ökonomie und anderen Wissenschaftsdisziplinen treten sie mit zunehmender Anwendung der Mathematik immer häufiger auf.

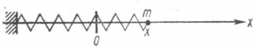


Bild 1.1

Beispiel 1.1: An einem Teilchen mit der Masse m, das längs einer waagerechten x-Achse reibungsfrei beweglich ist (Bild 1.1), greife eine Feder an. Sie sei im entspannten Zustand, wenn sich das Teilchen am Ort $x = 0$ befindet. Die Lage x des Teilchens ist eine Funktion der Zeit t. Seine Geschwindigkeit ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ und seine Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$. Ist $F = -kx$ ($k > 0$, Federkonstante) die zum Punkt $x = 0$ gerichtete rücktreibende Federkraft, so kann die Newtonsche Grundgleichung *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* hier durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-kx = m\ddot{x}, \quad \text{d. h.,} \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

für die gesuchte Funktion $x = x(t)$ angegeben werden.

Allgemein formulieren wir die folgende

Definition 1.1.: *Unter einer* **gewöhnlichen Differentialgleichung** n**-ter Ordnung** *für eine Funktion $y = y(x)$ versteht man eine Gleichung zwischen der unabhängigen Veränderlichen x, der abhängigen Veränderlichen y und den Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ für jeden Wert x des Definitionsbereiches von $y = y(x)$, wobei $y^{(n)}$ in der Gleichung tatsächlich vorkommt, die Ableitungen niederer Ordnung jedoch nicht unbedingt auftreten müssen. Also kann mittels einer Funktion F, die von $n + 2$ unabhängigen Veränderlichen abhängt, eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Gestalt* **D.1.1**

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

angegeben werden.

D.1.2 **Definition 1.2:** *Man sagt, in* (1.1) *liege die Differentialgleichung in* **impliziter** *Gestalt vor. Ist eine Auflösung von* (1.1) *nach* $y^{(n)}$ *möglich, d. h., kann man*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

schreiben, wobei f eine Funktion von $n + 1$ *unabhängigen Veränderlichen ist, so sagt man, die Differentialgleichung liege in* **expliziter** *Gestalt (nach* $y^{(n)}$ *aufgelöster Gestalt) vor.*

Bild 1.2

* *Aufgabe 1.1:* Für ein im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g) befindliches mathematisches Pendel (Bild 1.2), bestehend aus einer Punktmasse m und einer masselosen Stange (Länge l), das an einem festen Punkt drehbar aufgehängt ist und sich in einer Ebene bewegt (Ausschlagwinkel φ), gilt bei Vernachlässigung der Reibung der Energiesatz (der Mechanik): *kinetische Energie plus potentielle Energie ist gleich der (konstanten) Gesamtenergie E*, d. h., für die Funktion $\varphi = \varphi(t)$ (t: Zeit) besteht die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = E \quad (E = \text{const}). \tag{1.3}$$

a) Welche Bezeichnung für y aus Definition 1.1 wird in (1.3) benutzt?
b) Welche Ordnung hat die Differentialgleichung (1.3)?
c) Wie sieht die linke Seite von (1.1) im vorliegenden Fall (1.3) aus?
d) Man löse (1.3) nach $\dot{\varphi}$ auf. Welche Differentialgleichungen der Gestalt (1.2) ergeben sich?

Es folgen Beispiele, die auf gewisse Probleme und Abgrenzungen zum Begriff der gewöhnlichen Differentialgleichungen hinweisen sollen.

Beispiel 1.2: Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$e^{-2\ln y''} - \frac{1}{y''^2} + (3 - x^2)\, y' = e^{3x} \tag{1.4}$$

hat *nicht* die Ordnung 2, weil wegen

$$e^{-2\ln y''} = e^{\ln(y''^{-2})} = y''^{-2} = \frac{1}{y''^2}$$

die Größe y'' sich auf der linken Seite von (1.4) heraushebt und damit in (1.4) tatsächlich nicht vorkommt. Es liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster* Ordnung vor.

Beispiel 1.3: Durch

$$\ddot{x}(t) = x(\tau) \quad \text{mit} \quad \tau = t - 1$$

wird *keine* gewöhnliche Differentialgleichung für $x = x(t)$ gegeben, weil die Gleichung nicht $\ddot{x}$ und x an der *gleichen* Stelle t, sondern an den voneinander *verschiedenen* Stellen t und $t - 1$ des Definitionsbereiches von $x = x(t)$ in Beziehung setzt. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Differentialgleichung mit *nacheilendem Argument.* Sie gehört zu den Differenzen-Differentialgleichungen, die Verzögerungserscheinungen beschreiben (Totzeitgleichungen).

Beispiel 1.4: Durch

$$\ddot{x}(t) + \int_a^b f(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0 \tag{1.5}$$

wird *keine* gewöhnliche Differentialgleichung für $x = x(t)$ gegeben, obwohl die zweite Ableitung von $x = x(t)$ in (1.5) vorkommt, weil die Gleichung nicht $\ddot{x}$ und x an der Stelle t in Beziehung setzt, sondern $\ddot{x}$ an der Stelle t mit x an *allen* Stellen τ des Intervalles $a \leqq \tau \leqq b$ koppelt. Hier liegt eine sogenannte *Integrodifferentialgleichung* vor. Sie wird z. B. benötigt, wenn die Vorgeschichte des Systems zu berücksichtigen ist.

Beispiel 1.5: Es werde eine Funktion $u = u(x, y)$ gesucht, für die

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.6}$$

gilt. (1.6) ist *keine gewöhnliche* Differentialgleichung, weil die gesuchte Funktion u von mehr als einer unabhängigen Variablen – im Beispiel sind es zwei – abhängt. Gleichung (1.6) ist ein Beispiel für eine *partielle* Differentialgleichung.

1.1.2. Lösungen von Differentialgleichungen

Definition 1.3: Lösung *(auch Integral, Lösungskurve oder Integralkurve genannt) einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung* **D.1.3**

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

ist jede Funktion $y = y(x)$, $x \in J$, mit folgenden Eigenschaften:

a) *Die Funktion $y = y(x)$ ist in ihrem Definitionsbereich J n-mal differenzierbar, d. h., die Funktionen $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ $(x \in J)$ existieren.*

b) *Die beim Einsetzen von $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ in die linke Seite von (1.1) entstehende mittelbare Funktion von x*

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

ist für alle $x \in J$ stets gleich 0.

Beispiel 1.6: Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' - x = 0, \quad \text{d. h.} \quad y' = x. \tag{1.7}$$

Das Lösen der Differentialgleichung (1.7) ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, von $g(x) = x$ $(-\infty < x < +\infty)$ alle Stammfunktionen zu ermitteln. Infolgedessen hat (1.7) die unendlich vielen Lösungen

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C \quad (-\infty < x < +\infty),$$

wobei C eine beliebige Konstante ist.

Beispiel 1.7: Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{x} = g(t) \tag{1.8}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ t & \text{für } 0 \leqq t < +\infty \end{cases} \tag{1.9}$$

(Bild 1.3).

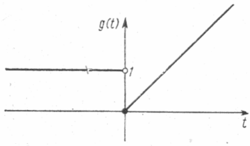


Bild 1.3

Im Intervall $-\infty < t < 0$ hat (1.8) die unendlich vielen Lösungen

$$x(t) = t + C_1 \quad (-\infty < t < 0) \tag{1.10}$$

und im Intervall $0 \leqq t < +\infty$ die unendlich vielen Lösungen

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + C_2 \quad (0 \leqq t < +\infty). \tag{1.11}$$

Wir prüfen, ob die Funktionen (1.10) und (1.11) durch Zusammensetzung Lösungen von (1.8) im Intervall $-\infty < t < +\infty$ liefern (vgl. Bd. 1, Kap. 9.1.).

Wenn

$$x(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} + C_2 & \text{für } 0 \leqq t < +\infty \end{cases} \tag{1.12}$$

(Bild 1.4) eine Lösung von (1.8) im Intervall $-\infty < t < +\infty$ sein soll, so muß wegen Definition 1.3 die durch (1.12) gegebene Funktion an der Stelle $t = 0$ differenzierbar und damit dort stetig sein. Die Forderung der Stetigkeit von (1.12) an der Stelle $t = 0$ führt zu

$$C_1 = C_2.$$

Es ergibt sich somit

$$x(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} + C_1 & \text{für } 0 \leqq t < +\infty. \end{cases} \tag{1.13}$$

Jedoch ist die durch (1.13) gegebene Funktion immer noch *keine* Lösung von (1.8) im Intervall $-\infty < t < +\infty$, da (1.13) an der Stelle $t = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist, denn dort ist die linksseitige Ableitung gleich 1 und die rechtsseitige Ableitung gleich 0 (Bild 1.5). Als Ergebnis haben wir: Die Differentialgleichung (1.8) hat wegen Definition 1.3 im Intervall $-\infty < t < +\infty$ keine Lösung, obwohl sie in den Teilintervallen $-\infty < t < 0$ und $0 \leqq t < +\infty$ jeweils unendlich viele Lösungen besitzt.

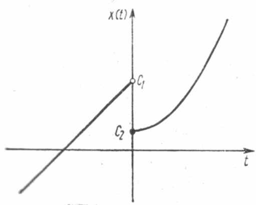


Bild 1.4

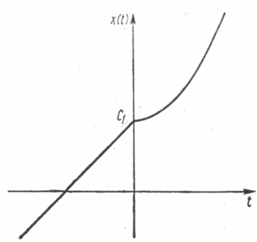


Bild 1.5

Um in diesem Beispiel und in anderen Fällen nicht auf eine Lösung der Differentialgleichung verzichten zu müssen, formulieren wir

Definition 1.4: *Bei einer* **Lösung im weiteren Sinn** *wird in Definition 1.3 zugelassen, daß die Funktion $y^{(n-1)}(x)$ an gewissen Stellen von J nicht differenzierbar ist; es wird jedoch gefordert, daß dort die einseitigen Ableitungen von $y^{(n-1)}(x)$ existieren und daß $y^{(n-1)}(x)$ überall in J stetig ist. Weiterhin wird die Forderung* b) *der Definition 1.3 nur für alle Existenzstellen der Funktion $y^{(n)}(x)$ $(x \in J)$ aufrecht erhalten.* **D.1.4**

Bei Benutzung dieses erweiterten Lösungsbegriffs liefert (1.13) im Intervall $-\infty < t < +\infty$ unendlich viele Lösungen der Differentialgleichung (1.8). Beim Nachprüfen dieser Tatsache beachte man, daß unter der nullten Ableitung einer Funktion $x(t)$ die Funktion $x(t)$ selbst zu verstehen ist.

1.2. Anwendungsbeispiele

Es werden einige mathematische Modelle vorgestellt, und es wird gezeigt, wie sie durch gewöhnliche Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssysteme beschrieben werden können.

1.2.1. Wachstumsgesetze

Bei wachsenden lebenden Systemen, beschrieben in Abhängigkeit von der Zeit t durch $y = y(t)$ [y: z. B. Bevölkerungszahl], ist die Geschwindigkeit $\dot{y}(t)$ des Wachstums bei unbeschränktem Lebensraum proportional zu $y(t)$. Das führt zur gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{y} = \alpha y$ mit dem Vermehrungskoeffizienten α. Ist der Lebensraum beschränkt, so hat man empirisch die Proportionalität der relativen Wachstumsgeschwindigkeit $\dot{y}y^{-1}$ zur Zahl der noch unbesetzten Existenzplätze gefunden, d. h., falls y_0 die Zahl der Existenzplätze des Lebensraumes bezeichnet, die Differentialgleichung

$$\frac{1}{y}\dot{y} = \alpha\left(1 - \frac{y}{y_0}\right). \tag{1.14}$$

1.2.2. Auflösung von Salz in Wasser

Zur Zeit $t = 0$ mögen sich x_0 Gramm Salz in M Gramm Wasser befinden. Sind zum Zeitpunkt t noch x Gramm Salz im Wasser, so ist die Lösungsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ einerseits proportional zu x und andererseits proportional der Differenz zwischen der Sättigungskonzentration $\frac{1}{M}X$ [X ist diejenige Salzmenge, die gerade Sättigung hervorrufen würde] und der tatsächlich erreichten Konzentration $\left[\text{diese ist gleich } \frac{1}{M}(x_0 - x)\right]$. Beim Aufstellen der Differentialgleichung für $x = x(t)$ ist zu beachten, daß $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ hier negativ ist. Mit dem positiven Proportionalitätsfaktor k ergibt sich somit

$$\dot{x} = -kx\left(\frac{X}{M} - \frac{x_0 - x}{M}\right). \tag{1.15}$$

1.2.3. Chemische Reaktionen

Chemische Reaktionen heißen homogen, wenn nur eine einzige Phase beteiligt ist. Bei ihnen kann man weiter Reaktionen erster, zweiter, dritter, ... Ordnung unterscheiden.

Bei einer Reaktion zweiter Ordnung werden aus den Substanzen A und B Moleküle der Substanz X gebildet. Sind a und b die ursprünglichen Konzentrationen von A und B und ist x die Konzentration von X zum Zeitpunkt t, so gilt

$$\dot{x} = k(a - x)(b - x). \tag{1.16}$$

Analog lautet die Differentialgleichung für Reaktionen dritter Ordnung

$$\dot{x} = k(a - x)(b - x)(c - x) \tag{1.17}$$

und beispielsweise für Reaktionen erster Ordnung

$$\dot{x} = k(a - x). \tag{1.18}$$

Führt man in (1.18) durch $y(t) = a - x(t)$ eine neue Funktion ein, so ergibt sich

$$\dot{y} = -ky. \tag{1.19}$$

1.2.4. Technisch-physikalische Beispiele

Beispiel 1.8: Gesucht ist die Bewegungsgleichung eines im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g) befindlichen mathematischen Pendels (Bild 1.2), bestehend aus der Punktmasse m und einer masselosen Stange (Länge l), das an einem festen Punkt drehbar aufgehängt ist und sich in einer Ebene bewegt (Ausschlagwinkel φ). Infolge der Stange ist die Punktmasse gezwungen, sich auf einem Kreis mit dem Radius l zu bewegen. Eine Parameterdarstellung dieses Kreises wird relativ zum Koordinatensystem aus Bild 1.6 durch

$$\begin{aligned} x &= l\cos\varphi \\ y &= l\sin\varphi \end{aligned} \tag{1.20}$$

geliefert. Die momentane Lage der Punktmasse kann durch die Bogenlängenkoordinate s des Kreises angegeben werden (Bild 1.6).

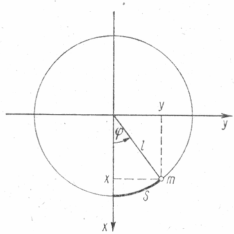


Bild 1.6

Es ist

$$s = l\varphi^{1)}. \tag{1.21}$$

In dem Newtonschen Grundgesetz *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* ist als Beschleunigung die Tangentialbeschleunigung zu wählen:

[1]) Wem (1.21) nicht geläufig ist, dem sei empfohlen, dies unter Heranziehung von (1.20) mittels der Formel für die Berechnung von Bogenlängen herzuleiten.

sie wird durch $\ddot{s}(t)$ und damit wegen (1.21) durch

$$\ddot{s} = l\ddot{\varphi}(t) \tag{1.22}$$

angegeben. Für die Kraft im Newtonschen Grundgesetz ist jetzt nur die Tangentialkomponente der Schwerkraft maßgebend; die andere Komponente wird durch die Festigkeit der Stange kompensiert. Zur Festlegung der gewünschten Tangentialkomponente ist das Skalarprodukt

$$m\mathbf{g} \cdot \mathbf{t} \tag{1.23}$$

zu bilden. Hierbei ist $\mathbf{g}$ der Erdbeschleunigungsvektor

$$\mathbf{g} = g\,\mathbf{e}_x. \tag{1.24}$$

Mit $\mathbf{t}$ wird in (1.23) der Tangenteneinheitsvektor an den Kreis bezeichnet. Ist $\mathbf{r}$ der Ortsvektor des laufenden Punktes auf dem Kreis, so gilt wegen (1.20)

$$\mathbf{r} = l\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + l\sin\varphi\,\mathbf{e}_y$$

und damit (vgl. Bd. 6, Kap. 3.)

$$\mathbf{t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y. \tag{1.25}$$

Einsetzen von (1.24) und (1.25) in (1.23) führt mit (1.22) zur Bewegungsgleichung, d. h. zu folgender (nichtlinearer) Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\varphi = \varphi(t)$:

$$-mg\sin\varphi = ml\ddot{\varphi}. \tag{1.26}$$

Beispiel 1.9: Ein elektrisches Teilchen (Ladung Q, Masse m, Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$) bewegt sich im konstanten magnetischen Feld

$$-B\,\mathbf{e}_z \quad (B = \text{const} > 0).$$

Auf das Teilchen wirkt die Lorentzkraft

$$Q\dot{\mathbf{r}} \times (-B\,\mathbf{e}_z).$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für das elektrische Teilchen zu

$$m\ddot{\mathbf{r}} = Q\dot{\mathbf{r}} \times (-B\,\mathbf{e}_z). \tag{1.27}$$

Wir gehen zu kartesischen Koordinaten über. Zunächst notieren wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{x}(t)\,\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\,\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\,\mathbf{e}_z, \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{x}(t)\,\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\,\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\,\mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{1.28}$$

und

$$Q\dot{\mathbf{r}} \times (-B\,\mathbf{e}_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ Q\dot{x} & Q\dot{y} & Q\dot{z} \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -BQ\dot{y}\,\mathbf{e}_x + BQ\dot{x}\,\mathbf{e}_y. \tag{1.29}$$

Einsetzen von (1.28) und (1.29) in (1.27) führt zu

$$m\ddot{x}\,\mathbf{e}_x + m\ddot{y}\,\mathbf{e}_y + m\ddot{z}\,\mathbf{e}_z = -BQ\dot{y}\,\mathbf{e}_x + BQ\dot{x}\,\mathbf{e}_y. \tag{1.30}$$

Vergleicht man die Koordinaten der Vektoren beider Seiten von (1.30), so ergibt sich

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \qquad\qquad\qquad &+ BQ\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} \qquad - BQ\dot{x} \qquad &= 0 \\ m\ddot{z} \qquad\qquad &= 0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

(1.31) ist ein System von drei Differentialgleichungen für die drei unbekannten Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

1.2.5. Ökonomisches Beispiel

Ist $X_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ das Volumen der Bruttoproduktion des i-ten Produktionszweiges im Zeitintervall $[t_0, t]$, so ist $x_i(t) = \dot{X}_i(t)$ deren Intensität. Es sei $B_{ij}(t)$ die Intensität der Lieferung des i-ten Zweiges an den j-ten Zweig, die jener für seine Produktion benötigt. Weiterhin bezeichne $A_{ij}(t)$ die Intensität der Lieferung des i-ten Zweiges, die für Investitionen im j-ten Zweig benutzt werden sollen. Schließlich werde mit $g_i(t)$ die gewünschte Intensität der Nettoproduktion des i-ten Zweiges angegeben. Mit diesen Festlegungen gilt

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} (B_{ij}(t) + A_{ij}(t)) + g_i(t) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{1.32}$$

Im Rahmen einer *dynamischen Verflechtungsbilanz* wird man in der Regel zunächst annehmen, daß die Intensität der Materiallieferung $B_{ij}(t)$ proportional zur Intensität $x_j(t)$ der Produktion und die Intensität der Investitionslieferungen $A_{ij}(t)$ proportional zur Beschleunigung $\ddot{X}_j(t) = \dot{x}_j(t)$ der Produktion des jeweils verbrauchenden Zweiges j ist:

$$B_{ij}(t) = b_{ij}x_j(t) \quad (b_{ij} = \text{const}), \tag{1.33}$$

$$A_{ij}(t) = a_{ij}\dot{x}_j(t) \quad (a_{ij} = \text{const}). \tag{1.34}$$

Einsetzen von (1.33) und (1.34) in (1.32) führt zu

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{m} (b_{ij}x_j(t) + a_{ij}\dot{x}_j(t)) + g_i(t) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

d. h. ausführlich

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m + a_{11}\dot{x}_1 + \ldots + a_{1m}\dot{x}_m + g_1(t) \\ x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2m}x_m + a_{21}\dot{x}_1 + \ldots + a_{2m}\dot{x}_m + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_m &= b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mm}x_m + a_{m1}\dot{x}_1 + \ldots + a_{mm}\dot{x}_m + g_m(t) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} a_{11}\dot{x}_1 + \ldots + a_{1m}\dot{x}_m + (b_{11} - 1)\,x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m &= -g_1(t) \\ a_{21}\dot{x}_1 + \ldots + a_{2m}\dot{x}_m + b_{21}x_1 + (b_{22} - 1)\,x_2 + \ldots + b_{2m}x_m &= -g_2(t) \\ &\vdots \\ a_{m1}\dot{x}_1 + \ldots + a_{mm}\dot{x}_m + b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + (b_{mm} - 1)\,x_m &= -g_m(t). \end{aligned} \tag{1.35}$$

In (1.35) steht ein System von m Differentialgleichungen für die m unbekannten Funktionen $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)$.

1.2.6. Geometrisches Beispiel

Gegeben sei eine ebene Kurvenschar S_1 derart, daß durch jeden Punkt (x, y) des Bereiches B einer (x, y)-Ebene genau eine Kurve der Schar S_1 geht. Gesucht ist in B eine weitere Kurvenschar S_2 derart, daß jede Kurve aus S_2 in jedem ihrer Punkte die jeweilige Kurve aus S_1 unter dem konstanten Winkel $\gamma \left(|\gamma| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ schneidet (Bild 1.7). Man bezeichnet die Kurven der Schar S_2 als *isogonale Trajektorien* zur Schar S_1. Ist insbesondere $|\gamma| = \frac{\pi}{2}$, so spricht man von *orthogonalen Trajektorien.*

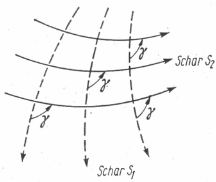


Bild 1.7

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man etwa folgendermaßen vorgehen. Man greift einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) aus B heraus, bestimmt diejenige Kurve K_1 aus S_1, die durch (x_0, y_0) geht, bestimmt den Anstieg der Tangente T_1 an K_1 im Punkte (x_0, y_0), dreht T_1 im Punkte (x_0, y_0) um den Winkel γ in die neue Lage T_2 und ermittelt den Anstieg von T_2, d. h. den Anstieg der Tangente T_2 an die gesuchte Kurve K_2 aus der Schar S_2, die durch (x_0, y_0) geht. Denkt man sich in der Umgebung von (x_0, y_0) die Kurve K_2 durch $y = y(x)$ dargestellt, so kennt man nunmehr die Ableitung $y'(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Insgesamt hat man auf diese Weise die zum Punkt (x_0, y_0) gehörige Ableitung der Funktion $y = y(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bestimmt. Da (x_0, y_0) aus B beliebig herausgegriffen wird, gilt diese Zuordnung für jeden Punkt aus B, also wird jedem Punkt (x, y) aus B die Ableitung y' einer Funktion $y = y(x)$ zugeordnet, d. h., man erhält eine Gleichung

$$y' = f(x, y). \tag{1.36}$$

(1.36) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $y = y(x)$. Die gesuchten Kurven der Schar S_2 werden durch Lösungen der Differentialgleichung (1.36) dargestellt. Die obige Konstruktion versagt, falls T_2 parallel zur y-Achse verläuft, weil in diesem Fall y' nicht existiert. Diese Ausnahmepunkte werden entweder am Ende gesondert behandelt oder man arbeitet in diesem Fall mit einer Funktion $x = x(y)$, die dann einer Differentialgleichung der Gestalt $x'(y) = g(x, y)$ genügt.

Beispiel 1.10: Als Kurvenschar S_1 sei die Schar aller durch den Koordinatenursprung der (x, y)-Ebene gehenden Geraden gewählt. Formelmäßig wird man die Schar etwa durch

$$y = Cx \tag{1.37}$$

(C: Scharparameter) angeben. Allerdings wird durch (1.37) die y-Achse nicht erfaßt. Wir nehmen deshalb als Bereich B alle Punkte der (x, y)-Ebene außer der Geraden $x = 0$. Wir wählen einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) $(x_0 \neq 0)$ aus B aus. Durch ihn geht diejenige Kurve K_1 der Schar S_1, die wegen (1.37) den Scharparameter

$$C = C_0 = \frac{y_0}{x_0} \tag{1.38}$$

besitzt.

Der Anstieg der Kurve K_1 im Punkte (x_0, y_0) ist wegen (1.37) und (1.38) gleich der Ableitung der Funktion

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

an der Stelle $x = x_0$, also gleich $\frac{y_0}{x_0}$. Folglich ist der Anstieg der Tangente T_1 an K_1 (T_1 fällt in unserem Beispiel mit K_1 zusammen) im Punkte (x_0, y_0) gleich

$$\tan \alpha_0 = \frac{y_0}{x_0}, \tag{1.39}$$

wobei α_0 den (orientierten) Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der (im Sinne wachsender x orientierten) Tangente T_1 angibt. Durch Drehung von T_1 um den Punkt (x_0, y_0) mit dem Winkel γ ergibt sich eine neue Lage T_2, wobei der Anstieg von T_2 durch

$$\tan \beta_0 = \tan(\alpha_0 + \gamma) = \frac{\tan \alpha_0 + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha_0 \tan \gamma} \tag{1.40}$$

geliefert wird. Einsetzen von (1.39) in (1.40) führt zu

$$\tan \beta_0 = \frac{\frac{y_0}{x_0} + \tan \gamma}{1 - \frac{y_0}{x_0} \tan \gamma} = \frac{y_0 + x_0 \tan \gamma}{x_0 - y_0 \tan \gamma}. \tag{1.41}$$

$\tan \beta_0$ ist gleich dem Anstieg $y'(x)$ an der Stelle $x = x_0$ der durch $y = y(x)$ dargestellten Kurve K aus S_2, die durch den Punkt (x_0, y_0) geht. Ersetzt man (x_0, y_0) durch einen beliebigen Punkt (x, y) aus B, so ergibt sich wegen (1.41) somit für $y = y(x)$ die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \frac{y + x \tan \gamma}{x - y \tan \gamma}. \tag{1.42}$$

Die in der Gestalt $y = y(x)$ dargestellten gesuchten Kurven der Schar S_2 sind Lösungen von (1.42).

Unsere Herleitung versagt an denjenigen Stellen, an denen $\alpha_0 + \gamma$ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist, d. h., wir müssen aus dem Bereich B noch eine Gerade g entfernen (Bild 1.8). Es versagt unsere Herleitung noch im Falle $|\gamma| = \frac{\pi}{2}$, weil dann $\tan \gamma$ nicht gebildet werden kann.

* *Aufgabe 1.2:* Man leite eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ für die orthogonalen Trajektorien der Schar (1.37) her.

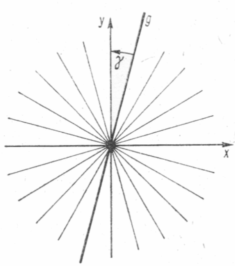


Bild 1.8

1.3. Besondere Aufgabenstellungen

Wir haben gesehen, daß Differentialgleichungen im allgemeinen unendlich viele Lösungen haben. In der Praxis interessiert man sich jedoch weniger für alle Lösungen; vielmehr stellt man Zusatzbedingungen, die nur von einem Teil der Lösungsgesamtheit – oft nur von einer einzigen Lösung – der Differentialgleichung erfüllt werden. In der Regel ist die Anzahl der Zusatzbedingungen gleich der Ordnung der Differentialgleichung.

1.3.1. Anfangswertaufgaben

Gibt man in der Differentialgleichung 2. Ordnung (1.26) als Zusatzbedingungen die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit vor, d. h., fordert man, daß die Lösungsfunktion $\varphi = \varphi(t)$ zum gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ einem vorgeschriebenen Wert φ_0 und ihre Ableitung ebenfalls einen vorgeschriebenen Wert $\dot{\varphi}_0$ hat,

$$\begin{aligned} &\varphi(t_0) = \varphi_0\,, \\ &(\dot{\varphi}(t))_{t=t_0} = \dot{\varphi}_0 \quad (\text{kurz: } \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_0)\,, \end{aligned} \tag{1.43}$$

so gibt es, wie man zeigen kann, nur eine einzige Lösung von (1.26), die auch (1.43) erfüllt.

Definition 1.5: *Wenn man beim Vorliegen einer gewöhnlichen Differentialgleichung oder bei einem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem Zusatzbedingungen für eine* **einzige Stelle** *des Definitionsbereiches der Lösungen stellt, so spricht man von* **Anfangsbedingungen.** *Eine Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen bildet eine* **Anfangswertaufgabe.** D.1.5

Aufgabe 1.3: Man löse die Anfangswertaufgabe für die Funktion $x = x(t)$, bestehend aus der Differentialgleichung *

$$\dot{x} = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad \text{und der Anfangsbedingung} \quad x(-1) = 3\,.$$

1.3.2. Randwertaufgaben

Definition 1.6: *Werden im Gegensatz zur Definition 1.5 Zusatzbedingungen an* **mehreren** *Punkten des Definitionsintervalls der Lösungen gestellt, so spricht man von* **Randbedingungen.** *Eine Differentialgleichung mit Randbedingungen heißt* **Randwertaufgabe.** D.1.6

Beispiel 1.11: Für die Durchbiegung $w = w(x)$ eines Balkens, der sich längs der x-Achse erstreckt ($0 \leqq x \leqq l$) und das Flächenträgheitsmoment $J(x)$ besitzt, gilt die gewöhnliche lineare Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(\mathrm{E}J(x)w'')'' = p(x) \quad [\mathrm{E}\text{: Elastizitätsmodul}]\,, \tag{1.44}$$

wobei $p(x)$ die senkrecht zur Balkenachse wirkende Streckenlast angibt. Beim Herleiten der Differentialgleichung (1.44) macht man gewisse Vernachlässigungen; man spricht in diesem Zusammenhang von einer Balkentheorie erster Ordnung.

Im vorliegenden Beispiel setzen wir voraus, daß einerseits das Flächenträgheitsmoment konstant ist und daß andererseits auch die Streckenlast eine konstante Funktion darstellt. Schließlich sei der Balken beiderseits eingespannt, d. h., daß an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ die Durchbiegung $w(x)$ und die Balkenneigung $w'(x)$

gleich null ist. Somit ergibt sich für das vorliegende Problem eine Randwertaufgabe, bestehend aus der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$w^{(4)} = \frac{p}{EJ} \quad \left(\frac{p}{EJ} = \text{const}\right) \tag{1.45}$$

und den vier Randbedingungen an den Stellen $x = 0$ und $x = l$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0. \tag{1.46}$$

Das Lösen der Differentialgleichung (1.45) bedeutet das Ausführen von viermaliger unbestimmter Integration. Infolgedessen kann die Lösungsgesamtheit von (1.45) durch

$$w(x) = \frac{p}{24EJ} x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \tag{1.47}$$

angegeben werden. Einsetzen von (1.47) in (1.46) liefert vier lineare Gleichungen zur Bestimmung von C_1 bis C_4:

$$\begin{aligned} &C_4 = 0, \\ &C_3 = 0, \\ &\frac{p}{24EJ} l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0, \\ &\frac{p}{6EJ} l^3 + \frac{1}{2} C_1 l^2 + C_2 l = 0. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Die Lösung von (1.48) lautet:

$$C_1 = -\frac{pl}{2EJ}, \quad C_2 = \frac{pl^2}{12EJ}, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{1.49}$$

Einsetzen von (1.49) in (1.47) ergibt die Lösung der Randwertaufgabe (1.45), (1.46):

$$w(x) = \frac{p}{24EJ}(x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) = \frac{px^2}{24EJ}(l - x)^2.$$

1.3.3. Eigenwertaufgaben

D.1.7 **Definition 1.7:** *Eine* **Eigenwertaufgabe** *ist eine Randwertaufgabe mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Eine Konstante λ* (**Eigenwertparameter** *genannt*), *deren Werte einer Menge von reellen Zahlen oder auch komplexen Zahlen zu entnehmen sind, tritt entweder in der Differentialgleichung oder in den Randbedingungen oder sowohl in der Differentialgleichung als auch in den Randbedingungen auf.*

b) *Für jeden möglichen Wert λ aus* a) *hat die Randwertaufgabe* **mindestens** *die Lösung*

$$x(t) \equiv 0. \tag{1.50}$$

(1.50) *heißt* **triviale Lösung.**

Alle diejenigen λ-Werte, für die es darüberhinaus **nichttriviale Lösungen** *der Randwertaufgabe, d. h. Lösungen*

$$x(t) \quad \text{mit} \quad x(t) \not\equiv 0 \tag{1.51}$$

gibt, heißen **Eigenwerte,** *die zugehörigen Lösungen der Randwertaufgabe heißen* **Eigenlösungen.**

Beispiel 1.12: Ein vertikal angebrachter Stab ($0 \leqq x \leqq l$) wird oben ($x = l$) durch eine Einzelkraft F auf Druck ($F > 0$) belastet. Mit dem Elastizitätsmodul E führt bei konstantem Flächenträgheitsmoment J das Knickproblem auf die Differentialgleichung 4. Ordnung für die Durchbiegung $w(x)$

$$w'''' + \lambda w'' = 0, \quad 0 \leqq x \leqq l, \quad \lambda = \frac{F}{\mathrm{E}J} > 0 \tag{1.52}$$

und – falls der Stab unten ($x = 0$) eingespannt und oben ($x = l$) frei ist – auf die vier Randbedingungen

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad w'''(l) + \lambda w'(l) = 0. \tag{1.53}$$

Da $w(x) \equiv 0$ stets sowohl (1.52) als auch (1.53) genügt, ist durch (1.52), (1.53) eine Eigenwertaufgabe gegeben.

1.4. Ziel der weiteren Untersuchungen

Es gibt bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen Klassen von Aufgaben, deren Lösungen (oder deren Umkehrfunktionen- durch elementare Funktionen oder wenigstens durch Integrale über elementare Funktionen darstellbar sind. Die Angabe solcher Klassen, das Studium ihrer Lösungsstruktur und die Angabe von Lösungswegen ist ein erstes Ziel der weiteren Untersuchungen.

Darüber hinaus muß aber die Theorie durch weitere Lösungsmethoden angereichert werden, die auch im Falle der weitaus größeren Mannigfaltigkeit der nicht in dieser Weise lösbaren Differentialgleichungen angewendet werden können. Man denke an das Verfahren von Picard-Lindelöf (Satz 2.2; Zusatz zu Satz 3.1; Satz 4.1) in Verbindung mit numerischer Integration (Bd. 18, Kap. 4.), an das Verfahren von Runge-Kutta (Abschn. 2.5.3.; 3.4.; 4.4.; Bd. 18, Kap. 5.), an Differenzenverfahren (Bd. 7/2, Kap. 6.4.) und an Reihenentwicklungen (Bd. 7/2, Kap. 5.).

2. Differentialgleichungen erster Ordnung

2.1. Allgemeine Bemerkungen und Richtungsfeld

Aus (1.1) und (1.2) ergibt sich, daß die implizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $y = y(x)$ durch

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

und die explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $y = y(x)$ durch

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

gegeben ist. Wir gehen nunmehr zur geometrischen Deutung der expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung (2.2) über.

In der Differential- und Integralrechnung ist es üblich, die Funktion $f(x, y)$ anschaulich als Funktionsgebirge über dem in der (x, y)-Ebene liegenden Definitionsbereich B zu deuten. Hier empfiehlt sich eine andere anschauliche Darstellung. Angenommen, wir würden eine Lösungskurve von (2.2) kennen, die durch den Punkt (x, y) der (x, y)-Ebene geht, dann gibt y' den Anstieg der Tangente an die Lösungskurve im Punkte (x, y) an. Man wird also im jetzigen Zusammenhang $f(x, y)$ als Gesamtheit von Richtungselementen (Linienelementen), d. h. Punkten mit angehefteten Geradenstücken, die den Anstieg $y' = f(x, y)$ besitzen, deuten. Man spricht von einem *Richtungsfeld.* Die Differentialgleichung (2.2) lösen heißt in geometrischer Sprechweise: Es sind Kurven $y = y(x)$ gesucht, die auf das Richtungsfeld passen, d. h. Kurven, deren Tangentenrichtung im Punkte (x, y) mit der dort vorliegenden Richtung des Richtungsfeldes zusammenfällt (Bild 2.1).

