

MATHEMATIK

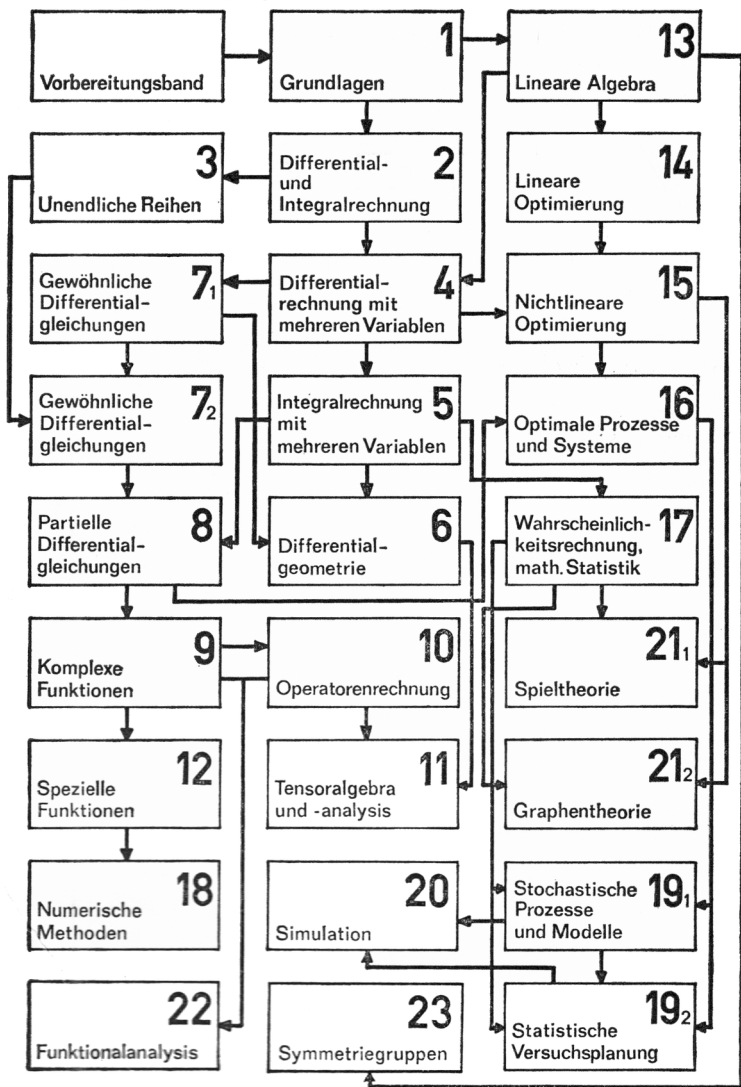
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

15

ELSTER

Nichtlineare Optimierung

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 15

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel† · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

PROF. DR. K.-H. ELSTER

Nichtlineare Optimierung

2., ÜBERARBEITETE AUFLAGE



BSB B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

1980

Inhalt

1.	Problemstellung	7
2.	Mathematische Grundlagen	11
2.1.	Konvexe Mengen	11
2.2.	Trennungssätze	14
2.3.	Konvexe Funktionen	17
2.4.	Systeme linearer und konvexer Ungleichungen	23
3.	Klassische Extremwertaufgaben	27
3.1.	Extremwertaufgaben ohne Restriktionen	27
3.2.	Extremwertaufgaben mit Restriktionen	28
4.	Spezielle nichtlineare Optimierungsprobleme	31
4.1.	Konvexe Optimierungsprobleme	31
4.2.	Quadratische Optimierungsprobleme	34
4.3.	Separable Optimierungsprobleme	35
4.4.	Hyperbolische Optimierungsprobleme	36
4.5.	Geometrische Optimierungsprobleme	38
5.	Optimalitätsbedingungen	40
5.1.	Zusammenhang zwischen nichtlinearen Optimierungsproblemen und Sattelpunktproblemen	40
5.2.	Lokale Optimalitätsbedingungen	43
6.	Dualitätssätze	51
6.1.	Dualitätssatz der linearen Optimierung	51
6.2.	Dualitätssatz von Wolfe	52
6.3.	Dualitätssatz von Dorn	53
7.	Lösungsverfahren	56
7.1.	Zur Einteilung der Lösungsverfahren	56
7.2.	Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme	57
7.2.1.	Das Verfahren von Beale	57
7.2.2.	Andere Lösungsverfahren	64
7.3.	Gradientenverfahren	64
7.3.1.	Allgemeine Bemerkungen	64
7.3.2.	Das reduzierte Gradientenverfahren	66
7.3.3.	Ergänzende Bemerkungen zum reduzierten Gradientenverfahren	71
7.3.4.	Weitere Verfahren	73
7.4.	Straf- und Barriereverfahren	73
7.4.1.	Allgemeine Bemerkungen	73
7.4.2.	Strafverfahren	74
7.4.3.	Barriereverfahren	77
7.5.	Schnittebenenverfahren	79
7.5.1.	Allgemeine Bemerkungen	79

Inhalt	5
7.5.2. Das Schnittebenenverfahren von Kelley	80
7.5.3. Weitere Verfahren	83
7.6. Direkte Verfahren	83
7.6.1. Allgemeine Bemerkungen	83
7.6.2. Der eindimensionale Fall	85
7.6.3. Der n -dimensionale Fall	88
Lösungen der Aufgaben	92
Literatur	103
Register	103

1. Problemstellung

Bei zahlreichen Prozessen in der Industrie, Landwirtschaft, Volkswirtschaftsplanung usw. hat man im Interesse der volkswirtschaftlichen Entwicklung die Frage nach der optimalen Gestaltung von Verfahren, nach einem optimalen Einsatz vorhandener Arbeitskräfte, Maschinen oder Rohstoffe, nach der Optimierung des Gewinns, der Herstellungs- bzw. Transportkosten, der Prozeßdauer und von Maschinenstillstandszeiten zu beantworten. Dabei ist sowohl ein geeignetes mathematisches Modell zu ermitteln als auch ein entsprechendes Lösungsverfahren anzuwenden.

Unter Optimierung verstehen wir die Auswahl günstiger Werte in bezug auf ein Gütekriterium (Zielfunktion) unter Beachtung der Bedingungen (Restriktionen), die uns durch die objektive Realität auferlegt werden.

Da nicht alle Bedingungen berücksichtigt werden können, muß ein die Wirklichkeit möglichst gut widerspiegelndes, aber möglichst einfaches Modell aufgestellt werden. Das zugehörige mathematische Modell hat dann die Form eines Optimierungsproblems.

Sind mehrere Gütekriterien zu berücksichtigen, so spricht man von Polyoptimierung oder Vektoroptimierung. Sind sowohl das Gütekriterium als auch die Restriktionen zufälliger Natur (im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung), so spricht man von stochastischer Optimierung. Solche Probleme werden in diesem Buch nicht behandelt.

Bemerkenswerte Ergebnisse konnten bereits mit der linearen Optimierung erzielt werden, doch ist die Anwendung nur linearer Modelle für die moderne Praxis nicht ausreichend. Schon einfache Beispiele zeigen, daß praktischen Prozessen angepaßte mathematische Modelle wichtige Nichtlinearitäten enthalten, die das Studium von nichtlinearen Optimierungsproblemen erforderlich machen (vgl. Beispiel 1.2). Von besonderer Bedeutung sind dabei die konvexen Optimierungsprobleme. Daher spielt in den folgenden Darlegungen der Begriff der Konvexität eine zentrale Rolle.

Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel.

Beispiel 1.1: Die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 - 5,$$

deren Bild ein Rotationsparaboloid mit einer zur z -Achse parallelen Achse ist (in Bild 1.1 wird f

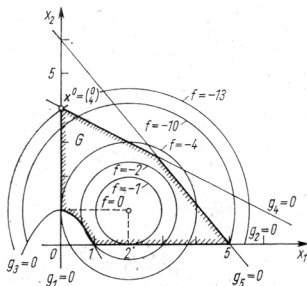


Bild 1.1

durch Niveaulinien skizziert), nimmt ihr Minimum über der Menge

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) = x_2 \geq 0, \\ g_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0, \quad g_4(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 - 8 \leq 0, \\ g_5(\mathbf{x}) = 6x_1 + 5x_2 - 30 \leq 0\}$$

im Punkte $\mathbf{x}^0 = (0, 4)^T$ an (Bild 1.1); es ist $f(\mathbf{x}^0) = -13$.

Das folgende Beispiel entnehmen wir einer elektrotechnischen Aufgabenstellung.

Beispiel 1.2: Eine Spannungsquelle E mit dem Innenwiderstand R_0 ist über ein T -Netzwerk an den Lastwiderstand R_L angeschlossen (Bild 1.2). Das T -Netzwerk ist in seinen Widerständen R_1 , R_2

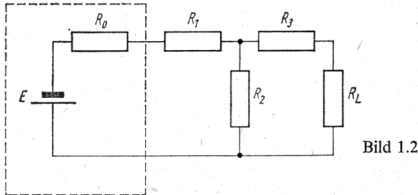


Bild 1.2

R_3 so zu dimensionieren, daß bei einer Schwankung von R_L zwischen 50Ω und 150Ω eine Laständerung von höchstens $\pm 5\%$ an der Spannungsquelle, bezogen auf die Last bei dem Sollwert $R_L = 100 \Omega$, eintritt. Gleichzeitig ist die an R_L für $R_L = 100 \Omega$ abzugebende Leistung zu maximieren.

Zur Aufstellung des zugehörigen mathematischen Modells werden die Widerstände R in Ω , die Spannungen U in V, die Stromstärken I in A und die Leistungen P in VA = W angegeben; anschließend gehen wir zu dimensionslosen Größen über.

Nach den Kirchhoffschen Gesetzen der Elektrotechnik erhält man den Gesamtwiderstand

$$R_E(R_L) = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_L)}{R_2 + R_3 + R_L}.$$

Bezeichnet man den Gesamtwiderstand R_E für den Sollwert $R_L = 100 \Omega$ mit $R_E(100)$, so folgt aus der Bedingung der Aufgabenstellung

$$0,95 \leq \frac{R_E}{R_E(100)} \leq 1,05.$$

Wegen der Monotonie von $\frac{R_E}{R_E(100)}$ in R_L folgen hieraus die Ungleichungen für R_1 , R_2 und R_3 :

$$0,95 R_E(100) \leq R_E(50); \quad R_E(150) \leq 1,05 R_E(100), \\ R_1 \geq 0, \quad R_2 \geq 0, \quad R_3 \geq 0. \quad (1.0)$$

Die zu maximierende Zielfunktion f ergibt sich wegen

$$P_L = I_L^2 R_L, \quad I_L = I \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_L}, \\ I = \frac{(R_2 + R_3 + R_L)E}{(R_0 + R_1)(R_2 + R_3 + R_L) + R_2(R_3 + R_L)}$$

für $R_L = 100 \Omega$ zu

$$f(R_1, R_2, R_3) = P_{100} = \frac{100 E^2 R_2^2}{[(R_0 + R_1)(R_2 + R_3 + 100) + R_2(R_3 + 100)]^2}.$$

Es ist also die Funktion $f(R_1, R_2, R_3)$ unter den Bedingungen (1.0) zu maximieren.

Als allgemeines Optimierungsproblem bezeichnen wir die Aufgabe, einen Extremwert (etwa ein Minimum) einer Funktion f zu finden, wobei gewisse Nebenbedingungen (Restriktionen) zu beachten sind. Wir schreiben dafür

$$\begin{aligned} \min \{ & f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G \}, \\ G = \{ & \mathbf{x} \in R^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \forall i \in I_g; h_j(\mathbf{x}) = 0 \forall j \in I_h \} \\ \text{mit} \quad & I_g = \{1, \dots, m\}, \quad I_h = \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Die speziellen Fälle $I_g = \emptyset$ bzw. $I_h = \emptyset$ sind zugelassen. Dabei heißen $f: R^n \rightarrow R$ die Zielfunktion, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, und $h_j: R^n \rightarrow R$, $j \in I_h$, Restriktionsfunktionen und G zulässiger Bereich des Problems (1.1) (vgl. dazu G im Bild 1.1).

Jedes $\mathbf{x} \in G$ heißt zulässiger Punkt von (1.1). Die in (1.1) gewählte Schreibweise „min“ bedeutet, daß für f das Minimum oder Infimum bezüglich G zu ermitteln ist. Wird das Minimum von f bezüglich G in $\mathbf{x}^0 \in G$ angenommen, so nennt man \mathbf{x}^0 Lösung (oder Optimalpunkt) und $f(\mathbf{x}^0)$ den Optimalwert des Problems (1.1). Wegen $\max_{\mathbf{x} \in G} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x} \in G} [-f(\mathbf{x})]$ können wir uns im folgenden auf Minimierungsprobleme beschränken.

Wird das Minimum von f bezüglich $G \cap U$ für eine gewisse Umgebung U von $\mathbf{x}^0 \in G$ in \mathbf{x}^0 angenommen, so nennen wir \mathbf{x}^0 eine lokale Lösung.

Wir nennen das Problem (1.1) nichtlinear, wenn wenigstens eine der Funktionen f , g_i , h_j nichtlinear ¹⁾ ist, andernfalls heißt (1.1) lineares Problem. Lineare Optimierungsprobleme wurden bereits in Band 14 behandelt.

Bei nichtlinearen Optimierungsproblemen treten folgende Schwierigkeiten im Vergleich zu linearen Problemen auf:

1. Der zulässige Bereich G wird im allgemeinen nicht durch Hyperebenen begrenzt und ist nicht notwendig konvex.
2. Durch $f(\mathbf{x}) = \text{const}$ wird im allgemeinen keine Hyperebene des R^n , sondern eine (gekrümmte) Hyperfläche definiert.
3. Eine Lösung \mathbf{x}^0 des Problems kann auch im Innern von G liegen.
4. Ein lokales Minimum von f bezüglich G ist im allgemeinen kein globales Minimum von f bezüglich G .
5. Bei Ziel- und Restriktionsfunktionen müssen die bei den jeweiligen Aufgaben vorliegenden Eigenschaften wie Stetigkeit, (evtl. mehrfache) Differenzierbarkeit, Konvexität usw. sowohl für die Theorie als auch bei Lösungsverfahren berücksichtigt werden.

Daraus ergibt sich u. a., daß die bekannten Lösungsverfahren für lineare Optimierungsprobleme sich nicht ohne weiteres auf Probleme der Form (1.1) übertragen lassen.

¹⁾ Genauer schließen wir dabei auch die linear-affinen Funktionen aus. Die Funktion $f: R^n \rightarrow R^m$ heißt linear-affin, wenn gilt $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, wobei \mathbf{A} eine (m, n) -Matrix und $\mathbf{b} \in R^m$ ist.

Durch Spezialisierung der in (1.1) auftretenden Funktionen und Mengen erhält man spezielle Klassen von nichtlinearen Optimierungsproblemen, von denen wir einige angeben wollen:

- a) klassische Optimierungsprobleme (Extremwertaufgaben ohne Restriktionen bzw. mit Restriktionen in Gleichungsform) für

$$I_g = \emptyset, I_h = \emptyset \quad \text{bzw.} \quad I_g = \emptyset, I_h \neq \emptyset, k < n;$$

- b) konvexe Optimierungsprobleme für

$$I_g \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f, g_i \text{ konvex, } h_j \text{ linear-affin};$$

- c) quadratische Optimierungsprobleme für

$$I_g \neq \emptyset, f \text{ quadratisch, } g_i, h_j \text{ linear-affin};$$

- d) separable Optimierungsprobleme für

$$I_g \neq \emptyset, f \text{ und } g_i \text{ separabel, d. h. von der Form } f(\mathbf{x}) = \sum_{v=1}^n f_v(x_v),$$

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{v=1}^n g_{iv}(x_v);$$

- e) hyperbolische Optimierungsprobleme für

$$I_g \neq \emptyset, f \text{ von der Form } f(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}.$$

Besondere Bedeutung haben in der nichtlinearen Optimierung die konvexen Probleme erlangt. Das liegt vor allem daran, daß

- a) viele Modelle aus der Praxis mit hinreichend guter Näherung auf ein konvexes mathematisches Optimierungsproblem führen,
- b) eine genauere Approximation durch konvexe (nichtlineare) als durch lineare Modelle möglich ist,
- c) in der Theorie der Optimierung und der Lösungsverfahren weittragende und gut anwendbare Aussagen möglich sind.

Daher gehen wir auf konvexe Mengen und konvexe Funktionen im folgenden Abschnitt näher ein.

2. Mathematische Grundlagen

2.1. Konvexe Mengen

Bei nichtlinearen Optimierungsproblemen spielt der Begriff der Konvexität eine wesentliche Rolle. Wir behandeln zunächst konvexe Mengen, wobei einige Begriffe aus Band 14 wiederholt und ergänzt werden.

Definition 2.1: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} x^1, x^2 \in M \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x^1 + \mu x^2 \in M.$$

Die leere Menge \emptyset wollen wir als konvex ansehen.

Beispiel 2.1: a) Jede einelementige Menge $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, und der \mathbb{R}^n selbst sind konvexe Mengen.

b) Bild 2.1 und Bild 2.2 zeigen geometrische Veranschaulichungen konvexer bzw. nichtkonvexer Mengen im \mathbb{R}^2 .

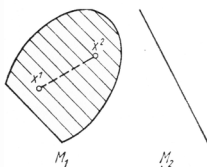


Bild 2.1

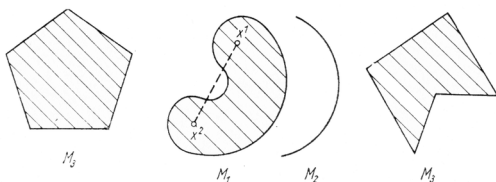


Bild 2.2

c) Jedes abgeschlossene, offene oder halboffene Segment

$$[x^1, x^2], (x^1, x^2), [x^1, x^2) \quad \text{bzw.} \quad (x^1, x^2] \quad \text{mit} \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$$

ist eine konvexe Menge.

d) Jeder abgeschlossene oder offene Halbraum

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \leq \alpha\} \quad \text{bzw.} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x < \alpha\}$$

sowie jede Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = \alpha\}$ mit $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind konvexe Mengen.

Aus Definition 2.1 folgt sofort, daß eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn gilt:

$$x^1, x^2 \in M \Rightarrow [x^1, x^2] \subseteq M.$$

Aufgabe 2.1: Zeigen Sie, daß die Kreisfläche

$$K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r; \quad r > 0\}$$

eine konvexe Menge ist.

Aufgabe 2.2: Man zeige: Für eine beliebige (m, n) -Matrix A und beliebiges $b \in \mathbb{R}^m$ ist die Menge

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

konvex.

Konvexe Mengen lassen sich auch mit Hilfe des Begriffes der konvexen Linearkombination charakterisieren.

Definition 2.2: Ein Punkt $x \in R^n$ heißt **konvexe Linearkombination** der Punkte $x^1, \dots, x^m \in R^n$, wenn sich x in der Form darstellen läßt:

$$x = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_m x^m \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R_+, \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1.$$

In Bild 2.3 sind konvexe Linearkombinationen von zwei bzw. drei Punkten dargestellt.

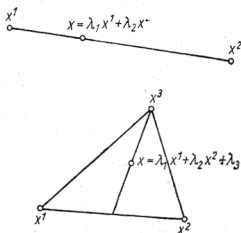


Bild 2.3

Man hat folgende Aussage (Beweis in [6]):

Satz 2.1: Eine Menge $M \subseteq R^n$ ist genau dann konvex, wenn jede konvexe Linearkombination von Punkten aus M wieder zu M gehört, wenn also gilt:

$$\left. \begin{array}{l} x^1, \dots, x^m \in M \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R_+ \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_m x^m \in M. \quad (2.1)$$

Der nachstehende Satz gibt Auskunft über Operationen mit konvexen Mengen.

Satz 2.2: Es seien $M_1, M_2 \subseteq R^n$ konvexe Mengen und $\lambda \in R$. Dann sind die folgenden Mengen wieder konvex:

1. die Summe $M_1 + M_2 := \{z \mid z = x + y; x \in M_1, y \in M_2\}$,
2. das skalare Vielfache $\lambda M_1 := \{z \mid z = \lambda x; x \in M_1\}$,
3. das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 := \{z \mid z = (x, y)^T, x \in M_1, y \in M_2\}$.¹⁾

Über den Durchschnitt konvexer Mengen hat man die folgende Aussage, deren Beweis leicht zu führen ist (vgl. Band 14, S. 7):

Satz 2.3: Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} M_i$ von beliebig vielen konvexen Mengen $M_i \subseteq R^n$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge), ist konvex.

Wir führen nun den Begriff des Eckpunktes einer konvexen Menge ein (vgl. Band 14, S. 8).

Definition 2.3: Es sei $M \subseteq R^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Eckpunkt** (oder **Extremalpunkt**) von M , wenn es keine Darstellung der Form

$$x = \lambda x^1 + \mu x^2 \quad \text{mit} \quad x^1, x^2 \in M, x^1 \neq x^2; \lambda, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$$

gibt.

¹⁾ Der einfacheren Schreibweise wegen stellen wir im folgenden einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_1 \times M_2$ häufig in der Form $(x, y)^T$ dar und verwenden nicht die Schreibweise $(x^T, y^T)^T$.

In Bild 2.4 sind x^1 und x^2 die Eckpunkte von M ; in Bild 2.5 sind x^1 , x^2 , x^3 die Eckpunkte von M ; in Bild 2.6 sind x^0 und alle Punkte des von x^1 und x^2 berandeten Kurvenbogens Eckpunkte von M . Konvexe Mengen besitzen i. allg. unendlich viele Eckpunkte, wohingegen konvexe Polyeder (vgl. Def. 2.5) als spezielle konvexe Mengen nur endlich viele Eckpunkte aufweisen (vgl. Band 14, S. 8).

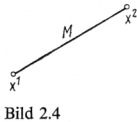


Bild 2.4

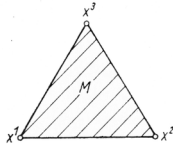


Bild 2.5

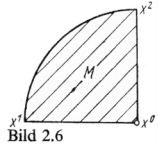


Bild 2.6

Aus der Existenz unendlich vieler Eckpunkte bei konvexen Mengen folgt u. a., daß die bekannte Simplexmethode der linearen Optimierung bei Problemen mit konvexem zulässigen Bereich i. allg. versagt, ganz abgesehen davon, daß Optimalpunkte nicht auf dem Rand liegen müssen.

Die Eckpunkte einer konvexen Menge lassen sich in folgender Weise charakterisieren (vgl. [21], S. 28/29):

Satz 2.4: Es sei $M \subseteq R^n$ eine konvexe Menge. $x \in M$ ist genau dann Eckpunkt von M , wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Die Menge $M \setminus \{x\}$ ist konvex.
2. Es gibt keine zwei Punkte $x^1, x^2 \in M$ mit

$$x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2), x^1 \neq x^2.$$

Jeder (beliebigen) Menge $M \subseteq R^n$ läßt sich in eindeutiger Weise eine konvexe Menge zuordnen, die M umfaßt.

Definition 2.4: Es sei $M \subseteq R^n$ eine beliebige Menge. Unter der **konvexen Hülle** $[M]$ von M versteht man den Durchschnitt aller konvexen Mengen aus R^n , die M umfassen.

Aus Satz 2.3 folgt sofort, daß die konvexe Hülle einer Menge stets eine konvexe Menge ist.

Beispiel 2.2: a) Die konvexe Hülle von zwei Punkten $x^1, x^2 \in R^n$ ist das Segment $[x^1, x^2]$.

b) Die konvexe Hülle von drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten $x^1, x^2, x^3 \in R^n$ ist die von diesen Punkten bestimmte Dreiecksfläche (Bild 2.7).

c) Bild 2.8 zeigt die konvexe Hülle $[M]$ der (schraffiert gezeichneten) Menge M .

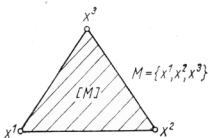


Bild 2.7

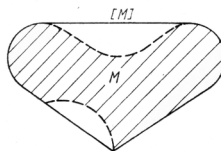


Bild 2.8

Beispiel 2.3: Für die Menge

$$M := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{1+x_1^2} \right\}$$

ergibt sich die konvexe Hülle

$$[M] = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_2 < 1 \} \cup \{(0, 1)^T\},$$

d. h., die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge ist i. allg. nicht abgeschlossen.

Zum Begriff der konvexen Linearkombination besteht folgende Beziehung (vgl. [21], S. 20f.):

Satz 2.5: Die konvexe Hülle $[M]$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gleich der Menge aller konvexen Linearkombinationen von Punkten aus M .

Für Verfahren zur Lösung linearer und nichtlinearer Optimierungsprobleme ist die folgende spezielle Klasse von konvexen Mengen von Bedeutung.

Definition 2.5: Es sei $M := \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m\} \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt die konvexe Hülle $[M]$ dieser Menge **konvexes Polyeder**.

Beispiel 2.4: Bild 2.4, Bild 2.7 und Bild 2.9 veranschaulichen konvexe Polyeder, die durch zwei, drei bzw. fünf Punkte erzeugt werden.

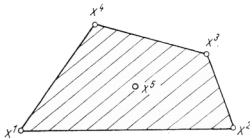


Bild 2.9

2.2. Trennungssätze

Wenn in der Ebene zwei disjunkte konvexe Mengen gegeben sind, so folgt bereits aus der Anschauung die Vermutung, daß diese Mengen durch eine Gerade „getrennt“ werden können derart, daß die eine Menge vollständig „auf der einen Seite“ und die andere Menge vollständig „auf der anderen Seite“ dieser Geraden liegen. Aussagen dieser Art, auf den \mathbb{R}^n übertragen, werden als Trennungssätze bezeichnet. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der konvexen Mengen und in der nichtlinearen Optimierung.

Vorbereitend führen wir den Begriff der trennenden Hyperebene ein, und zwar für beliebige Mengen.

Definition 2.6: Es seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei beliebige Mengen und $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha\}$ eine Hyperebene. Dann sagt man:

1. H trennt M_1 und M_2 , wenn gilt:

$$\mathbf{x} \in M_1 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \alpha$$

und

$$\mathbf{x} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \alpha;$$

2. H trennt M_1 und M_2 streng, wenn gilt:

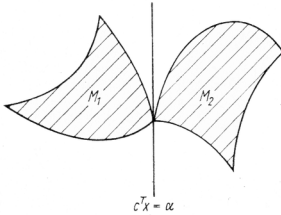
$$\mathbf{x} \in M_1 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \alpha$$

und

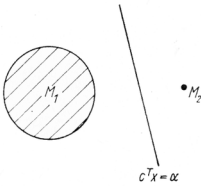
$$\mathbf{x} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} > \alpha.$$

Die Mengen M_1, M_2 heißen dann **trennbar** bzw. **streng trennbar**.

Beispiel 2.5: Beispiele für trennbare, streng trennbare bzw. nicht trennbare Mengen im \mathbb{R}^2 findet man in Bild 2.10, Bild 2.11 bzw. Bild 2.12.

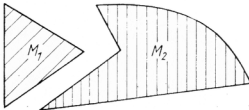


M_1 und M_2 sind trennbar



M_1 und M_2 sind streng trennbar

Bild 2.11



M_1 und M_2 sind nicht trennbar

Bild 2.12

Wir formulieren zunächst zwei Aussagen über trennende Hyperebenen, deren Beweise man in [2] bzw. in [6] findet.

Satz 2.6: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene konvexe Menge mit $\mathbf{0} \notin M$. Dann existiert eine Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha\}$ mit $\alpha > 0$ und

$$\mathbf{x} \in M \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} > \alpha.$$

Satz 2.7: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine nichtleere konvexe Menge mit $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Dann existiert eine Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0\}$ mit $\mathbf{x} \in M \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0$.

Damit lassen sich die folgenden beiden Aussagen beweisen:

Satz 2.8 (Trennungssatz): Es seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nichtleere konvexe Mengen mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Dann existiert eine trennende Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha\}$, d. h., es gilt:

$$\mathbf{x} \in M_1 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \alpha.$$

Beweis: Die Menge $M_1 + (-M_2)$ ist nach Satz 2.2 konvex, und wegen $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \setminus (M_1 + [-M_2])$. Daher existiert nach Satz 2.7 eine Hyperebene $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0\}$ mit

$$\mathbf{x} \in M_1 + (-M_2) \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq 0;$$

folglich gilt

$$\mathbf{y} \in M_1, \mathbf{z} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \geq 0$$

und damit auch

$$\beta := \inf_{\mathbf{y} \in M_1} \mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq \sup_{\mathbf{z} \in M_2} \mathbf{c}^T \mathbf{z} =: \gamma.$$

Wir setzen $\alpha := \frac{\beta + \gamma}{2}$ und erhalten

$$\mathbf{z} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{z} \leq \alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{y} \in M_1 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq \alpha.$$

Anmerkung: Die Aussage von Satz 2.8 kann auch unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen werden.

Der folgende Satz gibt an, unter welchen Bedingungen zwei konvexe Mengen durch zwei parallele nichtzusammenfallende Hyperebenen getrennt werden können.

Aufgabe 2.3: Es ist festzustellen, ob die Mengen

$$M_1 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 + x \text{ für } x \geq 0, \quad y \geq -2x \text{ für } x < 0\},$$

$$M_2 := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y < -\frac{1}{2}|x|\}$$

trennbar sind (Bild 2.13). Gegebenenfalls ist die Menge \mathfrak{H} aller trennenden Hyperebenen (Geraden) anzugeben.

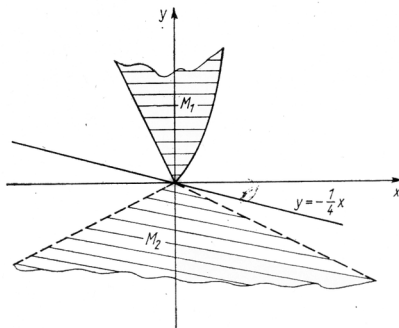


Bild 2.13

Satz 2.9 (Strenger Trennungssatz): Es seien $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nichtleere abgeschlossene konvexe Mengen mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, und wenigstens eine der beiden Mengen sei beschränkt. Dann existiert eine streng trennende Hyperebene

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \alpha\},$$

d. h., es gilt:

$$\mathbf{x} \in M_1 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} > \alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \in M_2 \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} < \alpha.$$

Auf den Beweis dieses Satzes gehen wir nicht ein.

2.3. Konvexe Funktionen

In der nichtlinearen Optimierung nehmen die konvexen Optimierungsprobleme eine herausragende Stellung ein. Dies ist bedingt durch spezifische Eigenschaften konvexer Funktionen, wie sie in den folgenden Sätzen zum Ausdruck kommen.

Definition 2.7: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

1. f **konvex** auf M , wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2);$$

2. f **streng konvex** auf M , wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2 \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^0, \lambda + \mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) < \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2);$$

3. f **konkav** bzw. **streng konkav** auf M , wenn $-f$ konvex bzw. streng konvex auf M ist.

Dabei bedeutet \mathbb{R}_+^0 die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Aus dieser Definition folgt sofort, daß jede auf M streng konvexe Funktion auch konvex auf M ist.

Beispiel 2.6: Bild 2.14 zeigt eine konvexe Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

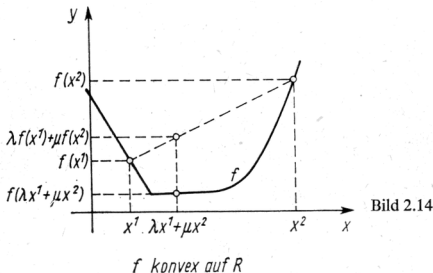


Bild 2.14

Beispiel 2.7: a) Jede lineare Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, und jede linear-affine Funktion $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \alpha$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in \mathbb{R}$, ist sowohl konvex als auch konkav (auf \mathbb{R}^n).

b) Die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ist konvex auf \mathbb{R}^n , denn es gilt für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) &= \|\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2\| \leq \|\lambda \mathbf{x}^1\| + \|\mu \mathbf{x}^2\| \\ &= \lambda \|\mathbf{x}^1\| + \mu \|\mathbf{x}^2\| = \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2). \end{aligned}$$

c) Jede positiv semidefinite quadratische Form

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \text{ eine symmetrische } (n,n)\text{-Matrix,}$$

ist auf \mathbb{R}^n konvex, jede positiv definite quadratische Form ist auf \mathbb{R}^n streng konvex.

Aufgabe 2.4: Man ermittle die Konvexitätseigenschaften der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, a) ohne Zuhilfenahme, b) mit Hilfe der Differentialrechnung.

Über nichtnegative Linearkombinationen konvexer Funktionen gilt der

Satz 2.10: Es seien $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$; $i = 1, \dots, m$, konvexe Funktionen. Dann ist auch die Funktion

$$f := \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$$

konvex auf M .

Insbesondere folgt aus Satz 2.10, daß die Summe von konvexen Funktionen wieder konvex ist, was im allgemeinen für Differenz, Produkt und Quotient von konvexen Funktionen nicht zutrifft.

Beispiel 2.8: a) $f(x) = 3e^x - \ln x$ ist auf $M = (0, \infty)$ konvex (sogar streng konvex), da $f_1(x) = e^x$ und $f_2(x) = -\ln x$ auf M konvex (streng konvex) sind.

b) Die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x^2 + x$ sind auf \mathbb{R} konvex. Die Differenzfunktion

$$f(x) := f_1(x) - f_2(x) = -x^2$$

ist auf \mathbb{R} nicht konvex (sondern streng konkav).

c) Die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = -x$ sind auf \mathbb{R} konvex. Ihre Produktfunktion

$$f(x) := f_1(x) f_2(x) = -x^2$$

ist jedoch auf \mathbb{R} nicht konvex.

d) Die Funktionen $f_1(x) = -x$ und $f_2(x) = x^2$ sind auf \mathbb{R} konvex. Der Quotient

$$f(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = -\frac{1}{x}$$

ist auf $(0, \infty)$ nicht konvex, also auch nicht auf \mathbb{R} .