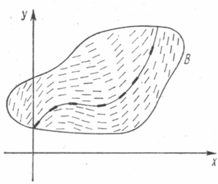


Bild 2.1

Beispiel 2.1: Bei der Differentialgleichung

$$y' = y \tag{2.3}$$

für die Funktion $y = y(x)$ hängt die rechte Seite $f(x, y)$ nicht von x ab:

$$f(x, y) = y.$$

Der Definitionsbereich der rechten Seite von (2.3) ist die gesamte (x, y)-Ebene. Parallelen zur x-Achse werden durch die Differentialgleichung (2.3) jeweils Richtungselemente mit dem gleichen Anstieg zugeordnet (Bild 2.2).

* *Aufgabe 2.1:* Skizzieren Sie das Richtungsfeld von $y' = x$ längs der Geraden $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$!

Aufgabe 2.2: In welchen Punkten (x, y) können sich Lösungskurven der expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ unter einem von null verschiedenen Winkel schneiden? *

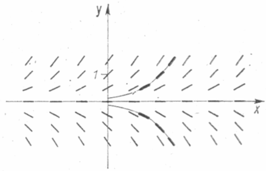


Bild 2.2

Ergänzung: Zur Deutung der impliziten Differentialgleichung (2.1) wird man zunächst eine Auflösung nach y' vornehmen. Es kann vorkommen, daß sich dabei mehrere Differentialgleichungen der Gestalt (2.2) ergeben, die dann ihrerseits in obiger Weise durch Richtungsfelder dargestellt werden können.

2.2. Existenz und Unität der Lösungen

Von der geometrischen Vorstellung des Richtungsfeldes geleitet, wird man folgende Vermutungen aufstellen:

a) Es gibt *unendlich viele* Lösungen $y = y(x)$ von $y' = f(x, y)$.
b) Es gibt durch jeden Punkt des Definitionsbereiches B von $f(x, y)$ *genau eine* Lösung $y = y(x)$ von $y' = f(x, y)$.

Es zeigt sich, daß die Vermutungen das Richtige treffen, falls man geeignete Voraussetzungen macht. Es gelten die folgenden zwei Sätze:

Satz 2.1: *Durch jeden Punkt (x, y) des betrachteten Definitionsbereiches B von $f(x, y)$ geht* **mindestens eine** *Lösungskurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, falls $f(x, y)$ in B stetig ist.* **S.2.1**

Satz 2.2: *Ist neben der Stetigkeit von $f(x, y)$ im betrachteten Bereich B gesichert, daß $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ in B existiert und dort stetig ist, so geht durch jeden Punkt (x, y) von B* **genau eine** *Lösungskurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, d. h., die* **Unität** *(Einzigkeit) der Lösung der* **Anfangswertaufgabe,** *bestehend aus der Differentialgleichung* **S.2.2**

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in B, \tag{2.4}$$

und der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in B, \tag{2.5}$$

ist gesichert.

Für die Lösung von (2.4), (2.5) gilt $y(x) = \lim\limits_{k \to \infty} y_k(x)$, ($|x - x_0| < r$, r hinreichend klein), wobei die Funktionenfolge $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ schrittweise gemäß

$$y_0(x) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\, \mathrm{d}t \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

zu berechnen ist (**Verfahren von Picard-Lindelöf**).

* *Aufgabe 2.3:* Wie lauten $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ des Verfahrens von Picard-Lindelöf, falls die Anfangswertaufgabe

$$y' = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad y(0) = 0$$

vorliegt?

Wir haben im Beispiel 1.6 gesehen, daß die Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung eine beliebige Konstante C enthalten kann. Allgemein nennen wir

D.2.1 **Definition 2.1:** *Man sagt*

$$\Phi(x, y) = C \quad ((x, y) \in B;\ C\text{: Scharparameter}) \tag{2.7}$$

gibt relativ zu B die **allgemeine Lösung** (*das allgemeine Integral*) *von* (2.4) *an, wenn die durch Auflösen von* (2.7) *nach y entstehenden differenzierbaren Funktionen $y = y(x)$ Lösungen von* (2.4) *sind.*

S.2.3 **Satz 2.3:** *Sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt, so ist jede Lösung von $y' = f(x, y)$, $(x, y) \in B$, in der allgemeinen Lösung enthalten.*

Sind jedoch die Voraussetzungen von Satz 2.2 nicht überall in B erfüllt, so kann es vorkommen, daß von der allgemeinen Lösung einige Lösungen der Differentialgleichung nicht erfaßt werden. Im Beispiel 2.3 sind es die Lösungen (2.39) und (2.41).

2.3. Elementare Integrationsmethoden

2.3.1. Trennung der Veränderlichen

Im Sinne von 1.4. beschäftigen wir uns zunächst mit solchen Spezialfällen von

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

deren Lösungen (oder deren Umkehrfunktionen) durch elementare Funktionen oder wenigstens durch Integrale über elementare Funktionen darstellbar sind. Wir beginnen mit

D.2.2 **Definition 2.2:** *Unter einer gewöhnlichen* **Differentialgleichung** *erster Ordnung mit* **trennbaren Veränderlichen** *für die Funktion $y = y(x)$ versteht man eine Differentialgleichung der Gestalt*

$$y' = g(x)\, h(y). \tag{2.8}$$

Es handelt sich also um eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y), \tag{2.2}$$

wobei die gegebene rechte Seite die spezielle Struktur

$$f(x, y) = g(x)\, h(y)$$

besitzt, d. h., darstellbar ist als Produkt einer Funktion g, die nur von x, und einer Funktion h, die nur von y abhängt.

Aufgabe 2.4: Welche der folgenden Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen mit trennbaren Veränderlichen? *

$$\text{a) } y' = \sqrt{y}, \quad \text{b) } y' = 1 + y, \quad \text{c) } y' = x + y, \quad \text{d) } y' = \frac{x}{y^2},$$

$$\text{e) } y' = \sin(xy), \qquad \text{f) } y' = \sin x \cdot \sin y,$$

$$\text{g) } \dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \quad (g, l, \varphi_0 \text{ konstant}).$$

Die Lösungstheorie von Differentialgleichungen mit trennbaren Veränderlichen beginnt mit dem

Satz 2.4: *Ist $y = y_0$ eine Nullstelle der gegebenen Funktion $h(y)$ aus* (2.8), *d. h., gilt* **S.2.4**

$$h(y_0) = 0, \tag{2.9}$$

so ist die konstante Funktion

$$y = y(x) = y_0 \quad (x \in D_g),$$

auch geschrieben

$$y(x) \equiv y_0 \quad (x \in D_g) \tag{2.10}$$

(gelesen: y ist identisch gleich y_0 im Definitionsbereich D_g der Funktion $g = g(x)$), eine Lösung der Differentialgleichung (2.8).

Zum *Beweis* setze man (2.10) in die Differentialgleichung (2.8) ein. Die linke Seite ergibt $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_0) = 0$. Die rechte Seite von (2.8) ist wegen (2.9) gleich $g(x)\,h(y_0) = 0$, wobei x dem Definitionsbereich D_g der Funktion $g = g(x)$ zu entnehmen ist. Also wird (2.8) tatsächlich von (2.10) erfüllt. ■

Aufgabe 2.5: Gesucht sind konstante Funktionen, die jeweils Lösungen der folgenden Differentialgleichungen mit trennbaren Veränderlichen sind: *

$$\text{a) } y' = 1 + y, \qquad \text{b) } y' = (y^2 - 5y + 6)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad \text{c) } y' = \sin x \cdot \sin y,$$

$$\text{d) } y' = \sqrt{y}, \quad \text{e) } \dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \quad (g, l, \varphi_0 \text{ konstant}).$$

Wir werden nach Behandlung des Spezialfalles (2.9) nunmehr die *Voraussetzung*

$$h(y) \neq 0 \tag{2.11}$$

machen. Die Lösungstheorie wird im Kleindruck fortgesetzt und danach erfolgt die Zusammenfassung zu einem Lösungsschema.

Ist $y = y(x)$ eine Lösung von

$$y' = g(x)\,h(y), \tag{2.8}$$

so ist (2.8) beim Einsetzen von $y = y(x)$ erfüllt, d. h., es gilt

$$y'(x) = g(x)\,h(y(x)) \tag{2.12}$$

für alle x des Definitionsbereiches der Lösung $y = y(x)$. Wegen der Voraussetzung (2.11) ist (2.12) gleichbedeutend mit

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x), \tag{2.13}$$

d. h., (2.13) folgt aus (2.12), und umgekehrt kann (2.12) aus (2.13) gefolgert werden. Von der linken Seite von (2.13) bilden wir *eine* Stammfunktion (Verzicht auf Integrationskonstante)

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,\mathrm{d}x \tag{2.14}$$

und ebenso *eine* Stammfunktion der rechten Seite von (2.13) (Verzicht auf Integrationskonstante)

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.15}$$

Gestützt auf die Theorie der Stammfunktionen ergibt sich aus (2.13), (2.14) und (2.15), daß sich (2.14) und (2.15) nur um eine additive Konstante unterscheiden:

$$\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x + C\,. \tag{2.16}$$

Auf der linken Seite von (2.16) wird durch die Substitution $y = y(x)$ die neue Integrationsvariable y eingeführt:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + C \quad (y = y(x))\,. \tag{2.17}$$

Zusammengefaßt ergibt sich die Äquivalenz der Gleichungen (2.12) und (2.17). Folglich ist die Frage nach der *Existenz* und der *Unität* von Lösungen der Differentialgleichung (2.8) im Falle $h(y) \neq 0$ äquivalent mit der Frage, ob im Falle $h(y) \neq 0$ durch

$$\Phi(x, y) = C \tag{2.18}$$

mit

$$\Phi(x, y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} - \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

differenzierbare Funktionen $y = y(x)$ implizit dargestellt werden, d. h. die Frage nach der Möglichkeit der Auflösung von (2.18) nach y. Über die theoretische Möglichkeit der Auflösung von (2.18) nach y geben die Sätze über implizit dargestellte Funktionen Auskunft (Band 4, 3.7.). Wir erwähnen hier lediglich die in diesem Zusammenhang wichtige Bedingung

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{h(y)} \neq 0\,. \tag{2.19}$$

Zur Durchführung der Methode der **Trennung der Veränderlichen** notieren wir

$$y' = g(x)\,h(y),\ h(y) \neq 0,\ \xRightarrow[y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}]{} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\,h(y)$$

$$\xRightarrow[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{ als Bruch behandeln}]{\text{Trennen von } x \text{ und } y} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\xRightarrow[\text{Integrieren}]{} \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x + C, \tag{2.20}$$

wobei in der Gleichung (2.20) C eine Konstante ist und die Integrale jeweils *eine* Stammfunktion darstellen, also selbst keine Integrationskonstante enthalten. Die Gleichung (2.20) gibt im Falle $h(y) \neq 0$ die *allgemeine Lösung* (Definition 2.1) von $y' = g(x)\,h(y)$ an. Der weitere Schritt

„(2.20) *nach y auflösen*" (2.21)

ist in einfachen Fällen durchführbar und sollte gegebenenfalls erfolgen.

Beispiel 2.2: Gegeben ist eine Anfangswertaufgabe, bestehend aus der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y} \quad (y > 0) \tag{2.22}$$

und der Anfangsbedingung

$$y(1) = 4. \tag{2.23}$$

Wegen der in (2.22) angegebenen Bedingung $y > 0$ sind die Voraussetzungen zur Anwendung der Methode der Trennung der Veränderlichen erfüllt.

Die Durchführung ergibt

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \quad (y > 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx + C$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{4}(x + C)^2.$$

Beim Anblick der Ergebnisformel sind Sie vielleicht geneigt, diese durch den Zusatz $-\infty < x < +\infty$ zu ergänzen. Das ist jedoch falsch. Die vorletzte Formel des Rechnungsganges, nämlich $2\sqrt{y} = x + C$, zeigt in Verbindung mit $y > 0$ aus (2.22), daß $x + C > 0$ und damit $x > -C$ ist. Also lautet das Ergebnis

$$y = \tfrac{1}{4}(x + C)^2 \quad \text{mit} \quad -C < x < +\infty. \tag{2.24}$$

Um sich vor solchen Fehlern zu schützen, kann man auch anders vorgehen. Man nimmt zunächst in Kauf, daß sich beim formalen Rechnen gemäß obigem Lösungsschema gewisse „Scheinlösungen" – im vorliegenden Beispiel $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$ mit $x \leqq -C$ – ergeben, die in Wahrheit keine Lösungen sind. Das Eliminieren dieser Scheinlösungen geschieht durch die Probe. In unserem Beispiel hatten wir (fälschlicherweise) zunächst das Ergebnis $y = \frac{1}{4}(x + C)^2$ mit $-\infty < x < +\infty$ erhalten. Wir setzen dies in (2.22) ein. Es ergibt sich:

$$\textit{linke Seite von } (2.22)\text{: } y' = \tfrac{1}{2}(x + C), \tag{2.25}$$

$$\textit{rechte Seite von } (2.22)\text{: } \sqrt{y} = \sqrt{\tfrac{1}{4}(x + C)^2} = \tfrac{1}{2}|x + C|. \tag{2.26}$$

Aus (2.25) und (2.26) folgt zunächst, daß gewiß *keine* Gleichheit im Falle $x < -C$ besteht, weil in diesem Falle

$$\tfrac{1}{2}|x + C| = -\tfrac{1}{2}(x + C)$$

ist. Damit ist also bewiesen, daß

$$y = \tfrac{1}{4}(x + C)^2 \quad (x < -C) \tag{2.27}$$

keine Lösung von (2.22) ist. Andererseits zeigt die durchgeführte Probe, daß

$$y = \tfrac{1}{4}(x + C)^2 \quad (x \geqq -C) \tag{2.28}$$

Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y} \quad (y \geqq 0) \tag{2.29}$$

(man beachte das Gleichheitszeichen in $y \geqq 0$) ist. Für die Differentialgleichung (2.22) ist $y = 0$ auszuschließen, also wegen (2.28) $x = -C$. Damit zeigt die Probe, daß (2.24) Lösung von (2.22) ist.

Aus der allgemeinen Lösung (2.24) der Differentialgleichung (2.22) ist noch diejenige spezielle Lösung herauszugreifen, die der Anfangsbedingung (2.23) genügt. Einsetzen von (2.24) in (2.23) führt zu

$$\tfrac{1}{4}(1 + C)^2 = 4. \tag{2.30}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für C mit den Lösungen

$$C = 3 \quad \text{und} \quad C = -5. \tag{2.31}$$

Setzt man die Werte aus (2.31) in (2.24) ein, so erhält man einerseits

$$y = \tfrac{1}{4}(x + 3)^2 \quad \text{mit} \quad -3 < x < +\infty \tag{2.32}$$

und andererseits

$$y = \tfrac{1}{4}(x - 5)^2 \quad \text{mit} \quad -(-5) < x < +\infty. \tag{2.33}$$

Hat die Anfangswertaufgabe also zwei Lösungen? Das widerspräche der Aussage von Satz 2.2, dessen Voraussetzungen hier erfüllt sind. Also muß sich bei unserer Berechnung wieder eine Scheinlösung ergeben haben. Machen wir die Probe! Sowohl (2.32) als auch (2.33) genügen der Differentialgleichung (2.22), denn es sind ja lediglich herausgegriffene Lösungen aus der allgemeinen Lösung (2.24). Die Anfangsbedingung (2.23) wird aber nur von (2.32) erfüllt. Bei (2.33) ist das nicht mehr der Fall, denn die Funktion (2.33) ist nur für $x > 5$ definiert, kann also unmöglich $y(1) = 4$ erfüllen. Hätten wir übrigens **in** (2.30) sorgfältiger gearbeitet, so hätte sich die Scheinlösung (2.33) erst gar nicht ergeben. Wegen (2.24) gehört nämlich zu (2.30) noch der sich aus $-C < x < +\infty$ [siehe (2.24)] für $x = 1$ ergebende Zusatz

$$-C < 1, \quad \text{d. h.} \quad C > -1. \tag{2.34}$$

(2.34) zeigt, daß von den Lösungen (2.31) der quadratischen Gleichung (2.30) der Wert $C = -5$ unbrauchbar ist. Die Anfangswertaufgabe (2.22), (2.23) hat also genau eine Lösung. Sie wird durch (2.32) formelmäßig dargestellt.

* *Aufgabe 2.6:* Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = x(y + 1) \quad (-\infty < y < -1).$$

Welche Werte kann die Konstante in der allgemeinen Lösung annehmen?

Das Herausgreifen derjenigen Lösung aus der allgemeinen Lösung, die der Anfangsbedingung genügt, kann oft bereits beim Vorliegen der impliziten Darstellung der allgemeinen Lösung erfolgen. Verfahren Sie so in der folgenden

* *Aufgabe 2.7:* Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = \sin x \cdot \sin y \quad (0 < y < \pi), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Beachten Sie, daß $\ln \left| \tan \dfrac{x}{2} \right|$ eine Stammfunktion von $\dfrac{1}{\sin x}$ ist!

* *Aufgabe 2.8:* Bei *kleinen* Pendelschwingungen mit dem Maximalausschlag φ_0 ($\varphi_0 > 0$) kann man aus dem Ergebnis von Aufgabe 1.1 die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \tag{2.35}$$

gewinnen, falls man diejenigen Abschnitte der Pendelschwingungen erfassen will, in denen $\varphi(t)$ monoton fällt.

Mittels der Methode der Trennung der Veränderlichen ermittele man unter der Voraussetzung

$$-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \tag{2.36}$$

die allgemeine Lösung von (2.35) und beachte beim Übergang von der impliziten zur expliziten Gestalt der Lösung neben (2.36) die Ungleichungen, die im Zusammenhang mit der Einführung der Arkussinusfunktion auftreten, nämlich

$$y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \arcsin y. \tag{2.37}$$

Wie lang ist das t-Intervall der erhaltenen Lösung? Es gibt die Dauer einer Halbschwingung des Pendels an.

Zur Illustration des Unterschiedes der Sätze 2.1 und 2.2 dient das folgende

Beispiel 2.3: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y} \quad (y \geqq 0). \tag{2.38}$$

Aus dem Ergebnis von Aufgabe 2.5d) und aus den Gleichungen (2.28) und (2.29) entnehmen wir zunächst die folgenden Lösungen der Differentialgleichung (2.38)

$$y(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{2.39}$$

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x + C)^2 \quad (x \geqq -C). \tag{2.40}$$

Damit sind aber noch nicht alle Lösungen von (2.38) erfaßt. Weitere Lösungen sind (Bild 2.3):

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < -C \\ \tfrac{1}{4}(x + C)^2 & \text{für} \quad -C \leqq x < +\infty. \end{cases} \tag{2.41}$$

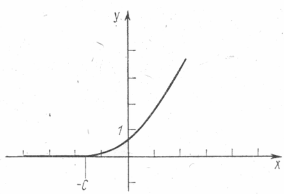


Bild 2.3

Zum Nachweis setzt man (2.41) in (2.38) ein und weist nach, daß die Gleichung (2.38) dadurch erfüllt wird. Insbesondere sei bemerkt, daß (2.41) an der „Stoßstelle" $x = -C$ differenzierbar ist, weil dort sowohl die rechtsseitige Ableitung als auch die linksseitige Ableitung existieren und den gleichen Wert 0 haben. Mit (2.39), (2.40), (2.41) sind alle Lösungen der Differentialgleichung (2.38) erfaßt.

In (2.40) steht die allgemeine Lösung von (2.38) relativ zu B: $-\infty < x < +\infty, 0 \leqq y < +\infty$, denn (2.40) ist äquivalent zu (2.7) mit $\Phi(x, y) = 2\sqrt{y} - x$. Längs $y = 0$ sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 verletzt, denn dort ist $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt{y}$ nicht bildbar – auch nicht im Sinne einseitiger Ableitung. Es ist deshalb verständlich, daß die Unität der Anfangswertaufgabe (2.4), (2.5) im Fall $y' = \sqrt{y}$, $y(x_0) = 0$ verletzt ist; in der Tat, in jedem Punkt der x-Achse münden zwei Lösungen von $y' = \sqrt{y}$ ein, nämlich (2.39) und (2.41) [siehe auch Bild 2.3].

2.3.2. Explizite homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen

2.3.2.1. Definition

Die in 2.3.1. begonnene Diskussion im Sinne von 1.4. wird fortgesetzt. Wir nennen hierzu die

D.2.3 **Definition 2.3:** *Unter einer gewöhnlichen* **linearen** *Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion* $y = y(x)$ *versteht man eine Gleichung der Gestalt*

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x) \tag{2.42}$$

mit

$$a_1(x) \not\equiv 0 \quad (x \in D) \tag{2.43}$$

(in Worten: in D *ist* $a_1(x)$ *nicht überall gleich null), wobei* D *der gemeinsame Definitionsbereich der* **Koeffizientenfunktionen** $a_1(x)$, $a_0(x)$ *und des* **Störgliedes** $g(x)$ *ist. Die Differentialgleichung* (2.42) *heißt darüber hinaus*

$$\textbf{inhomogen,}\ \textit{falls}\ g(x) \not\equiv 0 \quad (x \in D), \tag{2.44}$$

$$\textbf{homogen,}\ \textit{falls}\ g(x) \equiv 0 \quad (x \in D) \tag{2.45}$$

gilt. Wird die Bedingung (2.43) *zu*

$$a_1(x) \neq 0 \quad (x \in D) \tag{2.46}$$

(in Worten: $a_1(x)$ *ist für jeden Wert* $x \in D$ *verschieden von null) verschärft, so kann* (2.42) *in die* **explizite** *lineare Differentialgleichung*

$$y' = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,y + \frac{g(x)}{a_1(x)} \tag{2.47}$$

umgeformt werden.

* *Aufgabe 2.9:* Ist die Differentialgleichung (1.3) aus Aufgabe 1.1 linear?

* *Aufgabe 2.10:* Ist die Differentialgleichung für $y = y(x)$

$$(1 - x^2)\,y'(x) + 1 = 0$$

linear? Wenn ja, ist sie inhomogen oder homogen? Für welche x aus dem Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ ist eine Überführung in die explizite Gestalt möglich?

* *Aufgabe 2.11:* Ist die Behauptung, jede Lösung jeder gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung ist eine lineare Funktion, richtig?

Bemerkung: Bezeichnet man die linke Seite von (2.42) durch $L(y) = a_1(x)y' + a_0(x)\,y$, so wird durch $L(y)$ ein *linearer (Differential-) Operator* (Band 1, 8.2;. 8.4.) gegeben, d. h., es gilt

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= a_1(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(a_1y_1' + a_0y_1) + c_2(a_1y_2' + a_0y_2) \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.3.2.2. Allgemeine und partikuläre Lösung

Zunächst behandeln wir den homogenen Fall. Die Definition 2.3 zeigt, daß eine explizite gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $y_h(x)$ (der Index h weist auf die homogene Differentialgleichung hin) durch

$$y'_h = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y_h, \quad a_1(x) \neq 0 \quad (x \in D) \tag{2.49}$$

angegeben werden kann. Hierbei ist D der gemeinsame Definitionsbereich der beiden Koeffizientenfunktionen $a_1(x)$ und $a_0(x)$. D ist entweder ein *Intervall* J oder ist Vereinigung von Intervallen $J_1, J_2, \ldots$. Ohne Verlust an Information werden wir unsere Untersuchungen für *ein* solches *Intervall* J durchführen:

$$y'_h = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} y_h \quad (x \in J). \tag{2.50}$$

(2.50) ist eine Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen, denn sie ist ein Spezialfall von Formel (2.8) mit

$$g(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}, \quad h(y_h) = y_h. \tag{2.51}$$

Die Anwendung der Lösungstheorie aus 2.3.1. ergibt, daß

$$y_h(x) \equiv 0 \quad (x \in J) \tag{2.52}$$

eine Lösung von (2.50) ist. Im Falle $y_h \neq 0$ ist die Theorie der Trennung der Veränderlichen anwendbar. Danach erhält man ausgehend von (2.50)

$$\frac{dy_h}{y_h} = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx \quad (x \in J),$$

woraus nach Integration zunächst

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx + C_1$$

und weiter

$$\ln |y_h| = -\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx + C_1$$

folgt. Somit ergibt sich

$$|y_h| = e^{C_1} e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx}, \quad \text{d. h.} \quad y_h(x) = C_2 e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \tag{2.53}$$

mit

$$C_2 = \begin{cases} e^{C_1}, & \text{falls} \quad y_h > 0 \\ -e^{C_1}, & \text{falls} \quad y_h < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad x \in J. \tag{2.54}$$

Die bisher erhaltenen Lösungen aus (2.52) und (2.53) können in der Formel

$$y_h(x) = C e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx} \quad (x \in J;\ C \text{ beliebige Konstante}) \tag{2.55}$$

zusammengefaßt werden. Wir haben damit relativ zum Bereich B der (x, y)-Ebene mit $x \in J$ und $-\infty < y < +\infty$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.50) gefunden, denn die rechte Seite von (2.50) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.2, falls die Koeffizienten $a_0(x)$ und $a_1(x)$ ($a_1(x) \neq 0$) als stetig vorausgesetzt werden. Mit Hilfe von (2.55) kann die Lösung von (2.50) also leicht ermittelt werden, ohne jedesmal die Herleitung von (2.55) durchführen zu müssen.

* *Aufgabe 2.12:* Prüfen Sie, welche der folgenden Differentialgleichungen linear homogen sind, und geben Sie deren allgemeine Lösung an:

$$\text{a) } e^{-x} y' + e^{2x} y = 0, \quad \text{b) } \dot{x} + t^2 x = 0, \quad \text{c) } \dot{x} - t x^2 = 0.$$

Wir diskutieren nun den inhomogenen Fall. Die Definition 2.3 zeigt, daß eine explizite gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $y = y(x)$ durch (2.47) und damit auch durch

$$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x) \tag{2.56}$$

mit

$$a_1(x) \neq 0, \quad g(x) \not\equiv 0 \quad (x \in J) \tag{2.57}$$

angegeben werden kann, wobei wir uns ohne Verlust an Information in (2.57) auf ein Intervall J beschränken.

S.2.5 **Satz 2.5:** *Die* **allgemeine** *Lösung $y(x)$ der expliziten gewöhnlichen linearen* **inhomogenen** *Differentialgleichung* (2.56), (2.57) *ist gleich einer* **partikulären** (*speziellen*) *Lösung $y_p(x)$ der* **inhomogenen** *Differentialgleichung* (2.56), (2.57) *plus der* **allgemeinen** *Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen* **homogenen** *Differentialgleichung*

$$a_1(x)\, y_h' + a_0(x)\, y_h = 0, \quad a_1(x) \neq 0 \quad (x \in J), \tag{2.58}$$

also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x). \tag{2.59}$$

Beweis: Ist $y_p(x)$ eine partikuläre (spezielle) Lösung von (2.56), (2.57), d. h., gilt wegen (2.48)

$$L[y_p(x)] = g(x) \tag{2.60}$$

und ist $y_h(x)$ eine beliebige Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (2.58), d. h., gilt

$$L[y_h(x)] = 0, \tag{2.61}$$

so ist (2.59) stets eine Lösung von (2.56), (2.57), denn es gilt wegen (2.48)

$$L[y] = L[y_p + y_h] = L[y_p] + L[y_h],$$

und das ist wegen (2.60) und (2.61) gleich $g(x)$.

Es ist noch zu zeigen, daß durch (2.59) alle Lösungen von (2.56), (2.57) erfaßt werden, wenn $y_h(x)$ sämtliche Lösungen von (2.58) durchläuft. Ist $\tilde{y}(x)$ irgendeine Lösung von (2.56), (2.57), d. h., gilt

$$L[\tilde{y}(x)] = g(x),$$

so ist

$$L[\tilde{y} - y_p] = L[\tilde{y}] - L[y_p] = g(x) - g(x) = 0,$$

Es ist also die Differenz $\tilde{y} - y_p$ eine Lösung von (2.58), d. h. gleich einer Lösung $y_h(x)$ von (2.58), und damit gilt

$$\tilde{y}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

Also ist in der Tat $\tilde{y}(x)$ durch (2.59) erfaßt. Es ist damit bewiesen, daß (2.59) die allgemeine Lösung von (2.56), (2.57) ist. ■

Aufgabe 2.13: Ist jede explizite gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in eine Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen überführbar? *

2.3.2.3. Variation der Konstanten

Zur Ermittlung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der expliziten gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x), \quad a_1(x) \neq 0, \quad g(x) \not\equiv 0 \quad (x \in J), \tag{2.62}$$

läßt man sich von der Struktur der Lösung (2.55) anregen, die wir im jetzigen Zusammenhang mit den Bezeichnungen

$$y_h(x) = C\hat{y}_h(x) \tag{2.63}$$

und

$$\hat{y}_h(x) = e^{-\int \frac{a_0(x)}{a_1(x)}\,dx} \tag{2.64}$$

erneut aufschreiben. Man stellt einen Ansatz für $y_p(x)$ her, indem man (2.63) benutzt und dort C durch die noch zu bestimmende Funktion $u(x)$ ersetzt (*Variation der Konstanten C*):

$$y_p(x) = u(x)\,\hat{y}_h(x). \tag{2.65}$$

Dies soll eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung aus (2.62) sein. Wir setzen deshalb (2.65) in die linke Seite der Differentialgleichung aus (2.62) ein:

$$\begin{aligned} a_1(\hat{y}u_h)' + a_0 u\hat{y}_h &= u(a_1\hat{y}_h' + a_0\hat{y}_h) + a_1 u'\hat{y}_h \\ &= uL[\hat{y}_h] + a_1 u'\hat{y}_h = a_1 u'\hat{y}_h. \end{aligned}$$

Dies soll gleich der rechten Seite der Differentialgleichung aus (2.62), d. h. gleich $g(x)$ sein. Somit ergibt sich für $u(x)$ die Differentialgleichung (es ist $a_1(x)\,\hat{y}_h(x) \neq 0$)

$$u' = \frac{g(x)}{a_1(x)\,\hat{y}_h(x)}. \tag{2.66}$$

Aus (2.66) erhält man $u(x)$ durch unbestimmte Integration. Auf die Integrationskonstante kann man hierbei verzichten, weil ja in (2.65) auch nur eine einzige Lösung $y_p(x)$ der Differentialgleichung aus (2.62) gesucht wird. Bei bekanntem $y_p(x)$ ergibt sich die allgemeine Lösung der expliziten gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung (2.62) durch Einsetzen von $y_p(x)$ und $y_h(x)$ in die Formel (2.59).

Beispiel 2.4: Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} + t^2 x = 2t^2. \tag{2.67}$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}_h + t^2 x_h = 0 \tag{2.68}$$

entnehmen wir dem Ergebnis von Aufgabe 2.12b):

$$x_h(t) = C\,e^{-\frac{1}{3}t^3}. \tag{2.69}$$

Der Ansatz [Variation der Konstanten in (2.69); vgl. (2.63), (2.64)]

$$x_p(t) = u(t)\,e^{-\frac{1}{3}t^3} \tag{2.70}$$

wird in (2.67) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\dot{u}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3} + u\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}\right) + t^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}\right] = 2t^2. \tag{2.71}$$

Die eckige Klammer in (2.71) verschwindet. Das kann man entweder durch direktes Nachrechnen überprüfen, oder man kann die Tatsache benutzen, daß die Funktion $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}$ der zugehörigen homogenen Gleichung (2.68) genügt. *Dieser Umstand tritt bei der Methode der Variation der Konstanten stets auf, und das direkte Nachrechnen kann deshalb als Rechenkontrolle benutzt werden.* Die Gleichung (2.71) vereinfacht sich somit zu (vgl. (2.66))

$$\dot{u} = 2t^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}. \tag{2.72}$$

In (2.72) ist der Faktor t^2 gleich der Ableitung des Exponenten der Exponentialfunktion. Infolgedessen führt hier die unbestimmte Integration zu elementaren Funktionen. Man erhält (Verzicht auf Integrationskonstante)

$$u(t) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}t^3}. \tag{2.73}$$

Einsetzen von (2.73) in (2.70) ergibt die partikuläre Lösung

$$x_\mathrm{p}(t) = 2.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von (2.67)

$$x(t) = x_\mathrm{p}(t) + x_\mathrm{h}(t) = 2 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}. \tag{2.74}$$

* *Aufgabe 2.14:* In einem Stromkreis genügt die Stromstärke I als Funktion der Zeit t der Differentialgleichung

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L}\,I(t) = \frac{U}{L}. \tag{2.75}$$

Man bestimme unter der Voraussetzung, daß der Widerstand R, die Selbstinduktion L und die Spannung U konstant sind, diejenige Lösung von (2.75), die der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ genügt.

* *Aufgabe 2.15:* Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung $(1 + x^2)\,y' + xy = x$!

2.3.3. Exakte Differentialgleichung und integrierender Faktor

2.3.3.1. Exakte Differentialgleichung

Wir verallgemeinern zunächst den Begriff der Differentialgleichung . Mit

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.76}$$

meint man die Aufgabe, bei bekannten Funktionen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ entweder Funktionen $y = y(x)$ zu bestimmen, die der Differentialgleichung [Division von (2.76) durch $\mathrm{d}x$]

$$P(x, y) + Q(x, y)\,y' = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.77}$$

genügen, oder aber auch die Aufgabe, Funktionen $x = x(y)$ zu ermitteln, die der Differentialgleichung [Divison von (2.76) durch $\mathrm{d}y$]

$$P(x, y)\,x'(y) + Q(x, y) = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.78}$$

genügen.

Definition 2.4: *Die Differentialgleichung* D.2.4

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.79}$$

heißt **exakt,** *falls es in B eine Funktion $U = U(x, y)$ mit*

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2.80}$$

gibt.

Differenziert man die erste Identität (2.80) partiell nach y sowie die zweite partiell nach x und sind die erhaltenen Ableitungen stetig in B, so folgt $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$, und es gilt der

Satz 2.6: *Wenn die partiellen Ableitungen* $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ *und* $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ *existieren und stetig sind, dann ist die Integrabilitätsbedingung* S.2.6

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{2.81}$$

notwendig *dafür, daß* (2.76) *eine exakte Differentialgleichung ist.*

Darüber hinaus gilt

Satz 2.7: (2.81) *ist* **hinreichend** *für das Vorliegen einer exakten Differentialgleichung, falls der zur Differentialgleichung gehörige Bereich einfach zusammenhängend* (Band 4, 1.1.3.) *ist.* S.2.7

Der *Beweis* kann mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes geführt werden.

Beispiel 2.5: Die Differentialgleichung

$$\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x + (1 - x\,\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.82}$$

ist exakt, denn als B kann die ganze (x, y)-Ebene genommen werden (diese ist einfach zusammenhängend), und die Integrabilitätsbedingung ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{-y} = -\mathrm{e}^{-y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}(1 - x\,\mathrm{e}^{-y}) = -\mathrm{e}^{-y} \tag{2.83}$$

erfüllt.

Aufgabe 2.16: Die Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen $y' = g(x)\,h(y)$, $(h(y) \neq 0,\ a < x < b,\ c < y < d)$ werde einerseits in der Gestalt *

$$g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0, \tag{2.84}$$

andererseits in der Gestalt

$$g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.85}$$

angegeben. Was kann man über die Exaktheit von (2.84) und (2.85) sagen?

Aus der Definition 2.4 folgt, daß die exakte Differentialgleichung (2.79) wegen (2.80) in der Gestalt

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2.86}$$

angegeben werden kann. Ist $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$ eine Lösung von (2.86), so kann für (2.86) bei Beachtung der verallgemeinerten Kettenregel (Bd. 4, Kap. 3.6.)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} U(x, y(x)) = 0 \tag{2.87}$$

bzw.

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} U(x(y), y) = 0 \tag{2.88}$$

geschrieben werden. Wegen (2.87) und (2.88) werden also die Lösungen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$ durch

$$U(x, y) = \text{const} = c \tag{2.89}$$

implizit dargestellt. In einfachen Fällen wird man (2.89) nach y bzw. nach x auflösen können. Über die theoretische Auflösungsmöglichkeit gibt die Theorie der implizit dargestellten Funktionen Auskunft (Band 4, 3.7.).