Aufgabe 2.5: Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2,$$

ist auf Konvexität zu untersuchen.

Die Kenntnisse über konvexe Mengen lassen sich vorteilhaft auch für konvexe Funktionen verwenden, wenn man den sog. „Epigraphen“ einer Funktion f bildet (Def. 2.8). Dieser ist dann eine konvexe Menge, die bestimmt ist durch die Punkte $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))^T$ des Graphen von f und alle „über diesem Graphen“ liegenden Punkte.

Definition 2.8: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$\text{epi } f := \{(\mathbf{x}, \gamma)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) \leq \gamma\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

der **Epigraph** (oder **obere Halbzylinder**) von f .

Bild 2.15 und Bild 2.16 zeigen die Epigraphen einer beliebigen bzw. einer konvexen Funktion.

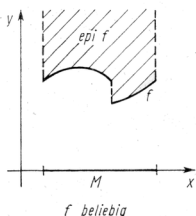


Bild 2.15

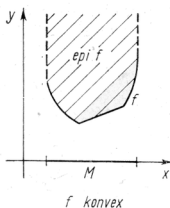


Bild 2.16

Konvexe Funktionen lassen sich mittels ihres Epigraphen charakterisieren gemäß

Satz 2.11: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:
 f konvex auf $M \Leftrightarrow \text{epi } f$ ist eine konvexe Menge.

Beweis: 1. (\Rightarrow): Es seien $(\mathbf{x}^1, \gamma_1)^T, (\mathbf{x}^2, \gamma_2)^T \in \text{epi } f$, d. h. $f(\mathbf{x}^1) \leq \gamma_1, f(\mathbf{x}^2) \leq \gamma_2$. Dann folgt für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ wegen der Konvexität von f

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2) \leq \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2$$

und damit

$$(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2, \lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2)^T = \lambda (\mathbf{x}^1, \gamma_1)^T + \mu (\mathbf{x}^2, \gamma_2)^T \in \text{epi } f.$$

Somit ist $\text{epi } f$ konvex.

2. (\Leftarrow): Für beliebige $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ folgt aus der Konvexität von $\text{epi } f$

$$(\mathbf{x}^1, f(\mathbf{x}^1))^T, (\mathbf{x}^2, f(\mathbf{x}^2))^T \in \text{epi } f \Rightarrow (\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2, \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2))^T \in \text{epi } f$$

und damit

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2).$$

Folglich ist f konvex auf M .

Bei Optimierungsproblemen werden Niveaumengen von Funktionen zur Darstellung zulässiger Bereiche verwendet. Ist z. B. in (1.1)

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad g_i \text{ konvex}\},$$

dann ergibt sich G als Durchschnitt der m Niveaumengen G_i mit $G_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0\}$, $i = 1, \dots, m$ (Bild 2.17 zeigt die Niveaumenge \bar{N}_α von f zum Niveau α).

Niveaumengen konvexer Funktionen sind konvexe Mengen, denn es gilt

Satz 2.12: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \text{ konvex auf } M \Rightarrow \begin{cases} \text{Die Niveaumengen} \\ \bar{N}_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \quad \text{und} \\ N_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < \alpha\} \\ \text{sind konvex für jedes } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen die Konvexität von \bar{N}_α . Es sei $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \bar{N}_\alpha$, d. h. $f(\mathbf{x}^1) \leq \alpha$, $f(\mathbf{x}^2) \leq \alpha$. Dann folgt für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ wegen der Konvexität von f

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2) \leq \lambda \alpha + \mu \alpha = \alpha$$

und damit $\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2 \in \bar{N}_\alpha$.

Die Umkehrung von Satz 2.12 gilt jedoch nicht, wie das Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, zeigt. Zwar ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $\bar{N}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq \alpha\}$ konvex, jedoch ist f nicht konvex auf \mathbb{R} .

Eine Veranschaulichung des Sachverhaltes geben Bild 2.17 und Bild 2.18.

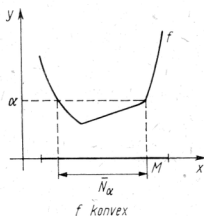


Bild 2.17

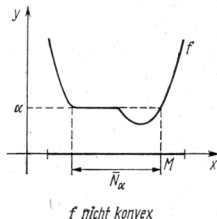


Bild 2.18

Als eine Folgerung von Satz 2.11 ergibt sich

Satz 2.13: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge, $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, konvexe Funktionen und für jedes $\mathbf{x} \in M$ die Menge $\{f_i(\mathbf{x}) \mid i = 1, \dots, m\}$ nach oben beschränkt. Dann ist die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \max_{i \in \{1, \dots, m\}} f_i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in M,$$

konvex auf M .

Beweis: Die f_1, \dots, f_m sind konvex auf M . Daher sind nach Satz 2.11 die Mengen $\text{epi } f_i$, $i = 1, \dots, m$, konvex. Wegen Satz 2.3 ist dann die Menge

$$\bigcap_{i=1}^m \text{epi } f_i = \text{epi } f$$

ebenfalls konvex und damit f eine auf M konvexe Funktion.

Wir bringen nun die Konvexität einer Funktion in Verbindung mit den Begriffen der Stetigkeit und partiellen (bzw. totalen) Differenzierbarkeit, wodurch die Anwendung von Sätzen der Analysis möglich wird.

Das folgende Beispiel zeigt, daß eine konvexe Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, nicht notwendig auf M stetig ist.

Beispiel 2.9: Die Funktion $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist zwar konvex auf $[0, \infty)$, aber in $x_0 = 0$ nicht stetig.

Für offene konvexe Mengen hat man jedoch den

Satz 2.14: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene konvexe Menge. Dann gilt:

f konvex auf $M \Rightarrow f$ stetig auf M .

Den Beweis des Satzes findet man z. B. in [21].

Im folgenden setzen wir voraus, daß die betrachteten Funktionen gewisse Differenzierbarkeitsforderungen erfüllen. Dann lassen sich Konvexität und strenge Konvexität von Funktionen charakterisieren durch:

Satz 2.15: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M stetig partiell differenzierbar. Dann gilt¹⁾:

$$1. f \text{ konvex auf } M \Leftrightarrow (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1) \leq f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1) \quad \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M. \quad (2.2)$$

$$2. f \text{ streng konvex auf } M \Leftrightarrow (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1) < f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1) \quad \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2.$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Aussage, da der Beweis für die zweite Aussage analog verläuft.

1. (\Rightarrow): Für beliebige $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M$ und beliebige $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt einerseits

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1) + \mu[f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1)],$$

andererseits ist

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1 + \mu[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1]).$$

Damit hat man die Ungleichung

$$\frac{f(\mathbf{x}^1 + \mu[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1]) - f(\mathbf{x}^1)}{\mu} \leq f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1).$$

Anwendung des Mittelwertsatzes auf der linken Seite ergibt

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1 + \vartheta \mu[\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1]) \leq f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1) \quad \text{mit } \vartheta \in (0,1).$$

Für $\mu \rightarrow +0$ folgt daraus wegen der Stetigkeit von ∇f die Beziehung

$$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1) \leq f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^1).$$

2. (\Leftarrow): Für beliebige $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ folgt $\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2 \in M$ und

$$f(\mathbf{x}^2) - f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \geq \lambda(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2),$$

$$f(\mathbf{x}^1) - f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \geq -\mu(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2).$$

Multipliziert man die erste Ungleichung mit μ , die zweite mit λ , so ergibt sich nach Addition

$$\mu f(\mathbf{x}^2) + \lambda f(\mathbf{x}^1) - f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \geq 0,$$

und das war zu zeigen.

Die 1. Aussage von Satz 2.15 besagt, daß der Graph der Funktion f stets oberhalb (oder auf) der in einem Punkt $\mathbf{x}^1 \in M$ angelegten Tangentialhyperebene $y = f(\mathbf{x}^1) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1)$ liegt.

¹⁾ Zur Bedeutung der Schreibweise $\nabla f(x)$ vgl. Band 4, Abschn. 3.9.2.4.

Bild 2.19 und Bild 2.20 veranschaulichen die Aussage von Satz 2.15 für den Fall $n = 1$, d. h. $M \subseteq \mathbb{R}$. Dabei hat man im Falle $n = 1$ offensichtlich $\nabla f(x) = \frac{df}{dx}$.

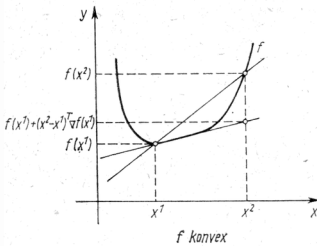


Bild 2.19

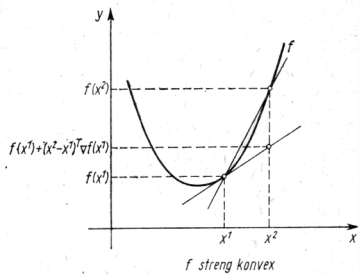


Bild 2.20

In Band 2, Abschnitt 7.5.1., wurde gezeigt, daß eine zweimal differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, genau dann auf I konvex ist, wenn gilt $f''(x) \geq 0$ für alle x aus dem Innern von I . Damit entscheidet das Vorzeichen der zweiten Ableitung über das Konvexitätsverhalten von f .

Um für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ($M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge) die Konvexität charakterisieren zu können, führen wir die Hessesche Matrix dieser Funktion ein.

Definition 2.9: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M zweimal stetig partiell differenzierbar und $\mathbf{x}^0 \in M$. Dann heißt die symmetrische Matrix

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

Hessesche Matrix von f im Punkte \mathbf{x}^0 .

Es gilt nun die folgende Aussage.

Satz 2.16: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

1. f konvex auf $M \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \mathbf{y}$ positiv semidefinit für alle $\mathbf{x} \in M$.
2. f streng konvex auf $M \Leftrightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) \mathbf{y}$ positiv definit für alle $\mathbf{x} \in M$.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Aussage. Nach Definition ist f genau dann konvex auf M , wenn f auf jedem in M liegenden Segment konvex ist. Es seien $\mathbf{x} \in M$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Wir untersuchen nun die Funktion einer Variablen

$$\varphi(\mu) := f(\mathbf{x} + \mu \mathbf{y}), \quad \mu \in I,$$

mit $I := \{\mu \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in M\}$ bezüglich Konvexität. Man findet unmittelbar

$$\varphi'(\mu) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) y_i,$$

$$\varphi''(\mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) y_i y_j = \mathbf{y}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \mathbf{y}.$$

Daher ist nach Band 2, Satz 7.10, f genau dann konvex auf M , wenn gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \mathbf{y} \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M \text{ und } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Anmerkung: Der Beweis von Satz 2.16 kann auch mit Hilfe von Satz 2.15 geführt werden.

Die Umkehrung der zweiten Aussage von Satz 2.16 gilt nicht. Wir betrachten dazu

Beispiel 2.10: Die Funktion $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, ist streng konvex. Es gilt $\mathbf{H}_f(x) = 12x^2$ und daher $\mathbf{H}_f(0) = 0$. Folglich ist $\mathbf{y}^T \mathbf{H}_f(x) \mathbf{y}$ nicht positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2.11: Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \text{ist auf } \mathbb{R}^2 \text{ konvex.}$$

Es gilt nämlich

$$\mathbf{H}_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 4x_2^2 & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 4x_1^2 + 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

und somit für alle $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$(y_1, y_2)^T \mathbf{H}_f(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4 [x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2] \geq 0.$$

Aufgabe 2.6: Man beweise: Die Funktion

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ist streng konvex.

2.4. Systeme linearer und konvexer Ungleichungen¹⁾

Bei der Herleitung von Optimalitätsbedingungen für nichtlineare Optimierungsprobleme benötigen wir Aussagen über die Existenz von Lösungen linearer bzw. konvexer Systeme von Gleichungen und Ungleichungen.

Ohne Beweis (vgl. dazu z. B. [15]) formulieren wir folgende allgemeine Aussage:

Satz 2.17: Ist \mathbf{A}_i ($i = 1, \dots, 4$) eine (m_i, n) -Matrix und sind $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ keine Nullmatrizen, dann besitzen die beiden Systeme

$$\text{I. } \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

und

$$\text{II. } \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}^1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{y}^2 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{y}^3 + \mathbf{A}_4^T \mathbf{y}^4 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3 \geq \mathbf{0}$$

¹⁾ Dieser Abschnitt ist zum Verständnis der folgenden Darlegungen nicht unbedingt erforderlich und kann beim ersten Studium übergangen werden.

Lösungen

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}^i \in \mathbb{R}^{m_i} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

mit

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{y}^1 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{y}^2 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{y}^3 > \mathbf{0}.$$

Mittels Satz 2.17 lassen sich sogenannte „Alternativsätze“ herleiten, die bezüglich zweier gegebener Systeme I und II aussagen, daß genau eines der beiden Systeme eine Lösung besitzt. Bei dem folgenden Alternativsatz von Motzkin wollen wir die charakteristische Beweisführung für solche Aussagen demonstrieren.

Satz 2.18 (Alternativsatz von Motzkin): Es seien \mathbf{A}_i ($i = 1, 3, 4$) eine (m_i, n) -Matrix und \mathbf{A}_1 nicht die Nullmatrix. Dann hat entweder das System

$$\text{I. } \mathbf{A}_1 \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

oder das System

$$\text{II. } \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}^1 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{y}^3 + \mathbf{A}_4^T \mathbf{y}^4 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^3 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^1 \neq \mathbf{0}$$

eine Lösung

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y}^i \in \mathbb{R}^{m_i} \quad (i = 1, 3, 4),$$

d. h. niemals sind beide Systeme zugleich lösbar.

Beweis: 1. $\text{I} \Rightarrow \sim \text{II}$: Es seien \mathbf{x} eine Lösung von System I und $\mathbf{y}^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ($i = 1, 3, 4$) mit $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^3 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^1 \neq \mathbf{0}$. Dann folgt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}^1 + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_3^T \mathbf{y}^3 + \mathbf{x}^T \mathbf{A}_4^T \mathbf{y}^4 > 0,$$

da $\mathbf{x}^T \mathbf{A}_4^T \mathbf{y}^4 = 0$, $\mathbf{x}^T \mathbf{A}_3^T \mathbf{y}^3 \geq 0$, $\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}^1 > 0$. Folglich hat das System II keine Lösung.

2. $\sim \text{I} \Rightarrow \text{II}$: I sei nicht lösbar. Dann gilt, wie man indirekt zeigen kann:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}^2).$$

Wegen Satz 2.17 hat man

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{y}^1 + \mathbf{A}_3^T \mathbf{y}^3 + \mathbf{A}_4^T \mathbf{y}^4 = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^3 \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{y}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^1 \neq \mathbf{0},$$

d. h. II ist lösbar.

Mit Hilfe von Satz 2.18 läßt sich der bekannteste Alternativsatz für lineare Systeme, der Satz von Farkas-Minkowski, beweisen.

Satz 2.19 (Satz von Farkas-Minkowski): Es seien \mathbf{A} eine (m, n) -Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann hat entweder das System

$$\text{I. } \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}^T \mathbf{x} > 0 \quad \text{eine Lösung} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

oder das System

$$\text{II. } \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \quad \text{eine Lösung} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,$$

d. h. niemals sind beide Systeme zugleich lösbar.*

¹⁾ Die Bezeichnung $\text{I} \Rightarrow \sim \text{II}$ besagt, daß die Lösbarkeit des Systems I impliziert, daß II nicht lösbar ist (vgl. Band 1).

²⁾ $\mathbf{A}_1 \mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}$ bedeutet, daß nicht alle Koordinaten des Vektors $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}$ positiv sind.

Beweis: Nach Satz 2.18 hat entweder I eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ oder $\text{II}' \mathbf{b}\xi - \mathbf{A}^T \mathbf{y}^3 = \mathbf{0}$, $\xi \geq 0$, $\xi \neq 0$, $\mathbf{y}^3 \geq \mathbf{0}$ hat eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}^3 \in \mathbb{R}^m$. Wegen $\xi \in \mathbb{R}$ folgt $\xi > 0$. Dividiert man II' durch ξ und setzt $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}^3}{\xi}$, so folgt die Äquivalenz von II' und II. Damit ist Satz 2.19 bewiesen.

Wir interpretieren nun die Aussage von Satz 2.19 geometrisch und schreiben dazu die Systeme I und II in der Form

$$\text{I: } \mathbf{a}^j \mathbf{x} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad \mathbf{b}^T \mathbf{x} > 0,$$

$$\text{II: } \sum_{j=1}^m \tilde{\mathbf{a}}^j y_j = \mathbf{b}, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

wobei \mathbf{a}^j den j -ten Zeilenvektor von \mathbf{A} und $\tilde{\mathbf{a}}^j$ den j -ten Spaltenvektor von \mathbf{A}^T bezeichnen (offenbar gilt $\tilde{\mathbf{a}}^j = \mathbf{a}^j$).