Beispiel 2.6: Es sollen die Lösungen von (2.82) ermittelt werden. Da eine exakte Differentialgleichung vorliegt, existiert eine Funktion $U = U(x, y)$ mit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mathrm{e}^{-y} \tag{2.90}$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 1 - x\,\mathrm{e}^{-y}. \tag{2.91}$$

Zunächst wird (2.90) diskutiert. Wir machen die partielle Ableitung nach x rückgängig, indem wir nach x integrieren und y hierbei als Konstante behandeln. Somit folgt aus (2.90)

$$U(x, y) = x\,\mathrm{e}^{-y} + C(y). \tag{2.92}$$

Man beachte, daß in (2.92) die Integrationskonstante C nur bezüglich x konstant ist. Sie hängt im allgemeinen noch von y ab. Zur Bestimmung von $C(y)$ setzen wir (2.92) in (2.91) ein und erhalten

$$-x\,\mathrm{e}^{-y} + C'(y) = 1 - x\,\mathrm{e}^{-y}$$

und damit

$$C'(y) = 1. \tag{2.93}$$

Aus (2.93) folgt für $C(y)$ (Verzicht auf Integrationskonstante, da nur *ein* $U(x, y)$ benötigt wird)

$$C(y) = y. \tag{2.94}$$

Einsetzen von (2.94) in (2.92) liefert

$$U(x, y) = x\,\mathrm{e}^{-y} + y. \tag{2.95}$$

Also werden die Lösungen $y = y(x)$ bzw. $x = x(y)$ implizit durch

$$x\,\mathrm{e}^{-y} + y = c \tag{2.96}$$

dargestellt. In (2.96) ist eine Auflösung nach x sofort möglich:

$$x = x(y) = \mathrm{e}^{y}(c - y).$$

Aufgabe 2.17: Man prüfe, ob die Differentialgleichung *

$$x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

exakt ist und gebe gegebenenfalls eine implizite Darstellung der Lösung an.

2.3.3.2. Integrierender Faktor

Definition 2.5: *Multipliziert man die gegebene nicht-exakte Differentialgleichung* D.2.5

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.97}$$

mit einer Funktion

$$\mu(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.98}$$

und ist die sich hierdurch ergebende Differentialgleichung

$$(\mu P)\,dx + (\mu Q)\,dy = 0, \quad (x, y) \in B, \tag{2.99}$$

exakt, so heißt $\mu = \mu(x, y)$ **integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)** *der Differentialgleichung* (2.97) *relativ zu B.*

Die Forderung (2.98) garantiert, daß nicht nur jede Lösung von (2.97) auch Lösung von (2.99) ist, sondern daß auch umgekehrt jede Lösung von (2.99) die Differentialgleichung (2.97) löst.

Satz 2.8: *Der integrierende Faktor* $\mu(x, y)$ *genügt der partiellen Differentialgleichung* S.2.8

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \tag{2.100}$$

Der *Beweis* ergibt sich aus der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{2.101}$$

für die Differentialgleichung (2.99).

Es ist schwierig, die partielle Differentialgleichung (2.100) für $\mu = \mu(x, y)$ zu lösen. Man versucht, mit speziellen Ansätzen für $\mu(x, y)$ zum Ziel zu kommen. Ob diese Versuche gelingen, hängt von der Struktur von P und Q ab. Als Beispiele für Ansätze seien genannt

$$\mu = \mu(x), \quad \mu = \mu(y), \quad \mu = \mu(z) \quad \text{mit} \quad z = xy,$$

$$\mu = \mu(z) \quad \text{mit} \quad z = \frac{y}{x}, \quad \mu = \mu(z) \quad \text{mit} \quad z = x^2 + y^2. \tag{2.102}$$

Ein solcher Ansatz führt zum Ziel, wenn damit (2.100) in eine *gewöhnliche* Differentialgleichung für die nur von einer unabhängigen Variablen abhängige Funktion μ umgeformt werden kann, wobei neben μ und μ' nur die unabhängige Variable von μ vorkommt.

Aufgabe 2.18: Man zeige, daß die nicht-exakte Differentialgleichung *

$$(y^2 - 2x - 2)\,dx + 2y\,dy = 0$$

einen integrierenden Faktor der speziellen Struktur $\mu(x)$ besitzt. Man gebe einen solchen Faktor an.

Aufgabe 2.19: Die Differentialgleichung *

$$xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0 \quad (x \neq 0, y \neq 0) \tag{2.103}$$

ist nicht exakt (warum?). Gibt es einen integrierenden Faktor der speziellen Gestalt $\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$? Wenn ja, bestimmen Sie einen solchen und lösen Sie damit (2.103). Die Darstellung der Lösung in impliziter Gestalt genügt.

Wir weisen noch auf eine Anwendung in der Thermodynamik hin.

Wählt man bei einem reversiblen thermodynamischen Prozeß die absolute Temperatur T und den Druck p als unabhängige Veränderliche, so nimmt bei einer (differentiell kleinen) Änderung der Temperatur T um $\mathrm{d}T$ und des Druckes p um $\mathrm{d}p$ das System die *Wärmemenge*

$$c_p(T, p)\,\mathrm{d}T + \lambda_T(T, p)\,\mathrm{d}p \tag{2.104}$$

und gleichzeitig die *Arbeit*

$$p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\,\mathrm{d}T + \frac{\partial V}{\partial p}\,\mathrm{d}p\right) \tag{2.105}$$

auf.

Hierbei bedeuten

V: spezifisches Volumen,
$V = V(T, p)$: Zustandsgleichung,
$c_p(T, p)$: spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck,
$\lambda_T(T, p)$: spezifische latente Wärme (d. h. $T = \text{const}$) bei Druckänderung.

Addiert man (2.104) und (2.105), so ergibt sich die Änderung der *inneren Energie* zu

$$c_p(T, p)\,\mathrm{d}T + \lambda_T(T, p)\,\mathrm{d}p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\,\mathrm{d}T + \frac{\partial V}{\partial p}\,\mathrm{d}p\right). \tag{2.106}$$

* *Aufgabe 2.20:* Faßt man (2.106) als linke Seite einer Differentialgleichung (2.97) auf, so entsteht eine exakte Differentialgleichung (*Erster Hauptsatz der Wärmelehre*). Welche Beziehung liefert somit die Integrabilitätsbedingung zwischen p, V, T, c_p, λ_T?

* *Aufgabe 2.21:* Faßt man (2.104) als linke Seite einer Differentialgleichung (2.97) auf, so ist T ein integrierender Nenner, d. h., $\frac{1}{T}$ ist ein integrierender Faktor (*Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre*). Welche Beziehung ergibt sich somit zwischen p, T, c_p, λ_T?

2.4. Spezielle nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir gehen von einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ aus:

$$a_1(t)\,\dot{\tilde{x}} + a_0(t)\,\tilde{x} = g(t), \quad t \in D, \tag{2.107}$$

mit

$$a_1(t) \not\equiv 0 \quad (t \in D) \tag{2.108}$$

[siehe auch (2.42) und (2.43)]. Nunmehr werde

$$\tilde{x} = u(x) \tag{2.109}$$

gesetzt, wobei $u(x)$ eine gegebene Funktion mit $u'(x) \neq 0$ sei. Einsetzen von (2.109) in (2.107) führt zur folgenden Differentialgleichung für $x = x(t)$:

$$a_1(t)\,u'(x)\,\dot{x} + a_0(t)\,u(x) = g(t). \tag{2.110}$$

Alle Differentialgleichungen, die sich in der Gestalt (2.110) angeben lassen, können folgendermaßen behandelt werden: Zunächst löst man die lineare Differentialgleichung für $\tilde{x}(t)$ und gewinnt dann durch Auflösen von (2.109) nach x und Einsetzen von $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ schließlich die Lösungen $x(t)$ von (2.110).

Beispiel 2.7: Wählt man speziell $u(x) = e^x$, dann folgt gemäß (2.109)

$$\tilde{x} = e^x, \tag{2.111}$$

und die Gleichung (2.110) spezialisiert sich (nach Division durch e^x) zu

$$a_1(t)\,\dot{x} + a_0(t) = g(t)\,e^{-x}. \tag{2.112}$$

Sind $\tilde{x}(t)$ Lösungen von (2.107), so ergeben sich die Lösungen von (2.112) durch Auflösen von (2.111) nach x und Einsetzen von $\tilde{x}(t)$ zu

$$x(t) = \ln(\tilde{x}(t)), \tag{2.113}$$

wobei wegen (2.111) nur Lösungen $\tilde{x}(t) > 0$ brauchbar sind.

Beispiel 2.8: Wählt man speziell

$$\tilde{x} = x^\alpha \quad (x > 0, \alpha \neq 0, \neq 1, \text{reell}), \tag{2.114}$$

so spezialisiert sich (nach Division durch $x^{\alpha-1}$) die Gleichung (2.110) zu

$$a_1(t)\,\alpha\dot{x} + a_0(t)\,x = g(t)\,x^{-\alpha+1}. \tag{2.115}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\beta = 1 - \alpha, \qquad b_1(t) = \alpha a_1(t) = (1-\beta)\,a_1(t), \qquad b_0(t) = a_0(t) \tag{2.116}$$

erscheint (2.115) in Gestalt der *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$b_1(t)\,\dot{x} + b_0(t)\,x = g(t)\,x^\beta \quad (x > 0, \beta \neq 0, \neq 1, \text{reell}). \tag{2.117}$$

Sind $\tilde{x}(t) > 0$ Lösungen von (2.107), so ergeben sich die Lösungen von (2.117) durch Auflösen von (2.114) nach x und Einsetzen von $\tilde{x}(t)$ zu

$$x(t) = (\tilde{x}(t))^{\frac{1}{\alpha}} = (\tilde{x}(t))^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{2.118}$$

Aufgabe 2.22: Man löse die Bernoullische Differentialgleichung für $x = x(t)$ *

$$(1 - t^2)\,\dot{x} - tx - atx^2 = 0, \quad |t| \neq 1.$$

Da in dieser Aufgabe β eine ganze Zahl ist, kann hier neben $x > 0$ auch $x < 0$ zugelassen werden.

Gegeben sei die explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.119}$$

Jeder Lösung $y = y(x)$ von (2.119) wird durch

$$z = z(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \tag{2.120}$$

eine Funktion $z = z(x)$ zugeordnet. Auflösen von (2.120) nach $y(x)$ führt zu

$$y(x) = xz(x). \tag{2.121}$$

Die Differentiation ergibt

$$y'(x) = z(x) + xz'(x). \tag{2.122}$$

Durch Einsetzen von (2.122) und (2.121) in (2.119) erhält man für $z(x)$ die Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

$$z' = \frac{1}{x}\,(f(z) - z). \tag{2.123}$$

Die Lösungen $z(x)$ von (2.123) ergeben mittels (2.121) Lösungen $y(x)$ von (2.119).

Aufgabe 2.23: Die Differentialgleichung (1.42) *

$$y' = \frac{y + x\tan\gamma}{x - y\tan\gamma}$$

ist in die Gestalt $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ umzuformen, es ist eine implizite Darstellung der Lösung anzugeben.

Nun sei die explizite gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(ax + by + c) \tag{2.124}$$

gegeben. Jeder Lösung $y = y(x)$ von (2.124) wird durch

$$z = z(x) = ax + by(x) + c \tag{2.125}$$

eine Funktion $z = z(x)$ zugeordnet. Auflösen von (2.125) nach $y(x)$ führt zu

$$y(x) = \frac{1}{b}(z(x) - ax - c). \tag{2.126}$$

Man muß wegen (2.126) die Voraussetzung $b \neq 0$ machen. Das ist jedoch keine Einschränkung, weil (2.124) im Falle $b = 0$ sofort durch eine unbestimmte Integration lösbar ist. Differentiation von (2.125) ergibt

$$z'(x) = a + by'(x). \tag{2.127}$$

Aus (2.124) und (2.125) folgt $y' = f(z)$. Einsetzen in (2.127) ergibt für $z(x)$ die Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

$$z'(x) = a + bf(z). \tag{2.128}$$

Die Lösungen $z(x)$ von (2.128) ergeben mittels (2.126) Lösungen $y(x)$ von (2.124).

* *Aufgabe 2.24:* Man löse die folgende Anfangswertaufgabe für $y = y(x)$

$$y' = (x - y)^2 + 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

2.5. Das Runge-Kutta-Verfahren

2.5.1. Vorbemerkungen

Bisher haben wir Spezialfälle von $y' = f(x, y)$ behandelt. Sie werden vielleicht zur Auffassung gelangt sein, daß man zum Teil recht kunstvolle Methoden entwickelt hat, um die Lösung durch elementare Funktionen und gewöhnliche Integrationen darstellen zu können. So wichtig und nützlich diese Methoden auch sind, so muß doch gesagt werden, daß formelmäßiges Lösen einer Differentialgleichung geradezu als Ausnahme anzusehen ist. So sind beispielsweise die Lösungen einer so einfachen Differentialgleichung wie $y' = x^2 + y^2$ nachweisbar *nicht* durch elementare Funktionen und auch nicht durch Integrale über elementare Funktionen angebbar.

Man ist im allgemeinen auf numerische Verfahren angewiesen (Einzelheiten hierzu im Band 18). Sie liefern Näherungswerte der gesuchten Funktion anstelle ihrer exakten Werte. Wir behandeln hier das klassische Runge-Kutta-Verfahren. Allerdings soll nicht nur die Rechenvorschrift mitgeteilt werden; wir wollen Sie darüber hinaus mit den Grundgedanken des Verfahrens vertraut machen. Zunächst ist die gegebene Anfangswertaufgabe in eine für numerische Zwecke geeignete „iterierfähige Gestalt" zu überführen. Das Ergebnis steht in (2.132).

Ist $y = y(x)$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad (x, y) \in B, \tag{2.129}$$

so gilt für alle x aus dem Definitionsbereich von $y(x)$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{2.130}$$

mit

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.131}$$

Wird in (2.130) die unabhängige Variable x durch $\tilde{x}$ ersetzt und danach die so entstandene Gleichung in den Grenzen von x_0 bis x integriert, so erhält man

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\,d\tilde{x}, \quad \text{d. h.,}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\,d\tilde{x}. \tag{2.132}$$

Umgekehrt folgt aus (2.132) einerseits sofort (2.131) und andererseits durch Differenzieren die Gleichung (2.130). Also sind Gleichung (2.132) und Anfangswertaufgabe (2.129) bezüglich ihrer Lösungen äquivalent.

Da in (2.132) die unbekannte Funktion im Integranden eines bestimmten Integrals vorkommt, sagt man, (2.132) sei eine *Integralgleichung*.

Die Aufgabe für numerische Verfahren kann wie folgt formuliert werden. An gegebenen Stellen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{2.133}$$

des Definitionsbereiches der Lösung $y(x)$ der Anfangswertaufgabe (2.129) sollen *Näherungswerte* – sie seien durch

$$y_1, y_2, y_3, \ldots \tag{2.134}$$

bezeichnet – für die (exakten) Werte

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots \tag{2.135}$$

ermittelt werden. Darüber hinaus sind Aussagen über die Abweichungen der Näherungswerte von den exakten Werten erwünscht. Die Differenz

$$\Delta x_\nu = x_{\nu+1} - x_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.136}$$

heißt *Schrittweite* (auch: *Maschenweite*) h.

Oft wird es genügen, h konstant, d. h. unabhängig von ν zu wählen. In der Regel wird $h > 0$ vorausgesetzt.

2.5.2. Polygonzugverfahren

Aus (2.132) folgt für den (exakten) Wert $y(x_1)$ die Gleichung

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\,d\tilde{x}. \tag{2.137}$$

Ersetzt man bei der Herleitung in 2.5.1. den Anfangspunkt (x_0, y_0) durch den auf der Lösungskurve liegenden Punkt $(x_\nu, y(x_\nu))$, so ergibt sich analog zu (2.137) die Gleichung

$$y(x_{\nu+1}) = y(x_\nu) + \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\,d\tilde{x} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.138}$$

Beim Polygonzugverfahren berechnet man das Integral in (2.137) näherungsweise, indem man in gröbster Weise den Integranden $f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$ durch eine konstante Funktion ersetzt, die gleich dem Wert von $f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$ an der unteren Integrationsgrenze, nämlich gleich $f(x_0, y_0)$ ist. Damit geht (2.137) in eine Gleichung für den Näherungswert y_1 von $y(x_1)$ über:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \tag{2.139}$$

d. h.

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{2.140}$$

Beim nächsten Schritt des Polygonzugverfahrens überträgt man die bisherige Rolle von (x_0, y_0) auf (x_1, y_1). Es ergibt sich somit der Näherungswert y_2 von $y(x_2)$ zu

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß eine konstante Schrittweite vorliegt. Nunmehr ist verständlich, daß im Rahmen des Polygonzugverfahrens

$$y_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_\nu, y_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.141}$$

aufzuschreiben ist.

Die Gewinnung der Näherungen $y_1, y_2, \ldots$ gemäß (2.141) kann geometrisch interpretiert werden (Bild 2.4). Man geht zunächst vom Anfangspunkt (x_0, y_0) längs eines Geradenstückes, das den Anstieg $f(x_0, y_0)$ besitzt, bis man zu einem Punkt P_1 mit der Abszisse $x_1 = x_0 + h$ gelangt. Die y-Koordinate von P_1 wird y_1 genannt, d. h., P_1 ist durch (x_1, y_1) dargestellt.

Vom Punkt P_1 aus geht man nunmehr längs eines Geradenstückes, das den Anstieg $f(x_1, y_1)$ besitzt, bis zu einem Punkt P_2 mit der Abszisse $x_2 = x_1 + h$. Die y-Koordinate von P_2 wird mit y_2 bezeichnet.

In dieser Weise fortfahrend, gelangt man zu einem Polygonzug, der eine Näherungskurve für die Lösungskurve der Anfangswertaufgabe (2.129) ist.

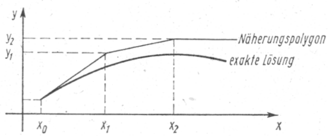


Bild 2.4

Für elektronische Rechenautomaten, bei denen man wegen der hohen Rechengeschwindigkeit die Schrittweite h sehr klein und dementsprechend die Anzahl der erforderlichen Schritte sehr groß wählen kann, ist dieses (gewöhnliche) Polygonzugverfahren durchaus brauchbar. Für die Rechnung ohne Automaten empfehlen sich Verfahren, bei denen man mit größerer Schrittweite h, also kleinerer Schrittanzahl, dieselbe Genauigkeit erreicht. Hierzu gehört das Verfahren von Runge-Kutta, das aber wegen des völlig schematischen Ablaufs der Rechnung auch leicht für Rechenautomaten programmierbar ist. Um die Grundgedanken stärker in den Vordergrund rücken zu können, behandeln wir zunächst eine Verbesserung des Polygonzugverfahrens.

Beim (gewöhnlichen) Polygonzugverfahren stellt man aus (2.138) eine Näherung her, indem man $y(x_\nu)$ durch die Näherung y_ν ersetzt und weiterhin für den Integranden den Wert an seiner *unteren* Integrationsgrenze nimmt. Es entsteht für die Näherung $y_{\nu+1}$ die Gleichung (2.141), die in neuer Bezeichnung nochmals notiert wird:

$$y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_\nu, y_\nu). \tag{2.142}$$

Der obere Index I auf der linken Seite von (2.142) weist darauf hin, daß es sich hier zunächst um einen ersten Näherungswert für $y(x_{\nu+1})$ handelt. Es soll ihm ein zweiter Näherungswert $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ an die Seite gestellt werden. Beim (gewöhnlichen) Polygonzugverfahren ist beim Übergang zur Näherung die *untere* Integrationsgrenze in (2.138) ausgezeichnet. Beim Herstellen der Näherung $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ soll der Integrand von (2.138) durch einen Wert ersetzt werden, der mit der *oberen* Integrationsgrenze zusammenhängt.

Es ist naheliegend, hierbei die Kenntnis von (2.142) auszunutzen und $f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$ durch die konstante Funktion

$$f(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}) \tag{2.143}$$

zu ersetzen. Somit ergibt sich für $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ die Formel

$$y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}). \tag{2.144}$$

Durch eine geeignete Linearkombination der in (2.142) und (2.144) erhaltenen Werte soll die Näherung $y_{\nu+1}$ für $y(x_{\nu+1})$ berechnet werden:

$$y_{\nu+1} = c_1 y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} + c_2 y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}. \tag{2.145}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 in (2.145) sollen so bestimmt werden, daß die Taylorentwicklung der durch den Punkt (x_ν, y_ν) gehenden (exakten) Lösung von $y' = f(x, y)$ und die Taylorentwicklung der Näherung (2.145), die beide an der Entwicklungsstelle x_ν ausgeführt werden, bis zu Gliedern mit möglichst hohen Potenzen von h übereinstimmen. Die Taylorentwicklungen stehen in (2.149) und (2.151).

Für die Taylorentwicklung der (exakten) Lösung $y(x)$ mit $y(x_\nu) = y_\nu$ ergibt sich

$$y(x_{\nu+1}) = y_\nu + y'(x_\nu)\, h + \tfrac{1}{2} y''(x_\nu)\, h^2 + \dots, \tag{2.146}$$

wobei die Werte $y'(x_\nu), y''(x_\nu), \dots$ mit Hilfe der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ermittelt werden. Die Rechnung liefert

$$y'(x_\nu) = f(x_\nu, y_\nu) \tag{2.147}$$

und wegen

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{y=y(x)} + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{y=y(x)} y'(x)$$

unter Beachtung von (2.147)

$$y''(x_\nu) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_\nu\\ y=y_\nu}} + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_\nu\\ y=y_\nu}} f(x_\nu, y_\nu). \tag{2.148}$$

Werden (2.147) und (2.148) in (2.146) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} y(x_{\nu+1}) = {} & y_\nu + h \cdot f(x_\nu, y_\nu) \\ & + \frac{1}{2} h^2 \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_\nu\\ y=y_\nu}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_\nu\\ y=y_\nu}} f(x_\nu, y_\nu)\right\} + \dots . \end{aligned} \tag{2.149}$$

Die Taylorentwicklung von $y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}$ kann (2.142) entnommen werden. Um die Taylorentwicklung von $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ aus (2.144) herstellen zu können, wird zunächst die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_ν, y_ν) entwickelt (Band 4, 4.1.):

$$f(x, y) = f(x_\nu, y_\nu) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} (x - x_\nu) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} (y - y_\nu) + \dots .$$

Hieraus folgt mit (2.142)

$$f(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}) = f(x_\nu, y_\nu) + h\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} f(x_\nu, y_\nu)\right\} + \dots$$

und damit wegen (2.144)

$$y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_\nu, y_\nu) + h^2\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} f(x_\nu, y_\nu)\right\} + \dots . \tag{2.150}$$

Mittels (2.142) und (2.150) ergibt sich schließlich für die Taylorentwicklung von (2.145)

$$\begin{aligned} y_{\nu+1} &= (c_1 + c_2)\, y_\nu + h(c_1 + c_2)\, f(x_\nu, y_\nu) \\ &\quad + h^2 c_2 \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x = x_\nu \\ y = y_\nu}} f(x_\nu, y_\nu)\right\} + \dots . \end{aligned} \tag{2.151}$$

Nun kann der *Taylor-Abgleich* erfolgen. Es werden die Koeffizienten der Potenzen von h von der Entwicklung des exakten Wertes in (2.149) mit den entsprechenden Koeffizienten der Entwicklung des Näherungswertes (2.151) verglichen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y_\nu &= (c_1 + c_2)\, y_\nu, \\ f(x_\nu, y_\nu) &= (c_1 + c_2)\, f(x_\nu, y_\nu), \\ \tfrac{1}{2}\{\dots\} &= c_2\, \{\dots\}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.152}$$

wobei in der letzten Gleichung die durch Punkte angedeuteten geschweiften Klammern einander gleich sind. Da die Herleitung für beliebige Anfangswertaufgaben (2.129) gelten soll, kann angenommen werden, daß die Werte y_ν, $f(x_\nu, y_\nu)$ und $\{\dots\}$ in (2.152) jeweils ungleich null sind. Hieraus folgt $c_1 + c_2 = 1$, $\frac{1}{2} = c_2$ und damit

$$c_1 = c_2 = \tfrac{1}{2}. \tag{2.153}$$

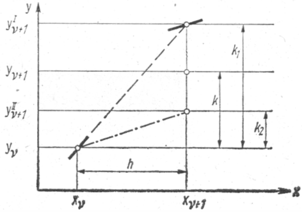


Bild 2.5

Einsetzen von (2.153) in (2.145) und Berücksichtigung von (2.142) und (2.144) führt zu

$$y_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}(y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} + y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}) = \tfrac{1}{2}(y_\nu + hf(x_\nu, y_\nu) + y_\nu + hf(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}))$$

und weiter mit den Abkürzungen

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \qquad k_2 = hf(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1},) = hf(x_{\nu+1}, y_\nu + k_1) \tag{2.154}$$

zum Ergebnis

$$y_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}[y_\nu + k_1 + y_\nu + k_2] = y_\nu + k \tag{2.155}$$

mit

$$k = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{2.156}$$

(Bild 2.5).

2.5.3. Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Beim Verfahren von Runge und Kutta werden zunächst vier Näherungen für $y(x_{\nu+1})$ hergestellt; sie seien durch $y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}, y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}, y^{\mathrm{III}}_{\nu+1}, y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1}$ bezeichnet. Die Näherung $y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}$ wird ebenso wie beim Polygonzugverfahren ermittelt:

$$y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_\nu, y_\nu). \tag{2.157}$$

Die Idee für die Vorschrift von $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ ist wie beim verbesserten Polygonzugverfahren; die Rolle des Punktes $(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1})$ wird jedoch vom Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke zwischen (x_ν, y_ν) und $(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{I}}_{\nu+1})$ übernommen, d. h. vom Punkt $\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_\nu + y^{\mathrm{I}}_{\nu+1})\right)$. Also wird jetzt für $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ die folgende Rechenvorschrift gewählt:

$$y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} = y_\nu + hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_\nu + y^{\mathrm{I}}_{\nu+1})\right). \tag{2.158}$$

Die Rechenvorschrift für $y^{\mathrm{III}}_{\nu+1}$ ist ebenso wie für $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$, lediglich wird auf der rechten Seite der Wert $y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}$ durch $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ ersetzt:

$$y^{\mathrm{III}}_{\nu+1} = y_\nu + hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_\nu + y^{\mathrm{II}}_{\nu+1})\right). \tag{2.159}$$

Schließlich wird $y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1}$ so gebildet wie $y^{\mathrm{II}}_{\nu+1}$ im Abschnitt 2.5.2., wobei $y^{\mathrm{I}}_{\nu+1}$ aus 2.5.2. jetzt durch $y^{\mathrm{III}}_{\nu+1}$ ersetzt wird:

$$y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1} = y_\nu + hf(x_{\nu+1}, y^{\mathrm{III}}_{\nu+1}). \tag{2.160}$$

Analog dem Vorgehen in 2.5.2. wird die Näherung $y_{\nu+1}$ durch eine Linearkombination der vorliegenden vier Näherungen gebildet:

$$y_{\nu+1} = c_1 y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} + c_2 y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} + c_3 y^{\mathrm{III}}_{\nu+1} + c_4 y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1}. \tag{2.161}$$

Die Koeffizienten werden nach der Methode des Taylor-Abgleichs ermittelt. Es zeigt sich, daß die Taylorentwicklung des exakten Wertes und die des Näherungsausdruckes bis zur vierten Potenz von h in Übereinstimmung gebracht werden können.

Die Rechnung übergehen wir. Für die Koeffizienten aus (2.161) ergeben sich die Werte $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{1}{3}$, $c_4 = \frac{1}{6}$. Somit geht (2.161) in

$$y_{\nu+1} = \tfrac{1}{6}(y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} + 2y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} + 2y^{\mathrm{III}}_{\nu+1} + y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1}) \tag{2.162}$$

über.

Wir fassen die aus (2.157), (2.158), (2.159), (2.160) und (2.162) bestehende Rechenvorschrift zusammen und führen hierzu analog 2.5.2. noch die folgenden Abkürzungen ein:

$$k_1 := hf(x_\nu, y_\nu), \tag{2.163}$$

$$k_2 := hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_\nu + y^{\mathrm{I}}_{\nu+1})\right) = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, y_\nu + \frac{k_1}{2}\right), \tag{2.164}$$

$$k_3 := hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_\nu + y^{\mathrm{II}}_{\nu+1})\right) = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2}, y_\nu + \frac{k_2}{2}\right), \tag{2.165}$$

$$k_4 := hf(x_\nu + h, y^{\mathrm{III}}_{\nu+1}) = hf(x_\nu + h, y_\nu + k_3). \tag{2.166}$$

Damit ist

$$y^{\mathrm{I}}_{\nu+1} = y_\nu + k_1,\ y^{\mathrm{II}}_{\nu+1} = y_\nu + k_2,\ y^{\mathrm{III}}_{\nu+1} = y_\nu + k_3,$$
$$y^{\mathrm{IV}}_{\nu+1} = y_\nu + k_4$$

und

$$y_{\nu+1} = y_\nu + k \tag{2.167}$$

mit

$$k = \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{2.168}$$

Zur Durchführung der Rechnung ist folgendes Schema zu empfehlen ($\lambda_1 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$):

x	y	f	$k_\mu = hf$	$\lambda_\mu k_\mu$	$k = \frac{1}{6}\sum \lambda_\mu k_\mu$
x_ν	y_ν	$f(x_\nu, y_\nu)$	k_1	k_1	
$x_\nu + \frac{h}{2}$	$y_\nu + \frac{k_1}{2}$	$f\left(x_\nu + \frac{h}{2}, y_\nu + \frac{k_1}{2}\right)$	k_2	$2k_2$	
$x_\nu + \frac{h}{2}$	$y_\nu + \frac{k_2}{2}$	$f\left(x_\nu + \frac{h}{2}, y_\nu + \frac{k_2}{2}\right)$	k_3	$2k_3$	
$x_\nu + h$	$y_\nu + k_3$	$f(x_\nu + h, y_\nu + k_3)$	k_4	k_4	k
$x_{\nu+1}$	$y_{\nu+1} = y_\nu + k$				

Ausgehend von $(x_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ kann das Verfahren in gleicher Weise fortgesetzt werden.

Beispiel 2.9: Von der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2), \qquad y(0) = 0, \tag{2.169}$$

sollen mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens die Funktionswerte an den Stellen $x = 0{,}5$ und $x = 1$ näherungsweise berechnet werden. Als Schrittweite werde $h = 0{,}5$ gewählt. Führt man die Rechnung mit 6 Dezimalstellen hinter dem Komma durch, so ergibt sich:

x	y	$f=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$	$k_\mu = hf$	$\lambda_\mu k_\mu$	$k = \frac{1}{6}\sum \lambda_\mu k_\mu$
0,00	**0,000000**	0,000000	0,000000	0,000000	
0,25	0,000000	0,015625	0,007813	0,015625	
0,25	0,003907	0,015629	0,007815	0,015629	
0,50	0,007815	0,062515	0,031258	0,031258	0,010419
0,50	**0,010419**	0,062527	0,031264	0,031264	
0,75	0,026051	0,140795	0,070398	0,140795	
0,75	0,045618	0,141145	0,070573	0,141146	
1,00	0,080992	0,251640	0,125820	0,125820	0,073171
1,00	**0,083590**				

Aufgabe 2.25: Durch Anwendung des Runge-Kutta-Verfahrens auf *

$$y' = \frac{1}{10} y \sqrt{2y - x}, \quad y(0) = 1, \tag{2.170}$$

mit der Schrittweite $h = 0{,}5$ bestimme man unter Mitnahme von vier Dezimalen näherungsweise $y(1)$.

2.5.4. Schrittweite und Fehlergröße

Als grober Anhaltspunkt für die Schrittweite h beim Runge-Kutta-Verfahren wird oft die angenäherte Übereinstimmung der Werte k_2 und k_3 angesehen; genauer: der absolute Betrag des Unterschiedes zwischen k_2 und k_3 soll möglichst die Größenordnung von einigen Prozent des absoluten Betrages des Unterschiedes zwischen k_1 und k_2 nicht überschreiten, d. h. etwa

$$\left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right| < 0{,}05, \tag{2.171}$$

andernfalls sollte man zu einer kleineren Schrittweite übergehen.

Beispiel 2.10: Im Beispiel 2.9 ergeben sich für die linke Seite von (2.171) größenordnungsmäßig die Werte

$$2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{7{,}8 \cdot 10^{-3}} \quad \text{und} \quad 1{,}7 \cdot 10^{-4} \frac{1}{3{,}9 \cdot 10^{-2}},$$

genügen also der Ungleichung (2.171). Eine Schrittweitenverkleinerung ist nicht erforderlich.

Brauchbare Fehlerabschätzungen liegen für das Runge-Kutta-Verfahren noch nicht vor. Um wenigstens einen Anhaltspunkt für die Größe des begangenen Fehlers zu haben, wiederholt man die Rechnung mit der doppelten Schrittweite $2h$ und stützt sich auf die Tatsache, daß beim Runge-Kutta-Verfahren die Taylorentwicklung des exakten Wertes und die Taylorentwicklung des Näherungswertes (2.162) bis zur vierten Potenz von h übereinstimmen. Dann kann man sagen, daß der Fehler bei Schrittverdoppelung auf annähernd den $2^5 = 32$fachen Wert ansteigt. Da gleichzeitig zum Durchlaufen von $2h$ zwei Schritte der ursprünglichen Feinrechnung gehören, wobei sich der Fehler angenähert verdoppelt, so ist der Fehler bei der zuletzt durchgeführten Grobrechnung ungefähr 16mal so groß wie derjenige der Feinrechnung. Der Unterschied zwischen einem gefundenen y-Wert y_f der ursprünglichen

Feinrechnung und dem zugehörigen gröberen Wert y_g der zuletzt durchgeführten Grobrechnung beträgt somit angenähert das 15fache des Fehlers δy der Feinrechnung. Man kann dies sogar zu einer Korrektur der Feinwerte benutzen: y_f wird ersetzt durch

$$y_f + \delta y \quad \text{mit} \quad \delta y = \frac{1}{15}(y_f - y_g). \tag{2.172}$$

Beispiel 2.11: Beispiel 2.9 wird nochmals mit der doppelten Schrittweite $\tilde{h} = 2h = 1$ durchgeführt:

x	y	$f=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$	$k_\mu = \tilde{h}f$	$\lambda_\mu k_\mu$	$k = \frac{1}{6}\sum \lambda_\mu k_\mu$
0,00	**0,000000**	0,000000	0,000000	0,000000	
0,50	0,000000	0,062500	0,062500	0,125000	
0,50	0,031250	0,062744	0,062744	0,125488	
1,00	0,062744	0,250984	0,250984	0,250984	0,083579
1,00	**0,083579**				

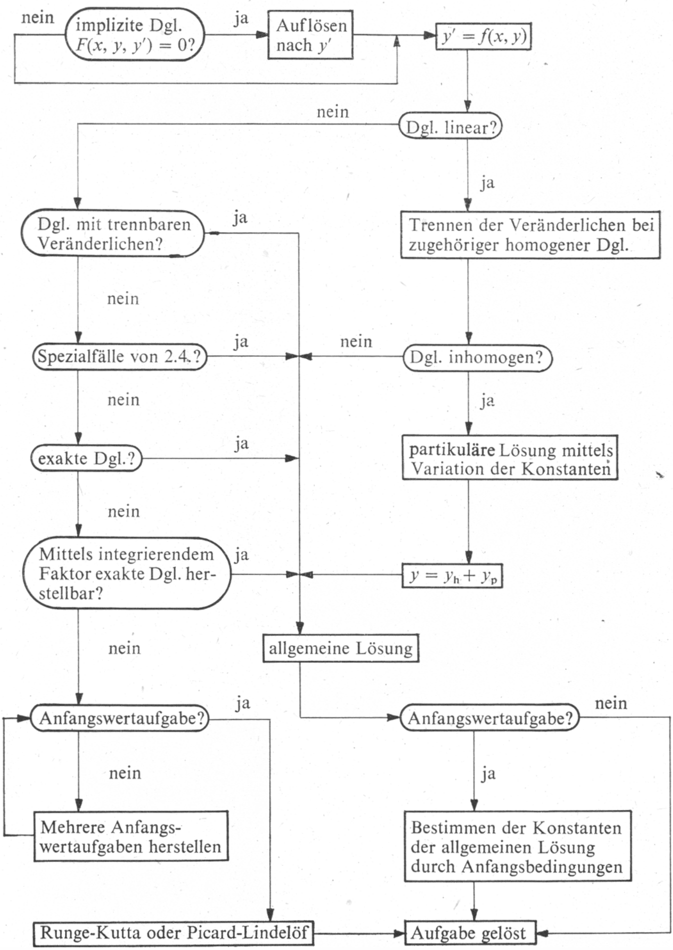
Damit ergibt sich $y(1{,}0) \approx 0{,}083590 + \delta y$ mit $\delta y = \frac{1}{15} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-5} \approx 7 \cdot 10^{-7}$ und damit $y(1{,}0) \approx 0{,}083591$.

* *Aufgabe 2.26:* Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 0$$

nach dem Verfahren von Runge-Kutta. Es sind zwei Schritte mit $h = 0{,}2$ durchzuführen, anschließend ist eine Korrektur durch Rechnung mit der doppelten Schrittweite vorzunehmen (Rechnung mit 6 Dezimalstellen). Die Ergebnisse sind mit der exakten Lösung zu vergleichen.

2.6. Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse



3. Differentialgleichungen höherer Ordnung

3.1. Existenz und Unität der Lösungen

Wir beschäftigen uns mit der bereits aus Definition 1.2 bekannten expliziten Differentialgleichung n-ter Ordnung für die Funktion $y = y(x)$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{3.1}$$

Analog zu den Sätzen 2.2, 2.3 und der Definition 2.1 notieren wir hier

S.3.1 **Satz 3.1:** *Ist die Funktion $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ – als Funktion ihrer $n + 1$ Argumente $x, y, \ldots, y^{(n-1)}$ – in ihrem Definitionsbereich B stetig, existieren dort auch ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ und sind diese dort stetig*[1]*), so ist die Existenz und Unität der Lösung der Anfangswertaufgabe, bestehend aus der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

und den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3.3}$$

gesichert, falls für die gegebenen Konstanten $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$

$$(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in B \tag{3.4}$$

gilt.

Zusatz zu Satz 3.1: Das Verfahren von Picard-Lindelöf aus Satz 2.2 ist übertragbar. Wir formulieren es für den Fall $n = 2$: Für die Lösung von $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ gilt $y(x) = \lim\limits_{k\to\infty} y_k(x)$ ($|x - x_0| < r$, r hinreichend klein), wobei die Funktionenfolge $y_0(x), y_1(x), \ldots$ unter Hinzuziehen der Hilfsfunktionenfolge $z_0(x), z_1(x), \ldots$ gemäß $y_0(x) \equiv y_0$, $z_0(x) \equiv y'_0$,

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} z_{k-1}(t)\,dt,$$

$$z_k(x) = y'_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))\,dt \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

zu berechnen ist.

D.3.1 **Definition 3.1:** *Man sagt*

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \quad (C_1, \ldots, C_n\text{: Scharparameter}) \tag{3.5}$$

gibt relativ zu B die **allgemeine Lösung** *(das allgemeine Integral) von* (3.1) *an, wenn die durch Auflösen von* (3.5) *nach y entstehenden differenzierbaren Funktionen $y = y(x)$ Lösungen von* (3.1) *sind und wenn diese nicht mit weniger als n solchen Parametern dargestellt werden können.*

S.3.2 **Satz 3.2:** *Sind die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt, so ist jede Lösung von* (3.1) *in der allgemeinen Lösung enthalten.*

---

[1]) $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ sind in diesem Zusammenhang als unabhängige Variable aufzufassen, nach denen die rechte Seite von (3.2) insbesondere partiell differenziert werden kann.

3.2. Einige Sonderfälle von im allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Analog zu 2.3. beschäftigen wir uns mit solchen Spezialfällen von

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.6}$$

deren Lösungen (oder deren Umkehrfunktionen) durch elementare Funktionen oder wenigstens durch Integrale über elementare Funktionen darstellbar sind. Weiterhin interessieren wir uns für solche Spezialfälle, deren Lösungen sich aus gewissen Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben.

3.2.1. Die Differentialgleichung $y'' = f(x)$

Die allgemeine Lösung von $y'' = f(x)$ kann durch zweimalige Integration gewonnen werden, wobei die stückweise Stetigkeit von $f(x)$ vorausgesetzt wird. Man kann sie auch in der Gestalt

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x - t) f(t) \, \mathrm{d}t + C_1(x - x_0) + C_2 \tag{3.7}$$

(x_0 ist eine feste Zahl aus dem Definitionsbereich von $f(x)$) angeben.

Aufgabe 3.1: Man bilde in (3.7) die zweite Ableitung $y''(x)$ und zeige, daß (3.7) Lösungen von $y'' = f(x)$ darstellt. *

3.2.2. Die Differnetialgleichung $y'' = f(y)$, Energiemethode

Ist die Funktion $y(x)$ zweimal differenzierbar, so liefert die Kettenregel für die Ableitung der Funktion $\frac{1}{2}(y'(x))^2$ die Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}(y'(x))^2\right] = y'(x)\, y''(x). \tag{3.8}$$

Multiplizieren wir daher die Differentialgleichung für $y = y(x)$

$$y'' = f(y) \quad (f \text{ stetig}) \tag{3.9}$$

mit y', so kann das Ergebnis $y'y'' = f(y)\, y'$ wegen (3.8) in der Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}(y')^2\right] = f(y)\, y' \text{ [1]} \tag{3.10}$$

geschrieben werden. Ist $y = y(x)$ eine Lösung von (3.9), so auch von (3.10). Ist umgekehrt $y = y(x)$ eine Lösung von (3.10) und damit von $y'y'' = f(y)\, y'$ so ist im Fall

$$y'(x) \neq 0 \tag{3.11}$$

gesichert, daß $y = y(x)$ auch (3.9) löst. Zum Beweis ist $y'y'' = f(y)\, y'$ mit $\frac{1}{y'}$ zu multiplizieren.

[1]) Geht man davon aus, daß $y(x)$ – falls x als Zeit und y als Weg gedeutet wird – die geradlinige Bewegung eines Massenpunktes mit der Masse 1 bezeichnen soll, so stellt der Term $\frac{1}{2}(y')^2$ die kinetische Energie dieses Punktes dar. Darauf beruht u. a. die Bezeichnung Energiemethode.

Beim Übergang von (3.9) zu (3.10) kann es vorkommen, daß sich Scheinlösungen ergeben, d. h. Funktionen $y = y(x)$, die zwar (3.10), aber nicht (3.9) genügen. So ist

$$y(x) \equiv \text{const} = c \tag{3.12}$$

eine Lösung von (3.10), jedoch im Fall $f(c) \neq 0$ keine Lösung von (3.9).

Zusammenfassend können wir sagen:

Unter der Voraussetzung (3.11) *sind die Differentialgleichungen* (3.9) *und* (3.10) *bezüglich ihrer Lösungen einander äquivalent.* (3.13)

Wir knüpfen nun an (3.10) an. Wenn wir eine Stammfunktion der linken Seite von (3.10) – unter Verzicht auf eine Integrationskonstante – bilden, ebenso mit der rechten Seite von (3.10) verfahren und beachten, daß zwei Funktionen, deren Ableitungen einander gleich sind, sich höchstens um eine additive Konstante unterscheiden (Bd. 2, Satz 6.5), so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)\, y' \,\mathrm{d}x + C. \tag{3.14}$$

Im Integral aus (3.14) wird die Substitution $y = y(x)$ ausgeführt:

$$\tfrac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)\,\mathrm{d}y + C. \tag{3.15}$$

Auflösen von (3.15) nach y' liefert

$$\textit{entweder } y' = \sqrt{2\int f(y)\,\mathrm{d}y + 2C} \quad \textit{oder} \quad y' = -\sqrt{2\int f(y)\,\mathrm{d}y + 2C}. \tag{3.16}$$

Die Differentialgleichungen in (3.16) sind Differentialgleichungen mit trennbaren Veränderlichen. Wegen (3.13) interessieren wir uns nur für den Fall $y' \neq 0$ und können daher in (3.16) gemäß 2.3.1. die Methode der Trennung der Veränderlichen anwenden. Wir verzichten auf die allgemeine Durchführung und bringen zur Illustrierung als Beispiel die Lösung einer Anfangswertaufgabe. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, ist es zweckmäßig, einerseits bereits in (3.15) C aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen und andererseits zu ermitteln, welche der beiden Differentialgleichungen aus (3.16) für die Anfangswertaufgabe maßgebend ist.

Beispiel 3.1: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe für $y = y(x)$

$$y'' = 2y^3,\ y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1. \tag{3.17}$$

Der Übergang von (3.9) zu (3.15) führt im vorliegenden Beispiel zu

$$\tfrac{1}{2}(y')^2 = \tfrac{1}{2}y^4 + C. \tag{3.18}$$

An der Stelle $x = -2$ muß (3.18) die Anfangsbedingungen aus (3.17) erfüllen. Also ist $C = 0$ und damit

$$\textit{entweder } y' = y^2 \quad \textit{oder} \quad y' = -y^2. \tag{3.19}$$

Wegen der Anfangsbedingung $y'(-2) = -1 < 0$ ist aus (3.19) nur $y' = -y^2$ maßgebend. Man erhält weiter

$$y' = -y^2 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\int \mathrm{d}x \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + C_1.$$

Die Anfangsbedingung $y(-2) = 1$ liefert $C_1 = -3$, so daß sich als Lösung der Anfangswertaufgabe (3.17) schließlich

$$y = \frac{1}{x+3} \quad (x > -3) \tag{3.20}$$

ergibt.

Aufgabe 3.2: Man löse die Anfangswertaufgabe für $y = y(x)$ *

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}, \; y(1) = 1, \; y'(1) = -2.$$

Beispiel 3.2: Wir knüpfen an Beispiel 1.8 an und behandeln die Differentialgleichung (1.26), d. h.

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad \text{und damit} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \tag{3.21}$$

für den Ausschlagwinkel φ (Bild 1.6) des vorliegenden mathematischen Pendels. Wir schreiben vor, daß zur Zeit $t = 0$ der Ausschlagwinkel gleich 0 und die Geschwindigkeit $l\dot{\varphi}$ gleich v_0 ist. Wir fordern mit anderen Worten die Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0 \tag{3.22}$$

und

$$l(\dot{\varphi}(t))_{t=0} = v_0, \quad \text{kurz: } l\dot{\varphi}(0) = v_0. \tag{3.23}$$

Der Übergang von (3.9) zu (3.15) führt im vorliegenden Beispiel zu

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi + C. \tag{3.24}$$

Multipliziert man (3.24) mit ml^2, so ergibt sich mit der Abkürzung $ml^2C = E$ die Gleichung (1.3). Hiermit wird erneut der Name Energiemethode für die vorliegende Lösungsmethode verdeutlicht. Mit den Anfangsbedingungen (3.22), (3.23) folgt aus (3.24)

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{l}\right)^2 - \frac{g}{l}. \tag{3.25}$$

Wir setzen C aus (3.25) in (3.24) ein und lösen danach (3.24) nach $\dot{\varphi}$ auf. Es ergibt sich

$$\dot{\varphi} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{2gl(-1+\cos\varphi) + v_0^2}. \tag{3.26}$$

Wegen der Anfangsbedingung (3.23) ist in (3.26) das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen, je nachdem, ob $v_0 > 0$ oder $v_0 < 0$ ist. In (3.26) führt Trennen der Veränderlichen zu

$$\pm l \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2gl(-1+\cos\varphi) + v_0^2}} = t + C_1. \tag{3.27}$$

C_1 wird mittels der Anfangsbedingung (3.22) bestimmt und danach in (3.27) eingesetzt. Das Ergebnis ist durch ein bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze formulierbar:

$$t = \pm l \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{2gl(-1+\cos\tilde{\varphi}) + v_0^2}}. \tag{3.28}$$

Das Integral in (3.28) gehört zu den elliptischen Integralen, die im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen angebbar sind. Durch (3.28) wird die gesuchte Funktion $\varphi = \varphi(t)$ der Anfangswertaufgabe (3.21), (3.22), (3.23) in der nach t aufgelösten Gestalt $t = t(\varphi)$ dargestellt. Im Fall $v_0^2 > 4gl$ ist der Integrand aus (3.28) stets positiv, also $t = t(\varphi)$ und damit auch $\varphi = \varphi(t)$ für alle t monoton.

Das bedeutet ein ständiges Überschlagen des Pendels. Ist $v_0^2 < 4gl$, so ist die kleinste positive Nullstelle des Nenners im Integranden aus (3.28)

$$\varphi_1 = \arccos\left(1 - \frac{1}{2gl} v_0^2\right). \tag{3.29}$$

Das Pendel schwingt von $\varphi = 0$ bis zum Maximalausschlag mit dem absoluten Betrag φ_1, hat dort die Geschwindigkeit 0 und schwingt danach wieder zurück. Die benötigte Zeit T_1 für eine Viertelschwingung von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$ wird wegen (3.28) durch

$$T_1 = l \int\limits_0^{\varphi_1} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2gl(-1 + \cos\varphi) + v_0^2}} \tag{3.30}$$

gegeben, wobei ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen in (3.30) die Integrationsvariable mit φ bezeichnet wurde und der Wert von φ_1 der Formel (3.29) zu entnehmen ist.

* *Aufgabe 3.3:* Man kann bei „kleinem" v_0 mit guter Näherung die Kosinusfunktion durch die ersten beiden von null verschiedenen Glieder ihrer Taylorentwicklung (Entwicklungsstelle null) ersetzen.

a) Man werte die dadurch aus (3.28) entstehende Näherungsformel aus und löse die erhaltene Gleichung nach φ auf.

b) Welche Näherungsformel ergibt sich für φ_1 [siehe (3.28), (3.29)]?

c) Welchen Näherungswert erhält man für T_1 aus (3.30)?

3.2.3. Die Differentialgleichung $y'' = f(x, y')$

Die Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y') \tag{3.31}$$

ist für die Funktion

$$p(x) = y'(x) \tag{3.32}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich die Differentialgleichung

$$p' = f(x, p). \tag{3.33}$$

Sind die Lösungen $p(x)$ von (3.33) mittels der Methode von Kapitel 2 bestimmt, so ergeben sich die gesuchten Lösungen von (3.31) durch unbestimmte Integration von (3.32).

* *Aufgabe 3.4:* Man löse die Anfangswertaufgabe für $x = x(t)$

$$(t^2 + 2t + 5)\,\ddot{x} + (2t + 2)\,\dot{x} = 4, \; x(1) = 0, \; \dot{x}(1) = 1. \tag{3.34}$$

3.2.4. Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$

Beim Vorliegen der Differentialgleichung

$$y'' = f(y, y') \tag{3.35}$$

prüft man zunächst, ob es Lösungen $y(x) \equiv \text{const} = c$ gibt. Durch Einsetzen von $y(x) \equiv c$ in (3.35) erkennt man, daß tatsächlich eine solche Lösung vorliegt, falls

$$f(c, 0) = 0 \tag{3.36}$$

gilt. Bei der weiteren Diskussion von (3.35) beschränkt man sich auf solche x-Intervalle der Lösungsfunktion $y(x)$, für die stets

$$y'(x) \neq 0 \tag{3.37}$$

gilt. Dann kann man sich nämlich die Gleichung

$$y = y(x) \tag{3.38}$$

nach x aufgelöst denken:

$$x = x(y). \tag{3.39}$$

In die Funktion $p(x)$ mit

$$p(x) = y'(x) \tag{3.40}$$

setzen wir (3.39) ein und erhalten eine mittelbare Funktion von y, nämlich

$$q(y) = p(x) \quad \text{mit} \quad x = x(y). \tag{3.41}$$

Es wird versucht, eine gewöhnliche Differentialgleichung für $q(y)$ herzustellen. Zunächst ergibt sich aus (3.41), (3,40) und (3.35)

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\,\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = y''\,\frac{1}{p} = f(y, p)\,\frac{1}{p}$$

und damit wegen (3.41) die folgende Differentialgleichung für $q(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{q}\,f(y, q). \tag{3.42}$$

Ist diese Differentialgleichung mit den Methoden aus Kapitel 2 gelöst, so können die gesuchten Lösungen $y(x)$ von (3.35) wegen (3.41) und (3.40) mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit trennbaren Veränderlichen

$$y' = q(y) \tag{3.43}$$

ermittelt werden.

3.3. Explizite homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

3.3.1. Definition

Wir untersuchen, inwieweit die Ausführungen aus 2.3.2. auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung übertragen werden können. Der Definition 2.3 entspricht jetzt die

Definition 3.2: *Unter einer gewöhnlichen* **linearen Differentialgleichung** n**-ter Ordnung** *für eine Funktion $y = y(x)$ versteht man eine Gleichung der Gestalt* **D.3.2**

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = g(x), \tag{3.44}$$

kurz

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,y^{(\nu)} = g(x) \tag{3.45}$$

mit

$$a_n(x) \not\equiv 0 \quad (x \in D), \tag{3.46}$$

wobei D der gemeinsame Definitionsbereich der bekannten **Koeffizientenfunktionen** *$a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ und des bekannten* **Störgliedes** *$g(x)$ ist. Die Differentialgleichung* (3.44) *heißt darüber hinaus*

$$\textbf{inhomogen,} \quad \textit{falls } g(x) \not\equiv 0 \quad (x \in D) \tag{3.47}$$

$$\textbf{homogen,} \quad \textit{falls } g(x) \equiv 0 \quad (x \in D) \tag{3.48}$$

gilt. Wird die Bedingung (3.46) *zu*

$$a_n(x) \neq 0 \quad (x \in D) \tag{3.49}$$

verschärft, so kann (3.45) *in die* **explizite** *lineare Differentialgleichung*

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{a_\nu(x)}{a_n(x)} y^{(\nu)} \right) + \frac{g(x)}{a_n(x)} \tag{3.50}$$

umgeformt werden. Es ist üblich, bereits dann von einer expliziten linearen Differentialgleichung zu sprechen, wenn (3.50) *in der Gestalt* (3.45), (3.49) *angegeben wird.*

3.3.2. Allgemeine Lösung im inhomogenen Fall

Der Satz 2.5 ist unmittelbar übertragbar. Es gilt

S.3.3 **Satz 3.3.:** *Die* **allgemeine Lösung** $y(x)$ *der expliziten gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(\nu)} = g(x), \quad a_n(x) \neq 0 \quad (x \in D), \tag{3.51}$$

ist gleich einer **partikulären** *(speziellen) Lösung* $y_p(x)$ *der* **inhomogenen** *Differentialgleichung* (3.51) *plus der* **allgemeinen** *Lösung* $y_h(x)$ *der zugehörigen* **homogenen** *Differentialgleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y_h^{(\nu)} = 0, \quad a_n(x) \neq 0 \quad (x \in D), \tag{3.52}$$

also

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x). \tag{3.53}$$

Zum Beweis benutzen wir den linearen Differentialoperator (vgl. Bemerkung in 2.3.2.1.)

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(\nu)}. \tag{3.54}$$

Die Fortführung des Beweises kann nunmehr wörtlich dem Beweis von Satz 2.5 entnommen werden. Es sei auf die völlige Analogie zu dem entsprechenden Ergebnis für lineare algebraische Gleichungssysteme (vgl. Bd. 13) hingewiesen. Die Übereinstimmung der Lösungsstrukturen beruht einzig und allein auf der Linearität der betrachteten Gleichungen.

3.3.3. Struktur der Lösung im homogenen Fall

Die Methode der Trennung der Veränderlichen aus 2.3.2.2. kann nicht übertragen werden. Es gilt jedoch der

S.3.4 **Satz 3.4:** *Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung* (3.52) *bilden einen* **linearen** *Raum, d. h. mit je zwei Lösungen* $y_{h1}(x)$ *und* $y_{h2}(x)$ *von* (3.52) *ist auch jede Linearkombination* $C_1 y_{h1}(x) + C_2 y_{h2}(x)$ *Lösung von* (3.52).

Beweis: Mit (3.54) gilt

$$L[C_1 y_{h1} + C_2 y_{h2}] = C_1 L[y_{h1}] + C_2 L[y_{h2}],$$

woraus wegen $L[y_{h1}] = L[y_{h2}] = 0$ auch $L[C_1 y_{h1} + C_2 y_{h2}] = 0$ folgt. ■

Man kann die Aussage von Satz 3.4 noch ergänzen. Hierzu erinnern wir zunächst an die Vektorrechnung im gewöhnlichen euklidischen dreidimensionalen Raum R^3.

Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, d. h., aus

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \tag{3.55}$$

soll

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \tag{3.56}$$

folgen. Die Aufgabe, jeden beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in R^3$ in der Gestalt

$$\mathbf{v} = C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2 + C_3\mathbf{a}_3 \tag{3.57}$$

darzustellen, ist auf genau eine Weise lösbar. Im jetzigen Zusammenhang legen wir nur auf die Existenz und Unität der Lösung (C_1, C_2, C_3) Wert und interessieren uns nicht für die etwa mittels Spatprodukten angebbaren Lösungsformeln für C_1, C_2, C_3. Angeregt durch (3.55), (3.56) formulieren wir die folgende

Definition 3.3: *Die Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ heißen relativ zu ihrem gemeinsamen Definitionsbereich D* **linear unabhängig**, *wenn aus* D.3.3

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) \equiv 0 \quad (x \in D) \tag{3.58}$$

die Gleichungen

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \tag{3.59}$$

gefolgert werden können.

Die Prüfung, ob lineare Unabhängigkeit vorliegt, ist prinzipiell mit Hilfe der Definition 3.3 möglich, jedoch im allgemeinen recht aufwendig. Sie wird erleichtert durch

Satz 3.5: *Sind die Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich D jeweils $(n-1)$-mal differenzierbar und ist die sogenannte* **Wronskische Determinante** S.3.5

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \dots f'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.60}$$

in D überall ungleich null, so sind die Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ in D linear unabhängig.

Zum Beweis wird die Identität (3.58) $(n-1)$-mal differenziert. Es entsteht ein lineares homogenes Gleichungssystem von n Gleichungen für die n unbekannten Konstanten $c_1, \dots, c_n$, wobei die Koeffizientendeterminante die Wronskische Determinante (3.60) ist; diese ist nach Voraussetzung für alle $x \in D$ ungleich null. Hieraus folgt (3.59) (vgl. Band 13), also sind $f_1(x), \dots, f_n(x)$ linear unabhängig. ■

Beispiel 3.3: Die Funktionen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3$ sind für alle $x \in (-\infty, +\infty)$ linear unabhängig. In der Tat, der Satz 3.5 liefert

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Zum Beispiel 3.3 sei noch bemerkt, daß für jedes $n = 2, 3, \ldots$ die Funktionen x^ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$) für alle $x \in (-\infty, +\infty)$ linear unabhängig sind, gleiches gilt für $\sin(\nu x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, $\cos(\nu x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

* *Aufgabe 3.5:* Man zeige, daß die Funktionen $e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, e^{c_3 x}$ linear unabhängig sind, falls $c_1 \neq c_2, c_1 \neq c_3, c_2 \neq c_3$ ist.

Angeregt durch den Text im Zusammenhang mit (3.57) kommen wir zur

D.3.4 **Definition 3.4:** *Ein linearer Raum, dessen Elemente Funktionen $g(x), h(x), \ldots$ mit dem gemeinsamen Definitionsbereich D sind, heißt n-***dimensional,** *wenn es im Raum n Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ derart gibt, daß die Aufgabe, irgendeine Funktion $v(x)$ des Raumes in der Gestalt*

$$v(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x) \quad (x \in D) \tag{3.61}$$

darzustellen, stets **auf genau eine Weise** *lösbar ist. Die Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ heißen* **Basis (Fundamentalsystem)** *des linearen Raumes.*

Im Anschluß an Definition 3.4 nennen wir den

S.3.6 **Satz 3.6:** *Greift man aus einem n-dimensionalen linearen Raum n linear unabhängige Elemente $g_1, \ldots, g_n$ heraus, so bilden sie eine Basis des Raumes. Je $n + 1$ Elemente des Raumes sind stets linear abhängig (d. h.: nicht linear unabhängig).*

Jetzt sind wir in der Lage, Satz 3.4 zu ergänzen. Es gilt

S.3.7 **Satz 3.7:** *Die Lösungen der* **homogenen** *linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (3.52) bilden einen n-***dimensionalen** *linearen Raum, d. h., die* **allgemeine Lösung** *kann in der Gestalt*

$$y_h(x) = C_1 y_{h1}(x) + \ldots + C_n y_{hn}(x) \tag{3.62}$$

angegeben werden, wobei

$$y_{h1}(x), y_{h2}(x), \ldots, y_{hn}(x) \tag{3.63}$$

eine Basis (Fundamentalsystem) des Lösungsraumes ist und $C_1, \ldots, C_n$ beliebige Konstanten sind.

Zusammenfassend hat sich ergeben:
Bei der Behandlung der homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung (3.52) genügt es, eine Basis (3.63) herzustellen. Wegen Satz 3.6 und Satz 3.5 liegt gewiß eine Basis (3.63) vor, wenn jede der Funktionen aus (3.63) die Differentialgleichung (3.52) löst und die aus ihnen gebildete Wronskische Determinante für alle $x \in D$ ungleich null ist. Ohne Beweis teilen wir mit, daß das Nichtverschwinden der Wronskischen Determinante für das Vorliegen einer Basis (3.63) *nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig* ist.

Im allgemeinen ist die Herstellung einer Basis durch elementare Funktionen nicht möglich. Dies gelingt jedoch, falls die Koeffizientenfunktionen $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ alle konstant sind. Damit werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

3.3.4. Lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei für die gesuchte Funktion $y_h(x)$ die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$a_n y_h^{(n)}(x) + a_{n-1} y_h^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y_h'(x) + a_0 y_h(x) = 0 \quad (a_n \neq 0), \tag{3.64}$$

kurz

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y_h^{(\nu)}(x) = 0 \quad (a_n \neq 0), \tag{3.65}$$

wobei die Koeffizienten

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \tag{3.66}$$

als *konstant* vorausgesetzt werden. Die Lösungstheorie wird besonders übersichtlich, wenn man sich entschließt, zunächst alle Lösungen $y(x)$ zu suchen, die *komplexe* Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen x sind. In der Regel werden die Koeffizienten (3.66) zwar reell sein, die Untersuchungen sind aber auch dann gültig, wenn die Koeffizienten komplexe Zahlen sind.

Die Lösungstheorie beginnt mit dem Ansatz

$$y_h(x) = e^{\lambda x}. \tag{3.67}$$

Die eventuell komplexe Konstante λ soll so bestimmt werden, daß (3.67) die Differentialgleichung (3.64) löst. Einsetzen von (3.67) in (3.64) führt zu[1])

$$a_n\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0. \tag{3.68}$$

Jeder Summand auf der linken Seite von (3.68) besitzt den Faktor $e^{\lambda x}$, und dieser ist von null verschieden, also ist (3.68) genau dann erfüllt, wenn

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.69}$$

gilt.

Damit ist es uns gelungen, die Lösung der Differentialgleichung (3.64) auf die Lösung einer algebraischen Gleichung (3.69) zurückzuführen. (3.69) heißt *charakteristische Gleichung* der Differentialgleichung (3.64). Das bisherige Ergebnis lautet:

Satz 3.8: *Es gibt Lösungen von* (3.64) *der Gestalt* (3.67), *wenn λ der Gleichung* (3.69) *genügt.* **S.3.8**

Über die Gesamtheit der Lösungen von (3.69), d. h. von

$$P_n(\lambda) = 0 \tag{3.70}$$

mit

$$P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{3.71}$$

gibt der Fundamentalsatz der Algebra Auskunft. Für den bei seiner Formulierung benötigten Begriff der Vielfachheit nennen wir die – bereits aus Bd. 2 bekannte –

Definition 3.5: *Eine Lösung λ_k von* (3.69) *und damit von* (3.70) *hat die Vielfachheit l_k, falls $P_n(\lambda)$ und die Ableitungen*[2]) *von $P_n(\lambda)$ bis zur Ordnung $l_k - 1$ an der Stelle $\lambda = \lambda_k$ alle den Wert null liefern, d. h., wenn* **D.3.5**

$$P_n(\lambda_k) = P_n'(\lambda_k) = \ldots = P_n^{(l_k-1)}(\lambda_k) = 0 \tag{3.72}$$

gilt, jedoch die l_k-te Ableitung von $P_n(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_k$ von null verschieden ist:

$$P^{(l_k)}(\lambda_k) \neq 0. \tag{3.73}$$

---

[1]) $\dfrac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$ gilt auch, falls die Konstante λ nicht reell ist.

[2]) Die Ableitungen von $P_n(\lambda)$ sind beim Vorliegen der komplexen unabhängigen Variablen λ ebenso zu bilden wie bei reellem λ.

Damit kann der Fundamentalsatz der Algebra formuliert werden:

S.3.9 **Satz 3.9:** *Hat (3.69) die r voneinander verschiedenen (im allgemeinen komplexen) Lösungen*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \tag{3.74}$$

mit den zugehörigen Vielfachheiten

$$l_1, l_2, \ldots, l_r, \tag{3.75}$$

so gilt

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_r = n; \tag{3.76}$$

mit anderen Worten: Jede Gleichung n-ten Grades hat mit Berücksichtigung der Vielfachheit genau n (im allgemeinen komplexe) Lösungen.

Beispiel 3.4: Gegeben sei die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingung für $y = y(t)$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (\delta \geqq 0, \omega_0 > 0). \tag{3.77}$$

Ehe wir (3.77) lösen, nennen wir mathematische Modelle, die durch (3.77) erfaßt werden:

a) Beispiel 1.1 mit Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$ (Reibungskraft: $-\alpha\dot{x}$, $\alpha > 0$),

b) Beispiel 1.8 für kleine Ausschläge – dann kann in guter Näherung $\sin\varphi$ durch φ ersetzt werden – mit Berücksichtigung der Reibung: $ml\ddot{\varphi} + \alpha l\dot{\varphi} + mg\varphi = 0$ (Reibungskraft: $-\alpha\dot{s} = -\alpha l\dot{\varphi}$, $\alpha > 0$),

c) elektrischer Schwingungskreis: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ (Ladung q auf der Kondensatorplatte, Selbstinduktion L, Widerstand R, Kapazität C).

Einsetzen von $y(t) = e^{\lambda t}$ in (3.77) führt zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{3.78}$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert für die Lösungen von (3.78)

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{3.79}$$

Im Fall

$$\delta^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \text{(große Dämpfung, Kriechfall)} \tag{3.80}$$

sind die beiden Lösungen (3.79) reell:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \delta^2 - \omega_0^2 > 0, \tag{3.81}$$

im Fall

$$\delta^2 - \omega_0^2 < 0 \text{ (dämpfungsfrei } [\delta = 0] \text{ oder kleine Dämpfung } [\delta > 0]) \tag{3.82}$$

sind die beiden Lösungen (3.79) nichtreell und zueinander konjugiert komplex:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \delta^2 - \omega_0^2 < 0, \tag{3.83}$$

im Fall

$$\delta^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{(aperiodischer Grenzfall)} \tag{3.84}$$

fallen die beiden Lösungen (3.79) zusammen, d. h., es gibt genau eine Lösung

$$\lambda_1 = -\delta \text{ mit der Vielfachheit } l_1 = 2. \tag{3.85}$$

Aufgabe 3.6: Man bestimme bzw. bestätige mittels der Definition 3.5 die Vielfachheiten der Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.78) in den obigen drei Fällen. *

Aufgabe 3.7: Eine Gleichung n-ten Grades habe die n voneinander verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Was kann man über die zugehörigen Vielfachheiten $l_1, l_2, \ldots, l_n$ aussagen? *

Die Bestimmung der Lösungen der charakteristischen Gleichung im Falle $n \geqq 3$ ist im allgemeinen nur mit den Hilfsmitteln der numerischen Mathematik möglich.

Kennt man eine Lösung λ_1 der charakteristischen Gleichung (3.69) (z. B. durch Raten), so dividiere man das auf der linken Seite von (3.69) stehende Polynom (3.71) durch $\lambda - \lambda_1$. Das Ergebnis ist ein Polynom vom $(n - 1)$-ten Grad:

$$\frac{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}{\lambda - \lambda_1} = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0. \tag{3.86}$$

Zur praktischen Bestimmung der Koeffizienten b_ν des Ergebnispolynoms in (3.86) benutzt man zweckmäßig das *Horner-Schema*, das aus Bd. 2 bekannt ist.

Die weiteren Lösungen der Gleichung

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

sind wegen (3.86) auch Lösungen von

$$b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_1\lambda + b_0 = 0. \tag{3.87}$$

Man kann also beim Bestimmen der weiteren Lösungen der charakteristischen Gleichung (3.69) die Gleichung $(n - 1)$-ten Grades (3.87) benutzen.

Aus den Sätzen 3.8 und 3.9 folgt, daß von der Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y_{\mathrm{h}}^{(\nu)}(x) = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{3.65}$$

mittels des Ansatzes (3.67) die r $(r \leqq n)$ Lösungen

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_r x} \quad (r \leqq n;\ \lambda_\nu\ [\nu = 1, \ldots, r] \text{ alle verschieden}) \tag{3.88}$$

gefunden wurden.

Im Falle $r = n$ – also lauter einfachen Lösungen von (3.69) – stehen in (3.88) die n Lösungen

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}. \tag{3.89}$$

Die Wronskische Determinante der Lösungen (3.89) ist, wie man zeigen kann (vgl. Aufgabe 3.5), für alle x von null verschieden. Also bilden diese Funktionen sogar eine Basis des Lösungsraumes, und deshalb kann im Falle $r = n$ die **allgemeine Lösung** von (3.65) durch

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n x} \tag{3.90}$$

angegeben werden.

Aufgabe 3.8: Für $y'' + 2y' - 3y = 0$ ist die allgemeine Lösung zu bestimmen. *

Im Falle $r < n$ fehlen zur Herstellung einer Basis noch $n - r$ Lösungen. Diese liefert der

S.3.10 **Satz 3.10:** *Hat die zur Differentialgleichung* (3.65) *gehörige charakteristische Gleichung* (3.70)

$$P_n(\lambda) = 0 \tag{3.70}$$

mit

$$P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{3.71}$$

die

$$\textit{Lösung } \lambda_k \textit{ mit der Vielfachheit } l_k > 1, \tag{3.91}$$

so hat (3.65) *außer den Lösungen* (3.88) *noch die weiteren Lösungen*

$$x\,e^{\lambda_k x},\ x^2\,e^{\lambda_k x},\ \ldots,\ x^{l_k-1}\,e^{\lambda_k x}. \tag{3.92}$$

Der *Beweis* von Satz 3.10 soll hier nur im Fall $l_k = 2$ durchgeführt werden. Es ist also zu zeigen, daß die Funktion

$$x\,e^{\lambda_k x} \tag{3.93}$$

der Differentialgleichung (3.65) genügt. Zur ν-maligen Differentiation von (3.93) benutzen wir die aus der Differentialrechnung bekannte Formel für die ν-malige Differentiation eines Produktes (Band 2, 4.8.3.):

$$(uv)^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} u^{(\mu)}v^{(\nu-\mu)}. \tag{3.94}$$

Da die μ-te Ableitung der Funktion x nach x im Falle $\mu > 1$ identisch null ist, führt die Anwendung von (3.94) auf (3.93) zu

$$\begin{aligned}(x\,e^{\lambda_k x})^{(\nu)} &= \sum_{\mu=0}^{1} \binom{\nu}{\mu} x^{(\mu)}\,(e^{\lambda_k x})^{(\nu-\mu)} \\ &= x\lambda_k^{\nu}\,e^{\lambda_k x} + \nu\lambda_k^{\nu-1}\,e^{\lambda_k x} \quad (\nu > 0).\end{aligned} \tag{3.95}$$

Einsetzen von (3.93) in die linke Seite von (3.65) ergibt wegen (3.95)

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x\,e^{\lambda_k x})^{(\nu)} &= a_0\,x\,e^{\lambda_k x} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x\,e^{\lambda_k x})^{(\nu)} \\ &= a_0 x\,e^{\lambda_k x} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x\lambda_k^{\nu}\,e^{\lambda_k x} + \nu\lambda_k^{\nu-1}\,e^{\lambda_k x}) \\ &= e^{\lambda_k x}\left\{a_0 x + x\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\lambda_k^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu\lambda_k^{\nu-1}\right\} \\ &= e^{\lambda_k x}\left\{x\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\lambda_k^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu\lambda_k^{\nu-1}\right\} \\ &= e^{\lambda_k x}\{xP_n(\lambda_k) + P_n'(\lambda_k)\}.\end{aligned}$$

Das ist aber gleich null, weil wegen $l_k = 2$ gemäß Definition 3.5

$$P_n(\lambda_k) = 0 \quad \text{und} \quad P_n'(\lambda_k) = 0$$

gilt. ∎

Wir fassen zusammen: Für die Differentialgleichung (3.65) haben sich bisher die n Lösungen

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x},\ x\,e^{\lambda_1 x},\ x^2\,e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{l_1-1}\,e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x},\ x\,e^{\lambda_2 x},\ x^2\,e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ x^{l_2-1}\,e^{\lambda_2 x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\lambda_r x},\ x\,e^{\lambda_r x},\ x^2\,e^{\lambda_r x},\ \ldots,\ x^{l_r-1}\,e^{\lambda_r x}, \end{array} \tag{3.96}$$

kurz

$$x^{\mu} e^{\lambda_k x} \quad (k = 1, \ldots, r, \mu = 0, 1, \ldots, l_k - 1; l_1 + l_2 + \ldots + l_r = n), \quad (3.97)$$

ergeben.