I bedeutet geometrisch, daß ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zu finden ist, der einen stumpfen Winkel ($\geq \frac{\pi}{2}$) mit den Vektoren $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m$ und einen spitzen Winkel ($< \frac{\pi}{2}$) mit dem Vektor \mathbf{b} bildet. Nach II ist der Vektor \mathbf{b} als nichtnegative Linearkombination der Vektoren $\tilde{\mathbf{a}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{a}}^m$ darzustellen.

Die beiden möglichen Fälle sind für $n = 2, m = 3$ in Bild 2.21 bzw. Bild 2.22 veranschaulicht.

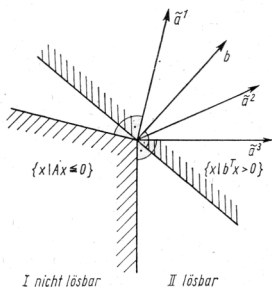


Bild 2.21

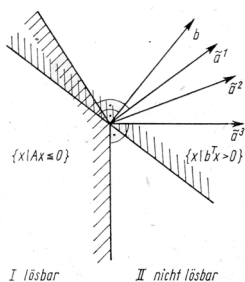


Bild 2.22

Aufgabe 2.7: Gegeben seien die drei Vektoren $\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie die Mengen

$$K := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{a}^i \mathbf{x} \leq 0, \quad i = 1, 2, 3\},$$

$$B := \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{b}^T \mathbf{x} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in K\}.$$

b) Ist $\mathbf{b}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ als nichtnegative Linearkombination von $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ darstellbar? Gegebenenfalls ist die Menge aller Zahlentripel (c_1, c_2, c_3) zu ermitteln, für die gilt:

$$\mathbf{b}^0 = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{a}^i; \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Eine ähnliche Rolle wie die bisher angegebenen Aussagen über lineare Systeme in der linearen Optimierung spielen die folgenden Sätze über konvexe Systeme in der nichtlinearen Optimierung. Die Beweise dieser Aussagen findet man z. B. in [6].

Satz 2.20: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvex auf M und $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear-affin¹⁾ mit $h(\bar{x}) = 0$ für ein $\bar{x} \in M$. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Das System} \\ f(x) < 0 \\ h(x) = 0 \\ \text{hat keine} \\ \text{Lösung } x \in M \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{R}_+^m, q \in \mathbb{R}^k \text{ mit } p \neq 0 \text{ und} \\ p^T f(x) + q^T h(x) \geq 0 \quad \forall x \in M. \end{array} \right.$$

Mittels Satz 2.20 erhält man folgenden Alternativsatz für konvexe Systeme:

Satz 2.21: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvex auf M . Dann hat entweder

$$I: f(x) < 0 \text{ eine Lösung } x \in M$$

oder es gilt

$$II: p^T f(x) \geq 0 \quad \forall x \in M \text{ und ein geeignetes } p \in \mathbb{R}_+^m, p \neq 0.$$

Satz 2.22: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte²⁾ konvexe Menge, $(f_i)_{i \in I_1}$ eine beliebige Familie auf M konvexer und unterhalbstetiger³⁾ Funktionen $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$, $(h_j)_{j \in I_2}$ eine beliebige Familie linear-affiner Funktionen $h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Das System} \\ f_i(x) \leq 0, \quad i \in I_1 \\ h_j(x) = 0, \quad j \in I_2 \\ \text{hat keine Lösung} \\ x \in M. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Für eine endliche Teilfamilie von } (f_i)_{i \in I_1} \\ \text{und eine endliche Teilfamilie von } (h_j)_{j \in I_2} \\ \text{existieren} \\ p \in \mathbb{R}_+^m, q \in \mathbb{R}^k \text{ mit } (p, q)^T \neq 0 \text{ und} \\ \sum_{i=1}^m p_i f_{i_i}(x) + \sum_{l=1}^k q_l h_{l_l}(x) \geq 0 \quad \forall x \in M. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Im Falle $I_2 = \emptyset$ wird (2.3) zu einer strengen Ungleichung.

¹⁾ Eine Vektorfunktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ heißt konvex auf $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn jede Koordinatenfunktion f_1, \dots, f_m auf M konvex ist.

²⁾ Vgl. dazu Band 4, Abschnitt 1.1.3.

³⁾ $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, heißt unterhalbstetig auf M , wenn für jedes feste $x^0 \in M$ und zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon; x^0) > 0$ existiert mit $f(x^0) - \varepsilon \leq f(x) \quad \forall x \in M \cap \{x \mid \|x - x^0\| < \delta\}$.

3. Klassische Extremwertaufgaben

3.1. Extremwertaufgaben ohne Restriktionen

Aus dem Problem (1.1) erhält man klassische Optimierungsaufgaben, wenn man $f: R^n \rightarrow R$ und $I_g = I_h = \emptyset$ wählt. Solche Aufgaben wurden für Funktionen einer Variablen in Band 2, Abschnitt 7.3., und für Funktionen von n Variablen in Band 4, Abschnitt 4.2., behandelt. Hinsichtlich weiterer Darlegungen verweisen wir auf [7] und [10].

Wir stellen zunächst einige Begriffe und Aussagen über klassische Extremwertaufgaben zusammen, um in Vorbereitung der weiteren Ausführungen sowohl Analogien als auch Unterschiede zwischen klassischen Extremwertaufgaben und nichtlinearen Optimierungsproblemen deutlich zu machen.

Im folgenden sei $G \subseteq R^n$ eine Menge, deren Inneres nicht leer sein soll.

Definition 3.1: 1. $f: G \rightarrow R$ besitzt in $x^0 \in G$ ein **globales oder absolutes Minimum (Maximum)** bezüglich G , wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^0) \quad \forall x \in G \\ (f(x) &\leq f(x^0) \quad \forall x \in G). \end{aligned} \quad (3.1)$$

2. $f: G \rightarrow R$ besitzt in $x^0 \in G$ ein **lokales oder relatives Minimum (Maximum)** bezüglich G , wenn eine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 existiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^0) \quad \forall x \in U(x^0) \cap G \\ (f(x) &\leq f(x^0) \quad \forall x \in U(x^0) \cap G). \end{aligned} \quad (3.2)$$

3. Gilt in (3.1) bzw. (3.2) für alle zulässigen $x \neq x^0$ jeweils die strenge Ungleichheit, so spricht man von einem **eigentlichen Extremum** oder von einem **Extremum im engeren Sinne**.

Für eine in $x^0 \in G$ hinreichend oft stetig partiell differenzierbare Funktion f bezeichnet

$$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)^T$$

den Gradienten von f in x^0 und

$$H_f(x^0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

die Hessesche Matrix (der zweiten partiellen Ableitungen) von f in x^0 .

Für das Problem

$$\min \{f(x) \mid x \in G \subseteq R^n\}, \quad (3.3)$$

wobei G eine offene Menge und f auf G zweimal stetig partiell differenzierbar ist, gelten die in Band 2 auf Seite 133/134 angegebenen Kriterien.

Weitere hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema findet man in [7].

Für konvexe Funktionen kann man weitergehende Aussagen machen.

Satz 3.1: $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei auf G stetig differenzierbar und konvex. Dann gilt:

$$\mathbf{x}^0 \text{ Lösung von (3.3)} \Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Beweis: Da die Aussage (\Rightarrow) offensichtlich gilt, beschränken wir uns auf den Beweis von (\Leftarrow) . Es sei $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ für ein $\mathbf{x}^0 \in G$. Dann gilt nach Satz 2.15 für beliebige $\mathbf{x} \in G$

$$0 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0),$$

d. h. \mathbf{x}^0 ist Lösung von (3.3).

Satz 3.2: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ konvex (konkav) auf G , so ist jedes lokale Minimum (Maximum) von f bezüglich G zugleich ein globales Minimum (Maximum) von f bezüglich G .

Beweis: Wir führen den Beweis für konvexe Funktionen und nehmen an, daß f bezüglich G ein lokales Minimum in \mathbf{x}^1 und ein globales Minimum in \mathbf{x}^0 besitzt mit $f(\mathbf{x}^1) > f(\mathbf{x}^0)$. Dann ist für beliebige $\lambda, \mu \in (0, 1)$ mit $\lambda + \mu = 1$:

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x}^0 + \mu \mathbf{x}^1) &\leq \lambda f(\mathbf{x}^0) + \mu f(\mathbf{x}^1) \\ &< \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^1). \end{aligned}$$

Für $\lambda \rightarrow +0$ hat man $\lambda \mathbf{x}^0 + \mu \mathbf{x}^1 \rightarrow \mathbf{x}^1$. Daher gibt es in jeder Umgebung von \mathbf{x}^1 Punkte $\mathbf{x} \in G$ mit $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^1)$, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, wonach f in \mathbf{x}^1 ein lokales Minimum besitzt.

Satz 3.3: Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ konvex auf G . Dann ist die Menge G_{opt} aller Punkte, in denen f ein lokales (und damit auch ein globales) Minimum bezüglich G annimmt, konvex.

Beweis: Für beliebige $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in G_{\text{opt}}$ und beliebige $\lambda, \mu \in [0, 1]$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt unter Berücksichtigung von $f(\mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^2)$ einerseits

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1).$$

Andererseits muß gelten

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \geq f(\mathbf{x}^1);$$

damit folgt $f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1)$ und hieraus $[\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2] \in G_{\text{opt}}$. Folglich ist G_{opt} konvex.

3.2. Extremwertaufgaben mit Restriktionen

Wir formulieren hier einige Ergebnisse der klassischen Theorie der Lagrange-Multiplikatoren für Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned} \min \{ & f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G \}, \\ G = \{ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in I_h = \{1, \dots, k\}, \quad 1 \leq k < n \} \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I_h$, stetig partiell differenzierbar auf einer offenen Menge X mit $\mathbb{R}^n \supseteq X \supseteq G$ sein sollen. Es seien

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

die Jacobische Matrix von h_j in $\mathbf{x} \in X$ und

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \\ \nabla f(\mathbf{x})^T \end{pmatrix}$$

die um $\nabla f(\mathbf{x})^T$ erweiterte Jacobische Matrix in $\mathbf{x} \in X$. Mit $r(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}))$ und $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}))$ bezeichnen wir die Rangzahlen der Matrizen $\mathbf{J}_h(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{J}_0(\mathbf{x})$.

Mit Hilfe dieser Rangzahlen lassen sich Aussagen über die Existenz von Lösungen des Problems (3.4) herleiten (vgl. Band 4, Abschnitte 4.2.3. und 4.2.4.).

Im Falle $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) = k + 1$ besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in G$ kein lokales Extremum bezüglich G . Nimmt also f in $\mathbf{x}^0 \in G$ ein lokales Extremum bezüglich G an, so gilt notwendig $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) < k + 1$.

Wir führen die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := u_0 f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k u_j h_j(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G \times \mathbb{R}^{k+1}, \quad (3.5)$$

ein mit den Lagrange-Multiplikatoren u_0, u_1, \dots, u_k .

Dann gelten die folgenden Lagrangeschen Multiplikatorregeln (vgl. [6]):

Satz 3.4: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I_h$, stetig partiell differenzierbar auf X . Dann gilt:

Besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in G$ ein lokales Extremum bezüglich G und ist $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) = r(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0))$, so existiert ein Vektor $\mathbf{u}^0 = (u_0^0, u_1^0, \dots, u_k^0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$ mit $u_0^0 \neq 0$ (o. B. d. A. $u_0^0 = 1$) und $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{0}$, d. h.

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^k u_j^0 \nabla h_j(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Im Falle $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) = r(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)) = k$ sind die u_j^0 , $j \in I_h$, nach Festlegung von $u_0^0 \neq 0$ eindeutig bestimmt. Im Falle $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) = r(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)) < k$ sind die u_j^0 , $j \in I_h$, nach Festlegung von $u_0^0 \neq 0$ nicht eindeutig bestimmt.

Satz 3.5: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $h_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I_h$, stetig partiell differenzierbar auf X . Dann gilt:

Besitzt f in $\mathbf{x}^0 \in G$ ein lokales Extremum bezüglich G und ist $r(\mathbf{J}_0(\mathbf{x}^0)) > r(\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0))$, so existiert ein Vektor $\mathbf{u}^0 = (u_0^0, u_1^0, \dots, u_k^0)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$, $\mathbf{u}^0 \neq \mathbf{0}$, mit $u_0^0 = 0$ und $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{0}$, d. h.

$$\sum_{j=1}^k u_j^0 \nabla h_j(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Anwendung der Lagrange-Funktion findet man in Band 4, Abschnitt 4.2.4.

Beispiel 3.1: Für die Aufgabe

$$\min \{f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 \mid h(x, y) := y + 1 - x^2 = 0\}$$

mit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind die in Bild 3.1 eingezeichneten Punkte $\mathbf{x}^1 = (x_1, y_1)^T$ und $\mathbf{x}^2 = (x_2, y_2)^T$ Lösungen, denn durch \mathbf{x}^1 und \mathbf{x}^2 gehen die Niveaulinien $f(x, y) = c$ mit dem kleinsten Wert c_0 , und zugleich liegen \mathbf{x}^1 und \mathbf{x}^2 auf der Parabel $h(x, y) = 0$.

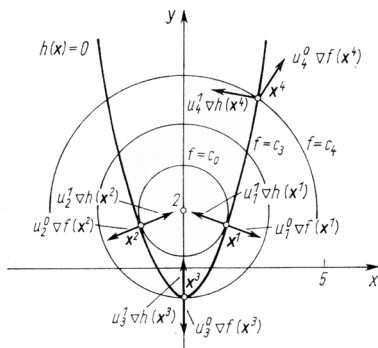


Bild 3.1

Die beiden Kurven $f(x, y) = c_0$ und $h(x, y) = 0$ berühren sich in x^1 und x^2 , d. h. die Gradienten von f und h sind dort jeweils kollinear. Es gilt z. B.

$$u_1^0 \nabla f(x^1) + u_1^1 \nabla h(x^1) = 0. \quad (3.6)$$

Eine ähnliche Situation liegt im Punkt x^3 vor. Hier berühren sich die Kurven $f(x, y) = c_3$ und $h(x, y) = 0$. Wegen $c_3 > c_0$ ist x^3 keine Lösung des gegebenen Problems, obwohl $\nabla f(x^3)$ und $\nabla h(x^3)$ kollinear sind.

Im Punkte x^4 sind $\nabla f(x^4)$ und $\nabla h(x^4)$ linear unabhängig. Man findet also kein $u^4 \in \mathbb{R}^2$, $u^4 \neq 0$, so daß eine (3.6) entsprechende Beziehung besteht. Wegen $c_4 > c_0$ ist x^4 keine Lösung des Problems.

Beispiel 3.2: Wir betrachten die Aufgabe

$$\min \{f(x) = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \mid h_1(x) := x-1-y^2=0, \quad h_2(x) := x-1=0\}$$

mit $f, h_1, h_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Bild 3.2 zeigt den Schnitt des parabolischen Zylinders $h_1(x) = 0$, der Ebene $h_2(x) = 0$ und der Niveaufäche $f(x) = c^2$ mit der xy -Ebene. Durch die Restriktionen $h_1(x) = 0$ und $h_2(x) = 0$ ist eine Gerade durch den Punkt $(1, 0, 0)^T$ parallel zur z -Achse bestimmt. Die Kugel um $(0, 1, 0)^T$ mit dem Radius $c_0 = \sqrt{2}$ berührt diese Gerade im Punkt $x^0 = (1, 0, 0)^T$. Es gilt:

$$r(J_h(x^0)) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1; \quad r(J_0(x^0)) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

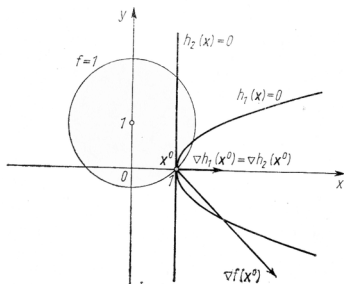


Bild 3.2

4. Spezielle nichtlineare Optimierungsprobleme

Spezialisierungen in der allgemeinen Aufgabenstellung (1.1) ermöglichen oft wesentlich schärfere Aussagen über die Art und die Lage des Optimums einerseits und bringen andererseits auch bedeutende Erleichterungen bei der numerischen Behandlung und Lösung des Problems. Die Spezialisierungen erhält man durch die Auswahl gewisser Funktionenklassen für die Zielfunktion f bzw. für die Restriktionsfunktionen g_i , $i \in I_g$, und h_j , $j \in I_h$.

4.1. Konvexe Optimierungsprobleme

Definition 4.1: Ein Optimierungsproblem (1.1) heißt **konvex**, wenn die Funktionen f , g_i , $i \in I_g$, konvex und die Funktionen h_j , $j \in I_h$, linear-affin sind:

$$\begin{aligned} \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \\ G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g; \mathbf{a}^j \mathbf{x} = b_j, j \in I_h\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Viele von der Aufgabenstellung her zunächst nicht konvexe Optimierungsprobleme lassen sich durch einfache äquivalente Umformungen auf konvexe Optimierungsprobleme zurückführen.