In (3.96) stehen n Lösungen. Ihre Wronskische Determinante ist, wie man zeigen kann, für alle x ungleich null. Infolgedessen bilden sie sogar eine Basis des Lösungsraumes. Die allgemeine Lösung ergibt sich somit als Linearkombination der Funktionen aus (3.96) bzw. (3.97).

Man kann hierfür kurz schreiben

$$y_h(x) = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{\mu=0}^{l_k-1} C_{k\mu} x^{\mu} e^{\lambda_k x} \right\}$$

$(C_{k\mu} \quad (k = 1, \ldots, r; \mu = 0, 1, \ldots, l_{k-1})$ beliebige komplexe Konstanten). (3.98)

Beispiel 3.5:

$$y''' - 3y' - 2y = 0. \quad (3.99)$$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und den dazugehörigen Vielfachheiten $l_1 = 2$, $l_2 = 1$. Somit lautet die allgemeine Lösung von (3.99)

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x\, e^{-x} + C_3\, e^{2x}.$$

Beispiel 3.6 (Fortsetzung von Beispiel 3.4): Für die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (3.100)$$

wegen (3.80) bis (3.85) in den drei Fällen jeweils die folgende Basis der Lösungsgesamtheit:

$$1. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 > 0, \quad \text{Basis: } e^{-\delta t} e^{\gamma t},\ e^{-\delta t} e^{-\gamma t}, \quad (3.101)$$

$$2. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 < 0, \quad \text{Basis: } e^{-\delta t} e^{i\omega t},\ e^{-\delta t} e^{-i\omega t}, \quad (3.102)$$

$$3. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 = 0, \quad \text{Basis: } e^{-\delta t},\ t\, e^{-\delta t} \quad (3.103)$$

und damit die allgemeine Lösung

$$1. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 > 0: y_h(t) = C_1\, e^{-\delta t} e^{\gamma t} + C_2\, e^{-\delta t} e^{-\gamma t}, \quad (3.104)$$

$$2. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 < 0: y_h(t) = C_3\, e^{-\delta t} e^{i\omega t} + C_4\, e^{-\delta t} e^{-i\omega t}, \quad (3.105)$$

$$3. \text{ Fall: } \delta^2 - \omega_0^2 = 0: y_h(t) = C_5\, e^{-\delta t} + C_6 t\, e^{-\delta t} \quad (3.106)$$

$(C_1, \ldots, C_6$ beliebige komplexe Konstanten).

Aufgabe 3.9: Man bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ von

$$2\dddot{x} - 5\ddot{x} - 2\dot{x} + 15x = 0.$$

Aufgabe 3.10: Man bestimmt die allgemeine Lösung $y(x)$ von

$$y''' - 3y'' + 4y = 0.$$

Aufgabe 3.11: Man bestimme die allgemeine Lösung $x(t)$ von

$$x^{(n)} - x^{(n-2)} = 0.$$

3.3.5. Übergang zur reellen Basis

Wie in 3.3.4. betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (3.65), (3.66), setzen jedoch darüber hinaus voraus, daß die Koeffizienten

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \quad \text{reell} \tag{3.107}$$

sind. Es soll versucht werden, im jetzigen Fall aus der im allgemeinen *komplexen* Lösung (3.98) alle reellen Lösungen zu bestimmen. Eine Möglichkeit hierfür ist der Übergang von (3.96) zu einer reellen Basis. Als Hilfsmittel aus der Algebra benutzen wir den

S.3.11 **Satz 3.11:** *Sind in der Gleichung*

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{3.108}$$

alle Koeffizienten **reell** *und ist* $\lambda = \lambda_k$ *eine nichtreelle Lösung von* (3.108) *mit der Vielfachheit* l_k, *so ist die zu* λ_k *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{\lambda_k}$[1]) *ebenfalls Lösung von* (3.108), *und zwar mit der Vielfachheit* l_k.

Der Übergang zur reellen Basis kann nun folgendermaßen geschehen. In (3.96) werden alle Zeilen, für die der λ-Wert reell ist, unverändert in die neue Basis übernommen. Ist in der Tabelle (3.96) der λ-Wert λ_k nicht reell, d. h., gilt

$$\lambda_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k, \quad \alpha_k \text{ reell}, \quad \beta_k \text{ reell}, \quad \beta_k \neq 0, \tag{3.109}$$

so gibt es wegen Satz 3.11 in (3.96) zu jedem Basiselement

$$x^\mu\, \mathrm{e}^{\lambda_k x} = x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)x} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, l_k - 1) \tag{3.110}$$

noch das weitere Basiselement

$$x^\mu\, \mathrm{e}^{\overline{\lambda_k} x} = x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k - \mathrm{i}\beta_k)x} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, l_k - 1). \tag{3.111}$$

Aus (3.110) und (3.111) bildet man einerseits die *halbe Summe* und andererseits $\frac{1}{\mathrm{i}}$ *mal halbe Differenz*:

$$\tfrac{1}{2}(x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)x} + x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k - \mathrm{i}\beta_k)x}), \tag{3.112}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k + \mathrm{i}\beta_k)x} - x^\mu\, \mathrm{e}^{(\alpha_k - \mathrm{i}\beta_k)x}). \tag{3.113}$$

In (3.112) und (3.113) stehen Lösungen der Differentialgleichung, denn es sind spezielle Linearkombinationen der Lösungsbasis (3.96). Sie sind auch reell, wie die folgende Rechnung unter Beachtung der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ zeigt:

$$\tfrac{1}{2}(x^\mu\, \mathrm{e}^{\lambda_k x} + x^\mu\, \mathrm{e}^{\overline{\lambda_k} x}) = \tfrac{1}{2}x^\mu\, \mathrm{e}^{\alpha_k x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_k x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_k x}) = x^\mu\, \mathrm{e}^{\alpha_k x}\cos(\beta_k x) \tag{3.114}$$

und

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(x^\mu\, \mathrm{e}^{\lambda_k x} - x^\mu\, \mathrm{e}^{\overline{\lambda_k} x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}x^\mu\, \mathrm{e}^{\alpha_k x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_k x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_k x}) = x^\mu\, \mathrm{e}^{\alpha_k x}\sin(\beta_k x). \tag{3.115}$$

Auf diese Weise entstehen insgesamt aus (3.96) *n reelle* Lösungen. Diese bilden sogar eine Basis, denn man kann zeigen, daß ihre Wronskische Determinante für alle x ungleich null ist. Die *allgemeine reelle Lösung* entsteht aus der reellen Basis durch Linearkombination, wobei nunmehr die n beliebigen Konstanten *reell* sein müssen.

---

[1]) In der Literatur wird die zu z konjugiert komplexe Zahl oft durch z^* bezeichnet.

Beispiel 3.7:

$$y'' + 4y' + 13y = 0. \tag{3.116}$$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ liefert die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = -2 + 3i$, $\lambda_2 = -2 - 3i$ und den zugehörigen Vielfachheiten $l_1 = 1$, $l_2 = 1$. Das ergibt die komplexe Basis

$$e^{(-2+3i)x},\quad e^{(-2-3i)x}. \tag{3.117}$$

Für den Übergang zur reellen Basis bilden wir in (3.117) einerseits die *halbe Summe*, also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(e^{-2x}\,e^{3xi} + e^{-2x}\,e^{-3xi}) &= \tfrac{1}{2}\,e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x + \cos 3x - i\sin 3x)\\ &= e^{-2x}\cos 3x,\end{aligned}$$

und andererseits $\frac{1}{i}$ *mal halbe Differenz*, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}(e^{-2x}\,e^{3xi} - e^{-2x}\,e^{-3xi}) &= \frac{1}{2i}\,e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x - \cos 3x + i\sin 3x)\\ &= e^{-2x}\sin 3x.\end{aligned}$$

Somit lautet die allgemeine reelle Lösung von (3.116)

$$y = C_1\,e^{-2x}\cos 3x + C_2\,e^{-2x}\sin 3x.$$

Beispiel 3.8 (Fortsetzung von Beispiel 3.6, Fall 2): Der Übergang von der komplexen Basis (3.102) zur reellen Basis führt zu

$$e^{-\delta t}\cos(\omega t),\qquad e^{-\delta t}\sin(\omega t).$$

Also kann im Falle $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung (3.77) mit den Abkürzungen (3.100) in der Gestalt

$$y(t) = C_1\,e^{-\delta t}\cos(\omega t) + C_2\,e^{-\delta t}\sin(\omega t) \tag{3.118}$$

angegeben werden.

Der Anwender formt das Ergebnis (3.118) meist noch um. Hierzu fasse man das Zahlenpaar (C_1, C_2) als kartesische Koordinaten eines Ortsvektors $\mathbf{r}$ einer (x_1, x_2)-Ebene auf:

$$\mathbf{r} = C_1\,\mathbf{e}_1 + C_2\,\mathbf{e}_2. \tag{3.119}$$

Division von (3.119) durch den Betrag $|\mathbf{r}| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ergibt den folgenden Vektor mit dem absoluten Betrag 1:

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\,\mathbf{e}_1 + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\,\mathbf{e}_2. \tag{3.120}$$

Die Spitze des Ortsvektors (3.120) liegt also auf dem Einheitskreis (Mittelpunkt: Koordinatenursprung; Radius gleich 1; Bild 3.1). Bei Beachtung der Einführung von Kosinus und Sinus am Ein-

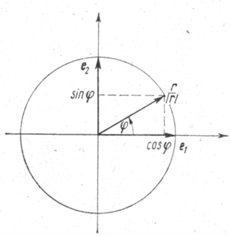


Bild 3.1

heitskreis kann der Einheitsvektor $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ aus (3.120) in der Gestalt

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \tag{3.121}$$

angegeben werden.

Aus (3.120) und (3.121) folgt

$$\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin\varphi, \tag{3.122}$$

d. h.,

$$C_1 = A\cos\varphi, \quad C_2 = A\sin\varphi, \tag{3.123}$$

wobei $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ gesetzt wurde. Einsetzen von (3.123) in (3.118) ergibt $y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\{\cos\varphi \cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)\}$ und damit aufgrund der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen $y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t - \varphi)$. Setzt man $\varphi_1 = -\varphi$ oder $\varphi_2 = -\varphi + \frac{\pi}{2}$, so erscheint die allgemeine Lösung von (3.77) in der Gestalt

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_1) \tag{3.124}$$

oder $\quad y(t) = A\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_2)$.

* *Aufgabe 3.12:* Man bestimme eine reelle Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung aus der Aufgabe 3.9.

* *Aufgabe 3.13:* Ist die Aussage: „Als Basis für den n-dimensionalen komplexen linearen Raum der Lösungen von (3.65), (3.66) mit (3.107) kann auch die reelle Basis genommen werden." richtig?

* *Aufgabe 3.14:* Ist die Aussage: „Man erhält die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung (3.65), (3.66) mit (3.107), indem man in (3.98) alle Konstanten reell wählt." richtig?

* *Aufgabe 3.15:* Von der Differentialgleichung $\ddot{x} + \pi^2 x = 0$ sind alle diejenigen Lösungen gesucht, die den folgenden Randbedingungen genügen:

a) $x(0) = 1,\ x(\tfrac{3}{4}) = 0$, b) $x(0) = 1,\ x(1) = 0$, c) $x(0) = 0,\ x(1) = 0$.

3.3.6. Ansatzmethode zur Herstellung einer partikulären Lösung

Es wird die gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x) \quad (a_n \neq 0) \tag{3.125}$$

untersucht, wobei das *Störglied* $g(x)$ die spezielle Struktur

$$g(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)\,\mathrm{e}^{qx} \quad (b_m \neq 0) \tag{3.126}$$

besitzt. Die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m, q$ dürfen auch nicht-reell sein.

Wir suchen die allgemeine Lösung $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ von (3.125); im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, wie $y_h(x)$ konstruiert werden kann. Jetzt wird eine spezielle Methode zur Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ entwickelt. Grundlage hierfür ist der

S.3.12 **Satz 3.12:** *Für die Differentialgleichung* (3.125) *mit* (3.126) *führt der Ansatz*

$$y_p(x) = (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)\,\mathrm{e}^{qx} x^l \tag{3.127}$$

stets zu einer speziellen (partikulären) Lösung. Zur Bestimmung von l des Ansatzes (3.127) *ist die zur zugehörigen homogenen Differentialgleichung*

$$a_n y_h^{(n)}(x) + a_{n-1} y_h^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y_h'(x) + a_0 y_h(x) = 0 \tag{3.128}$$

(*der Index* h *weist auf die Homogenität der Differentialgleichung* (3.128) *hin*) *gehörige charakteristische Gleichung*

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{3.129}$$

hinzuzuziehen. Ist die Zahl q des Störgliedes (3.126) *keine Lösung von* (3.129), *so ist $l = 0$ zu setzen. Wenn jedoch q eine Lösung der Gleichung* (3.129) *ist, so ist l gleich der Vielfachheit dieser Lösung q zu setzen. Zur Bestimmung der $B_0, \ldots, B_m$ setzt man den Ansatz* (3.127) *in die Differentialgleichung* (3.125) *ein, dividiert anschließend beide Seiten durch* e^{qx}, *ordnet danach nach Potenzen von x und führt schließlich einen Koeffizientenvergleich durch. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $B_0, \ldots, B_m$.*

Zusatz zu Satz 3.12: Im Ansatz (3.127) sind alle (unbekannten) Koeffizienten B_0, $B_1, \ldots, B_m$ auch dann mitzuführen, wenn im Störglied (3.126) einige der (bekannten) Konstanten $b_0, \ldots, b_{m-1}$ gleich null sein sollten (vgl. hierzu später Beispiel 3.15).

Zum Beweis von Satz 3.12 setzt man den Ansatz (3.127) in (3.125) ein und zeigt, daß die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems für die Koeffizienten $B_0, \ldots, B_m$ stets ungleich null ist, so daß es immer genau eine Lösung für $B_0, \ldots, B_m$ gibt. ■

Beispiel 3.9: Es soll eine partikuläre Lösung von

$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2\, e^x \tag{3.130}$$

ermittelt werden. Die charakteristische Gleichung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = 1 \pm i \neq 1$, also ist hier der Ansatz

$$y_p = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\, e^x \tag{3.131}$$

zu machen. Wir setzen (3.131) in (3.130) ein und erhalten – wenn wir links e^x ausklammern und gleich nach x-Potenzen ordnen –

$$(B_2 x^2 + B_1 x + B_0 + 2B_2)\, e^x = 2x^2\, e^x. \tag{3.132}$$

In (3.132) wird nach Division durch e^x der Koeffizientenvergleich durchgeführt. Er liefert schließlich $B_2 = 2$, $B_1 = 0$, $B_0 = -4$ und damit $y_p = (-4 + 2x^2)\, e^x$.

Beispiel 3.10: Es ist die allgemeine Lösung von

$$3y''' - 12y' = 18x^2 + 16x \tag{3.133}$$

gesucht. Wegen $3\lambda^3 - 12\lambda = 0$ ist $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Hier ist der Wert von q aus (3.126) gleich 0 und damit gleich der Lösung $\lambda_1 = 0$ (Vielfachheit $l_1 = 1$) der charakteristischen Gleichung. Also ist hier der Ansatz

$$y_p = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2)\, x \tag{3.134}$$

zu machen. Einsetzen von (3.134) in (3.133) liefert nach dem Koeffizientenvergleich schließlich $B_2 = -\frac{1}{2}$, $B_1 = -\frac{2}{3}$, $B_0 = -\frac{3}{4}$ und damit

$$y = C_1 + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{3}{4}x.$$

Beispiel 3.11: Gesucht ist eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ von

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = b\, e^{i\omega_1 t} \quad (0 < \delta < \omega_0, \omega_1 > 0, b \text{ reell}). \tag{3.135}$$

Wegen $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega$ ($\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$) [siehe (3.83)] und $\delta > 0$ ist $q = i\omega_1$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung. Folglich wird der Ansatz

$$y_p = B_0 \, e^{i\omega_1 t} \tag{3.136}$$

in (3.135) eingesetzt und anschließend durch $e^{i\omega_1 t}$ dividiert. Es ergibt sich

$$-\omega_1^2 B_0 + 2\delta i\omega_1 B_0 + \omega_0^2 B_0 = b. \tag{3.137}$$

Gemäß Satz 3.12 ist nunmehr ein Koeffizientenvergleich durchzuführen. Dieser ist hier jedoch trivial, da auf beiden Seiten von (3.137) ein Polynom nullten Grades steht. Das Ergebnis des Koeffizientenvergleichs ist damit bereits die Gleichung (3.137). Auflösung von (3.137) nach B_0 ergibt

$$B_0 = \frac{b}{-\omega_1^2 + 2\delta\omega_1 i + \omega_0^2} = \frac{b(\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2\delta\omega_1 i)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}, \tag{3.138}$$

wobei mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners erweitert wurde, um einen reellen Nenner zu erhalten. Wir setzen (3.138) in (3.136) ein und erhalten das Ergebnis

$$y_p(t) = \frac{b(\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2\delta\omega_1 i)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2} e^{i\omega_1 t}. \tag{3.139}$$

Für den Anwender soll (3.139) noch in der trigonometrischen Darstellung angegeben werden. Für den ersten Nenner aus (3.138) gilt

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta\omega_1 i = |\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2\delta\omega_1 i| \, e^{i\alpha} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2} \, e^{i\alpha}$$

mit

$$\cot\alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2\delta\omega_1}, \quad \text{wobei } 0 < \alpha < \pi \tag{3.140}$$

gefordert werden kann, da der Imaginärteil $2\delta\omega_1 > 0$ ist. Folglich ergibt sich schließlich

$$y_p(t) = \frac{b \, e^{-i\alpha}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} e^{i\omega_1 t}. \tag{3.141}$$

* *Aufgabe 3.16:* Man führe Beispiel 3.11 im Falle $\delta = 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$ durch und setze hierbei $\omega_0 \neq \omega_1$ voraus. Ist Formel (3.141) auch jetzt noch gültig? Welchen Wert nimmt α in dieser Formel dann gegebenenfalls an?

* *Aufgabe 3.17:* Man führe Aufgabe 3.16 für den Fall durch, daß $\omega_0 = \omega_1 > 0$ vorausgesetzt wird.

* *Aufgabe 3.18:* Man bestimme eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der Differentialgleichung

$$2y'' + 5y' = e^{\frac{5}{2}x}. \tag{3.142}$$

* *Aufgabe 3.19:* Man bestimme eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der Differentialgleichung

$$2y'' + 5y' = e^{-\frac{5}{2}x}. \tag{3.143}$$

Die Möglichkeit der Anwendung von Satz 3.12 wird erweitert durch den

S.3.13 **Satz 3.13:** *Hat in der Differentialgleichung* (3.125) *das Störglied* $g(x)$ *die Gestalt*

$$g(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) \, e^{\alpha x} \cos\beta x \quad (b_m \neq 0, \alpha, \beta \text{ reell}) \tag{3.144}$$

oder

$$g(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) \, e^{\alpha x} \sin\beta x \quad (b_m \neq 0, \alpha, \beta \text{ reell}) \tag{3.145}$$

und sind alle Koeffizienten

$$a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \textit{ reell}, \tag{3.146}$$

so kann eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ *von* (3.125)

$$\textit{im Fall (3.144) durch} \quad y_p(x) = \operatorname{Re}(Y_p(x)), \tag{3.147}$$

$$\textit{im Fall (3.145) durch} \quad y_p(x) = \operatorname{Im}(Y_p(x)) \tag{3.148}$$

angegeben werden, wobei $Y_p(x)$ *eine partikuläre Lösung von*

$$a_n Y^{(n)} + \ldots + a_0 Y = (b_0 + \ldots + b_m x^m)\, e^{qx} \quad \textit{mit} \quad q = \alpha + i\beta \tag{3.149}$$

ist.

Zum Beweis bildet man von beiden Seiten der Differentialgleichung (3.149) einerseits den Realteil und andererseits den Imaginärteil und benutzt (3.146). ■

Beispiel 3.12: Gesucht ist eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ von

$$y'' + 4y' + 8y = 20 \sin 2x. \tag{3.150}$$

Gemäß Satz 3.13 bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung $Y_p(x)$ von

$$Y'' + 4Y' + 8Y = 20\, e^{2ix}. \tag{3.151}$$

Da die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1,2} = -2 \pm 2i$ lauten, machen wir den Ansatz $Y = B_0\, e^{2ix}$, setzen ihn in (3.151) ein und erhalten nach Division des Ergebnisses durch e^{2ix}

$$-4B_0 + 8B_0 i + 8B_0 = 20, \quad \text{d. h.} \quad B_0 = \frac{20}{4(1 + 2i)} = 1 - 2i,$$

wobei mit $1 - 2i$ erweitert wurde (warum?). Damit ist nach Satz 3.13

$$\begin{aligned} y_p = \operatorname{Im}(Y_p) &= \operatorname{Im}((1 - 2i)(\cos 2x + i \sin 2x)) \\ &= -2 \cos 2x + \sin 2x \end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung von (3.150).

Beispiel 3.13: Gesucht ist eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der Differentialgleichung der erzwungenen gedämpften Schwingung für eine harmonische äußere Kraft:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = b \cos \omega_1 t \quad (0 < \delta < \omega_0, \omega_1 > 0, b \text{ reell}). \tag{3.152}$$

Ehe wir (3.152) lösen, erweitern wir die in Beispiel 3.4 angegebenen Modelle a) und c).

a) Im Beispiel 1.1 wird jetzt nicht nur die Reibung berücksichtigt; der Befestigungspunkt der Feder an der Wand wird nunmehr beweglich gestaltet und im Rhythmus $z = z(t)$ bewegt. Infolgedessen wirkt auf das Teilchen zusätzlich die Kraft $F(t) = kz(t)$, und damit lautet die Differentialgleichung $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$.

c) Im elektrischen Schwingkreis wird die Rolle der äußeren Kraft von der Spannung $U(t)$ einer Stromquelle übernommen: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = U(t)$.

Gemäß Satz 3.13 ist zunächst eine partikuläre Lösung $Y_p(t)$ von $\ddot{Y} + 2\delta\dot{Y} + \omega_0^2 Y = b\, e^{i\omega_1 t}$ zu bestimmen. Dies ist bereits – mit y anstatt Y – im Beispiel 3.11 geschehen. Wir lesen somit aus (3.139) ab:

$$Y_p(t) = \frac{b}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2} (\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2\delta\omega_1 i)\, e^{i\omega_1 t}. \tag{3.153}$$

Für eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (3.152) erhält man daher wegen (3.147)

$$y_p(t) = \operatorname{Re}(Y_p(t)) = \frac{b\{(\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos(\omega_1 t) + 2\delta\omega_1 \sin(\omega_1 t)\}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}. \tag{3.154}$$

Benutzt man in (3.153) anstatt (3.139) jetzt (3.141), so erhält man für (3.154) die Gestalt

$$y_p(t) = \operatorname{Re}(Y_p(t)) = \frac{b\cos(\omega_1 t - \alpha)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}}. \tag{3.155}$$

Für α ergibt sich hierbei aus (3.140) unter Beachtung der Definition des Arkuskotangens die Darstellung

$$\alpha = \operatorname{arccot}\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2\delta\omega_1}. \tag{3.156}$$

Ist das Störglied eine Linearkombination solcher Teilstörglieder, wie sie in den Sätzen 3.12 und 3.13 behandelt werden, so löst man die Differentialgleichung gemäß

S.3.14 **Satz 3.14:** *Gegeben seien die r linearen inhomogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g_\varrho(x) \; (a_n \neq 0)$$
$$(\varrho = 1, \ldots, r), \tag{3.157}$$

die sich nur in den Störgliedern unterscheiden, während die linken Seiten der Differentialgleichungen übereinstimmen. Eine partikuläre Lösung von (3.157) *sei*

$$y_\varrho(x) \quad (\varrho = 1, \ldots, r), \tag{3.158}$$

wobei der Index in (3.158) *auf das Störglied $g_\varrho(x)$ in* (3.157) *hinweist. Für die Differentialgleichung*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho g_\varrho(x), \tag{3.159}$$

wobei also das Störglied gleich einer Linearkombination aller Störglieder aus (3.157) *ist, kann dann eine partikuläre Lösung durch*

$$y(x) = y_p(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho y_\varrho(x) \tag{3.160}$$

angegeben werden.

Zum *Beweis* ist (3.160) in die Differentialgleichung (3.159) einzusetzen. ■

Beispiel 3.14: Gesucht ist eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ von

$$y'' + 2y' + 2y = 4\cos x - 3\sin x. \tag{3.161}$$

Zunächst ist wegen der Sätze 3.14 und 3.13

$$Y'' + 2Y' + 2Y = e^{ix} \tag{3.162}$$

zu behandeln. Da die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \neq i$ lauten, setzen wir $Y_p = B_0 e^{ix}$ in (3.162) ein und erhalten schließlich $B_0 = \frac{1}{5}(1 - 2i)$.

Damit ergibt sich gemäß (3.160)

$$\begin{aligned} y_p &= 4\,\mathrm{Re}\,(Y_p) - 3\,\mathrm{Im}\,(Y_p) \\ &= 4\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{i}\right)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\right] - 3\,\mathrm{Im}\left[\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\,\mathrm{i}\right)(\cos x + \mathrm{i}\sin x)\right] \\ &= \frac{4}{5}\cos x + \frac{8}{5}\sin x + \frac{6}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x = 2\cos x + \sin x. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.20: Gesucht ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung *

$$2y'' + 5y' = 3\cosh\left(\frac{5}{2}x\right). \tag{3.163}$$

Aufgabe 3.21: Man bestimme eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung *

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = (\sinh t)\cos t.$$

Bemerkung 3.1: Eine partikuläre Lösung von

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x \quad (a_n, \ldots, a_0, c_1, c_2 \text{ reell}, \beta > 0) \tag{3.164}$$

hat gemäß den Sätzen 3.12 bis 3.14 die Struktur

$$\begin{aligned} y_p &= \{c_1\,\mathrm{Re}\,[B_0(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x)] + c_2\,\mathrm{Im}\,[B_0(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x)]\}\,x^l \\ &= \{[c_1\,\mathrm{Re}\,(B_0) + c_2\,\mathrm{Im}\,(B_0)]\cos\beta x + [-c_1\,\mathrm{Im}\,(B_0) + c_2\,\mathrm{Re}\,(B_0)]\sin\beta x\}\,x^l. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die letzten beiden eckigen Klammern – sie stellen reelle Zahlen dar – durch K_1 und K_2, so ist

$$y_p = \{K_1\cos\beta x + K_2\sin\beta x\}\,x^l \quad (K_1, K_2 \text{ reell}), \tag{3.165}$$

wobei $l = 0$ zu setzen ist, falls $\mathrm{i}\beta$ die charakteristische Gleichung nicht löst; andernfalls ist l gleich der Vielfachheit der Lösung $\mathrm{i}\beta$ der charakteristischen Gleichung. Wer das Rechnen mit komplexen Zahlen möglichst vermeiden will und bereit ist, gegebenenfalls längere Rechnungen auszuführen, kann beim Lösen von (3.164) die Formel (3.165) als Ansatz benutzen. Es sei betont, daß auch dann beide Konstanten K_1, K_2 anzusetzen sind, wenn c_1 oder c_2 gleich null sein sollte.

Bemerkung 3.2: Ist (3.125) mit (3.144) oder (3.145) zu lösen, ist jedoch die Voraussetzung (3.146) verletzt, so ist der Satz 3.13 nicht anwendbar. In diesem Falle drücke man $\cos\beta x$ und $\sin\beta x$ durch $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}$ gemäß

$$\cos\beta x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}), \quad \sin\beta x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}) \tag{3.166}$$

(vgl. (3.114), (3.115)) aus und führe die Lösung mittels Satz 3.14 auf Satz 3.12 zurück.

Gemäß Satz 3.3 sind wir in der Lage, auch die allgemeine Lösung von inhomogenen linearen Differentialgleichungen herzustellen und schließlich Anfangswertaufgaben zu lösen. Wir behandeln dazu abschließend das

Beispiel 3.15: Gesucht ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = t^3, \quad x(1) = \tfrac{7}{8}, \quad \dot{x}(1) = -\tfrac{5}{8}. \tag{3.167}$$

Zunächst wird die zu (3.167) gehörige homogene Differentialgleichung $\ddot{x}_h - 4\dot{x}_h + 4x_h = 0$ gelöst. Der Ansatz $x_h = \mathrm{e}^{\lambda t}$ führt zur charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung fallen zusammen. Es ergibt sich $\lambda_1 = 2$ mit der Vielfachheit $l_1 = 2$. Infolgedessen kann wegen (3.96) eine Basis des zweidimensionalen Lösungsraumes durch e^{2t}, $t\mathrm{e}^{2t}$ angegeben werden. Also ist

$$x_h(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2 t\mathrm{e}^{2t}. \tag{3.168}$$

Die rechte Seite t^3 von (3.167) hat die Struktur von (3.126) mit $m = 3$ und $q = 0$. Da $q = 0$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, wird für eine partikuläre Lösung von (3.167) wegen Satz 3.12 der Ansatz [man beachte den „Zusatz zu Satz 3.12"]

$$x_p(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 \tag{3.169}$$

gemacht. Einsetzen von (3.169) in (3.167) ergibt

$$2B_2 + 6B_3 t - 4(B_1 + 2B_2 t + 3B_3 t^2) + 4(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3) = t^3.$$

Wird die linke Seite dieser Gleichung nach Potenzen von t geordnet, so erhält man

$$4B_3 t^3 + (-12B_3 + 4B_2)t^2 + (6B_3 - 8B_2 + 4B_1)t + (2B_2 - 4B_1 + 4B_0) = t^3. \tag{3.170}$$

Gemäß Satz 3.12 erfolgt jetzt in (3.170) ein Koeffizientenvergleich, d. h., die Koeffizienten gleicher t-Potenzen der beiden Seiten von (3.170) werden einander gleich gesetzt. Dabei ergibt sich das folgende gestaffelte lineare algebraische Gleichungssystem für die Unbekannten $B_0, \ldots, B_3$:

$$\begin{aligned} 4B_3 &= 1 \\ 4B_2 - 12B_3 &= 0 \\ 4B_1 - 8B_2 + 6B_3 &= 0 \\ 4B_0 - 4B_1 + 2B_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.171}$$

Das Gleichungssystem liefert der Reihe nach

$$B_3 = \frac{1}{4}, \quad B_2 = \frac{3}{4}, \quad B_1 = \frac{9}{8}, \quad B_0 = \frac{3}{4}. \tag{3.172}$$

Einsetzen von (3.172) in (3.169) führt zu der folgenden partikulären Lösung:

$$x_p(t) = \frac{3}{4} + \frac{9}{8}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3. \tag{3.173}$$

Wegen Satz 3.3 ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.167)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 t\, \mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3. \tag{3.174}$$

(3.174) ist noch den Anfangsbedingungen anzupassen. Einsetzen von (3.174) in die Anfangsbedingungen aus (3.167) ergibt das folgende Gleichungssystem für C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^2 C_1 + \mathrm{e}^2 C_2 &= -2, \\ 2\mathrm{e}^2 C_1 + 3\mathrm{e}^2 C_2 &= -4. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Aus (3.175) folgt $C_1 = -2\mathrm{e}^{-2}$, $C_2 = 0$ und somit für die Lösung der Anfangswertaufgabe (3.167)

$$x(t) = -2\mathrm{e}^{2(t-1)} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8}t + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^3. \tag{3.176}$$

* *Aufgabe 3.22:* Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\ddot{x} + 4x = 2t, \quad x(0) = 0, \quad x(b) = 0,$$

wobei die Konstante b aus dem Intervall $0 < b \leqq \pi$ entnommen wird. Für welche b

gibt es genau eine Lösung der Randwertaufgabe, für welche b gibt es mehrere und für welche b keine Lösung?

Aufgabe 3.23: Man löse die Anfangswertaufgabe für $y(x)$ *

$$y'' + 3y' - 4y = 12x + 25\cos(2x), \quad y(0) = \frac{5}{4}, \quad y'(0) = 2.$$

3.3.7. Eulersche Differentialgleichung

Im letzten Absatz von 3.3.3. wurde mitgeteilt, daß bei variablen Koeffizienten eine Herstellung der Lösungsbasis durch elementare Funktionen im allgemeinen nicht möglich ist. Das gelingt jedoch beim Vorliegen einer Eulerschen Differentialgleichung. Zunächst nennen wir die

Definition 3.6: *Die Eulersche Differentialgleichung hat die Gestalt* **D.3.6**

$$c_n x^n y^{(n)}(x) + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + c_1 x y'(x) + c_0 y(x) = g(x)$$
$$(c_n \neq 0), \tag{3.177}$$

wobei $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ *Konstanten sind.*

Es handelt sich also um eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (3.44), wobei der Koeffizient $a_\nu(x)$ $(\nu = 0, \dots, n)$ die spezielle Struktur $c_\nu x^\nu$ $(c_\nu = \text{const})$ hat.
Zur Lösungstheorie der Eulerschen Differentialgleichung benötigen wir die

Definition 3.7: *Unter der Potenz* x^λ $(x > 0, \lambda$ *beliebig komplex*) *versteht man* **D.3.7**

$$x^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda \ln x}. \tag{3.178}$$

Beim Lösen der *homogenen* Eulerschen Differentialgleichung

$$c_n x^n y_\mathrm{h}^{(n)}(x) + c_{n-1}x^{n-1}y_\mathrm{h}^{(n-1)}(x) + \dots + c_1 x y_\mathrm{h}'(x) + c_0 y_\mathrm{h}(x) = 0 \quad (x > 0) \tag{3.179}$$

geht man von dem bekannten Ansatz $y_\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ für die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten aus und

$$\textit{ersetzt } x \textit{ durch } \ln x \quad (x > 0), \tag{3.180}$$

man macht also jetzt den Ansatz $y_\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{\lambda \ln x}$, d. h. wegen Definition 3.7

$$y_\mathrm{h}(x) = x^\lambda \quad (x > 0). \tag{3.181}$$

Im Falle $x < 0$ wird (3.181) durch

$$y_\mathrm{h}(x) = (-x)^\lambda \quad (x < 0) \tag{3.182}$$

ersetzt. Der Ansatz (3.181) führt tatsächlich zum Ziel, denn nach dem Einsetzen von (3.181) in (3.179) liefert die Division durch x^λ die *charakteristische Gleichung*

$$c_n\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - [n - 1]) + c_{n-1}\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - [n - 2])$$
$$+ \dots + c_2\lambda(\lambda - 1) + c_1\lambda + c_0 = 0. \tag{3.183}$$

Hat die Gleichung n-ten Grades (3.183) $r(\leqq n)$ voneinander verschiedene Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $l_1, \dots, l_r$, so ist wegen des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 3.9) $l_1 + l_2 + \dots + l_r = n$.

An die Stelle der Tabelle (3.96) tritt bei der Eulerschen Differentialgleichung eine Tabelle, die aus (3.96) durch die Ersetzung (3.180) entsteht:

$$\begin{array}{l} x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_1}\ln x,\ x^{\lambda_1}(\ln x)^2, \dots, x^{\lambda_1}(\ln x)^{l_1-1} \\ x^{\lambda_2},\ x^{\lambda_2}\ln x,\ x^{\lambda_2}(\ln x)^2, \dots, x^{\lambda_2}(\ln x)^{l_2-1} \quad (x>0). \\ \dotfill \\ x^{\lambda_r},\ x^{\lambda_r}\ln x,\ x^{\lambda_r}(\ln x)^2, \dots, x^{\lambda_r}(\ln x)^{l_r-1} \end{array} \tag{3.184}$$

Die Funktionen aus (3.184) bilden eine Basis des n-dimensionalen Lösungsraumes der homogenen Eulerschen Differentialgleichung (3.179).

Sind die $c_n, \dots, c_0$ in (3.179) alle reell, so ist es sinnvoll, von (3.184) zu einer reellen Basis überzugehen. Wir verzichten auf eine allgemeine Darstellung und demonstrieren es nur an folgendem

Beispiel 3.16: Es soll die allgemeine Lösung von

$$x^3y''' + 3x^2y'' xy' - + 4y = 0 \quad (x > 0) \tag{3.185}$$

ermittelt werden. Der Ansatz $y = x^\lambda$ führt zur charakteristischen Gleichung $\lambda^3 - 2\lambda + 4 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$. Damit lautet eine Basis des Lösungsraumes von (3.185)

$$x^{-2}, x^{1+\mathrm{i}}, x^{1-\mathrm{i}}. \tag{3.186}$$

Wie im Abschnitt 3.3.5. bilden wir aus den beiden letzten Elementen einerseits die *halbe Summe* und andererseits $\frac{1}{\mathrm{i}}$ *mal halbe Differenz:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^{1+\mathrm{i}} + x^{1-\mathrm{i}}) &= \frac{x}{2}(x^{\mathrm{i}} + x^{-\mathrm{i}}) = \frac{x}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln x}) \\ &= \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \mathrm{i}\sin(\ln x) + \cos(\ln x) - \mathrm{i}\sin(\ln x)\right] \\ &= x\cos(\ln x), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(x^{1+\mathrm{i}} - x^{1-\mathrm{i}}) = \frac{x}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln x}) = x\sin(\ln x).$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung von (3.185) zu

$$y = C_1\frac{1}{x^2} + C_2x\cos(\ln x) + C_3x\sin(\ln x). \tag{3.187}$$

Die Übertragung vom Satz 3.12 zur Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels (3.180) auf die Eulersche Differentialgleichung ergibt den

S.3.15 **Satz 3.15:** *Für die Eulersche inhomogene Differentialgleichung* (3.177) *mit der speziellen Struktur des Störgliedes* $g(x)$

$$g(x) = (b_0 + b_1\ln x + \dots + b_m(\ln x)^m)\,x^q \quad (b_m \neq 0) \tag{3.188}$$

führt der Ansatz

$$y_p(x) = (B_0 + B_1\ln x + \dots + B_m(\ln x)^m)\,x^q(\ln x)^l \tag{3.189}$$

stets zu einer partikulären Lösung.

Zur Bestimmung von l des Ansatzes (3.189) ist die zur zugehörigen homogenen Differentialgleichung (3.179) gehörige charakteristische Gleichung (3.183) hinzuzuziehen. Ist die Zahl q des Störgliedes (3.189) keine Lösung von (3.183), so ist $l = 0$. Wenn jedoch q eine Lösung der Gleichung (3.183) ist, so ist l gleich der Vielfachheit dieser Lösung q. Zur Bestimmung der $B_0, \dots, B_m$ setzt man den Ansatz (3.189) in die Differentialgleichung (3.177), (3.188) ein, dividiert anschließend beide Seiten durch x^q, ordnet danach nach Potenzen von $\ln x$ und führt schließlich bezüglich der Potenzen von $\ln x$ einen Koeffizientenvergleich durch. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $B_0, \dots, B_m$.

Der Satz 3.13 kann im Zusammenhang mit der Eulerschen Differentialgleichung herangezogen werden, indem man dort a_ν durch $c_\nu x^\nu$ (c_ν reell) und in (3.144), (3.145) sowie der rechten Seite von (3.149) x durch $\ln x$ ($x > 0$) ersetzt. Auch Satz 3.14 bleibt gültig, wenn dort a_ν durch $c_\nu x^\nu$ ersetzt wird.

Beispiel 3.17: Gesucht ist die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 2y = x^2 + \frac{1}{x} \quad (x > 0). \tag{3.190}$$

Für die zugehörige homogene Differentialgleichung $x^2 y_h'' - 2y_h = 0$ führt der Ansatz $y_h = x^\lambda$ zur charakteristischen Gleichung $\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$. Diese hat die Lösungen $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Folglich ist

$$y_h(x) = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x}. \tag{3.191}$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Eulerschen Differentialgleichung (3.190) können wir – wie bereits oben erwähnt – den Satz 3.14 heranziehen. Wir bestimmen hierzu partikuläre Lösungen der beiden Teilaufgaben

$$x^2 y_{\mathrm{I}}'' - 2y_{\mathrm{I}} = x^2 \quad (x > 0), \tag{3.192}$$

$$x^2 y_{\mathrm{II}}'' - 2y_{\mathrm{II}} = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \tag{3.193}$$

und addieren anschließend die Ergebnisse:

$$y_p(x) = y_{\mathrm{I}}(x) + y_{\mathrm{II}}(x). \tag{3.194}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung aus (3.192) hat die Struktur des Störgliedes (3.188) mit $m = 0$ und $q = 2$. Nun ist $q = 2$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung mit der Vielfachheit $l = 1$. Also ist mit (3.189) für $y_{\mathrm{I}}(x)$ der folgende Ansatz zu machen:

$$y_{\mathrm{I}}(x) = B_0 x^2 \ln x. \tag{3.195}$$

Einsetzen von (3.195) in (3.192) ergibt

$$B_0 x^2 (2 \ln x + 3) - 2B_0 x^2 \ln x = x^2$$

und damit nach Division durch x^2

$$3B_0 = 1, \quad \text{d. h.} \quad B_0 = \tfrac{1}{3}. \tag{3.196}$$

Dieses Ergebnis wird in (3.195) eingesetzt. Es ergibt sich die folgende partikuläre Lösung von (3.192)

$$y_{\mathrm{I}}(x) = \tfrac{1}{3} x^2 \ln x. \tag{3.197}$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung aus (3.193) hat die Struktur des Störgliedes (3.188) mit $m = 0$ und $q = -1$. Da $q = -1$ eine Lösung der charakteristischen Gleichung mit der Vielfachheit $l = 1$ ist, ist für eine partikuläre Lösung von (3.193) der Ansatz

$$y_{\text{II}}(x) = B_0 \frac{1}{x} \ln x \tag{3.198}$$

zu machen. Einsetzen von (3.198) in (3.193) ergibt schließlich für die Unbekannte B_0 den Wert

$$B_0 = -\tfrac{1}{3}. \tag{3.199}$$

Aus (3.199) und (3.198) folgt

$$y_{\text{II}}(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x} \ln x. \tag{3.200}$$

Setzt man (3.197) und (3.200) in (3.194) ein, so ergibt sich eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ von (3.190). Addieren von (3.191) führt dann schließlich zu der folgenden allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (3.190):

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \ln x + C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x}. \tag{3.201}$$

* *Aufgabe 3.24:* Man löse die Anfangswertaufgabe

$$x^2 y'' + xy' + y = \frac{2}{x}, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -2.$$

* *Aufgabe 3.25:* Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$t^2 \ddot{x} + t\dot{x} + x = 4 \cos(\ln t).$$

3.3.8. Variation der Konstanten

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man eine *partikuläre* Lösung $y_p(x)$ der expliziten gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung [mit im allgemeinen variablen Koeffizienten] herstellen kann, falls die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bekannt ist:

$$y_h(x) = C_1 y_{h1}(x) + C_2 y_{h2}(x) + \ldots + C_n y_{hn}(x), \tag{3.62}$$

wobei die Funktionen

$$y_{h1}(x), y_{h2}(x), \ldots, y_{hn}(x) \tag{3.63}$$

eine Basis (ein Fundamentalsystem) des Lösungsraumes bilden.

Wie bei einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung lassen wir uns von der Struktur der Formel (3.62) anregen, ersetzen die dortigen Konstanten durch Funktionen $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ und versuchen diese so zu bestimmen, daß sich eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\, y^{(\nu)} = g(x), \quad a_n(x) \neq 0 \quad (x \in D), \tag{3.51}$$

ergibt (*Variation der Konstanten*):

$$y_p(x) = u_1(x)\, y_{h1}(x) + u_2(x)\, y_{h2}(x) + \ldots + u_n(x)\, y_{hn}(x). \tag{3.202}$$

Beim Einsetzen von (3.202) in (3.51) ergeben sich recht unübersichtliche Ausdrücke. Kann man dies vermeiden? Ja! Es sind doch n Funktionen $u_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ zu bestimmen. Hierzu gibt es aber nur die einzige Bedingung (3.51). Wir haben damit die Freiheit, von uns aus noch $n-1$ weitere Forderungen zu stellen. Wir werden diese natürlich so wählen, daß der Rechnungsgang möglichst vereinfacht wird.

Wählt man für die $n-1$ Bedingungen die ersten $n-1$ Gleichungen des im folgenden angegebenen Systems (3.203), so zeigt die Rechnung – sie werde hier übergangen –, daß sich beim Einsetzen von (3.202) in (3.51) die letzte Gleichung aus (3.203) ergibt:

$$\begin{aligned}
&u_1'(x)\,y_{h1}(x) + u_2'(x)\,y_{h2}(x) + \ldots + u_n'(x)\,y_{hn}(x) \equiv 0\\
&u_1'(x)\,y_{h1}'(x) + u_2'(x)\,y_{h2}'(x) + \ldots + u_n'(x)\,y_{hn}'(x) \equiv 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_1'(x)\,y_{h1}^{(n-2)}(x) + u_2'(x)\,y_{h2}^{(n-2)}(x) + \ldots + u_n'(x)\,y_{hn}^{(n-2)}(x) \equiv 0\\
&u_1'(x)\,y_{h1}^{(n-1)}(x) + u_2'(x)\,y_{h2}^{(n-1)}(x) + \ldots + u_n'(x)\,y_{hn}^{(n-1)}(x) = \frac{g(x)}{a_n(x)}.
\end{aligned} \tag{3.203}$$

Dieses System ist ein lineares Gleichungssystem (*kein* Differentialgleichungssystem) für $u_1', \ldots, u_n'$. Seine Koeffizientendeterminante ist die Wronskische Determinante der Basis (3.63) und damit für alle x ungleich null. Damit liefert (3.203) genau eine Lösung $u_1', \ldots, u_n'$. Durch unbestimmte Integration ergeben sich Funktionen u_1, $\ldots, u_n$. Auf die Integrationskonstante kann jeweils verzichtet werden. Man setzt $u_1, \ldots, u_n$ in (3.202) ein und erhält eine partikuläre Lösung von (3.51).

Beispiel 3.18: Gesucht ist die allgemeine Lösung von

$$y'' + y = \frac{2}{\cos x}\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{3.204}$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$ führt schließlich zu $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ und gemäß (3.202), (3.203) zu $y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$ mit

$$\begin{aligned}
&u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0,\\
&u_1'(-\sin x) + u_2' \cos x = \frac{2}{\cos x}.
\end{aligned} \tag{3.205}$$

Aus (3.205) folgt $u_1' = -2 \tan x$, $u_2' = 2$ und damit $u_1 = 2 \ln(\cos x)$, $u_2 = 2x$. Also ist die allgemeine Lösung von (3.204) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 \cos x \ln(\cos x) + 2x \sin x$.

Aufgabe 3.26: Gesucht ist die allgemeine Lösung von *

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Beispiel 3.19: Gegeben sei die Randwertaufgabe aus Beispiel 1.11

$$EJw'''' = p(x) \quad (EJ = \text{const}), \qquad w(0) = 0, \qquad w'(0) = 0, \qquad w(l) = 0, \qquad w'(l) = 0, \tag{3.206}$$

wobei jetzt $p(x)$ eine beliebige stetige oder auch nur stückweise stetige Funktion ist. Die allgemeine Lösung $w_h(x)$ der zu (3.206) gehörigen homogenen Differentialgleichung lautet

$$w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3. \tag{3.207}$$

Eine partikuläre Lösung $w_p(x)$ von (3.206) liefert gemäß (3.202) die Formel

$$w_p(x) = u_1(x) + u_2(x)\,x + u_3(x)\,x^2 + u_4(x)\,x^3, \tag{3.208}$$

wobei die Ableitungen $u_1'(x), \ldots, u_4'(x)$ wegen (3.203) dem folgenden linearen Gleichungssystem

genügen: $u_1' + xu_2' + x^2u_3' + x^3u_4' = 0$, $u_2' + 2xu_3' + 3x^2u_4' = 0$, $2u_3' + 6xu_4' = 0$, $6u_4' = \dfrac{p(x)}{EJ}$.
Hieraus folgt

$$u_4' = \frac{p(x)}{6EJ}, \quad u_3' = -\frac{xp(x)}{2EJ}, \quad u_2' = \frac{x^2p(x)}{2EJ}, \quad u_1' = -\frac{x^3p(x)}{6EJ}. \tag{3.209}$$

Wir benötigen von den rechten Seiten jeder Gleichung aus (3.209) eine Stammfunktion, wobei auf die Integrationskonstante verzichtet werden kann, weil nur eine einzige partikuläre Lösung gesucht ist. Die Stammfunktion kann jeweils als bestimmtes Integral mit der *variablen oberen Grenze x* angegeben werden. Die Integrationsvariable nennen wir $\tilde{x}$, weil die Bezeichnung x bereits für die obere Integrationsgrenze verbraucht ist. Die Wahl der festen unteren Integrationsgrenze ist nicht vorgeschrieben; wir wählen hierfür $\tilde{x} = 0$.

$$u_1(x) = -\frac{1}{6EJ}\int_0^x \tilde{x}^3 p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}, \quad u_2(x) = \frac{1}{2EJ}\int_0^x \tilde{x}^2 p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x},$$

$$u_3(x) = -\frac{1}{2EJ}\int_0^x \tilde{x} p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}, \quad u_4(x) = \frac{1}{6EJ}\int_0^x p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{3.210}$$

Wir setzen (3.210) in (3.208) ein und erhalten

$$w_p(x) = \frac{1}{6EJ}\int_0^x (x-\tilde{x})^3\,p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{3.211}$$

Wenn man zu (3.211) $w_h(x)$ aus (3.207) addiert, so ergibt sich die allgemeine Lösung von (3.206):

$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{1}{6EJ}\int_0^x (x-\tilde{x})^3\,p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{3.212}$$

Setzt man (3.212) in die Randbedingungen aus (3.206) ein, so erhält man mit (3.211) für $C_1, \ldots, C_4$ die folgenden Gleichungen:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad l^2C_3 + l^3C_4 = -w_p(l), \quad 2lC_3 + 3l^2C_4 = -w_p'(l). \tag{3.213}$$

Aus (3.213) ermitteln wir $C_1, \ldots, C_4$ und setzen sie in (3.212) ein. Die Rechnung ergibt

$$w(x) = \frac{1}{l^2}(-3w_p(l) + lw_p'(l))\,x^2 + \frac{1}{l^3}(-lw_p'(l) + 2w_p(l))\,x^3 + w_p(x)$$

und damit

$$w(x) = \int_0^x G(x,\tilde{x})\,p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} + \int_x^l G(x,\tilde{x})\,p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x},$$

also

$$w(x) = \int_0^l G(x,\tilde{x})\,p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} \tag{3.214}$$

mit der zur Randwertaufgabe (3.206) gehörigen **Greenschen Funktion (Einflußfunktion)**

$$G(x,\tilde{x}) = \frac{1}{6l^3EJ}\begin{cases}(-2x^3\tilde{x}^3 + 3lx^3\tilde{x}^2 + 3lx^2\tilde{x}^3 - 6l^2x^2\tilde{x}^2 + 3l^3x\tilde{x}^2 - l^3\tilde{x}^3)\\(-2\tilde{x}^3x^3 + 3l\tilde{x}^3x^2 + 3l\tilde{x}^2x^3 - 6l^2\tilde{x}^2x^2 + 3l^3\tilde{x}x^2 - l^3x^3),\end{cases} \tag{3.215}$$

wobei in (3.215) der obere Teil für $0 \leqq \tilde{x} \leqq x \leqq l$ und der untere Teil für $0 \leqq x \leqq \tilde{x} \leqq l$ zu benutzen ist.

* *Aufgabe 3.27:* Man zeige, daß die im Falle $p(x) = p = \text{const}$ von (3.214) gelieferte Lösung mit derjenigen aus dem Beispiel 1.11 übereinstimmt.

3.3.9. δ-Distributionen

Eine Reihe physikalischer Erscheinungen erfordert für ihre mathematische Beschreibung neue mathematische Objekte, die sich vom Funktionsbegriff wesentlich unterscheiden und mit δ-Distributionen bezeichnet werden. Um einige Grundgedanken hierüber darlegen zu können, betrachten wir das

Beispiel 3.20: Im Beispiel 3.19 soll jetzt die Belastung des Balkens durch eine Einzelkraft der Größe F_v (senkrecht zur Balkenachse) an der Stelle $x = x_v$ $(0 < x_v < l)$ hervorgerufen werden. Man schreibt in diesem Fall anstatt (3.206)

$$EJw'''' = F_v\delta(x - x_v) \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w'(l) = 0. \tag{3.216}$$

(3.216) ist *keine* gewöhnliche Differentialgleichung im Sinne von Definition 1.1, denn auf der rechten Seite von (3.216) steht *keine* Funktion. Das hängt damit zusammen, daß auf der rechten Seite der Differentialgleichung (3.206) eine *Streckenlast* steht. Wie sieht nun die zu einer *Einzelkraft* F_v gehörige Streckenlast aus? Ein Erklärungsversuch lautet etwa: „Die zu einer Einzelkraft F_v an der Stelle x_v gehörige Streckenlast $p(x)$ ist null für alle x mit $0 \leqq x \leqq l$, ausgenommen die Stelle x_v; an der Stelle x_v ist $p(x)$ gleich unendlich.“ Man erkennt, daß man dies *nicht* als Definition einer Funktion $p(x)$ anerkennen kann. Was ist zu tun? Es muß definiert werden, was man unter der Lösung $w(x)$ von (3.216) versteht, wobei auf der rechten Seite keine Funktion, sondern die **δ-Distibution** $\delta(x - x_v)$ steht.

Definition 3.8: *Unter der Lösung des Problems* (3.216) *versteht man eine Funktion* $w(x)$, *die nach folgender Vorschrift ermittelt wird:* **D.3.8**

1. *Man ersetzt* $F_v\delta(x - x_v)$ *aus* (3.216) *durch die Streckenlast*

$$p(x) = \begin{cases} p_0 = \text{const} & \textit{für} \quad x_v - \varepsilon \leqq x \leqq x_v + \varepsilon \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad (0 \leqq x \leqq l), \tag{3.217}$$

wobei die durch die Streckenlast (3.217) *hervorgerufene Gesamtkraft gleich* F_v *sein soll, also*

$$\int_0^l p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_v - \varepsilon}^{x_v + \varepsilon} p_0\,\mathrm{d}x = 2\varepsilon p_0 = F_v, \tag{3.218}$$

d. h.

$$p_0 = \frac{F_v}{2\varepsilon}. \tag{3.219}$$

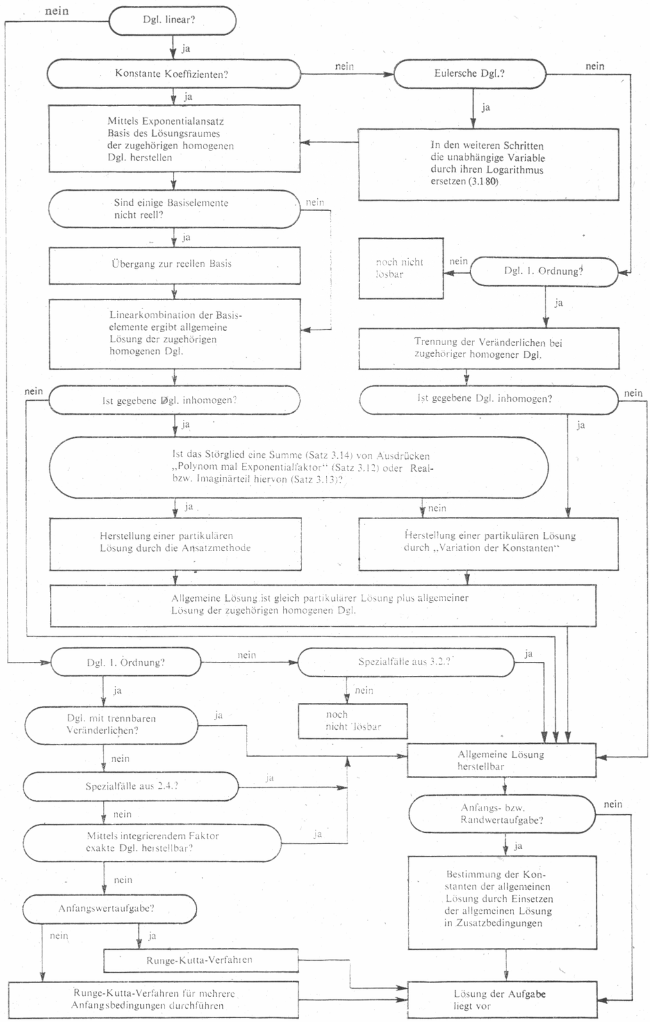
2. *Man löst die Randwertaufgabe* (3.206), *wobei* $p(x)$ (3.217), (3.219) *zu entnehmen ist. Die erhaltene Lösung sei durch* $w_\varepsilon(x)$ *bezeichnet.*

3. *Man bildet* $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} w_\varepsilon(x)$, *wobei der Grenzübergang folgendermaßen vorgenommen wird: Bei festgehaltenem* x *strebt* $\varepsilon \to +0$ *und gleichzeitig* $p_0 \to +\infty$ *derart, daß beim Grenzübergang in* (3.219) F_v *fest bleibt.*

Für die in der Definition 3.8 unter Punkt 2 eingeführte Funktion $w_\varepsilon(x)$ liefert die Formel (3.214) mit (3.217), (3.219)

$$w_\varepsilon(x) = \int_0^l G(x, \tilde{x})\, p(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = F_v \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_v - \varepsilon}^{x_v + \varepsilon} G(x, \tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{3.220}$$

Führt man in (3.220) den in der Definition 3.8 unter Punkt 3 genannten Grenzübergang aus, so beachte man, daß F_v ein konstanter Faktor ist und daß bezüglich $\varepsilon \to +0$ die Regel von l'Hospital


Dgl. linear?
nein
ja
Konstante Koeffizienten?
nein
Eulersche Dgl.?
nein
ja
ja
Mittels Exponentialansatz Basis des Lösungsraumes der zugehörigen homogenen Dgl. herstellen
In den weiteren Schritten die unabhängige Variable durch ihren Logarithmus ersetzen (3.180)
Sind einige Basiselemente nicht reell?
nein
ja
Übergang zur reellen Basis
noch nicht lösbar
nein
Dgl. 1. Ordnung?
ja
Linearkombination der Basiselemente ergibt allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.
Trennung der Veränderlichen bei zugehöriger homogener Dgl.
nein
Ist gegebene Dgl. inhomogen?
Ist gegebene Dgl. inhomogen?
nein
ja
ja
Ist das Störglied eine Summe (Satz 3.14) von Ausdrücken „Polynom mal Exponentialfaktor" (Satz 3.12) oder Real- bzw. Imaginärteil hiervon (Satz 3.13)?
ja
nein
Herstellung einer partikulären Lösung durch die Ansatzmethode
Herstellung einer partikulären Lösung durch „Variation der Konstanten"
Allgemeine Lösung ist gleich partikulärer Lösung plus allgemeiner Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.
Dgl. 1. Ordnung?
nein
Spezialfälle aus 3.2.?
ja
ja
nein
Dgl. mit trennbaren Veränderlichen?
ja
noch nicht lösbar
Allgemeine Lösung herstellbar
nein
Spezialfälle aus 2.4.?
ja
nein
Anfangs- bzw. Randwertaufgabe?
nein
Mittels integrierendem Faktor exakte Dgl. herstellbar?
ja
ja
nein
Bestimmung der Konstanten der allgemeinen Lösung durch Einsetzen der allgemeinen Lösung in Zusatzbedingungen
Anfangswertaufgabe?
nein
ja
Runge-Kutta-Verfahren
Runge-Kutta-Verfahren für mehrere Anfangsbedingungen durchführen
Lösung der Aufgabe liegt vor

anwendbar ist. Die Rechnung ergibt

$$w(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} w_\varepsilon(x) = F_\nu \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_\nu - \varepsilon}^{x_\nu + \varepsilon} G(x, \tilde{x})\, \mathrm{d}\tilde{x} = F_\nu \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int\limits_{x_\nu - \varepsilon}^{x_\nu + \varepsilon} G(x, \tilde{x})\, \mathrm{d}\tilde{x}$$

$$= \frac{F_\nu}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} (G(x, x_\nu + \varepsilon) - G(x, x_\nu - \varepsilon)(-1)) = F_\nu G(x, x_\nu). \tag{3.221}$$

Aus dem Ergebnis (3.221) kann man die folgende Deutung der Greenschen Funktion ablesen: Die zur Randwertaufgabe (3.206) gehörige Greensche Funktion (3.215) ist bezüglich x als Durchbiegung des Balkens deutbar, wobei die Belastung in einer Einzelkraft mit dem Zahlenwert 1 besteht, die an der Stelle $x = \tilde{x}$ des Balkens angreift.

3.4. Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse

Die Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse in Gestalt des Ablaufplanes auf Seite 78 zeigt, in welchen Fällen die dargelegten Methoden zur Lösung der Differentialgleichungen führen. Sie zeigt aber auch, wo die entwickelten Methoden versagen. Deshalb wird in Kapitel 5 (Bd. 7/2) als weitere Lösungsmethode die Entwicklung in Potenzreihen dargelegt.

Weiterhin erwähnen wir, daß das Verfahren von Runge-Kutta auch für Anfangswertaufgaben bei expliziten Differentialgleichungen n-ter Ordnung (3.2), (3.3) durchführbar ist. Man wird hierzu gemäß Abschn. 4.1. zunächst (3.2) in ein System von Differentialgleichungen je erster Ordnung (4.8) verwandeln, die Anfangsbedingungen (3.3) in Anfangsbedingungen für (4.8) transformieren und danach das Runge-Kutta-Verfahren für explizite Differentialgleichungssysteme benutzen, das im Abschn. 4.4. angegeben wird.

4. Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Es sei ein System gegeben, dessen gesuchter Bewegungsablauf durch m gesuchte Funktionen $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ beschrieben werden kann. Der Elektrotechniker denkt in diesem Zusammenhang etwa an elektrische Schaltungen und identifiziert $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ beispielsweise mit Stromstärken oder auch Spannungen. Der Ingenieur hat beispielsweise den durch eine Funktion $w = w(x, t)$ gegebenen Schwingungsverlauf eines Balkens vor Augen, entwickelt w bezüglich x in eine Fourierreihe, und er identifiziert $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ mit den m ersten von der Zeit t abhängigen Fourierkoeffizienten dieser Entwicklung, wobei die Darstellung von $w(x, t)$ um so genauer ausfällt, je größer m gewählt wird. Ein Mechaniker identifiziert $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ vielleicht mit den verallgemeinerten Koordinaten q_k und den verallgemeinerten Impulsen p_k eines Systems starrer Körper. Der Ökonom wird an ein dynamisches Verflechtungssystem denken. Die mathematische Formulierung der das System beherrschenden Gesetze führt oft auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für $x_1(t), \ldots, x_m(t)$. Das Anliegen dieses Kapitels besteht daher darin, wesentliche Begriffe und Aussagen, die wir für Differentialgleichungen kennengelernt haben, auf Differentialgleichungssysteme zu übertragen.

4.1. Allgemeine Bemerkungen

Wir übertragen zunächst die Definition 1.1 auf Systeme.

D.4.1 **Definition 4.1.:** *Mittels m Funktionen F_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$, die jeweils von $n + m + 1$ unabhängigen Veränderlichen abhängen, wird durch*

$$F_\mu(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m, y_m' \ldots, y_m^{(n_m)}) = 0$$
$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n; \quad \mu = 1, \ldots, m) \tag{4.1}$$

ein **gewöhnliches Differentialgleichungssystem** *(gekoppelte Differentialgleichungen, simultane Differentialgleichungen) für ein Funktionen-m-tupel $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))$ gegeben. Kommen die Ableitungen höchster* **O***rdnung $y_1^{(n_1)}, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m^{(n_m)}$ jeweils in mindestens einer der m Gleichungen* (4.1) *vor, so heißt das System bezüglich y_1 von n_1-ter Ordnung, bezüglich y_2 von n_2-ter Ordnung, ..., bezüglich y_m von (n_m)-ter Ordnung. Die* **Summe** *$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ gibt die* **Ordnung des Systems** *an.*

Beispiel 4.1: Das System (1.31) ordnet sich dem System (4.1) unter; man kann es angeben durch

$$F_\mu(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}) = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

mit

$$F_1 = m\ddot{x} + BQ\dot{y}; \quad F_2 = m\ddot{y} - BQ\dot{x}; \quad F_3 = m\ddot{z}. \tag{4.3}$$

Eine Verwechslung der Masse m aus (4.3) mit dem Numerierungsindex m aus (4.1) ist wohl nicht zu befürchten. Die Werte für $m, n_1, \ldots, n_m, n$ aus (4.1) lauten im Falle (4.2), (4.3) $m = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 2, n = 6$.

Zum System (4.1) kann ein äquivalentes konstruiert werden, das nur Ableitungen *erster* Ordnung enthält. Im allgemeinen Fall ergeben sich verhältnismäßig unübersichtliche Formeln; wir zeigen deshalb den Übergang zum genannten äquivalenten System nur am

Beispiel 4.2: Führt man im Beispiel 4.1 der Reihe nach für die 6 Funktionen

$$x(t), \dot{x}(t), y(t), \dot{y}(t), z(t), \dot{z}(t) \tag{4.4}$$

die Abkürzungen

$$y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t), y_6(t) \tag{4.5}$$

ein, so ergibt sich aus (4.2), (4.3) ein System von drei Differentialgleichungen für $(y_1(t), \ldots, y_6(t))$, nämlich

$$m\dot{y}_2 + BQy_4 = 0; \quad m\dot{y}_4 - BQy_2 = 0; \quad m\dot{y}_6 = 0. \tag{4.6}$$

Aus (4.4) und (4.5) folgen die drei Differentialgleichungen

$$\dot{y}_1 - y_2 = 0, \quad \dot{y}_3 - y_4 = 0, \quad \dot{y}_5 - y_6 = 0. \tag{4.7}$$

Die sechs Differentialgleichungen (4.6), (4.7) sind (4.2), (4.3) äquivalent, denn es folgen einerseits (4.6), (4.7) mittels (4.4), (4.5) aus (4.2), (4.3) und andererseits kann man umgekehrt mittels (4.7) in (4.6) für y_2, y_4, y_6 der Reihe nach $\dot{y}_1, \dot{y}_3, \dot{y}_5$ schreiben; also ergibt sich wegen (4.4), (4.5) wiederum (4.2) (4.3).

Wir diskutieren nun eine umgekehrte Fragestellung. Wir gehen von einem Differentialgleichungssystem für $(y_1(x), \ldots, y_m(x))$ aus, das nur Ableitungen erster Ordnung enthält. Es sei in der folgenden expliziten (d. h. nach $y_1', \ldots, y_m'$ aufgelösten) Gestalt gegeben:

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (\nu = 1, \ldots, m). \tag{4.8}$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, wie man unter gewissen Voraussetzungen – diese werden erst im Laufe der Untersuchung genannt – aus dem System (4.8) eine Differentialgleichung m-ter Ordnung für $y_1(x)$ herstellt. Wir denken uns eine Lösung $(y_1(x), \ldots, y_m(x))$ von (4.8) in die erste Gleichung $(\nu = 1)$ von (4.8) eingesetzt. Danach soll die erhaltene Identität nach x differenziert werden. Die verallgemeinerte Kettenregel führt zu

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} y_k' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} f_k. \tag{4,9}$$

Da f_k bekannt ist, steht auf der rechten Seite von (4.9) eine bekannte Funktion; sie werde mit $g_2(x, y_1, \ldots, y_m)$ bezeichnet:

$$y_1'' = g_2(x, y_1, \ldots, y_m). \tag{4.10}$$

Die Gleichung (4.10) werde nunmehr ebenso behandelt, wie es soeben mit der ersten Gleichung aus (4.8) geschehen ist. Es ergibt sich

$$y_1''' = g_3(x, y_1, \ldots, y_m). \tag{4.11}$$

In dieser Weise fortfahrend gelangt man schließlich zu

$$y_1^{(m-1)} = g_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_m), \tag{4.12}$$

$$y_1^{(m)} = g_m(x, y_1, \ldots, y_m). \tag{4.13}$$

Wir stellen die Ergebnisse „(4.8) im Falle $\nu = 1$“ und (4.10) bis (4.12) zusammen:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_m) \\ y_1'' &= g_2(x, y_1, \ldots, y_m) \\ &\vdots \\ y_1^{(m-1)} &= g_{m-1}(x, y_1, \ldots, y_m). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Es sei betont, daß (4.13) in (4.14) nicht aufgenommen wurde. Nun nennen wir die bereits angekündigte Voraussetzung:

Das System der $m - 1$ Gleichungen (4.14) *sei nach $y_2, \ldots, y_m$ eindeutig auflösbar.* (4.15)

Das Ergebnis der Auflösung heiße

$$y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}), \ldots, y_m = \varphi_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}). \tag{4.16}$$

Schließlich setzen wir (4.16) in (4.13) ein und erhalten eine Differentialgleichung m-ter Ordnung für $y_1(x)$:

$$y_1^{(m)} = g_m(x, y_1, \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_1^{(m-1)}), \ldots, \varphi_m(x, y_1, \ldots, y_1^{(m-1)})),$$

kurz

$$y_1^{(m)} = \Phi(x, y_1, \ldots, y_1^{(m-1)}). \tag{4.17}$$

Beispiel 4.3: Aus dem Differentialgleichungssystem für das Funktionenpaar $(y_1(x), y_2(x))$

$$y_1' = y_1 + y_2, \quad y_2' = y_1 + y_2 + x \tag{4.18}$$

– es ist also jetzt $m = 2$ – soll eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y_1(x)$ hergestellt werden. Gemäß der allgemeinen Theorie ist die erste Gleichung von (4.18) nach x zu differenzieren, und danach sind im Ergebnis für y_1' und y_2' jeweils die rechten Seiten von (4.18) einzusetzen:

$$y_1'' = 2(y_1 + y_2) + x. \tag{4.19}$$

(4.19) entspricht dem System (4.10) bis (4.13) der allgemeinen Theorie. Die erste Gleichung aus (4.18)

$$y_1' = y_1 + y_2 \tag{4.20}$$

entspricht dem System (4.14) der allgemeinen Theorie und ist infolgedessen jetzt nach y_2 aufzulösen und in (4.19) – diese Gleichung entspricht im jetzigen Zusammenhang (4.13) – einzusetzen. Es ergibt sich somit für die Differentialgleichung (4.17) im vorliegenden Beispiel

$$y_1'' = 2y_1' + x. \tag{4.21}$$

* *Aufgabe 4.1:* Man zeige, daß beim Versuch, aus dem nach $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_6$ aufgelösten System (4.6), (4.7) eine Differentialgleichung sechster Ordnung für $y_1(t)$ herzustellen, die Voraussetzung (4.15) *nicht* erfüllt ist.

Wir fahren in der allgemeinen Theorie fort. Hat man die Differentialgleichung n-ter Ordnung (4.17) für $y_1(x)$ gelöst, so setze man die nunmehr bekannte Funktion in (4.16) ein. Der Beweis dafür, daß die auf diese Weise ermittelten Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ Lösungen von (4.8) sind, sei hier übergangen.