Aufgabe 4.1: Man zeige, daß das Optimierungsproblem

$$\max \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \quad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i \in I_g\}$$

mit konkaven Funktionen f , g_i , $i \in I_g$, auf ein konvexes Optimierungsproblem zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 4.2: Man zeige, daß das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \\ G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g; h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in I_h\} \end{aligned}$$

mit konvexen Funktionen f , g_i , $i \in I_g$, und linear-affinen Funktionen h_j , $j \in I_h$, ein konvexes Optimierungsproblem ist.

Da jede linear-affine Funktion konvex ist, umfaßt die Klasse der konvexen Optimierungsprobleme die Klasse der linearen Optimierungsprobleme. Während viele Aussagen, die bei linearen Problemen gelten, auf konvexe Probleme übertragen werden können, gehen einige Eigenschaften linearer Probleme bei konvexen Optimierungsproblemen im allgemeinen verloren.

Für das Problem (4.1) gelten die folgenden Aussagen:

Satz 4.1: Der zulässige Bereich G des Problems (4.1) ist konvex.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.12 und Satz 2.3.

Satz 4.2: Jedes lokale Minimum von f bezüglich G ist zugleich ein globales Minimum von f bezüglich G .

Der Beweis folgt aus Satz 3.2.

Satz 4.3: Die Menge G_{opt} aller Lösungen des Problems (4.1) ist konvex.

Ist darüber hinaus die Zielfunktion f streng konvex, so existiert höchstens eine Lösung des Problems (4.1).

Der Beweis folgt aus Satz 3.3.

Aufgabe 4.3: Beweisen Sie Satz 4.2 und die zweite Aussage von Satz 4.3!

Ohne Beweis führen wir den folgenden Satz an, der die Existenz einer Lösung bei konvexen Optimierungsproblemen sichert.

Satz 4.4: Ist der zulässige Bereich G des Problems (4.1) nichtleer und beschränkt, so existiert mindestens eine Lösung dieses Problems.

Gewisse Eigenschaften linearer Optimierungsprobleme gelten bei konvexen Optimierungsproblemen nicht:

a) Auch wenn der zulässige Bereich G des Problems (4.1) ein Polyeder ist, braucht eine Lösung des Problems nicht notwendig in einem Extrempunkt von G zu liegen (Bild 4.1).

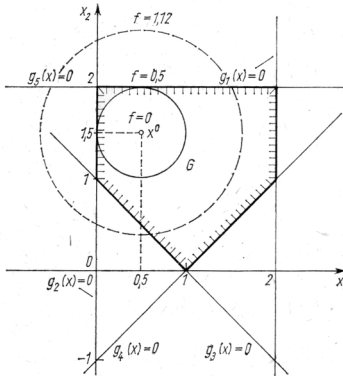


Bild 4.1

b) Ist der zulässige Bereich G des Problems (4.1) unbeschränkt und f auf G nach unten beschränkt, so ist die Existenz einer Lösung des Problems nicht gesichert wie etwa bei dem Problem $\min \{e^x \mid x \leq 0\}$.

Für differenzierbare konvexe Zielfunktionen f hat man den wichtigen

Satz 4.5: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig partiell differenzierbar und der zulässige Bereich G des Problems (4.1) in X enthalten. Dann gilt:

1. $x^0 \in G$ ist genau dann Lösung von (4.1), wenn

$$(x - x^0)^T \nabla f(x^0) \geq 0 \quad \forall x \in G. \quad (4.2)$$

2. Ist darüber hinaus x^0 ein innerer Punkt von G , so kann die Beziehung (4.2) ersetzt werden durch

$$\nabla f(x^0) = 0. \quad (4.3)$$

Beweis: 1. $\mathbf{x}^0 \in G$ sei Lösung von (4.1). Dann gilt:

$$f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Entwickelt man f an der Stelle \mathbf{x}^0 gemäß der Taylor-Formel (Band 4, Abschnitt 4.1.), so folgt

$$0 \leq (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) + R_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \quad (4.4)$$

mit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0} \frac{R_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

Zum Beweis von (4.2) nehmen wir an, daß ein $\hat{\mathbf{x}} \in G$ existiert mit

$$d := (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) < 0.$$

Dann hat jedes

$$\mathbf{x}(\lambda) := \mathbf{x}^0 + \lambda(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0), \quad \lambda \in (0, 1],$$

die Eigenschaft $\mathbf{x}(\lambda) \in G$, da G konvex ist, und ferner gilt:

$$\frac{[\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0]^T \nabla f(\mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0\|} = \frac{[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0]^T \nabla f(\mathbf{x}^0)}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\|} = \frac{d}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\|} < 0. \quad (4.5)$$

Aus (4.4) erhält man für $\lambda \in (0, 1]$

$$0 \leq [\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0]^T \nabla f(\mathbf{x}^0) + R_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0)$$

und nach Division durch $\|\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0\| > 0$

$$0 \leq \frac{[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0]^T \nabla f(\mathbf{x}^0)}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\|} + \frac{R_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0\|} \quad \forall \lambda \in (0, 1]. \quad (4.6)$$

Wegen $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{x}^0$ folgt aus (4.5) und (4.6)

$$0 \leq \frac{d}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\|} + \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{R_2(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0)}{\|\mathbf{x}(\lambda) - \mathbf{x}^0\|} = \frac{d}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\|} < 0$$

und damit ein Widerspruch. Folglich gilt (4.2).

2. Die Beziehung (4.2) sei erfüllt. Dann gilt wegen der Konvexität von f nach Satz 2.15

$$0 \leq (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in G,$$

d. h. \mathbf{x}^0 ist Lösung von (4.1).

3. Der Beweis der zweiten Aussage wird Ihnen als Aufgabe überlassen.

Aufgabe 4.4: Beweisen Sie die zweite Aussage von Satz 4.5!

Beispiel 4.1: Das Problem

$$\min \{x_1^4 + x_2^2 + 4x_1 \mid (x_1, x_2)^T \in G\},$$

$$G = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 6, x_2 \geq (x_1 - 1)^2\}$$

ist ein konvexes Optimierungsproblem. Für $\mathbf{x}^0 = (0, 1)^T$ findet man $\mathbf{x}^0 \in G$, $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) = 4x_1 + 2(x_2 - 1) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G,$$

denn es ist

$$4x_1 + 2(x_2 - 1) = 4x_1 + 2x_2 - 2 \geq 2x_1^2 \geq 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_2 \geq (x_1 - 1)^2.$$

Damit ist auch (4.2) für alle $\mathbf{x} \in G$ erfüllt.

Aufgabe 4.5: Unter Verwendung des in Bild 4.1 und in Beispiel 4.2 angegebenen zulässigen Bereiches G ermittle man für die konvexen Optimierungsprobleme

$$\text{a) } \min \{f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \mid (x_1, x_2)^T \in G\},$$

$$\text{b) } \min \{f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \mid (x_1, x_2)^T \in G\}$$

graphisch eine Lösung \mathbf{x}^0 und überprüfe die Beziehungen (4.2) bzw. (4.3).

4.2. Quadratische Optimierungsprobleme

In der nichtlinearen Optimierung konnten effektive Lösungsverfahren bisher nur für spezielle Problemklassen entwickelt werden. Zu den am gründlichsten behandelten Problemen zählen diejenigen mit linear-affinen Restriktionen und nichtlinearer Zielfunktion. Eine solche Problemklasse, deren Lösungen vielfach unter Anwendung des (modifizierten) Simplexverfahrens ermittelt werden, ist die der quadratischen Optimierungsprobleme.

Definition 4.2: Ein Optimierungsproblem (1.1) nennen wir **quadratisch**, wenn es folgende Form besitzt:

$$\min \{Q(\mathbf{x}) := \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}. \quad (4.7)$$

Dabei seien $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, \mathbf{A} eine (m, n) -Matrix und \mathbf{C} eine symmetrische (n, n) -Matrix.

Probleme, bei denen der zulässige Bereich G gemäß

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

oder

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

gegeben ist, können durch die aus der linearen Optimierung bekannten Transformationen (vgl. Band 14) auf die Form (4.7) zurückgeführt werden.

Zahlreiche Verfahren der nichtlinearen Optimierung, die speziell für quadratische Probleme im Sinne von Definition 4.2 entwickelt wurden, setzen die Konvexität der Zielfunktion Q des Problems (4.7) voraus.

Satz 4.6: 1. Das Problem (4.7) ist genau dann ein konvexes Optimierungsproblem, wenn die Matrix \mathbf{C} positiv semidefinit ist.

2. Ist die Matrix \mathbf{C} positiv definit, so ist die Zielfunktion Q streng konvex auf G .

Der Beweis folgt aus Satz 2.16.

Aufgabe 4.6: Beweisen Sie Satz 4.6!

Beispiel 4.2: Das in Bild 4.1 dargestellte Problem

$$\min \{f(\mathbf{x}) = (x_1 - \tfrac{1}{2})^2 + (x_2 - \tfrac{3}{2})^2 \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(\mathbf{x}) := x_1 - 2 \leq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) := -x_1 \leq 0,$$

$$g_3(\mathbf{x}) := -(x_1 + x_2 - 1) \leq 0, \quad g_4(\mathbf{x}) := (x_1 - x_2 - 1) \leq 0,$$

$$g_5(\mathbf{x}) := x_2 - 2 \leq 0\}$$

ist ein konvexes quadratisches Optimierungsproblem mit der Zielfunktion

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + q, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad q = \frac{5}{2}.$$

Die feste Zahl q hat keinen Einfluß auf die Lösung $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$.

Sämtliche Eigenschaften konvexer Optimierungsprobleme bleiben für quadratische Optimierungsprobleme mit positiv semidefiniter Matrix \mathbf{C} erhalten. Darüber hinaus läßt sich Satz 4.4 verschärfen zur Aussage von

Satz 4.7: Bei dem quadratischen Optimierungsproblem (4.7) seien \mathbf{C} positiv semidefinit, $G \neq \emptyset$ und Q auf G nach unten beschränkt. Dann existiert mindestens eine Lösung $\mathbf{x}^0 \in G$ dieses Problems.

Beispiel 4.3: In Beispiel 4.2 ist der zulässige Bereich $G \neq \emptyset$ offenbar ein konvexes Polyeder und damit Q auf G nach unten beschränkt. Nach Satz 4.7 existiert also eine Lösung \mathbf{x}^0 des Problems. Die Niveaulinien der Zielfunktion sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$. Die Zielfunktion Q ist wegen der positiven Definitheit von \mathbf{C} streng konvex. Die Gleichung $\nabla Q(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ hat die einzige Lösung $\mathbf{x}^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$. Da \mathbf{x}^0 ein innerer Punkt von G ist, folgt nach der zweiten Aussage von Satz 4.5, daß \mathbf{x}^0 Lösung des gegebenen Problems ist.

Für konvexe quadratische Optimierungsprobleme folgt aus Satz 4.5 der

Satz 4.8: Es sei (4.7) ein konvexes quadratisches Optimierungsproblem. Dann gilt:

1. $\mathbf{x}^0 \in G$ ist genau dann Lösung von (4.7), wenn

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T (2\mathbf{C}\mathbf{x}^0 + \mathbf{c}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G. \quad (4.8)$$

2. Ist darüber hinaus \mathbf{x}^0 ein innerer Punkt von G , so kann die Beziehung (4.8) ersetzt werden durch

$$2\mathbf{C}\mathbf{x}^0 + \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

Aufgabe 4.7: Beweisen Sie Satz 4.8!

Aufgabe 4.8: 1. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ a) positiv definit, b) positiv semidefinit, c) indefinit?

2. Man löse grafisch das Problem

$$\min \{Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in G\}$$

für die Parameterwerte $\alpha = 1, 4, 8$ und für G gemäß Bild 4.1.

3. Man skizziere die Höhenlinien von Q für die Parameterwerte $\alpha = 1, 4, 8$.

4.3. Separable Optimierungsprobleme

Wir beschränken uns hier auf Optimierungsprobleme (1.1) mit $I_h = \emptyset$.

Definition 4.3: Ein Optimierungsproblem

$$\min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \quad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in I_g\} \quad (4.10)$$

heißt **separabel**, wenn sich Zielfunktion f und Restriktionsfunktionen g_i , $i \in I_g$, in der folgenden Form darstellen lassen:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^n f_v(x_v), \\ g_i(\mathbf{x}) &= \sum_{v=1}^n g_{iv}(x_v), \quad i \in I_g. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ein wesentliches Verfahren zur Lösung solcher Aufgaben besteht darin, daß die $f_v(x_v)$ und $g_{iv}(x_v)$, $i \in I_g$, $v \in \{1, 2, \dots, n\}$, durch Näherungspolygone ersetzt werden und somit (bis auf gewisse Basiseintrittsbeschränkungen, die im Falle konvexer Probleme sogar noch wegfallen) zur Lösung das Simplexverfahren benutzt werden kann. Im Falle konvexer Probleme erhält man dann aus der Lösung des Näherungsproblems eine Näherungslösung für das Ausgangsproblem (4.10).

Als Nachteil einer solchen Approximationsmethode muß in erster Linie die stark zunehmende Anzahl der Variablen (in Abhängigkeit von der Unterteilung der Intervalle, in denen die ursprünglichen Variablen variieren) angesehen werden.

Eingehendere Darlegungen über separable Optimierungsprobleme findet man in [10] und [13].

Manche Probleme, deren Zielfunktion bzw. Restriktionsfunktionen ursprünglich nicht die Form (4.11) haben, können leicht in separable Probleme überführt werden.

Wenn in der Zielfunktion und/oder in den Restriktionsfunktionen als einzige nicht „separierte“ Bestandteile Produkte $x_v x_0$ auftreten, so kann man durch Einführung von zwei neuen Variablen

$$y_v = \frac{1}{2}(x_v + x_0), \quad y_0 = \frac{1}{2}(x_v - x_0) \quad (4.12)$$

das Produkt $x_v x_0$ ersetzen durch $y_v^2 - y_0^2$. Ersetzt man dann im gegebenen Problem $x_v x_0$ überall durch die Differenz $y_v^2 - y_0^2$ und fügt die Beziehungen (4.12) als neue Restriktionen zum Problem hinzu, so ergibt sich ein separables Optimierungsproblem.

Im Falle von positiven Variablen kann man das Produkt $x_v x_0$ auch durch die neue Variable y_v ersetzen und als zusätzliche Restriktion $\ln y_v = \ln x_v + \ln x_0$ hinzufügen.

Aufgabe 4.9: Man überführe folgende Probleme durch eine Variablentransformation in separable Probleme:

a) $\max \{3e^{x_1} + x_2 \mid \mathbf{x} \in G\},$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0, \quad x_1^2 x_2 \leq 16\};$$

b) $\max \{2x_1 + x_2^2 + \ln(x_3 x_4) \mid \mathbf{x} \in G\},$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2, x_3 > 0; \quad x_1, x_2, x_4 < \frac{\pi}{2}; \quad x_4 > 1; \quad x_1 \sin x_2 + x_3^2 \ln x_4 \geq 17,$$

$$4e^{x_1 x_3} + \sin[x_2 \cos x_4] \geq 18\}.$$

4.4. Hyperbolische Optimierungsprobleme

Bei der hyperbolischen Optimierung handelt es sich um die Optimierung eines Quotienten zweier Funktionen unter gewissen Restriktionen. Im einfachsten Fall betrachten wir den Quotienten aus zwei linear-affinen Funktionen. Da ein solcher

Quotient i. allg. nichtkonvex ist, lassen sich die hyperbolischen Optimierungsprobleme nicht in die Klasse der konvexen Probleme einordnen.

Hyperbolische Optimierungsprobleme sind aus praktischen Fragestellungen hervorgegangen, bei denen mitunter mehrere Funktionen zu optimieren sind (z. B. Anwachsen des Gewinns bei gleichzeitiger Minimierung der Selbstkosten oder Anwachsen des Produktionsvolumens bei möglichst geringem Arbeitszeitaufwand). Zu diesem Zweck bildet man Verhältnisfunktionen wie Stückkosten, Arbeitsproduktivität u. ä. und ermittelt deren Optimum.

Definition 4.4: Ein Optimierungsproblem

$$\min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \quad G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g\}$$

heißt **hyperbolisch**, wenn die Zielfunktion f die Form

$$f(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})}, \quad v(\mathbf{x}) > 0,$$

hat.

Man beachte, daß das in Beispiel 1.2 angegebene elektrotechnische Problem die Form eines solchen hyperbolischen Optimierungsproblems hat.

In den meisten Fällen werden lediglich hyperbolische Optimierungsprobleme mit linearen Restriktionen behandelt. Solche Probleme lassen sich unter Beachtung der jeweiligen Eigenschaften der Zielfunktion einteilen in

a) konvex-konkave Probleme mit

$$u \text{ konvex auf } G, v \text{ konkav auf } G; \quad u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G;$$

b) quadratische Probleme mit

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0, \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0;$$

$$u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G,$$

wobei \mathbf{C} eine positiv definite und \mathbf{D} eine negativ definite (n, n) -Matrix darstellen;

c) quadratisch-lineare Probleme mit

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0, \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0; \quad v(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G,$$

wobei \mathbf{C} eine positiv definite (n, n) -Matrix darstellt;

d) lineare Probleme mit

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0, \quad v(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0; \quad v(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Für lineare hyperbolische Optimierungsprobleme

$$\min \left\{ f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0}{\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0} \mid \mathbf{x} \in G \right\}, \quad (4.13)$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^i{}^T \mathbf{x} \leq b_i, i \in I_g\}$$

gilt der

Satz 4.9: Ist der zulässige Bereich G des linearen hyperbolischen Optimierungsproblems (4.13) beschränkt, so nimmt die Zielfunktion f ihr Minimum bezüglich G in einem Extrempunkt von G an.