Beispiel 4.4 (Fortsetzung von Beispiel 4.3): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.21) kann mit den Hilfsmitteln aus Kapitel 3 hergestellt werden:

$$y_1(x) = C_1 + C_2\,e^{2x} - \tfrac{1}{4}(x + x^2). \tag{4.22}$$

(4.16) ergibt sich hier durch Auflösen von (4.20) nach y_2, also $y_2 = y_1' - y_1$. In diese Gleichung ist gemäß der allgemeinen Theorie (4.22) einzusetzen. Man erhält

$$y_2(x) = -C_1 + C_2\,e^{2x} + \tfrac{1}{4}(x^2 - x - 1). \tag{4.23}$$

4.2. Existenz und Unität der Lösungen

In Analogie zu Satz 3.1, Definition 3.1 und Satz 3.2 notieren wir

S.4.1 **Satz 4.1:** *Sind die Funktionen* $f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m(x, y_1, \ldots, y_m)$ *des Systems*

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_m) \quad (\nu = 1, \ldots, m)$$

in ihrem gemeinsamen Definitionsbereich B nicht nur stetig, sondern existieren dort auch ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y_\mu} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_m)$ $(\nu = 1, \ldots, m; \mu = 1, \ldots, m)$ *und sind diese dort stetig, so ist die Existenz und Unität (Einzigkeit) der Lösung der* **Anfangswertaufgabe,** *bestehend aus dem System*

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_m), \quad (x, y_1, \ldots, y_m) \in B \quad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{4.24}$$

und den m Anfangsbedingungen

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, \quad y_m(x_0) = y_{m0} \tag{4.25}$$

gesichert, falls $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{m0}) \in B$ *ist. Für die Lösung von* (4.24), (4.25) *gilt* $y_\nu(x) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{\nu k}(x)$ $(|x - x_0| < r,$ *r hinreichend klein,* $\nu = 1, \ldots, m)$, *wobei* $y_{\nu k}(x)$ $(\nu = 1, \ldots, m;\ k = 0, 1, 2 \ldots)$ *gemäß* $y_{\nu 0}(x) \equiv y_{\nu 0}$,

$$y_{\nu k}(x) = y_{\nu 0} + \int_{x_0}^{x} f_\nu(t, y_{1,k-1}(t), \ldots, y_{m,k-1}(t))\,\mathrm{d}t \quad (\nu = 1, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots)$$

zu berechnen ist **(Verfahren von Picard-Lindelöf).**

Definition 4.2: *Man sagt* **D.4.2**

$$\Phi_\nu(x, y_1, \ldots, y_m, C_1, \ldots, C_m) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, m; C_1, \ldots, C_m \textit{ Scharparameter}) \tag{4.26}$$

gibt relativ zu B die **allgemeine Lösung** *(das allgemeine Integral) von* (4.24) *an, wenn die durch Auflösen des Gleichungssystems* (4.26) *nach* $y_1, \ldots, y_m$ *entstehenden differenzierbaren Funktionen* $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ *Lösungen von* (4.24) *sind und wenn diese nicht mit weniger als m solchen Parametern dargestellt werden können.*

Satz 4.2: *Sind die Voraussetzungen von Satz* 4.1 *erfüllt, so ist jede Lösung von* (4.24) *in der allgemeinen Lösung enthalten.* **S.4.2**

4.3. Explizite lineare Differentialgleichungssysteme

4.3.1. Definition

Ausgehend von der Definition 3.2 wird man in naheliegender Weise zur Definition von expliziten linearen Differentialgleichungssystemen geführt. Das Wesentliche tritt bereits bei der Behandlung des Falles $n = 2$ deutlich hervor. Gemäß der Definition 3.2 gehen wir deshalb von der expliziten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y = y(x)$ aus. Sie lautet mit einer naheliegenden Bezeichnungsänderung

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = g(x), \quad a(x) \neq 0 \quad (x \in D). \tag{4.27}$$

Definition 4.3: *Man erhält aus* (4.27) *ein* **explizites gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem** *von m Gleichungen für das Funktionen-m-tupel* $(y_1(x), \ldots, y_m(x))$, *wobei das System bezüglich* y_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ *jeweils von zweiter Ordnung ist, insgesamt also ein System der Ordnung 2m vorliegt, auf folgende Weise:* **D.4.3**

a) *Man ersetzt* $y(x), y'(x), y''(x), g(x)$ *durch die folgenden einspaltigen Matrizen (Spaltenvektoren):*

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_m'(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}''(x) = \begin{pmatrix} y_1''(x) \\ \vdots \\ y_m''(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

b) *Man ersetzt* $a(x), b(x), c(x)$ *durch quadratische Matrizen mit m Zeilen und m Spalten, wobei die Elemente im allgemeinen Funktionen von x sind:*

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(x) = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

c) *Die wegen a) und* b) *entstehenden Produkte zwischen* (4.28) *und* (4.29) *sind im Sinne der Matrizenmultiplikation aufzufassen.*
d) *In* (4.27) *wird* $a(x) \neq 0$ *jetzt durch* $\det \mathbf{A}(x) \neq 0$ *ersetzt.*

Sind alle Elemente des Störgliedes $\mathbf{g}(x)$ *gleich null, so spricht man von einem* **homogenen** *linearen System, andernfalls von einem* **inhomogenen** *linearen System.*

Beispiel 4.5: (1.31) ist ein Beispiel für ein System aus der Definition 4.3. Mit der Bezeichnungsänderung

$$x_1(t) = x(t), \qquad x_2(t) = y(t), \qquad x_3(t) = z(t) \tag{4.30}$$

lautet es ausführlich

$$m\ddot{x}_1 + BQ\dot{x}_2 = 0, \qquad m\ddot{x}_2 - BQ\dot{x}_1 = 0, \qquad m\ddot{x}_3 = 0. \tag{4.31}$$

Schreibt man gemäß der Definition 4.3 das System (4.31) in der Matrizenschreibweise

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{g}, \tag{4.32}$$

so ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & BQ & 0 \\ -BQ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Beispiel 4.6: Das Differentialgleichungssystem aus (1.35) ist ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem von m Gleichungen für das Funktionen-m-tupel $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$, wobei das System bezüglich x_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ jeweils von erster Ordnung ist, insgesamt also ein System der Ordnung m vorliegt. Mit den Bezeichnungen aus (4.28) und (4.29) und mittels der aus m Zeilen und m Spalten bestehenden Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ lautet das System (1.35) in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} - \mathbf{E})\,\mathbf{x} = -\mathbf{g}. \tag{4.34}$$

Es handelt sich in (4.34) um ein explizites System, falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ gilt.

4.3.2. Lösungsstruktur

Es gelten zu 3.3.2. und 3.3.3. analoge Sätze. Wir beschränken uns auf die Übertragung der Sätze 3.3 und 3.7.

S.4.3 **Satz 4.3:** *Die* **allgemeine Lösung** $\mathbf{y}(x)$ *eines expliziten linearen inhomogenen Systems ist gleich einer* **partikulären (speziellen) Lösung** $\mathbf{y}_p(x)$ *des inhomogenen Systems plus der* **allgemeinen** *Lösung* $\mathbf{y}_h(x)$ *des zugehörigen* **homogenen** *Systems:*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_p(x) + \mathbf{y}_h(x). \tag{4.35}$$

S.4.4 **Satz 4.4:** *Die Lösungen* $\mathbf{y}_h(x)$ *eines expliziten linearen homogenen Differentialgleichungssystems* $n \cdot m$*-ter Ordnung (in der Definition 4.3 ist* $n = 2$*, im Beispiel 4.6 ist* $n = 1$*) bilden einen* $n \cdot m$*-dimensionalen linearen Raum, d. h. die allgemeine Lösung* $\mathbf{y}_h(x)$ *kann in der Gestalt*

$$\mathbf{y}_h(x) = \sum_{\sigma=1}^{nm} C_\sigma \mathbf{y}_{h\sigma}(x) \tag{4.36}$$

angegeben werden, wobei

$$\mathbf{y}_{h1}(x), \mathbf{y}_{h2}(x), \ldots, \mathbf{y}_{h,nm}(x) \tag{4.37}$$

eine Basis des Lösungsraumes und $C_1, \ldots, C_{nm}$ *beliebige Konstanten sind.*

Im allgemeinen ist die Herstellung der Basis durch elementare Funktionen nicht möglich. Dies gelingt jedoch, falls die Koeffizientenmatrizen nur konstante Elemente haben. Wie in der Definition 4.3 führen wir die Theorie im Falle $n = 2$ vor. Die Methode läßt sich aber sofort auch auf die Fälle $n = 1, 3, 4, 5, \ldots$ übertragen. In den Beispielen und Aufgaben wollen wir auch den Fall $n = 1$ betrachten.

4.3.3. Lineare homogene Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Mit den Bezeichnungen (4.28), (4.29) liege das explizite lineare homogene Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{\mathrm{h}}'' + \mathbf{B}\mathbf{y}_{\mathrm{h}}' + \mathbf{C}\mathbf{y}_{\mathrm{h}} = \mathbf{0}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0, \tag{4.38}$$

vor, wobei alle Elemente der Matrizen **A, B, C** konstant sein sollen. Eine unmittelbare Übertragung des Ansatzes (3.67) durch $\mathbf{y} = e^{\lambda x}$ ist abzulehnen, da ein Spaltenvektor $\mathbf{y}$ nicht dem Skalar $e^{\lambda x}$ gleich sein kann. Es liegt nahe, jetzt den Ansatz

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = \mathbf{d}\, e^{\lambda x}, \quad \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \tag{4.39}$$

zu machen, wobei $\mathbf{d}$ eine einspaltige Matrix ist, die die m unbekannten, im allgemeinen komplexen Konstanten $d_1, \ldots, d_m$ besitzt. Einsetzen von (4.39) in (4.38) führt zur Matrizengleichung

$$\mathbf{A}\lambda^2\mathbf{d}\, e^{\lambda x} + \mathbf{B}\lambda\mathbf{d}\, e^{\lambda x} + \mathbf{C}\mathbf{d}\, e^{\lambda x} = \mathbf{0}. \tag{4.40}$$

Wie beim Übergang von (3.68) zu (3.69) ist es möglich, die Matrizengleichung (4.40) beiderseits durch $e^{\lambda x}$ zu dividieren. Weiterhin soll die einspaltige Matrix $\mathbf{d}$ ausgeklammert werden; da es sich um eine Matrizengleichung handelt, muß genauer gesagt werden, daß $\mathbf{d}$ nach *rechts* auszuklammern ist, weil in der Matrizengleichung Faktoren i. allg. nicht vertauscht werden dürfen. Damit folgt aus (4.40)

$$(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{4.41}$$

(4.41) stellt in Matrizengestalt ein lineares homogenes Gleichungssystem von m Gleichungen für die m Unbekannten $d_1, \ldots, d_m$ dar. Ist die Koeffizientendeterminante von null verschieden, so gibt es nur die triviale Lösung $d_1 = d_2 = \ldots = d_m = 0$, d. h. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$; dieser Fall wurde jedoch bereits im Ansatz (4.39) ausgeschlossen, weil er lediglich zur uninteressanten trivialen Lösung $\mathbf{y}_{\mathrm{h}}(x) \equiv \mathbf{0}$ des Differentialgleichungssystems führt. Folglich ist nur der Fall

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0 \tag{4.42}$$

interessant. Die Gleichung (4.42) heißt in Analogie zu (3.69) *charakteristische Gleichung*. Auf der linken Seite von (4.42) steht ein *Polynom* in λ *vom Grade* $2m$.

Es sei λ_k eine Lösung der charakteristischen Gleichung (4.42) mit der Vielfachheit $l_k = 1$. Einsetzen von λ_k in (4.41) führt zu

$$(\mathbf{A}\lambda_k^2 + \mathbf{B}\lambda_k + \mathbf{C})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{4.43}$$

Aus dem bisherigen Rechengang folgt, daß die Determinante von $\mathbf{A}\lambda_k^2 + \mathbf{B}\lambda_k + \mathbf{C}$ gleich null ist. Infolgedessen hat das durch (4.43) gegebene lineare homogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Man kann zeigen, daß die Lösungen $\mathbf{d}$ von (4.43) einen eindimensionalen Lösungsraum bilden, von dem ein Basiselement mit $\mathbf{d}_k$ bezeichnet werde. Setzt man im Ansatz (4.39) für λ den Wert λ_k und für $\mathbf{d}$ die gefundene einspaltige Matrix $\mathbf{d}_k$ ein, so ergibt sich das Basiselement

$$\mathbf{y}_k(x) = \mathbf{d}_k\, e^{\lambda_k x} \tag{4.44}$$

des zu λ_k gehörigen eindimensionalen Lösungsraumes von (4.38).

Eine unmittelbare Übertragung vom Satz 3.10 ist nicht möglich. Im allgemeinen ist der Sachverhalt jetzt komplizierter. Ist λ_k eine Lösung der charakteristischen Gleichung mit der Vielfachheit $l_k > 1$, so kommt man nur dann mit dem Ansatz (4.39) aus, wenn die Lösungen $\mathbf{d}$ aus (4.43) einen l_k-dimensionalen Lösungsraum bilden, von dem eine Basis mit $\mathbf{d}_{k\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, l_k)$ bezeichnet werde. An die Stelle des einen Basiselements aus (4.44) treten nun die l_k (linear unabhängigen) Basiselemente

$$\mathbf{y}_{k\nu}(x) = \mathbf{d}_{k\nu}\, e^{\lambda_k x} \quad (\nu = 1, \ldots, l_k). \tag{4.45}$$

Sie spannen den zu λ_k gehörigen l_k-dimensionalen Lösungsraum von (4.38) auf. Sollte jedoch der Lösungsraum für $\mathbf{d}$ die Dimension r mit $r < l_k$ besitzen, so stehen in (4.45) nur r (linear unabhängige) Basiselemente

$$\mathbf{y}_{k\nu}(x) = \mathbf{d}_{k\nu}\, e^{\lambda_k x} \quad (\nu = 1, \ldots, r), \tag{4.46}$$

obwohl der zu λ_k gehörige Lösungsraum von (4.38) auch im jetzigen Fall die Dimension l_k besitzt. Die dann in (4.46) noch fehlenden $l_k - r$ Basiselemente kann man durch den komplizierteren Ansatz

$$\mathbf{y}(x) = (\mathbf{d}^{(0)} + \mathbf{d}^{(1)}x + \ldots + \mathbf{d}^{(l_k-1)}x^{l_k-1})\, e^{\lambda_k x} \tag{4.47}$$

ermitteln. Die bei $\mathbf{d}$ in Klammern stehenden Zahlen sind lediglich der Numerierung dienende Indizes, eine Verwechslung mit der Ableitungsbildung ist in diesem Zusammenhang nicht zu befürchten. Der Ansatz (4.47) wird in (4.38) eingesetzt; danach ist durch $e^{\lambda_k x}$ zu dividieren, nach Potenzen von x zu ordnen und schließlich ein Koeffizientenvergleich bezüglich x durchzuführen. Es ergibt sich ein lineares homogenes Gleichungssystem von $l_k \cdot m$ Gleichungen für die $l_k \cdot m$ Elemente der l_k einspaltigen Matrizen aus (4.47). Man kann zeigen, daß der zu diesem Gleichungssystem gehörende Lösungsraum die Dimension l_k besitzt. Wir sind daher in der Lage, die in (4.46) noch fehlenden Basiselemente in der Gestalt

$$\mathbf{y}_{k\nu}(x) = (\mathbf{d}_{k\nu}^{(0)} + \mathbf{d}_{k\nu}^{(1)}x + \ldots + \mathbf{d}_{k\nu}^{(l_k-1)}x^{l_k-1})\, e^{\lambda_k x} \quad (\nu = r+1, \ldots, l_k) \tag{4.48}$$

anzugeben. Mit (4.44) bzw. (4.45) bzw. (4.46), (4.48) sind damit die Basiselemente (4.37) beim Vorliegen des Systems (4.38) ermittelt.

Wir behandeln drei Beispiele, wobei wir zur Reduzierung des Rechenaufwandes in den ersten beiden $n = 1$ wählen.

Beispiel 4.7: Es ist die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 8y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - 8y_2 \end{aligned} \tag{4.49}$$

zu bestimmen. In der Matrizengestalt von (4.49), d. h. $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ machen wir den Ansatz $\mathbf{y} = \mathbf{d}\, e^{\lambda x}$ und erhalten $\lambda\mathbf{d}\, e^{\lambda x} = \mathbf{A}\mathbf{d}\, e^{\lambda x}$, also

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \text{d. h.:} \quad \begin{aligned} (2-\lambda)\,d_1 + \qquad\quad 8d_2 &= 0, \\ 3d_1 + (-8-\lambda)\,d_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left[\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}\right]. \tag{4.50}$$

Die charakteristische Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, d. h. $\lambda^2 + 6\lambda - 40 = 0$ hat die Lösungen $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -10$. Für die zu $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -10$ gehörenden jeweils eindimensionalen Lösungsräume von (4.50) können als Basiselemente $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

bzw. $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ genommen werden. Also lautet die allgemeine Lösung von (4.49)

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-10x}, \quad \text{d. h.:} \quad \begin{aligned} y_1 &= 4C_1\, e^{4x} + 2C_2\, e^{-10x}, \\ y_2 &= C_1\, e^{4x} - 3C_2\, e^{-10x}. \end{aligned}$$

Beispiel 4.8: Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von

$$\begin{aligned} y_1' &= \phantom{y_1 +{}} y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 \phantom{{}+y_2} + y_3, \quad \text{kurz: } \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \\ y_3' &= y_1 + y_2, \end{aligned} \tag{4.51}$$

führt der Ansatz $\mathbf{y} = \mathbf{d}\, e^{\lambda x}$ zum Gleichungssystem $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{d} = 0$ und zur charakteristischen Gleichung $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$. Diese hat die Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den dazugehörigen Vielfachheiten $l_1 = 2$ und $l_2 = 1$. Zu λ_1 gehört ein zweidimensionaler Lösungsraum von $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\,\mathbf{d} = 0$ – die Ansatzerweiterung (4.47) ist also hier nicht erforderlich –, wobei als Basis $\mathbf{d}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{d}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ genommen werden kann. Für den zu λ_2 gehörigen eindimensionalen Lösungsraum von $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\,\mathbf{d} = 0$ kann als Basis $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden. Also lautet die allgemeine Lösung von (4.51)

$$\begin{aligned} y_1 &= (C_1 + C_2)\, e^{-x} + C_3\, e^{2x}, \\ y_2 &= -C_1\, e^{-x} + C_3\, e^{2x}, \\ y_3 &= -C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{2x}. \end{aligned}$$

Beispiel 4.9: Zwei Punktmassen m_1 und m_2 befinden sich an den Stellen O_1 und O_2 $(O_1 < O_2)$ einer Zahlengeraden in Ruhe und sind durch eine entspannte Feder (Federkonstante $c > 0$) verbunden. Zur Zeit $t = 0$ erfährt die Punktmasse m_1 eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 in Richtung der Zahlengeraden. Gesucht sind die Bewegungen $x_1 = x_1(t)$ und $x_2 = x_2(t)$, wobei x_1 bzw. x_2 den orientierten Abstand der Masse m_1 bzw. m_2 vom Punkt O_1 bzw. O_2 messen. Mathematisch gesprochen ist folgende Anfangswertaufgabe zu lösen:

$$m_1\ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = 0, \quad m_2\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0, \tag{4.52}$$

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \tag{4.53}$$

(4.52) lautet in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.54}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

Der Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{d}\, e^{\lambda t}$ führt zu

$$(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{4.56}$$

Für die charakteristische Gleichung erhält man

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C}) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lambda^2(m_1 m_2 \lambda^2 + c(m_1 + m_2)) = 0. \tag{4.57}$$

Mit der Abkürzung

$$\omega = \sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \tag{4.58}$$

ergeben sich die Lösungen von (4.57) zu $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \mathrm{i}\omega$, $\lambda_3 = -\mathrm{i}\omega$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 1$.

Für $\lambda = \lambda_1 = 0$ entsteht aus (4.56) das Gleichungssystem $\mathbf{Cd} = \mathbf{0}$. Es besitzt einen eindimensionalen Lösungsraum, wobei $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis ist. Folglich ist ein zu $\lambda_1 = 0$ gehöriges Basiselement des Lösungsraumes des Differentialgleichungssystems (4.54), (4.55)

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}. \tag{4.59}$$

Wegen $l_1 = 2$ ist der zu $\lambda_1 = 0$ gehörige Lösungsraum von (4.54), (4.55) zweidimensional. Ein neben (4.59) weiteres Basiselement ist gemäß (4.47) durch den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{d}^{(0)} + \mathbf{d}^{(1)}t)\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathbf{d}^{(0)} + \mathbf{d}^{(1)}t \tag{4.60}$$

zu bestimmen. Setzt man (4.60) in (4.54) ein, so ergibt sich $\mathbf{C}(\mathbf{d}^{(0)} + \mathbf{d}^{(1)}t) = \mathbf{0}$ und nach dem Koeffizientenvergleich bezüglich der t-Potenzen

$$\mathbf{Cd}^{(0)} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{Cd}^{(1)} = \mathbf{0}. \tag{4.61}$$

In (4.61) stehen insgesamt $l_1 \cdot m = 2 \cdot 2 = 4$ Gleichungen für die $l_1 \cdot m = 4$ unbekannten Elemente von $\mathbf{d}^{(0)}$ und $\mathbf{d}^{(1)}$. Ein Basiselement des Lösungsraumes von (4.61) ist bereits bekannt, denn der Ansatz $\mathbf{x} = \mathbf{d}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ wird wegen $\lambda = \lambda_1$ auch von (4.60) mit $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{d}$ und $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{0}$ erfaßt. Dieses bekannte Basiselement wird also durch $\mathbf{d}_{11}^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ angegeben. Ein weiteres (vom ersten linear unabhängiges) Basiselement des Lösungsraumes von (4.61) wird durch $\mathbf{d}_{12}^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ geliefert. Folglich ergibt sich mit (4.60) ein von (4.59) linear unabhängiges weiteres Basiselement des Lösungsraumes von (4.54), (4.55) zu

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t. \tag{4.62}$$

Für $\lambda_2 = \mathrm{i}\omega$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}\omega$ lautet (4.56)

$$(-\mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{C})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{4.63}$$

Als Basis des eindimensionalen Lösungsraumes von (4.63) kann man $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix}m_2\\-m_1\end{pmatrix}$ nehmen (rechnen Sie das unter Benutzung von (4.58) nach!). Zu $\lambda_2 = \mathrm{i}\omega$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}\omega$ ergeben sich also als Basiselemente des Lösungsraumes des Differentialgleichungssystems (4.54), (4.55)

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix}m_2\\-m_1\end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix}m_2\\-m_1\end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{4.64}$$

Die Funktionen aus (4.59), (4.62), (4.64) bilden eine Basis des zu (4.54), (4.55) gehörenden vierdimensionalen Lösungsraumes. Wir brechen jetzt die Untersuchungen ab, um sie im Beispiel 4.10 wieder aufzunehmen.

Aufgabe 4.2: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems *

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 .$$

4.3.4. Übergang zur reellen Basis

Wir setzen nunmehr voraus, daß in dem Differentialgleichungssystem (4.38) die Elemente der Matrizen **A**, **B**, **C** alle reell sind. Wie in 3.3.5. werden die *reellen* Basiselemente aus (4.44) und (4.45) bzw. (4.46), (4.48) unverändert in die neue Basis übernommen. Ist das Element $\mathbf{y}_{k\nu}(x)$ aus (4.44)[1], (4.45), (4.46), (4.48) *nicht-reell*, so kann man zeigen, daß $\overline{\mathbf{y}_{k\nu}(x)}$ als weiteres Element der alten Basis gewählt werden kann. Nunmehr berechnet man wie in (3.112), (3.113) die beiden reellen Elemente der neuen Basis

$$\frac{1}{2}(\mathbf{y}_{k\nu}(x) + \overline{\mathbf{y}_{k\nu}(x)}), \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{y}_{k\nu}(x) - \overline{\mathbf{y}_{k\nu}(x)}). \tag{4.65}$$

Beispiel 4.10 (Fortsetzung von Beispiel 4.9): Die beiden Basiselemente aus (4.59), (4.62) werden unverändert in die neue reelle Basis übernommen. Im Einklang mit der allgemeinen Theorie ist neben dem (nicht-reellen) Basiselement $\mathbf{x}_2(t)$ aus (4.64) auch $\overline{\mathbf{x}_2(t)}$ ein Basiselement; dieses stimmt hier mit $\mathbf{x}_3(t)$ aus (4.64) überein. Folglich ergeben sich die beiden noch fehlenden Elemente der neuen reellen Basis wegen (4.65) zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega t} + \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} &= \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \cos(\omega t), \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega t} - \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} &= \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \sin(\omega t). \end{aligned} \tag{4.66}$$

Die allgemeine reelle Lösung des Systems (4.52) erhält man durch Linearkombination der Basiselemente aus (4.59), (4.62) und (4.66):

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + C_3 \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + C_4 \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix} \sin(\omega t). \tag{4.67}$$

In (4.67) sind $C_1, \ldots, C_4$ beliebige *reelle* Konstanten. Wir setzen (4.67) in die Anfangsbedingungen (4.53) ein, lösen das sich ergebende lineare Gleichungssystem für $C_1, \ldots, C_4$ auf und erhalten somit wegen (4.67) als Lösung der Anfangswertaufgabe (4.52), (4.53) [ω siehe (4.58)]

$$x_1(t) = \frac{v_0}{m_1 + m_2}\left(m_1 t + \frac{m_2}{\omega} \sin(\omega t)\right),$$

$$x_2(t) = \frac{v_0}{m_1 + m_2}\left(m_1 t - \frac{m_1}{\omega} \sin(\omega t)\right).$$

Aufgabe 4.3: Im System (1.31) führe man die Funktionen $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ durch $p_1 = \dot{x}$, $p_2 = \dot{y}$, $p_3 = \dot{z}$ ein und bestimme von dem entstehenden System die all- *

[1]) Man schreibe in (4.44) für $\mathbf{y}_k$ jetzt $\mathbf{y}_{k1}$.

gemeine *reelle* Lösung (p_1, p_2, p_3). Was ergibt sich somit für die allgemeine reelle Lösung (x, y, z) des Differentialgleichungssystems (1.31)?

4.3.5. Lineare inhomogene Systeme

Eine unmittelbare Übertragung vom Satz 3.12 ist zwar nicht möglich, jedoch gilt folgender

S.4.5 **Satz 4.5:** *Für das Differentialgleichungssystem*

$$\mathbf{A}\mathbf{y}'' + \mathbf{B}\mathbf{y}' + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{g}(x), \quad \det \mathbf{A} \neq 0 \tag{4.68}$$

mit den konstanten quadratischen Matrizen **A**, **B**, **C** *und*

$$\mathbf{g}(x) = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \ldots + \mathbf{b}_s x^s)\, e^{qx}$$

$$(\mathbf{b}_\nu\text{: konstante einspaltige Matrizen}),\ \mathbf{b}_s \neq \mathbf{0} \tag{4.69}$$

führt der Ansatz[1])

$$\mathbf{y}_p(x) = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 x + \ldots + \mathbf{B}_s x^s + \mathbf{B}_{s+1} x^{s+1} + \ldots + \mathbf{B}_{s+l} x^{s+l})\, e^{qx} \tag{4.70}$$

$(\mathbf{B}_\nu$: *unbekannte konstante einspaltige Matrizen*) [2])

stets zu einer partikulären Lösung. Zur Bestimmung von l des Ansatzes (4.70) *ist die zum zugehörigen homogenen System*

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_h'' + \mathbf{B}\mathbf{y}_h' + \mathbf{C}\mathbf{y}_h = \mathbf{0} \tag{4.71}$$

(*der Index* h *weist auf die Homogenität des Systems hin*) *gehörige charakteristische Gleichung*

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0 \tag{4.72}$$

hinzuzuziehen. Ist die Zahl q des Störgliedes (4.69) *keine Lösung von* (4.72), *so ist* $l = 0$ *zu setzen. Wenn jedoch q eine Lösung der Gleichung* (4.72) *ist, so ist l gleich der Vielfachheit dieser Lösung q zu setzen. Zur Bestimmung der* $\mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_s, \ldots, \mathbf{B}_{s+l}$ *setzt man den Ansatz* (4.70) *in das System* (4.68) *ein, dividiert anschließend beide Seiten durch* e^{qx}, *ordnet danach nach Potenzen von x und führt schließlich bezüglich x einen Koeffizientenvergleich durch. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Elemente der einspaltigen Matrizen* $\mathbf{B}_0, \ldots, \mathbf{B}_{s+l}$.

Beispiel 4.11: Es soll eine partikuläre Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 3x_2 + 12t \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + 1 \end{aligned} \tag{4.73}$$

bestimmt werden. (4.73) lautet in Matrizengestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \qquad \mathbf{g}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t \tag{4.74}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Der Ansatz

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t \tag{4.76}$$

---

[1]) Man beachte den Unterschied zu (3.127).

[2]) Um die Analogie mit (3.127) hervorzuheben, wird $\mathbf{B}_\nu$ benutzt, obwohl einspaltige Matrizen in der Regel durch kleine Buchstaben bezeichnet werden.

– hier ist $q = 0$ keine Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung (vgl. Lösung von Aufgabe 4.2) und damit ist $l = 0$ – wird in (4.74) eingesetzt und ergibt

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}_1 t + \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t. \tag{4.77}$$

In (4.77) führt der Koeffizientenvergleich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{B}_1 + \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}_0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Aus (4.78) folgt mit (4.75)

$$\mathbf{B}_1 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{b}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.79}$$

und damit wegen (4.76)

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} t, \quad \text{d. h.} \quad \begin{aligned} x_{1p}(t) &= -\frac{3}{2} + 3t, \\ x_{2p}(t) &= -2t. \end{aligned}$$

Satz 4.6: *Die Sätze* 3.13 *und* 3.14 *lassen sich unmittelbar auf das System* (4.68) *übertragen.* **S.4.6**

Aufgabe 4.4: Man führe die in Satz 4.6 genannte unmittelbare Übertragung tatsächlich durch. *

Aufgabe 4.5: Es ist die Lösung der Anfangswertaufgabe $\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 + 3t$, $\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + e^{-t}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \frac{5}{12}$ zu bestimmen. *

4.3.6. Variation der Konstanten

Analog zu 3.3.8. kann man formulieren: Gegeben sei das explizite gewöhnliche lineare inhomogene Differentialgleichungssystem $2m$-ter Ordnung mit im allgemeinen variablen Koeffizienten von m Differentialgleichungen für die m Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$

$$\mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}'' + \mathbf{B}(x)\,\mathbf{y}' + \mathbf{C}(x)\,\mathbf{y} = \mathbf{g}(x), \quad \det \mathbf{A}(x) \neq 0, \quad \mathbf{g}(x) \not\equiv \mathbf{0} \quad (x \in D). \tag{4.80}$$

Eine partikuläre Lösung von (4.80) kann man mit dem Ansatz

$$\mathbf{y}_p(x) = u_1(x)\,\mathbf{y}_{h1}(x) + u_2(x)\,\mathbf{y}_{h2}(x) + \dots u_{2m}(x)\,\mathbf{y}_{h,2m}(x) \tag{4.81}$$

finden, wobei die einspaltigen Matrizen

$$\mathbf{y}_{h1}(x), \quad \mathbf{y}_{h2}(x), \dots, \mathbf{y}_{h,2m}(x) \tag{4.82}$$

eine Basis (Fundamentalsystem) des $2m$-dimensionalen Lösungsraumes des zugehörigen homogenen Systems

$$\mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}_h'' + \mathbf{B}(x)\,\mathbf{y}_h' + \mathbf{C}(x)\,\mathbf{y}_h = \mathbf{0} \tag{4.83}$$

bilden. Die Ableitungen $u_1'(x), \dots, u_{2m}'(x)$ ergeben sich als Lösung des folgenden linearen inhomogenen Gleichungssystems ($\mathbf{A}^{-1}$: reziproke [inverse] Matrix von $\mathbf{A}$):

$$\begin{aligned} u_1'(x)\,\mathbf{y}_{h1}(x) + u_2'(x)\,\mathbf{y}_{h2}(x) + \dots + u_{2m}'(x)\,\mathbf{y}_{h,2m}(x) &\equiv \mathbf{0} \\ u_1'(x)\,\mathbf{y}_{h1}'(x) + u_2'(x)\,\mathbf{y}_{h2}'(x) + \dots + u_{2m}'(x)\,\mathbf{y}_{h,2m}'(x) &= \mathbf{A}^{-1}(x)\,\mathbf{g}(x). \end{aligned} \tag{4.84}$$

* *Aufgabe 4.6:* Im Anschluß an Beispiel 4.10 bestimme man eine partikuläre Lösung von

$$m_1\ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = \frac{m_1 m_2}{\cos(\omega t)},$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = \frac{m_1 m_2}{\cos(\omega t)}, \tag{4.85}$$

wobei ω der Gleichung (4.58) zu entnehmen ist.

4.4. Runge-Kutta-Verfahren für Differentialgleichungssysteme

Um das Anfangswertproblem des expliziten (nicht notwendig linearen) Differentialgleichungssystems (vgl. (4.8))

$$y_k' = f_k(x, y_1, \ldots, y_m), \quad y_k(x_0) = y_{k0} \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.86}$$

mittels des Verfahrens von Runge-Kutta zu behandeln, wird man zunächst (4.86) im Sinne der Bezeichnung aus (4.28) durch

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \tag{4.87}$$

zusammenfassen. Man kann jetzt das Schema auf der Seite 44 benutzen, falls man dort

$$y_\nu,\ f(x_\nu, y_\nu), \quad k_\mu = hf, \quad 6k = \sum \lambda_\mu k_\mu \tag{4.88}$$

der Reihe nach durch

$$\mathbf{y}_\nu, \quad \mathbf{f}(x_\nu, \mathbf{y}_\nu), \quad \mathbf{k}_\mu = h\mathbf{f}, \quad 6\mathbf{k} = \sum \lambda_\mu \mathbf{k}_\mu \tag{4.89}$$

ersetzt.

Lösungen der Aufgaben

1.1: a) φ; b) 1; c) $\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi - E$; d) $\dot{\varphi} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E + mgl\cos\varphi}$.

1.2: $\tan\alpha_0 = \frac{y_0}{x_0}$, $\tan\beta_0 = \tan\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \frac{\cos\alpha_0}{-\sin\alpha_0} = -\frac{1}{\tan\alpha_0} = -\frac{x_0}{y_0}, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

1.3: $x(t) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C \Rightarrow 3 = -\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = 3 + \frac{2}{\pi}$

$$\Rightarrow x(t) = 3 + \frac{2}{\pi}\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right).$$

2.2: nirgends

2.3: $y_0(x) \equiv 0$, $y_1(x) = \frac{1}{12}x^3$, $y_2(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4032}x^7$.

2.4: a), b), d), f), g).

2.5: a) $y \equiv -1$, b) $y \equiv 2$, $y \equiv 3$, c) $y \equiv k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, d) $y \equiv 0$, e) $\varphi \equiv \varphi_0, \varphi \equiv -\varphi_0$.

2.6: $y' = x(y+1)$, $-\infty < y < -1 \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int x\,\mathrm{d}x + C_1$, $-\infty < y < -1 \Rightarrow \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} + C_1$, $-\infty < y < -1$, $-\infty < C_1 < +\infty \Rightarrow \ln(-y-1) = \frac{x^2}{2} + C_1$, $-\infty < C_1 < +\infty$ $\Rightarrow -y - 1 = C_2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $C_2 = \mathrm{e}^{C_1}, 0 < C_2 < +\infty \Rightarrow y = -1 + C\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $C = -C_2$, $-\infty < C < 0$.

2.7: $y' = \sin x\cdot\sin y \xRightarrow[0<y<\pi]{} \int\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \int\sin x\,\mathrm{d}x + C \xRightarrow[0<y<\pi]{} \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right) = -\cos x + C$ $\xRightarrow[y(0)=\frac{\pi}{2}]{} C = 1 \Rightarrow \tan\frac{y}{2} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\cos x} \xRightarrow[0<y<\pi]{} y = 2\arctan(\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\cos x})$.

2.8: $\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$, $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\int\mathrm{d}t + C \Rightarrow \arcsin\frac{\varphi}{\varphi_0}$ $= -\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)$ mit $t_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}\,C \Rightarrow \varphi = -\varphi_0\sin\left[\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0)\right]$, $-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{2} + t_0 < t < \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\pi}{2} + t_0$. Intervallänge: $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

2.9: nein.

2.10: linear, inhomogen, Überführung in explizite Gestalt möglich für $-1 < x < 1$.

2.11: nein. Gegenbeispiel: Aufgabe 1.3.

2.12: a) $y = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}}$, b) $x = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}$, c) nichtlinear.

2.13: nein. Gegenbeispiel: Aufgabe 2.4c).

2.14: $I_\mathrm{h}(t) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$, $I_\mathrm{p}(t) = u(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ mit $u(t) = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$, $I(t) = I_\mathrm{p}(t) + I_\mathrm{h}(t) = \frac{U}{R} + C\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$, $I(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{U}{R}$, $I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

2.15: $y_h(x) = C\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $y_p(x) = u(x)\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mit $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, $y(x) = 1 + \dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}$.

2.16: (2.84) ist i. allg. nicht exakt, (2.85) ist exakt.

2.17: $\dfrac{\partial}{\partial y}[x(x+2y)] = 2x$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x \Rightarrow$ Dgl. ist exakt, da B einfach zusammenhängend.
$\dfrac{\partial U}{\partial x} = x^2 + 2xy \Rightarrow U = \dfrac{x^3}{3} + x^2y + C(y) \xRightarrow[\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2]{} x^2 + C'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow C(y) = -\dfrac{y^3}{3}$
$\Rightarrow U = \dfrac{x^3 - y^3}{3} + x^2y \Rightarrow \dfrac{x^3 - y^3}{3} + x^2y = \text{const}$ (implizite Darstellung der Lösung).

2.18: $\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(x)(y^2 - 2x - 2)] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(x)\,2y] \Rightarrow 2\mu(x)\,y = 2\mu'(x)\,y \Rightarrow \mu' = \mu \Rightarrow \mu = e^x$ ist integrierender Faktor.

2.19: $\mu = \mu(x)$ führt nicht zum Ziel.
$\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(y)\,xy^3] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(y)(1 + 2x^2y^2)] \Rightarrow x(\mu'(y)\,y^3 + 3\mu(y)\,y^2) = \mu(y)\,4xy^2 \xRightarrow[x \neq 0]{} y^3\mu'(y) - y^2\mu(y)$
$= 0 \xRightarrow[y \neq 0]{} \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \ln|\mu| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow \mu = Cy$; es genügt $C = 1$ zu wählen: $\mu = y$,
$xy^4\,dx + (y + 2x^2y^3)\,dy = 0$ ist exakt. $\dfrac{\partial U}{\partial x} = xy^4 \Rightarrow U = \dfrac{1}{2}x^2y^4 + C(y) \xRightarrow[\frac{\partial U}{\partial y} = y + 2x^2y^3]{} 2x^2y^3$
$+ C'(y) = y + 2x^2y^3 \Rightarrow C'(y) = y \Rightarrow C(y) = \dfrac{y^2}{2} \Rightarrow U(x, y) = \dfrac{1}{2}y^2(x^2y^2 + 1)$. Die Gleichung $y^2(x^2y^2 + 1) = \text{const}$ ist implizite Darstellung der Lösung.

2.20: $\dfrac{\partial}{\partial p}\left(c_p + p\dfrac{\partial V}{\partial T}\right) = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\lambda_T + p\dfrac{\partial V}{\partial p}\right) \Rightarrow \dfrac{\partial c_p}{\partial p} + \dfrac{\partial V}{\partial T} + p\dfrac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial T} = \dfrac{\partial \lambda_T}{\partial T} + p\dfrac{\partial^2 V}{\partial T\,\partial p} \Rightarrow \dfrac{\partial c_p}{\partial p}$
$+ \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{\partial \lambda_T}{\partial T}$.

2.21: $\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{1}{T}c_p\right) = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{1}{T}\lambda_T\right) \Rightarrow \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial c_p}{\partial p} = -\dfrac{1}{T^2}\lambda_T + \dfrac{1}{T}\dfrac{\partial \lambda_T}{\partial T} \Rightarrow \dfrac{\partial c_p}{\partial p} = -\dfrac{1}{T}\lambda_T + \dfrac{\partial \lambda_T}{\partial T}$.

2.22: $\beta = 2$, $\alpha = 1 - \beta = -1$, $\tilde{x} = x^\alpha = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{\tilde{x}} \Rightarrow \dot{x} = -\dfrac{\dot{\tilde{x}}}{\tilde{x}^2}$.
$(1 - t^2)\,\dot{x} - tx - atx^2 = 0 \Rightarrow -(1 - t^2)\,\dot{\tilde{x}} - t\tilde{x} = at$. $-(1 - t^2)\,\dot{\tilde{x}}_h - t\tilde{x}_h = 0 \xRightarrow[|t| \neq 1]{} \dfrac{d\tilde{x}_h}{\tilde{x}_h}$
$= \dfrac{t}{t^2 - 1}\,dt \Rightarrow \ln|\tilde{x}_h| = \dfrac{1}{2}\ln|t^2 - 1| + C_1 \Rightarrow \tilde{x}_h = C\sqrt{|t^2 - 1|}$. $\tilde{x}_p = u(t)\sqrt{|t^2 - 1|} \Rightarrow$
$-(1 - t^2)\,\dot{u}\sqrt{|t^2 - 1|} = at \Rightarrow u = -\dfrac{a}{\sqrt{|t^2 - 1|}} \Rightarrow \tilde{x}_p = -a \Rightarrow \tilde{x} = -a + C\sqrt{|t^2 - 1|} \Rightarrow$
$x = \dfrac{1}{\tilde{x}} = \dfrac{1}{-a + C\sqrt{|t^2 - 1|}}$.

2.23: $y' = \dfrac{\dfrac{y}{x} + \tan\gamma}{1 - \dfrac{y}{x}\tan\gamma}$, $\quad y = xz(x)$, $\quad y' = z + xz' \Rightarrow z + xz' = \dfrac{z + \tan\gamma}{1 - z\tan\gamma}$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(\frac{z + \tan\gamma}{1 - z\tan\gamma} - z\right) \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\,\frac{z^2 + 1}{1 - z\tan\gamma}\tan\gamma \Rightarrow \frac{1 - z\tan\gamma}{z^2 + 1}\,dz = \frac{\tan\gamma}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \arctan z - \frac{1}{2}(\tan\gamma)\ln(z^2 + 1) = (\tan\gamma)\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\tan\gamma)\{\ln(x^2 + y^2) - 2\ln|x|\} = (\tan\gamma)\ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\tan\gamma)\ln(x^2 + y^2) = C.$$

2.24: $y' = (x - y)^2 + 1,\quad y(0) = 1 \xRightarrow[z=x-y]{} z' = -z^2,\quad z(0) = -1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{x-1} \xRightarrow[y=x-z]{}$
$y = x - \dfrac{1}{x-1}$.

2.25: $y(0{,}5) \approx 1{,}0698$, $y(1) \approx 1{,}1363$.

2.26:

x	y	$f = x + y$	$k_\mu = hf$	$\lambda_\mu k_\mu$	$k = \frac{1}{6}\sum \lambda_\mu k_\mu$
0,00	**0,000000**	0,000000	0,000000	0,000000	
0,10	0,000000	0,100000	0,020000	0,040000	
0,10	0,010000	0,110000	0,022000	0,044000	
0,20	0,022000	0,222000	0,044400	0,044400	0,021400
0,20	**0,021400**	0,221400	0,044280	0,044280	
0,30	0,043540	0,343540	0,068708	0,137416	
0,30	0,055754	0,355754	0,071151	0,142302	
0,40	0,092551	0,492551	0,098510	0,098510	0,070418
0,40	**0,091818**				

Rechnung mit der doppelten Schrittweite $\tilde{h} = 2h = 0{,}4$

x	y	$f = x + y$	$k_\mu = hf$	$\lambda_\mu k_\mu$	$k = \frac{1}{6}\sum \lambda_\mu k_\mu$
0,00	**0,000000**	0,000000	0,000000	0,000000	
0,20	0,000000	0,200000	0,080000	0,160000	
0,20	0,040000	0,240000	0,096000	0,192000	
0,40	0,096000	0,496000	0,198400	0,198400	0,091733
0,40	**0,091733**				

$\Rightarrow \delta y = \dfrac{1}{15}(0{,}091818 - 0{,}091733) = 5{,}7 \cdot 10^{-6} \Rightarrow y(0{,}4) \approx 0{,}0918237$.

$y_h' = y_h \Rightarrow y_h = C\,e^x$. $y_p = u(x)\,e^x$ mit $u'\,e^x = x$. $\quad u = \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$
$= -e^{-x}(1 + x) \Rightarrow y_p = -(1 + x) \Rightarrow y = -(1 + x) + C\,e^x. \quad y(0) = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y$
$= -(1 + x) + e^x \Rightarrow y(0{,}4) = 0{,}09182469\ldots$.

3.1: $y(x) = g(x, x) + C_1(x - x_0) + C_2$ mit

$$g(u, v) = \int\limits_{t=x_0}^{u} (v - t)\,f(t)\,dt \Rightarrow y' = \left(\frac{\partial g(u, v)}{\partial u}\right)_{\substack{u=x\\v=x}} + \left(\frac{\partial g(u, v)}{\partial v}\right)_{\substack{u=x\\v=x}} + C_1 \text{ mit } \frac{\partial g(u, v)}{\partial u}$$

$$= (v - u)\,f(u),\quad \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} = \int\limits_{t=x_0}^{u} \frac{\partial}{\partial v}(v - t)\,f(t)\,dt = \int\limits_{t=x_0}^{u} f(t)\,dt \Rightarrow y' = \int\limits_{t=x_0}^{x} f(t)\,dt + C_1 \Rightarrow y'' = f(x).$$

3.2: $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y'y'' = y'y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{2}(y')^2 = \displaystyle\int y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\,dx + C \Rightarrow (y')^2 = 4\sqrt{y} + 2C$

$\xRightarrow[\text{Anf. bed.}]{} (-2)^2 = 4 + 2C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y' = \pm 2\sqrt[4]{y}$, wegen $y'(1) < 0$ nur unteres Vorzeichen brauchbar $\Rightarrow y^{-\frac{1}{4}}\,dy = -2\,dx \Rightarrow \dfrac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -2x + C_1 \xRightarrow[y(1)=1]{} \dfrac{4}{3} = -2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{10}{3} \Rightarrow$

$y = \left(-\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}\right)^{\frac{4}{3}},\quad -\infty < x < \dfrac{5}{3}$.

3.3: a) $\pm l \int\limits_{\tilde\varphi=0}^{\varphi} \frac{d\tilde\varphi}{\sqrt{2gl(-1+[1-\frac{1}{2}\tilde\varphi^2])+v_0^2}} = t$ („+“, falls $v_0 > 0$, „−“, falls $v_0 < 0$)

$$\Rightarrow \frac{l}{v_0} \int\limits_{\tilde\varphi=0}^{\varphi} \frac{d\tilde\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{gl}}{v_0}\tilde\varphi\right)^2}} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{gl}}{v_0}\varphi\right) = t$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gl}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\right).$$

b) Kleinste positive Nullstelle φ_1 von $2gl(-1+\cos\varphi)+v_0^2 \Rightarrow$ kleinste positive Nullstelle φ_1 von $2gl\left(-1+\left[1-\frac{\varphi^2}{2}\right]\right)+v_0^2 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{|v_0|}{\sqrt{gl}}$.

c) $T_1 = l \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{|v_0|}{\sqrt{gl}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{-gl\varphi^2+v_0^2}} = \frac{l}{|v_0|} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{|v_0|}{\sqrt{gl}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{gl}}{v_0}\varphi\right)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{gl}}{|v_0|}\frac{|v_0|}{\sqrt{gl}}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3.4: $(t^2+2t+5)\ddot x + (2t+2)\dot x = 4 \xRightarrow[\dot x \equiv p]{} (t^2+2t+5)\dot p + (2t+2)p = 4$. $\quad \dot x(1) = 1 \Rightarrow p(1) = 1$, $(t^2+2t+5)\dot p_h + (2t+2)p_h = 0$

$$\Rightarrow \frac{dp_h}{p_h} = -\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt \Rightarrow \ln|p_h| = -\ln|t^2+2t+5| + C_1 \Rightarrow p_h(t) = \frac{C_2}{t^2+2t+5} \Rightarrow p_p(t)$$

$$= u(t)\frac{1}{t^2+2t+5} \Rightarrow \dot u = 4 \Rightarrow u = 4t \Rightarrow p_p(t) = \frac{4t}{t^2+2t+5} \Rightarrow p(t) = \frac{4t+C_2}{t^2+2t+5} \xRightarrow[p(1)=1]{} C_2 = 4$$

$$\Rightarrow \dot x = p = \frac{4(t+1)}{t^2+2t+5} \Rightarrow x(t) = 2\ln|t^2+2t+5| + C_3 \xRightarrow[x(1)=0]{} C_3 = -2\ln 8 \xRightarrow[t^2+2t+5>0 \text{ für } t=1]{}$$

$$x(t) = 2\ln\frac{t^2+2t+5}{8}.$$

3.5: $W = \begin{vmatrix} e^{c_1x} & e^{c_2x} & e^{c_3x} \\ c_1 e^{c_1x} & c_2 e^{c_2x} & c_3 e^{c_3x} \\ c_1^2 e^{c_1x} & c_2^2 e^{c_2x} & c_3^2 e^{c_3x} \end{vmatrix} = e^{c_1x} e^{c_2x} e^{c_3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{vmatrix} = e^{(c_1+c_2+c_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2-c_1 & c_3-c_1 \\ c_1^2 & c_2^2-c_1^2 & c_3^2-c_1^2 \end{vmatrix}$

$$= e^{(c_1+c_2+c_3)x}(c_2-c_1)(c_3-c_1)(c_3-c_2) \neq 0.$$

3.6: $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2\ (\delta \geqq 0, \omega_0 > 0)$, $\quad P'(\lambda) = 2\lambda + 2\delta$. 1. Fall: $\quad \delta^2 - \omega_0^2 > 0$: $P(\lambda_1) = 0$, $P'(\lambda_1) = 2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2} \neq 0$. $\quad P(\lambda_2) = 0$. $\quad P'(\lambda_2) = -2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2} \neq 0$. $\quad$ 2. Fall: $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$: $P(\lambda_1) = 0$, $\quad P'(\lambda_1) = 2i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \neq 0$. $\quad P(\lambda_2) = 0$, $\quad P'(\lambda_2) = -2i\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \neq 0$.

3. Fall: $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$: $\quad P(\lambda_1) = 0$, $\quad P'(\lambda_1) = 0$, $\quad P''(\lambda_1) = 2 \neq 0$.

3.7: $l_\nu = 1 \quad (\nu = 1, \ldots, n)$.

3.8: $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

3.9: $x(t) = C_1\,e^{-\frac{3}{2}t} + C_2\,e^{(2+i)t} + C_3\,e^{(2-i)t}$.

3.10: $y(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x} + C_3 x\,e^{2x}$.

3.11: $x(t) = C_1 + C_2 t + \ldots + C_{n-2}t^{n-3} + C_{n-1}\,e^t + C_n\,e^{-t}$.

3.12: $e^{-\frac{3}{2}t}$, $e^{2t}\cos t$, $e^{2t}\sin t$.

3.13: ja, da die Konstanten in der Linearkombination der Basiselemente beliebige komplexe Zahlen sein können.

3.14: ja, falls alle Basiselemente reell sind; andernfalls nein.

3.15: a) $x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i\pi,\ \ \lambda_2 = -i\pi \Rightarrow$ Basis: $e^{i\pi t}, e^{-i\pi t} \Rightarrow$ reelle Basis $\cos(\pi t)$, $\sin(\pi t) \Rightarrow x(t) = C_1\cos(\pi t) + C_2\sin(\pi t)$. Lösung a) $x(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$; $x\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ $\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{4} + C_2\sin\frac{3\pi}{4} = 0 \Rightarrow C_2 = 1$. $x(t) = \cos(\pi t) + \sin(\pi t)$ [genau eine Lösung].

b) $x(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$; $x(1) = 0 \Rightarrow \cos\pi + C_2\sin\pi = 0$. $\Rightarrow -1 + C_2\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ keine Lösung $C_2 \Rightarrow$ im Fall b) existiert keine Lösung $x(t)$.

c) $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$; $x(1) = 0 \Rightarrow C_2\sin\pi = 0 \Rightarrow C_2\cdot 0 = 0 \Rightarrow C_2 =$ beliebig $\Rightarrow x(t) = C_2\sin(\pi t)$ [unendlich viele Lösungen].

3.16: Bis (3.139) mit $\delta = 0$ siehe Beispiel 3.11 $\Rightarrow y_p(t) = \dfrac{b}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\,e^{i\omega_1 t}$. Formel (3.141) ist mit $\delta = 0$ auch jetzt noch gültig; es ist $\alpha = 0$, falls $0 < \omega_1 < \omega_0$, und $\alpha = \pi$, falls $0 < \omega_0 < \omega_1$ gilt.

3.17: $y'' + \omega_0^2 y = b\,e^{i\omega_0 t},\ \ y_h = e^{\lambda t},\ \lambda^2 + \omega_0^2 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0,\ \ y_p(t) = B_0 t\,e^{i\omega_0 t}$
$\Rightarrow B_0(2i\omega_0 - t\omega_0^2 + \omega_0^2 t)\,e^{i\omega_0 t} = b\,e^{i\omega_0 t} \Rightarrow B_0 = -\dfrac{bi}{2\omega_0} \Rightarrow y_p(t) = -\dfrac{1}{2\omega_0}\,b\,it\,e^{i\omega_0 t}$.

3.18: $2y_h'' + 5y_h' = 0,\ \ y_h = e^{\lambda x} \Rightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ l_1 = 1, \lambda_2 = -\dfrac{5}{2},\ l_2 = 1.$

$y_p(x) = B_0\,e^{\frac{5}{2}x} \Rightarrow B_0\left(2\cdot\dfrac{25}{4}\,e^{\frac{5}{2}x} + 5\cdot\dfrac{5}{2}\,e^{\frac{5}{2}x}\right) = e^{\frac{5}{2}x} \Rightarrow B_0 = \dfrac{1}{25} \Rightarrow y_p(x) = \dfrac{1}{25}\,e^{\frac{5}{2}x}$.

3.19: $y_p(x) = B_0\,e^{-\frac{5}{2}x}\,x \Rightarrow B_0 = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow y_p(x) = -\dfrac{1}{5}\,x\,e^{-\frac{5}{2}x}$.

3.20: $2y'' + 5y' = 3\cosh\left(\dfrac{5}{2}x\right)$, $3\cosh\left(\dfrac{5}{2}x\right) = \dfrac{3}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x} + e^{\frac{-5}{2}x}\right) \Rightarrow y_p = \dfrac{3}{2}y_1 + \dfrac{3}{2}y_2$ mit
$2y_1'' + 5y_1' = e^{\frac{5}{2}x},\ \ 2y_2'' + 5y_2' = e^{-\frac{5}{2}x} \xrightarrow[\text{Aufg. 3.18; 3.19}]{} y_1 = \dfrac{1}{25}\,e^{\frac{5}{2}x},\ \ y_2 = -\dfrac{1}{5}\,x\,e^{-\frac{5}{2}x}$
$\Rightarrow y_p = \dfrac{3}{50}\,e^{\frac{5}{2}x} - \dfrac{3}{10}\,xe^{-\frac{5}{2}x}$.

3.21: $(\sinh t)\cos t = (\sinh t)\,\mathrm{Re}\,[e^{it}] = \mathrm{Re}\,[(\sinh t)\,e^{it}] = \mathrm{Re}\,[\tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\,e^{it}]$
$= \mathrm{Re}\,[\tfrac{1}{2}\,e^{(1+i)t} - \tfrac{1}{2}\,e^{(-1+i)t}]$.

$\ddot{X}_I + 4\dot{X}_I + 5X_I = \tfrac{1}{2}\,e^{(1+i)t},\ \ \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i \Rightarrow X_{Ip} = B_0\,e^{(1+i)t}$
$\Rightarrow B_0[(1+i)^2 + 4(1+i) + 5] = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B_0 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{9+6i} = \dfrac{3-2i}{78} \Rightarrow$

$X_{Ip} = \left(\dfrac{1}{26} - \dfrac{1}{39}i\right)e^{(1+i)t};\ \ddot{X}_{II} + 4\dot{X}_{II} + 5X_{II} = -\dfrac{1}{2}\,e^{(-1+i)t} \Rightarrow X_{IIp} = \tilde{B}_0\,e^{(-1+i)t} \Rightarrow$

$\tilde{B}_0[(-1+i)^2 + 4(-1+i) + 5] = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \tilde{B}_0 = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+2i} = -\dfrac{1}{10}(1-2i) \Rightarrow$

$X_{IIp} = \left(-\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5}i\right)e^{(-1+i)t};\ x_p(t) = \mathrm{Re}\left[\left(\dfrac{1}{26} - \dfrac{1}{39}i\right)e^{(1+i)t} + \left(-\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5}i\right)e^{(-1+i)t}\right]$
$= e^t\left(\dfrac{1}{26}\cos t + \dfrac{1}{39}\sin t\right) - e^{-t}\left(\dfrac{1}{10}\cos t + \dfrac{1}{5}\sin t\right)$.

3.22: $\ddot{x}_h + 4x_h = 0$, $x_h = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2\,i \Rightarrow$ Basis e^{2it}, $e^{-2it} \Rightarrow$ reelle Basis $\cos(2t)$, $\sin(2t) \Rightarrow x_h = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$. $x_p = B_0 + B_1 t \Rightarrow 4B_0 + 4B_1 t = 2t \Rightarrow$ Koeffizientenvergleich: $4B_0 = 0,\ 4B_1 = 2 \Rightarrow B_0 = 0,\ B_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_p = \frac{t}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2} + C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$.

$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2} + C_2 \sin(2t)$. $x(b) = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} + C_2 \sin(2b) = 0. \Rightarrow C_2 = -\frac{b}{2}\frac{1}{\sin(2b)}$, falls Nenner $\neq 0 \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2} - \frac{b}{2}\frac{\sin(2t)}{\sin(2b)}$.

Genau eine Lösung der Randwertaufgabe für $0 < b < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Mehrere Lösungen der Randwertaufgabe für kein b. Keine Lösung der Randwertaufgabe für $b = \frac{\pi}{2}$ und $b = \pi$.

3.23: $y_h'' + 3y_h' - 4y_h = 0$, $y_h = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ l_1 = 1,\ \lambda_2 = -4,\ l_2 = 1$, $y_{pI} = B_0 + B_1 x \Rightarrow 3B_1 - 4B_0 - 4B_1 x = 12x \Rightarrow$ Koeffizientenvergleich: $3B_1 - 4B_0 = 0$, $-4B_1 = 12 \Rightarrow B_1 = -3$, $B_0 = -\frac{9}{4} \Rightarrow y_{pI} = -\frac{9}{4} - 3x$.

$Y_{pII} = B_0 e^{2ix} \Rightarrow B_0(-4e^{2ix} + 6i\,e^{2ix} - 4e^{2ix}) = 25e^{2ix} \Rightarrow B_0 = -2 - \frac{3}{2}i \Rightarrow Y_{pII} = -\left(2 + \frac{3}{2}i\right)e^{2ix}$

$\Rightarrow y_{pII} = \mathrm{Re}\,[Y_{pII}] = -2\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) \Rightarrow y = y_{pI} + y_{pII} + y_h = -\frac{9}{4} - 3x - 2\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) + C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

$y(0) = \frac{5}{4}$, $y'(0) = 2 \Rightarrow \frac{5}{4} = -\frac{9}{4} - 2 + C_1 + C_2, 2 = -3 + 3 + C_1 - 4C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{24}{5}$, $C_2 = \frac{7}{10} \Rightarrow y(x) = -\frac{9}{4} - 3x - 2\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{24}{5}e^x + \frac{7}{10}e^{-4x}$.

3.24: $x^2 y_h'' + x y_h' + y_h = 0$, $y_h = x^\lambda \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i \Rightarrow$ Basis: $x^i, x^{-i} \Rightarrow$ reelle Basis: $\cos(\ln x)$, $\sin(\ln x) \Rightarrow y_h = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$, $y_p = B_0 x^{-1} \Rightarrow B_0 = 1 \Rightarrow y_p = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \frac{1}{x} \xrightarrow[y(1)=3,\,y'(1)=-2]{} 3 = C_1 + 1,\ -2 = C_2 - 1 \Rightarrow C_1 = 2$, $C_2 = -1 \Rightarrow y = 2\cos(\ln x) - \sin(\ln x) + \frac{1}{x}$.

3.25: $t^2\ddot{x}_h + t\dot{x}_h + x_h = 0$, $x_h = t^\lambda \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ Basis: $t^i = e^{i\ln t}$, $t^{-i} = e^{-i\ln t} \Rightarrow$ reelle Basis: $\cos(\ln t)$, $\sin(\ln t) \Rightarrow x_h = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)$. $4\cos(\ln t) = \mathrm{Re}(4e^{i\ln t}) = \mathrm{Re}(4t^i)$. $t^2\ddot{X} + t\dot{X} + X = 4t^i \Rightarrow X_p = B_0 t^i \ln t \Rightarrow B_0\left[t^2\left\{i(i-1)t^{i-2}\ln t + 2it^{i-1}\frac{1}{t} + t^i\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right\} + t\left\{it^{i-1}\ln t + t^i\frac{1}{t}\right\} + t^i \ln t\right] = 4t^i \Rightarrow B_0\,2i = 4 \Rightarrow B_0 = -2i \Rightarrow$ $X_p = -2it^i \ln t = -2i\,e^{i\ln t}\ln t \Rightarrow x_p = \mathrm{Re}(-2i\,e^{i\ln t}\ln t) = 2(\ln t)\sin(\ln t) \Rightarrow$ $x(t) = 2(\ln t)\sin(\ln t) + C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t)$.

3.26: $y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0$, $y_h = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. $y_p = u_1(x)e^{-x} + u_2(x)e^{-2x}$, $u_1' e^{-x} + u_2' e^{-2x} = 0$, $-u_1' e^{-x} - u_2'\,2e^{-2x} = (1 + e^x)^{-1}$ $\Rightarrow u_1' = e^x(1 + e^x)^{-1}$, $u_2' = -e^{2x}(1 + e^x)^{-1} \Rightarrow u_1 = \ln(1 + e^x)$, $u_2 = -e^x + \ln(1 + e^x) \Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (\ln(1 + e^x))e^{-x} + (-e^x + \ln(1 + e^x))e^{-2x} = \tilde{C}_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)$.

3.27: $w(x) = p\int_0^x G(x,\tilde{x})\,d\tilde{x} + p\int_x^l G(x,\tilde{x})\,d\tilde{x} = \frac{p}{6l^3EJ}\left\{\int_0^l(-2x^3\tilde{x}^3 + 3lx^3\tilde{x}^2 + 3lx^2\tilde{x}^3 - 6l^2x^2\tilde{x}^2)\,d\tilde{x} + \int_0^x(3l^3x\tilde{x}^2 - l^3\tilde{x}^3)\,d\tilde{x} + \int_x^l(3l^3\tilde{x}x^2 - l^3x^3)\,d\tilde{x}\right\} = \frac{p}{6EJ}\left\{(-2x^3 + 3lx^2)\frac{l}{4} + (3lx^3 - 6l^2x^2)\frac{1}{3} + x^4 - \frac{1}{4}x^4 + 3x^2\frac{1}{2}(l^2 - x^2) - x^3(l - x)\right\} = \frac{px^2}{24EJ}(x^2 - 2lx + l^2) = \frac{px^2}{24EJ}(x - l)^2$.

4.1: $\dot{y}_1 = y_2 \Rightarrow \ddot{y}_1 = \dot{y}_2 = -\dfrac{BQ}{m} y_4 \Rightarrow \dddot{y}_1 = -\dfrac{BQ}{m}\dot{y}_4 = -\dfrac{B^2Q^2}{m^2} y_2 \Rightarrow y_1^{(4)} = -\dfrac{B^2Q^2}{m^2}\dot{y}_2$ $= \dfrac{B^3Q^3}{m^3} y_4 \Rightarrow y_1^{(5)} = \dfrac{B^3Q^3}{m^3}\dot{y}_4 = \dfrac{B^4Q^4}{m^4} y_2 \Rightarrow$ (4.14) lautet hier: $\dot{y}_1 = y_2, \ddot{y}_1 = -\dfrac{BQ}{m} y_4,$ $\dddot{y}_1 = -\dfrac{B^2Q^2}{m^2} y_2, \quad y_1^{(4)} = \dfrac{B^3Q^3}{m^3} y_4, \quad y_1^{(5)} = \dfrac{B^4Q^4}{m^4} y_2.$

Dieses lineare Gleichungssystem ist nicht eindeutig nach $y_2, \ldots, y_6$ auflösbar; die Koeffizientendeterminante ist gleich null.

4.2: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{d}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}.$ char. Gl.: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2$ $- \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3. \quad (\mathbf{A} - 4\mathbf{E})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow -6d_1 + 3d_2 = 0, \; 2d_1 - d_2 = 0 \Rightarrow$ Basis: $d_1 = 1, d_2 = 2 \Rightarrow \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$ $(\mathbf{A} + 3\mathbf{E})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow d_1 + 3d_2 = 0, \; 2d_1 + 6d_2 = 0 \Rightarrow$ Basis: $d_1 = -3,$ $d_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{4t} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} \Rightarrow x_1 = C_1\,\mathrm{e}^{4t} - 3C_2\,\mathrm{e}^{-3t}, \; x_2 = 2C_1\,\mathrm{e}^{4t}$ $+ C_2\,\mathrm{e}^{-3t}.$

4.3: $m\dot{p}_1 + BQp_2 = 0, \; m\dot{p}_2 - BQp_1 = 0, \; m\dot{p}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{B}\mathbf{p} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & BQ & 0 \\ -BQ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{p} = \mathbf{d}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \Rightarrow (\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow$ char. Gl.: $\det(\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} m\lambda & BQ & 0 \\ -BQ & m\lambda & 0 \\ 0 & 0 & m\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m\lambda(m^2\lambda^2 + B^2Q^2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \; l_1 = 1, \lambda_2 = \mathrm{i}\omega \left(\omega = \dfrac{BQ}{m}\right), \quad l_2 = 1,$

$\lambda_3 = -\mathrm{i}\omega, \quad l_3 = 1. \quad (\mathbf{A}\lambda_1 + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{0},$ Basis: $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{A}\lambda_2 + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow (\mathbf{A}\mathrm{i}\omega + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0},$ Basis: $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{p}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \; (\mathbf{A}\lambda_3 + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}_3(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

$\Rightarrow$ reelle Basis: $\mathbf{p}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \dfrac{1}{2}(\mathbf{p}_2(t) + \mathbf{p}_3(t)) = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathbf{p}_2(t) - \mathbf{p}_3(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ allgemeine reelle Lösung:

$p_1(t) = -C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), p_2(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), p_3(t) = C_3 \Rightarrow$ allgemeine reelle Lösung von (1.31) $\left[\tilde{C}_1 = \dfrac{1}{\omega} C_1, \; \tilde{C}_2 = \dfrac{1}{\omega} C_2\right]$: $x(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t) + C_4,$ $y(t) = \tilde{C}_1 \sin(\omega t) - \tilde{C}_2 \cos(\omega t) + C_5, z(t) = C_3 t + C_6.$

4.4: Hat in dem Differentialgleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{y}'' + \mathbf{B}\mathbf{y}' + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{g}(x)$, $\det \mathbf{A} \neq 0$, das Störglied $\mathbf{g}(x)$ in einem ersten Fall die Gestalt $\mathbf{g}(x) = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \ldots + \mathbf{b}_s x^s)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ($\mathbf{b}_s \neq \mathbf{0}, \alpha, \beta$ reell) oder in einem zweiten Fall die Gestalt $\mathbf{g}(x) = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \ldots \mathbf{b}_s x^s)\,\mathrm{e}^{\alpha x} \sin(\beta x)$ ($\mathbf{b}_s \neq \mathbf{0}, \alpha, \beta$ reell) und sind die Elemente aller Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_s$ reell, so kann eine partikuläre Lösung $\mathbf{y}_p(x)$ im ersten Fall durch $\mathbf{y}_p(x) = \mathrm{Re}\,(\mathbf{Y}_p(x))$ und im zweiten Fall durch $\mathbf{y}_p(x) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{Y}_p(x))$ angegeben werden, wobei $\mathbf{Y}_p(x)$ eine partikuläre Lösung des Systems $\mathbf{A}\mathbf{Y}'' + \mathbf{B}\mathbf{Y}' + \mathbf{C}\mathbf{Y} = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \ldots + \mathbf{b}_s \mathbf{x}^s)\,\mathrm{e}^{qx}$ mit $q = \alpha + \mathrm{i}\beta$ ist.
Gegeben seien die r linearen inhomogenen Differentialgleichungssysteme $\mathbf{A}\mathbf{y}'' + \mathbf{B}\mathbf{y}' + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{g}_\varrho(x)$, ($\varrho = 1, \ldots, r$), die sich nur in den Störgliedern unterscheiden, während die linken Seiten übereinstimmen. Eine partikuläre Lösung des jeweiligen Systems sei $\mathbf{y}_\varrho(x)$ ($\varrho = 1, \ldots, r$). Für das Dif-

ferentialgleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{y}'' + \mathbf{B}\mathbf{y}' + \mathbf{C}\mathbf{y} = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \mathbf{g}_\varrho(x)$ ist $\mathbf{y}(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \mathbf{y}_\varrho(x)$ eine partikuläre Lösung.

4.5: $\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. $\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_h + \mathbf{B}\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_h = \mathbf{d}\, e^{\lambda t} \Rightarrow (\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow \det(\mathbf{A}\lambda + \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $l_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $l_2 = 1$. $(\mathbf{A}\lambda_1 + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Basis: $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}\lambda_2 + \mathbf{B})\,\mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Basis: $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$. $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}_I(t) + \mathbf{g}_{II}(t)$ mit $\mathbf{g}_I(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t$, $\mathbf{g}_{II}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$. $\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_{pI} + \mathbf{B}\mathbf{x}_{pI} = \mathbf{g}_I(t)$. $\mathbf{x}_{pI} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} t \Rightarrow$ Koeffizientenvergleich: $\mathbf{A}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_{pI} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$.

$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}_{pII} + \mathbf{B}\mathbf{x}_{pII} = \mathbf{g}_{II}$, $\mathbf{x}_{pII} = \mathbf{B}_0\, e^{-t} \Rightarrow \mathbf{A}(-\mathbf{B}_0) + \mathbf{B}\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{B} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_0 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_{pII} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_{pI} + \mathbf{x}_{pII} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{12}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}\right\}$.
$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \Rightarrow x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{12} e^{-t} - \frac{1}{2} t + \frac{1}{12}$, $x_2(t) = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - \frac{5}{12} e^{-t} - t - \frac{5}{6}$. $\xRightarrow[x_1(0)=0,\, x_2(0)=\frac{5}{12}]{} C_1 + C_2 = -\frac{1}{6}$, $-2C_1 - C_2 = \frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{4}{3}$.

4.6: $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(t) = \frac{m_1 m_2}{\cos(\omega t)}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{x}_p(t) = u_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + u_3(t)\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\cos(\omega t) + u_4(t)\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\sin(\omega t)$. $\dot{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{u}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \dot{u}_3\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\cos(\omega t) + \dot{u}_4\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{u}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dot{u}_3\omega\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\sin(\omega t) + \dot{u}_4\omega\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}\cos(\omega t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(t)$

$$\text{mit } \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} \frac{m_1 m_2}{\cos(\omega t)}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\omega t)}\begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \dot{u}_1 \equiv 0$, $\dot{u}_2 \equiv 0$, $\dot{u}_3 = -\frac{1}{\omega}\tan(\omega t)$, $\dot{u}_4 \equiv \frac{1}{\omega}$. Damit kann verwendet werden: $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$, $u_3 = \frac{1}{\omega^2}\ln|\cos(\omega t)|$, $u_4 = \frac{1}{\omega} t \Rightarrow$ partikuläre Lösung:

$x_1 = \frac{m_2}{\omega^2}[\ln|\cos(\omega t)|\cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)]$, $\quad x_2 = -\frac{m_1}{\omega^2}[\ln|\cos(\omega t)|\cos(\omega t) + \omega t\sin(\omega t)]$.

Literatur

Autorenkollektiv: Mathematik für ökonomische und ingenieurökonomische Fachrichtungen, Teil I Mathematische Grundlagen. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1971.

Bräuning, G.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 4. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1977.

Goering, H.: Elementare Methoden zur Lösung von Differentialgleichungsproblemen. 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1971.

Heber, G.: Mathematische Hilfsmittel der Physik II. Berlin: Akademie-Verlag 1967.

Kamke, E.: Differentialgleichungen, Teil I, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1969.

Kneschke, A.: Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Band I, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1965.

Petrowski, J. G.: Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954.

Pontrjagin, L. S.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965.

Smirnow, W. J.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II. 11. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag, der Wissenschaften 1972.

Stepanow, W. W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen. 3. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1967.

Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1965.

Register