Dieser Satz, dessen Beweis wir hier übergehen, legt es nahe, jedem Problem (4.13) ein äquivalentes lineares Optimierungsproblem zuzuordnen.

Durch die Transformation $\frac{\mathbf{y}}{t} = \mathbf{x}$, $t > 0$, folgt aus (4.13) das Problem

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{y} + c_0 t}{\mathbf{d}^T \mathbf{y} + d_0 t} \mid (\mathbf{y}, t)^T \in G^* \right\}, \\ G^* = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t > 0, \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}t \leq \mathbf{0} \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{1T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{mT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ist $\begin{pmatrix} \mathbf{y}^0 \\ t^0 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Problem (4.14), so ist offenbar auch $\begin{pmatrix} \lambda \mathbf{y}^0 \\ \lambda t^0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda > 0$ Lösung dieses Problems (Aufgabe 4.10).

Diese Eigenschaft sichert zusammen mit $\mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G$ die Äquivalenz von (4.14) mit folgendem linearen Problem:

$$\begin{aligned} \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{y} + c_0 t \mid (\mathbf{y}, t)^T \in G^{**} \}, \\ G^{**} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}t \leq \mathbf{0}, \mathbf{d}^T \mathbf{y} + d_0 t = 1, t > 0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Jede Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{y}^0 \\ t^0 \end{pmatrix}$ von (4.15) ergibt mittels $\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{y}^0}{t^0}$ die zugehörige Lösung von (4.13), und umgekehrt ergibt jede Lösung \mathbf{x}^0 von (4.13) mittels

$$t^0 = \frac{1}{\mathbf{d}^T \mathbf{x}^0 + d_0}, \quad \mathbf{y}^0 = t^0 \mathbf{x}^0,$$

die zugehörige Lösung $\begin{pmatrix} \mathbf{y}^0 \\ t^0 \end{pmatrix}$ von (4.15).

Wir nennen (4.15) das dem linearen hyperbolischen Optimierungsproblem (4.13) zugeordnete lineare Optimierungsproblem.

Aufgabe 4.10: Man beweise: Ist $(\mathbf{y}^0, t^0)^T$ eine Lösung des Problems (4.14), so ist auch $(\lambda \mathbf{y}^0, \lambda t^0)^T$ für beliebiges $\lambda > 0$ eine Lösung dieses Problems.

Aufgabe 4.11: Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} \min \left\{ f(\mathbf{x}) = \frac{3x_1 - x_2 + 3}{x_1 + 2x_2 + 1} \mid \mathbf{x} \in G \right\}, \\ G = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 4, \quad 2x_1 - x_2 \leq 2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \}. \end{aligned}$$

Man ermittle das zugehörige lineare Optimierungsproblem und löse es mit dem Simplexalgorithmus. Wie lautet die Lösung des Ausgangsproblems?

4.5. Geometrische Optimierungsprobleme

Im Rahmen der Entwicklung der nichtlinearen Optimierung hat sich die geometrische Optimierung zu einer relativ selbständigen Teildisziplin entwickelt. Dabei entstand die geometrische Optimierung wesentlich unter dem Einfluß von Aufgaben aus

den Ingenieurwissenschaften. Eine lehrbuchmäßige Darstellung der geometrischen Optimierung findet man in [5], während die Problemstellung der geometrischen Optimierung in [1] dargelegt wird.

Man kann zeigen, daß zahlreiche nichtlineare Optimierungsprobleme in die Problemstellung der geometrischen Optimierung eingeordnet werden können.

In der geometrischen Optimierung kommt der sogenannten geometrischen Ungleichung besondere Bedeutung zu. Mit ihrer Hilfe lassen sich duale Paare geometrischer Optimierungsprobleme einführen (vgl. Abschnitt 6). Als Sonderfälle geometrischer Optimierungsprobleme erhält man u. a. die Posynomoptimierung und die erweiterte quadratische Optimierung (vgl. dazu [1]).

5. Optimalitätsbedingungen

In Abschnitt 3 erörterten wir Extremwertaufgaben mit Restriktionen in Gleichungsform. Dabei zeigte sich die große Bedeutung der Lagrange-Funktion und der Lagrange-Multiplikatoren. In diesem Abschnitt wollen wir nun der Frage nachgehen, ob sich diese Begriffe auch bei Optimierungsproblemen mit Restriktionen in Ungleichungsform vorteilhaft verwenden lassen. Die gewonnenen Resultate, gelegentlich unter der Bezeichnung *Kuhn-Tucker-Theorie* zusammengefaßt, nehmen eine zentrale Stellung in der nichtlinearen Optimierung ein.

5.1. Zusammenhang zwischen nichtlinearen Optimierungsproblemen und Sattelpunktproblemen

In Analogie zur Aussage von Satz 3.1 über klassische Extremwertaufgaben geht es in diesem Abschnitt darum, notwendige und/oder hinreichende Optimalitätsbedingungen zu finden, indem die Existenz einer Lösung eines gegebenen Optimierungsproblems durch die Existenz einer Lösung eines gewissen anderen Problems beschrieben wird. Solche Probleme können zugeordnete Ungleichungssysteme (vgl. Satz 5.3), Gleichungssysteme (vgl. Satz 3.1 und Satz 3.5) oder andere Optimierungsprobleme (vgl. Satz 5.1 und Abschnitt 6) sein.

Wir betrachten als Spezialfall von (1.1) das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} P: \min \{ & f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G \}, \\ G = \{ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i \in I_g \} \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i \in I_g$.

Bei den folgenden Betrachtungen verzichten wir also auf Restriktionen der Form $h(\mathbf{x}) = 0$. Sie lassen sich z. B. durch $g_1(\mathbf{x}) \leq 0, g_2(\mathbf{x}) \leq 0$ mit $g_1 = h, g_2 = -h$ erfassen.

Zur Formulierung des Sattelpunktproblems benötigen wir

Definition 5.1: Es sei $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ heißt **Sattelpunkt** der Funktion F , wenn gilt:

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \quad (5.2)$$

Beispiel 5.1: Die Funktion $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x^2 - u^2, (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^2$, besitzt den Sattelpunkt $(x^0, u^0)^T = (0, 0)^T$, denn es ist (Bild 5.1)

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) = -u^2 \leq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0 \leq x^2 = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}.$$

Wir formulieren nun das **Sattelpunktproblem**:

SP: Gegeben sei die Funktion

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Gesucht sind ein $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ und ein $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}^m$, so daß $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ ein Sattelpunkt der Funktion F ist.

Den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Probleme P und SP zeigt

Satz 5.1: $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ Lösung von SP $\Rightarrow \mathbf{x}^0$ Lösung von P.

Beweis: 1. Wir zeigen zunächst $\mathbf{x}^0 \in G$. Aus der Sattelpunktbedingung $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ folgt

$$\sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}^0) \leq \sum_{i=1}^m u_i^0 g_i(\mathbf{x}^0) \quad \forall u_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.3)$$

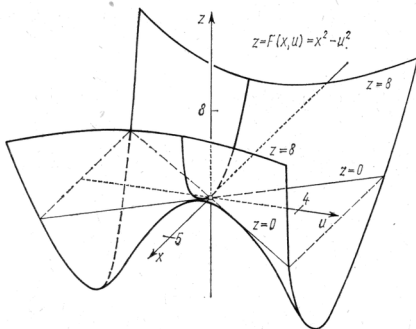


Bild 5.1

Wählt man speziell $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{e}^k$, so folgt sofort

$$g_k(\mathbf{x}^0) \leq 0 \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad (5.4)$$

d. h. $\mathbf{x}^0 \in G$.

2. Zu zeigen bleibt, daß \mathbf{x}^0 Lösung von P ist. Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in G$ gilt wegen $u_i^0 \geq 0 \quad \forall i \in I_g$ unter Beachtung von (5.2)

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i^0 g_i(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \geq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in R_+^m.$$

Da diese Beziehung insbesondere auch für $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ richtig ist, hat man

$$f(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{0}) = f(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Die Umkehrung von Satz 5.1 gilt ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.2: Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$P: \min \{-x \mid x \in G\}, \quad G = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 0, x^2 \leq 0\} = \{0\}$$

und das Sattelpunktproblem

SP: Gesucht ist ein Sattelpunkt der Funktion

$$F(x, \mathbf{u}) = -x - u_1 x + u_2 x^2, \quad (x, \mathbf{u})^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

Offenbar ist $x^0 = 0$ Lösung von P wegen $G = \{0\}$.

Wir nehmen an, daß $(0, \mathbf{u}^0)^T$ ein Sattelpunkt von F ist. Dann folgt nach Definition 5.1

$$-0 - u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 \leq -0 - u_1^0 \cdot 0 + u_2^0 \cdot 0 \leq -x - u_1^0 x + u_2^0 x^2.$$

Für $x = 0$ ist diese Bedingung erfüllt. Für $x > 0$ folgt

$$0 \leq x(-1 - u_1^0 + u_2^0 x)$$

und damit

$$0 \leq -1 - u_1^0 + u_2^0 x.$$

Wegen $u_1^0 \geq 0$ ergibt sich hieraus $\frac{1}{x} \leq u_2^0 \quad \forall x > 0$.

Diese Bedingung kann jedoch für kein endliches u_2^0 erfüllt werden. Damit wurde gezeigt: $x^0 = 0$ ist Lösung von P, aber es gibt kein $u^0 \in R_+^2$, so daß $(0, u^0)^T$ Lösung von SP ist.

Die Umkehrung von Satz 5.1 gilt bei Einführung einer gewissen Regularitätsbedingung für den zulässigen Bereich G . Wir verwenden hier die Regularitätsbedingung von Slater:

B: Es sei $g_i: R^n \rightarrow R, i \in I_g$. Es existiert wenigstens ein $\bar{x} \in G$ mit $g_i(\bar{x}) < 0 \quad \forall i \in I_g$, d. h. G besitzt wenigstens einen inneren Punkt.

Anmerkung: Werden durch die Ungleichungen $g_i(x) \leq 0, i \in I_g$, auch Gleichungen (vgl. die nach (5.1) angegebene Möglichkeit) beschrieben, so ist die Bedingung B nicht erfüllbar. Man kann zeigen, daß B erfüllt ist, wenn die durch G aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit die Dimension n hat.

In Beispiel 5.2 ist die Bedingung B verletzt.

Satz 5.2: Im Problem (5.1) seien die Funktionen $f, g_i, i \in I_g$, konvex und die Bedingung B erfüllt. Dann gilt:

x^0 Lösung von P $\Leftrightarrow \exists u^0 \in R_+^m$, so daß $(x^0, u^0)^T$ Lösung von SP, $x^0 \in G$.

Beweis: 1. (\Leftarrow): Diese Aussage wurde unter schwächeren Voraussetzungen bereits in Satz 5.1 bewiesen.

2. (\Rightarrow): Wir betrachten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} g_i(x) &< 0, i \in I_g, \\ f(x) - f(x^0) &< 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Da x^0 Lösung von P ist, kann das System (5.5) keine Lösung besitzen. Daher existiert nach Satz 2.21 ein Vektor $u^0 = (u_0^0, u_1^0, \dots, u_m^0)^T \in R_+^{m+1}, u^0 \neq 0$, mit

$$u_0^0[f(x) - f(x^0)] + \sum_{i=1}^m u_i^0 g_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n. \quad (5.6)$$

Aus der Annahme $u_0^0 = 0$ folgt wegen der Regularitätsbedingung B und wegen $u^0 \neq 0$

$$\sum_{i=1}^m u_i^0 g_i(\bar{x}) < 0,$$

und das ist ein Widerspruch zu (5.6). Also ist $u_0^0 > 0$, und o. B. d. A. setzen wir $u_0^0 = 1$. Damit ergibt sich aus (5.6)

$$f(x) - f(x^0) + \sum_{i=1}^m u_i^0 g_i(x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n,$$

also

$$F(x, u^0) \geq f(x^0) \quad \forall x \in R^n. \quad (5.7)$$

Außerdem gilt offenbar

$$f(x^0) \geq f(x^0) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x^0) \quad \forall u = (u_1, \dots, u_m)^T \geq 0,$$

d. h.

$$f(\mathbf{x}^0) \geq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in R_+^m. \quad (5.8)$$

Aus (5.7) und (5.8) folgt

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leq f(\mathbf{x}^0) \leq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \quad \forall \mathbf{u} \in R_+^m.$$

Setzt man $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ und $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$, so ergibt sich hieraus $f(\mathbf{x}^0) = F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ und damit

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in R^n, \quad \forall \mathbf{u} \in R_+^m,$$

d. h. $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ ist Lösung von SP.

Anmerkungen: 1. Der Inhalt von Satz 5.1 und Satz 5.2 wird häufig als *globale Kuhn-Tucker-Bedingung* bezeichnet.

2. Eng verwandt mit der Aufgabe, für eine Funktion $F: C \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $C \times D \subseteq R^n \times R^m$, einen Sattelpunkt zu bestimmen, ist die Frage, unter welchen Bedingungen die Beziehung

$$\max_{\mathbf{u} \in D} \min_{\mathbf{x} \in C} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \min_{\mathbf{x} \in C} \max_{\mathbf{u} \in D} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.9)$$

erfüllt ist. Auskunft darüber geben die sogenannten *Minimax-Sätze*. Sie haben u. a. in der Spieltheorie erhebliche Bedeutung (vgl. dazu Band 14, Band 21/1 und [21]).

5.2. Lokale Optimalitätsbedingungen

Wir wollen nun eine Lösung des Problems P dadurch charakterisieren, daß die im Sattelpunktproblem SP definierte Funktion F an einer Stelle $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ untersucht wird. Dies gelingt für differenzierbare Funktionen $f, g_i, i \in I_0$, und führt auf die sogenannten *lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen*. Dazu betrachten wir das Problem

P_1 : Es seien $f: R^n \rightarrow \mathbb{R}, g_i: R^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I_0$, partiell differenzierbar und

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^n \times R^m. \quad (5.10)$$

Gesucht sind ein $\mathbf{x}^0 \in R^n$ und ein $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$, so daß gilt:

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &\leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}^{0T} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

mit $\nabla_{\mathbf{x}} F = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n})^T; \quad \nabla_{\mathbf{u}} F = (F_{u_1}, \dots, F_{u_m})^T = \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)^T$.

Die Bedingungen (5.11) und (5.12) bezeichnen wir als lokale Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Aufgabe 5.1: Man zeige: Aus $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$ und der Gültigkeit von (5.12) folgt $u_i^0 g_i(\mathbf{x}^0) = 0 \quad \forall i \in I_0$.

Bevor wir auf den Zusammenhang zwischen den Problemen P, P_1 und SP eingehen, beweisen wir

Satz 5.3: Es seien $X \subseteq R^n$ eine offene Menge mit $X \subseteq R_+^n$ und $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf X stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} f \text{ hat in } \mathbf{x}^0 \in R_+^n \text{ ein lokales} \\ \text{Minimum bezüglich } R_+^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^0) &\geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^{0T} \nabla f(\mathbf{x}^0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für alle $\mathbf{x} \in R_+^n$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \quad (5.13)$$

mit $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \rightarrow 0$ für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \rightarrow +0$.

Da f in \mathbf{x}^0 ein lokales Minimum besitzt, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \geq 0 \quad (5.14)$$

für alle $\mathbf{x} \in R_+^n$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon$. Wir wählen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}^v, \quad v \in \{1, \dots, n\}, \quad t \in (0, \varepsilon),$$

und erhalten aus (5.14)

$$tf_{xv}(\mathbf{x}^0) + t\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \geq 0 \quad \text{mit} \quad \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow +0.$$

Nach Division durch $t > 0$ und anschließendem Grenzübergang $t \rightarrow +0$ folgt daraus $f_{xv}(\mathbf{x}^0) \geq 0 \quad \forall v \in \{1, \dots, n\}$, d. h.

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) \geq \mathbf{0}.$$

Nun sei x_v^0 die v -te Koordinate von \mathbf{x}^0 und außerdem $x_v^0 > 0$. Setzen wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 - t\mathbf{e}^v$, $v \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\mathbf{x} \in R_+^n$ für hinreichend kleines $t > 0$, und wir erhalten wie oben $-f_{xv}(\mathbf{x}^0) \geq 0$.

Damit ist notwendig $f_{xv}(\mathbf{x}^0) = 0$ für $x_v^0 > 0$, $v \in \{1, \dots, n\}$.

Folglich gilt

$$\mathbf{x}^{0T} \nabla f(\mathbf{x}^0) = 0.$$

Mit Hilfe von Satz 5.3 ergibt sich nun leicht die Aussage von

Satz 5.4: Es seien $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \text{ Lösung von SP} \Rightarrow (\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \text{ Lösung von P}_1.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt die Sattelpunktbedingung (5.2). Die Funktion $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0)$ hat in \mathbf{x}^0 ein lokales Minimum. Daher gilt (Band 4, Satz 4.3)

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{0},$$

und das ist gerade (5.11).

Die Funktion $-F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u})$ hat in \mathbf{u}^0 ein lokales Minimum bezüglich R_+^m . Daher gilt nach Satz 5.3

$$\nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{0T} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0,$$

und das sind die Bedingungen (5.12).

Die Umkehrung von Satz 5.4 gilt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Satz 5.5: Es seien $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, konvex und stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \text{ Lösung von SP} \Leftrightarrow (\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \text{ Lösung von P}_1,$$

die Probleme SP und P_1 sind also äquivalent.

Beweis: Wegen Satz 5.4 bleibt die Aussage (\Leftarrow) zu beweisen. Die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.11) und (5.12) seien erfüllt. Da F konvex in \mathbf{x} ist, gilt nach

Satz 2.15

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) - F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0$$

und damit

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in R^n. \quad (5.15)$$

Da F linear in \mathbf{u} und damit konkav in \mathbf{u} ist, gilt für $\mathbf{u} \in R_+^m$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) - F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) &\leq (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)^T \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \\ &= \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{u}^{0T} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq 0 \end{aligned}$$

und damit

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leq F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \quad \forall \mathbf{u} \in R_+^m. \quad (5.16)$$

Aus (5.15) und (5.16) folgt, daß für F in $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ die Sattelpunktbedingung (5.2) erfüllt ist, d. h. $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ ist Lösung von SP.

Satz 5.5 und Satz 5.2 ergeben zusammen

Satz 5.6 (Satz von Kuhn und Tucker): Es seien im Problem P gemäß (5.1) die Funktionen $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, konvex und stetig partiell differenzierbar und die Regularitätsbedingung B erfüllt. Dann gilt

$$\mathbf{x}^0 \text{ Lösung von P} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Es existiert ein } \mathbf{u}^0 \in R_+^m, \text{ so daß} \\ (\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \text{ Lösung von P}_1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Bemerkung: Die linearen Restriktionen können in der Slater-Bedingung weggelassen werden (vgl. [2]). Damit gilt Satz 5.6 für lineare und quadratische Optimierungsprobleme (bei positiv semidefiniter Matrix C) ohne die Bedingung B.

Beispiel 5.3: Ermittelt man für das in Beispiel 5.2 gegebene Problem die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen, so ergibt sich als eindeutig bestimmte Lösung $u_1^0 = -1$, d. h. es existiert kein $\mathbf{u}^0 \in R_+^2$, so daß (5.11) und (5.12) erfüllt sind.

Zur Formulierung der folgenden Aussage benötigen wir

Definition 5.2: Gegeben seien das Problem P gemäß (5.1) und $\mathbf{x}^0 \in G$. Jede Restriktion mit der Eigenschaft $g_i(\mathbf{x}^0) = 0$, $i \in I_g$, heißt in \mathbf{x}^0 **aktive Restriktion**.

Außerdem führen wir die Indexmenge

$$I^0(\mathbf{x}^0) := \{i \in I_g \mid g_i(\mathbf{x}^0) = 0\}$$

der in \mathbf{x}^0 aktiven Restriktionen ein. Dann hat man

Satz 5.7: Im Problem P gemäß (5.1) seien die Funktionen $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, stetig partiell differenzierbar und $\mathbf{x}^0 \in G$ eine Lösung von P. Existiert ein $\mathbf{z} \in R^n$ mit

$$\mathbf{z}^T \nabla g_i(\mathbf{x}^0) < 0 \quad \forall i \in I^0(\mathbf{x}^0), \quad (5.17)$$

so gibt es ein $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$, so daß $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ Lösung von P_1 ist.

Anmerkung: Die Bedingung (5.17) ist eine Regularitätsbedingung. Sie kann noch abgeschwächt werden und impliziert bei stetig partiell differenzierbaren konvexen Funktionen die Regularitätsbedingung B.

Beispiel 5.4: Wir ermitteln den Abstand der konvexen Menge

$$G = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid x_1 + x_2 \geq 4, \quad 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

vom Ursprung $(0, 0)^T$.

Die Aufgabe kann elementar gelöst werden. Aus der graphischen Darstellung ergibt sich sofort die Vermutung, daß der gesuchte Abstand durch einen Punkt der Geraden $x_1 + x_2 = 4$ realisiert wird. Er kann als Schnittpunkt dieser Geraden mit der dazu orthogonalen Ursprungsgeraden berechnet werden. Als einzige Lösung ergibt sich dabei $\mathbf{x}^0 = (2, 2)^T$.

Wir behandeln dieselbe Aufgabe nun als nichtlineares Optimierungsproblem, um die Wirkungsweise der bisherigen Aussagen zu verdeutlichen und zugleich eine einfache Kontrolle der Ergebnisse zu ermöglichen.

Der einfacheren Rechnung wegen minimieren wir nicht $\|\mathbf{x}\|$, sondern die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

unter den linearen und damit konvexen Restriktionen

$$g_1(\mathbf{x}) := 4 - x_1 - x_2 \leq 0, \quad g_2(\mathbf{x}) := 5 - 2x_1 - x_2 \leq 0.$$

Für $\bar{\mathbf{x}} = (0, 6)^T$ gilt $g_1(\bar{\mathbf{x}}) = -2 < 0$ und $g_2(\bar{\mathbf{x}}) = -1 < 0$. Daher ist B erfüllt, und wir können Satz 5.2 anwenden. Für die Funktion

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 + x_2^2 + u_1(4 - x_1 - x_2) + u_2(5 - 2x_1 - x_2)$$

ergibt sich aus (5.11)

$$F_{x_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 2x_1^0 - u_1^0 - 2u_2^0 = 0, \quad (5.18)$$

$$F_{x_2}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 2x_2^0 - u_1^0 - u_2^0 = 0 \quad (5.19)$$

und aus (5.12)

$$F_{u_1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 4 - x_1^0 - x_2^0 \leq 0, \quad (5.20)$$

$$F_{u_2}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 5 - 2x_1^0 - x_2^0 \leq 0, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u}^{0T} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = u_1^0(4 - x_1^0 - x_2^0) + u_2^0(5 - 2x_1^0 - x_2^0) = 0 \quad (5.22)$$

sowie

$$u_1^0 \geq 0, \quad u_2^0 \geq 0. \quad (5.23)$$

Wegen (5.20), (5.21) und (5.23) kann man (5.22) ersetzen durch

$$u_1^0(4 - x_1^0 - x_2^0) = 0, \quad (5.22a)$$

$$u_2^0(5 - 2x_1^0 - x_2^0) = 0. \quad (5.22b)$$

Fall 1: $u_1^0 = 0, u_2^0 = 0$. Dann folgt aus (5.18) und (5.19): $x_1^0 = x_2^0 = 0$ und damit aus (5.20) und (5.21) die Ungleichungen $4 \leq 0$ bzw. $5 \leq 0$, d. h., es ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: $u_1^0 = 0, u_2^0 > 0$. Dann folgt aus (5.22b), (5.18), (5.19)

$$x_1^0 = u_2^0 = 2, \quad x_2^0 = 1.$$

Aus (5.20) ergibt sich damit $4 - 2 - 1 \leq 0$, also ein Widerspruch.

Fall 3: $u_1^0 > 0, u_2^0 = 0$. Dann folgt aus

$$(5.22a): \quad x_2^0 = 4 - x_1^0,$$

$$(5.18): \quad 2x_1^0 - u_1^0 = 0,$$

$$(5.19): \quad -2x_1^0 - u_1^0 = -8$$

und daraus

$$x_1^0 = 2, \quad x_2^0 = 2, \quad u_1^0 = 4, \quad u_2^0 = 0.$$

Mit diesem Wertesystem sind auch (5.20), (5.21) sowie (5.23) erfüllt.

Der Fall $u_1^0 > 0, u_2^0 > 0$ braucht nicht mehr untersucht zu werden, denn nach Satz 4.3 existiert wegen der strengen Konvexität von f für das gegebene konvexe Problem höchstens eine Lösung. Nach

Satz 5.6 ist \mathbf{x}^0 genau dann Lösung von P , wenn $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ Lösung von P_1 ist, d. h. $\mathbf{x}^0 = (2, 2)^T$ ist die einzige Lösung von P . Die \mathbf{x}^0 zugeordnete Lösung $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ von P_1 ist aus dem obigen System (5.18) – (5.23) eindeutig bestimmt.

Die geometrische Lösung des Problems folgt aus Bild 5.2. Man erkennt auch die geometrische Bedeutung der Bedingung (5.11): Der negative Gradient von f in \mathbf{x}^0 ist eine positive Linearkombination der Gradienten $\nabla g_i(\mathbf{x}^0)$, $i \in I^0(\mathbf{x}^0)$.

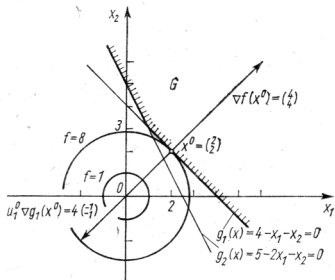


Bild 5.2

Aus (5.22a) und (5.22b) folgt, daß der Lagrange-Multiplikator bei in \mathbf{x}^0 nicht aktiven Restriktionen gleich null ist.

Beispiel 5.5: Von einem Betrieb wird ein Produkt P während n Zeitabschnitten (Perioden) produziert. Das Erzeugnis P kann bis zu einer Menge von L Einheiten gelagert werden. Der Bedarf b_j der Periode j , $j = 1, \dots, n$, ist jeweils bis zum Ende dieser Periode zu befriedigen. Dazu kann das Erzeugnis sowohl aus dem Lager als auch aus der laufenden Produktion verwendet werden. Die Lagerkosten von K Währungseinheiten (Mark) pro Wareneinheit sind zu Beginn jeder Periode nach dem zu diesem Zeitpunkt bestehenden Lagerbestand zu entrichten.

Zu Beginn der Periode 1 seien $s_0 \leq L$ Wareneinheiten vorhanden, zum Ende der Periode n sollen noch s_1 Wareneinheiten vorhanden sein (für Reklamationen oder Nachbestellungen).

Wir setzen voraus, daß die Produktionskosten in jeder Periode mindestens proportional mit der produzierten Stückzahl wachsen (wie es in der Praxis i. allg. der Fall ist), so daß die Produktionskosten in jeder Periode eine konvexe Funktion der produzierten Warenmenge sind.

Die Aufgabe bestehe darin, die Summe der Lagerkosten und der Produktionskosten über alle n Perioden zu minimieren.

Zunächst stellen wir ein mathematisches Modell gemäß den obigen Darlegungen auf. Es bezeichnen für $j = 1, \dots, n$:

x_j [Stück] die in der Periode j produzierte Warenmenge,

b_j [Stück] den in der Periode j zu erfüllenden Bedarf,

y_j [Stück] den zu Beginn der Periode j vorhandenen Lagerbestand,

$f_j(x_j)$ [Mark] die Produktionskosten in der Periode j .

Damit erhalten wir das konvexe Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(x_j) + K \sum_{j=1}^n y_j \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in G \right\},$$

$$G = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x_j, y_j \geq 0, y_j \leq L, y_j + x_j \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (5.24)$$

$$y_1 = s_0, \quad y_{j+1} = y_j + x_j - b_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad y_n + x_n - b_n = s_1\}.$$

Eliminiert man die Variable $y_j, j = 1, \dots, n$, so folgt das zu (5.24) äquivalente Problem

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(x_j) + K \left[ns_0 + \sum_{\nu=1}^n (n - \nu) (x_\nu - b_\nu) \right] \mid \mathbf{x} \in G^* \right\}, \quad (5.25)$$

$$G^* = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad s_0 + \sum_{\nu=1}^j (x_\nu - b_\nu) \leq L, \right. \\ \left. s_0 + \sum_{\nu=1}^j (x_\nu - b_\nu) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n-1; \right. \\ \left. s_0 + \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - b_\nu) \geq s_1, \quad s_0 + \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - b_\nu) \leq s_1 \right\}.$$

Wir setzen $\mathbf{u}^T = (\mathbf{v}^T, \mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \mathbf{u}_3^T)$ mit

$$\mathbf{v}^T = (v_1, \dots, v_n), \quad \mathbf{u}_1^T = (u_{11}, \dots, u_{1,n-1}), \quad \mathbf{u}_2^T = (u_{21}, \dots, u_{2,n-1}), \quad \mathbf{u}_3^T = (u_{31}, u_{32})$$

und führen für das Problem (5.25) die Lagrange-Funktion ein:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) + K \left[ns_0 + \sum_{\nu=1}^n (n - \nu) (x_\nu - b_\nu) \right] - \sum_{\nu=1}^n v_\nu x_\nu \\ + \mathbf{u}_1^T \begin{pmatrix} s_0 + \sum_{\nu=1}^1 (x_\nu - b_\nu) - L \\ \dots \\ s_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (x_\nu - b_\nu) - L \end{pmatrix} - \mathbf{u}_2^T \begin{pmatrix} s_0 + \sum_{\nu=1}^1 (x_\nu - b_\nu) \\ \dots \\ s_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (x_\nu - b_\nu) \end{pmatrix} \\ + (u_{31} - u_{32}) \left(s_0 - s_1 + \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - b_\nu) \right); \quad (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{3n}.$$

Dann erhält man die Kuhn-Tucker-Bedingungen:

$$\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}^0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{2n-2}, \quad u_3^0 \in \mathbb{R}_+^2, \quad (5.26a)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^0) & + & (n-1)K - v_1^0 & + & \sum_{\nu=1}^{n-1} (u_{1\nu}^0 - u_{2\nu}^0) & + & u_{31}^0 - u_{32}^0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2^0) & + & (n-2)K - v_2^0 & + & \sum_{\nu=2}^{n-1} (u_{1\nu}^0 - u_{2\nu}^0) & + & u_{31}^0 - u_{32}^0 \\ \dots & & & & & & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}(x_{n-1}^0) & + & K - v_{n-1}^0 & + & u_{1,n-1}^0 - u_{2,n-1}^0 & + & u_{31}^0 - u_{32}^0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_n^0) & + & & & & + & u_{31}^0 - u_{32}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.26b)$$

$$-x_j \leq 0, \quad v_j^0 x_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}^0) := \begin{pmatrix} s_0 + \sum_{\nu=1}^1 (x_\nu^0 - b_\nu) - L \\ \dots \\ s_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (x_\nu^0 - b_\nu) - L \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}; \quad u_{1j}^0 g_{1j}(\mathbf{x}^0) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (5.26c)$$

$$g_2(x^0) := - \begin{pmatrix} s_0 + \sum_{v=1}^1 (x_v^0 - b_v) \\ \dots\dots\dots \\ s_0 + \sum_{v=1}^{n-1} (x_v^0 - b_v) \end{pmatrix} \leq 0; \quad u_{2j}^0 g_{2j}(x^0) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (5.26d)$$

$$g_3(x^0) := \begin{pmatrix} s_0 - s_1 + \sum_{v=1}^n (x_v^0 - b_v) \\ -s_0 + s_1 - \sum_{v=1}^n (x_v^0 - b_v) \end{pmatrix} \leq 0; \quad u_{3j}^0 g_{3j}(x^0) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.26e)$$

Da ein konvexes Optimierungsproblem vorliegt, ist jede Lösung des Systems (5.26a) – (5.26e) auch Lösung des Problems (5.25) und damit (5.24).

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel.

Die Produktion von P läuft ein Jahr, das in 4 Perioden (Quartale) eingeteilt wird. Es seien $L = 2000$, $s_0 = 500$, $s_1 = 500$, $K = 500$, $f_j(x_j) = 3000 x_j + a_j x_j^2$, $j = 1, 2, 3, 4$, sowie

j	1	2	3	4
b_j	2000	4000	3000	1000
a_j	2	1,75	0,75	0

Stellt man die Kuhn-Tucker-Bedingungen gemäß (5.26a)–(5.26e) auf, so folgt als eine mögliche Lösung

$$x^0 = \begin{pmatrix} 2500 \\ 3000 \\ 3000 \\ 1500 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} v_1^0 &= v_2^0 = v_3^0 = v_4^0 = 0, \\ u_{11}^0 &= u_{12}^0 = u_{13}^0 = 0, \\ u_{21}^0 &= 0, \quad u_{22}^0 = 6500, \quad u_{23}^0 = 5000, \\ u_{31}^0 &= \alpha, \quad u_{32}^0 = 3000 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 3000. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2: Mit Hilfe von Satz 5.6 ist das Problem

$$\min \{x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \mid x \in G\},$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 6\}$$

zu lösen. Anschließend ist die Lösung graphisch zu ermitteln.

Aufgabe 5.3: a) Unter Verwendung von Satz 5.7 ist für das Problem

$$\min \{-x_1^2 - x_2^2 - tx_1 - 2tx_2 \mid x \in G\},$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 4\}$$

eine Lösung $x^0(t)$ für $t = 0$ zu ermitteln. Anschließend ist das Problem für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ graphisch zu lösen. Ist die Zielfunktion konvex?

b) Ist die Lösung $x^0(t)$ stetig auf \mathbb{R} ?

c) Gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung?

Aufgabe 5.4: Man löse das Problem

$$\max \{x_1 \mid x \in G\}, \quad G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0\}$$

graphisch und zeige für die Lösung $x^0 \in G$, daß

a) die Kuhn-Tucker-Bedingungen in x^0 nicht erfüllt sind,

b) die in Satz 5.7 angegebene Regularitätsbedingung in x^0 verletzt ist.

Aufgabe 5.5: Man löse das System (5.11), (5.12) für das Problem

$$\min \{(x_1 - 3)^2 + x_2^2 \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2, \quad x_2 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0\}.$$

Kann man Satz 5.6 anwenden, um auf die Lösung \mathbf{x}^0 des Problems zu schließen? (Hinweis: Anwendung von Satz 4.8).

Aufgabe 5.6: Wenn $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I_0$, stetig partiell differenzierbar sind, dann geht im Problem P_1 bei der zusätzlichen Forderung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ die Bedingung (5.11) über in

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq 0,$$

$$\mathbf{x}^{0T} \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0.$$

6. Dualitätssätze

Dualitätssätze sind uns bereits aus der linearen Optimierung bekannt. Allgemein beinhalten Dualitätssätze Aussagen über zwei einander zugeordnete (sogenannte duale) Optimierungsprobleme P und D, von denen meist das eine (etwa P) als Minimierungsproblem und das andere (D) als Maximierungsproblem formuliert ist.

Der wesentliche Inhalt einer Dualitätsaussage besteht darin, daß unter gewissen Voraussetzungen die Gleichheit der Optimalwerte der Zielfunktionen der Probleme P und D garantiert werden kann. Dualitätssätze geben jedoch im allgemeinen keine Auskunft darüber, wie die Lösungen der dualen Probleme ermittelt werden.

Wir behandeln im folgenden Dualitätssätze, die

- a) als Anwendungen der Kuhn-Tucker-Theorie (vgl. Abschnitt 5.) angesehen werden können,
- b) sich auf Dualitätssätze der linearen Optimierung zurückführen lassen.

Außerdem kann man Dualitätsaussagen mit Hilfe der Theorie der konjugierten Funktionen herleiten (vgl. dazu [6]).

6.1. Dualitätssatz der linearen Optimierung

Wir betrachten die dualen linearen Optimierungsprobleme (Band 14, Abschnitt 3.2.)

$$\begin{aligned} P_1: \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in G_1 \}, \\ G_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \}; \\ D_1: \max \{ \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mid \mathbf{u} \in G_1^* \}, \\ G_1^* = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{c} \} \end{aligned}$$

mit der (m, n) -Matrix \mathbf{A} , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Für das Problem P_1 seien die Regularitätsbedingung B (vgl. 5.1.) erfüllt und $\mathbf{x}^0 \in G_1$ eine Lösung. Dann existiert nach Satz 5.6 und Aufgabe 5.6 ein $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{R}_+^m$, so daß für

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$$

gilt:

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u}^0 \geq \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{x}^{0T} \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{x}^{0T} \mathbf{c} - \mathbf{x}^{0T} \mathbf{A}^T \mathbf{u}^0 = 0, \quad (6.2)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = -\mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}^{0T} \nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = -\mathbf{u}^{0T} \mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}^{0T} \mathbf{b} = 0. \quad (6.4)$$

Aus (6.2) und (6.4) folgt

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = \mathbf{u}^{0T} \mathbf{b}; \quad (6.5)$$

aus (6.1) und (6.3) erhält man $\mathbf{x}^0 \in G_1$, $\mathbf{u}^0 \in G_1^*$.

Es gilt

$$\mathbf{u}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in G_1, \quad \forall \mathbf{u} \in G_1^*$$

und damit auch

$$\max_{\mathbf{u} \in G_1^*} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \leq \min_{\mathbf{x} \in G_1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}.$$

Mit (6.5) ergibt sich so als Sonderfall des Dualitätssatzes der linearen Optimierung (Band 14, Abschnitt 3.2.2.) der

Satz 6.1: *Es seien P_1 und D_1 gegeben und $\mathbf{x}^0 \in G_1$ eine Lösung von P_1 . Dann existiert ein $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$, so daß \mathbf{u}^0 Lösung von D_1 ist, und es gilt:*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = \min_{\mathbf{x} \in G_1} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \max_{\mathbf{u} \in G_1^*} \mathbf{u}^T \mathbf{b} = \mathbf{u}^{0T} \mathbf{b}. \quad (6.6)$$

Anmerkung: Eine zu Satz 6.1 analoge Aussage erhält man durch Vertauschen der Probleme P_1 und D_1 . Dies ist zulässig, da das zu D_1 duale Optimierungsproblem wieder ein primales Problem ist.

6.2. Dualitätssatz von Wolfe

Wir wollen nun für die dualen nichtlinearen Optimierungsprobleme

$$P: \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in R^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g\}^1,$$

$$D: \max \left\{ F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G^* \right\},$$

$$G^* = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^n \times R^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^n \times R_+^m, \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\}$$

einen Dualitätssatz angeben, der von Wolfe stammt (vgl. [6]). Dabei seien $f: R^n \rightarrow R$, $g_i: R^n \rightarrow R$, $i \in I_g$, konvex und stetig partiell differenzierbar.

Die entsprechenden dualen linearen Optimierungsprobleme erhält man nach dem hier aufgestellten Prinzip für $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T (-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$ (Aufgabe 6.5).

Während man bei den Problemen P_1 und D_1 nach der Bemerkung 2 in 6.1. von einer Lösung von P_1 auf eine Lösung von D_1 und umgekehrt schließen kann, enthält der folgende Dualitätssatz nur eine Implikation.

Satz 6.2 (Satz von Wolfe): *Es seien P und D gegeben, für P die Regularitätsbedingung B erfüllt und $\mathbf{x}^0 \in G$ eine Lösung von P .*

Dann existiert ein $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$, so daß $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ Lösung von D ist, und es gilt:

$$f(\mathbf{x}^0) = \min_{\mathbf{x} \in G} f(\mathbf{x}) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G^*} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0). \quad (6.7)$$

Beweis: $\mathbf{x}^0 \in G$ sei Lösung von P . Wegen der Konvexität von F in \mathbf{x} für jedes feste $\mathbf{u} \in R_+^m$ hat man für $(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T$, $(\mathbf{x}', \mathbf{u})^T$, $(\mathbf{x}'', \mathbf{u})^T \in G^*$ nach Satz 2.15 unter Beachtung der Restriktionen von D

$$F(\mathbf{x}', \mathbf{u}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{x}' - \mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad (6.8)$$

$$F(\mathbf{x}'', \mathbf{u}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq (\mathbf{x}'' - \mathbf{x})^T \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0. \quad (6.9)$$

Setzen wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}''$ in (6.8) und $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ in (6.9), so folgt

$$F(\mathbf{x}', \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}'', \mathbf{u}) \quad \forall (\mathbf{x}', \mathbf{u})^T, (\mathbf{x}'', \mathbf{u})^T \in G^*,$$

also ist F für jedes feste $\mathbf{u} \in R_+^m$ auf G^* von \mathbf{x} unabhängig. Mit

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) := \max_{\mathbf{u} \in R_+^m} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \quad (6.10)$$

¹⁾ Das Problem P stimmt offenbar mit dem Problem (5.1) überein.

ergibt sich daher

$$F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq \max_{(\mathbf{x}^0, \mathbf{u})^T \in G^*} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G^*} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G^*$$

und wegen (6.10) und Satz 5.6

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0.$$

Daher ist $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ eine Lösung von D.

Wie im Beweis von Satz 5.2 oder mit Hilfe von Satz 5.6 zeigt man leicht (Aufgabe 6.1)

$$f(\mathbf{x}^0) = F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0).$$

Die Aussage von Satz 6.2 ist insofern unbefriedigend,* als bisher kein Verfahren (insbesondere keine exaktes Verfahren) zur Lösung von P zur Verfügung steht, um daraus auf die Lösbarkeit von D und auf den optimalen Wert der Zielfunktion von D schließen zu können. Hingegen kann man bereits mit den in Abschnitt 3 und Abschnitt 5 entwickelten Methoden Probleme der Form D exakt lösen.

Es ist also auch für Anwendungen von Wichtigkeit, über solche Dualitätssätze zu verfügen, die als Äquivalenz formuliert werden können. Eine solche Aussage enthält der folgende Abschnitt.

6.3. Dualitätssatz von Dorn

Wir betrachten die dualen nichtlinearen Optimierungsprobleme

$$\bar{P}: \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \bar{G}\},$$

$$\bar{G} = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\};$$

$$\bar{D}: \max \{H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^T \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{b} \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \bar{G}^*\},$$

$$\bar{G}^* = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^n \times R^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^n \times R_+^m, \mathbf{A}^T \mathbf{u} \leq \nabla f(\mathbf{x})\}$$

mit der (m, n) -Matrix \mathbf{A} , $\mathbf{b} \in R^m$, und der stetig partiell differenzierbaren konvexen Funktion f . Für diese Probleme wurde von Dorn die folgende Dualitätsaussage bewiesen (vgl. [6]).

Satz 6.3 (Satz von Dorn): Gegeben seien \bar{P} und \bar{D} . Dann gilt:

1. Ist $\mathbf{x}^0 \in \bar{G}$ eine Lösung von \bar{P} , so existiert ein $\mathbf{u}^0 \in R_+^m$, so daß $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T$ Lösung von \bar{D} ist mit

$$f(\mathbf{x}^0) = \min_{\mathbf{x} \in \bar{G}} f(\mathbf{x}) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in \bar{G}^*} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = H(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0). \quad (6.11)$$

2. Ist $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)^T \in \bar{G}^*$ eine Lösung von \bar{D} , so ist \mathbf{x}^0 Lösung von \bar{P} , und es gilt (6.11).

Beim Beweis dieses Satzes verwendet man den Dualitätssatz der linearen Optimierung.

Die Brauchbarkeit von Satz 6.3 zeigt folgende Überlegung:

Ist ein nicht notwendig konvexes Problem der Form \bar{D} gegeben, so kann es folgendermaßen gelöst werden:

a) Ermittlung des zugehörigen konvexen Problems \bar{P} .

- b) Das Problem \bar{P} wird gelöst (etwa mittels eines Gradientenverfahrens wie in Abschnitt 7. beschrieben); \mathbf{x}^0 sei eine Lösung von \bar{P} .
- c) Setzt man $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ in \bar{D} , so ergibt sich ein lineares Optimierungsproblem in \mathbf{u} .¹⁾
- d) Dieses lineare Optimierungsproblem wird gelöst. Seine Lösung \mathbf{u}^0 ergibt zusammen mit \mathbf{x}^0 eine Lösung des gegebenen Problems \bar{D} .

Beispiel 6.1: Das Problem

$$\begin{aligned} & \max \{ (x_1 - 5)^4 + (x_2 - 4)^2 - 4x_1(x_1 - 5)^3 - 2x_2(x_2 - 4) - 15x_3 - 3x_4 \mid \mathbf{x} \in \bar{G}^* \}, \\ & \bar{G}^* = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3, x_4 \in \mathbb{R}_+; -4(x_1 - 5)^3 - 2x_3 - 3x_4 \leq 0, \\ & \quad -2(x_2 - 4) - 3x_3 + 2x_4 \leq 0 \} \end{aligned}$$

hat offenbar die Form von \bar{D} , wobei

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 5)^4 + (x_2 - 4)^2, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, u_1 = x_3, u_2 = x_4$$

zu nehmen ist. Das zugehörige konvexe Problem \bar{P} ist

$$\begin{aligned} & \min \{ (x_1 - 5)^4 + (x_2 - 4)^2 \mid \mathbf{x} \in \bar{G} \}, \\ & \bar{G} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2, 2x_1 + 3x_2 \leq 15, 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \}. \end{aligned}$$

Die Lösung $\mathbf{x}^0 = (3, 3)^T$ von \bar{P} findet man z. B. graphisch. Setzt man nun in der ursprünglichen Aufgabe $x_1 = 3, x_2 = 3$, so gelangt man nach einfachen Umformungen zu dem linearen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min \{ 15u_1 + 3u_2 \mid \mathbf{u} \in \bar{G}_1^* \}, \\ & \bar{G}_1^* = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^2, 2u_1 + 3u_2 \geq 32, \\ & \quad 3u_1 - 2u_2 \geq 2 \} \end{aligned}$$

mit der Lösung $\mathbf{u}^0 = \left(\frac{70}{13}, \frac{92}{13} \right)^T$. Folglich ist $\left(3, 3, \frac{70}{13}, \frac{92}{13} \right)^T$ eine Lösung des ursprünglichen Problems.

Aufgabe 6.1: Man vervollständige den Beweis von Satz 6.2.

Aufgabe 6.2: Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$P: \min \{ f(\mathbf{x}) = -x_2 + x_1^2 \mid \mathbf{x} \in G \}, \quad G = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}.$$

a) Man stelle das zu P gehörende duale Problem D auf und grenze mit seiner Hilfe den optimalen Wert von f ein.

b) Die dualen Probleme P und D sind sowohl mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Theorie (Abschnitt 5.) als auch mit Hilfe der Theorie der Lagrange-Multiplikatoren (Abschnitt 3.) zu lösen. (Hinweis: Beim Lösen von D sind Fallunterscheidungen für $u_j > 0$ und $u_j = 0$ vorzunehmen.)

Aufgabe 6.3: Das Problem

$$\begin{aligned} & \max \{ -3x_1^4 - 2x_2^2 + 5x_3 - x_4 \mid \mathbf{x} \in G \}, \\ & G = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3, x_4 \in \mathbb{R}_+, 4x_3 - 2x_4 \leq 4x_1^3, 2x_3 + x_4 \leq 4x_2 \} \end{aligned}$$

¹⁾ Auch wenn man in b) nur eine Näherungslösung erhält, ist dieses Verfahren praktikabel, da „kleine“ Störungen von \mathbf{x}^0 in c) nur kleine Störungen der Lösung \mathbf{u}^0 in d) ergeben. Man sagt, das lineare Optimierungsproblem sei stabil gegenüber kleinen Störungen von \mathbf{x}^0 .

ist mit Hilfe von Satz 6.3 zu lösen. (Hinweis: Bei der Lösung des primalen Problems verwende man Satz 5.6 und Aufgabe 5.6. Bei der Lösung des linearen Problems in \mathbf{u} verwende man das Simplexverfahren.)

Aufgabe 6.4: Für das in Beispiel 4.2 formulierte quadratische Optimierungsproblem gebe man das zugehörige duale Problem im Sinne von Wolfe und im Fall einer positiv semidefiniten Matrix \mathbf{C} auch im Sinne von Dorn an. Man zeige, daß sich in beiden Fällen das gleiche duale Problem unter der Voraussetzung, daß $\bar{\mathbf{P}}$ eine Lösung besitzt, herleiten läßt.

Aufgabe 6.5: Man bilde für das primale Problem $P: \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$ das zugehörige duale Problem D mit Hilfe der in 6.3. angegebenen Vorschrift und vergleiche mit Band 14.

7. Lösungsverfahren

7.1. Zur Einteilung der Lösungsverfahren

In den bisherigen Abschnitten wurde dargelegt, wie Optimierungsprobleme theoretisch zu behandeln sind. Jedoch gestatten die angegebenen Optimalitätskriterien wie die Multiplikatorregel von Lagrange (Satz 3.4 und Band 4, Satz 4.5) und die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.11), (5.12) nur in wenigen speziellen Fällen die direkte Berechnung der Lösung des Optimierungsproblems aus dem jeweiligen System der Bedingungen. Diese Lücke wollen wir nun schließen durch die Erörterung von Lösungsverfahren der nichtlinearen Optimierung.

Unter einem Lösungsverfahren für ein Optimierungsproblem verstehen wir eine Rechenvorschrift oder ein System solcher Vorschriften, das bei geeigneten Voraussetzungen über das vorliegende Problem eine Punktfolge mit folgenden Eigenschaften erzeugt:

- a) Ist die Folge endlich, so ist der zuletzt erzeugte Punkt Lösung des Problems.
- b) Ist die Folge unendlich, so besitzt sie entweder (eigentliche) Häufungspunkte, die dann Lösung des Problems sind, oder sie besitzt keine (eigentlichen) Häufungspunkte, und das Problem ist unlösbar.

Da diese beiden Eigenschaften i. allg. nur bei konvexen Optimierungsproblemen vorliegen, sprechen wir allgemeiner auch dann noch von einem Lösungsverfahren, wenn die erzeugte Punktfolge einen Häufungspunkt besitzt, der den Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.11), (5.12) bzw. den Bedingungen (4.2) oder (4.3) genügt.

Man kann Lösungsverfahren für Probleme mit Restriktionen nach den verschiedensten Gesichtspunkten einteilen, etwa nach strukturell-formalen, anwendungsbezogenen oder verfahrensmäßig-inhaltlichen Gesichtspunkten ([6], [11]). Im letzteren Falle unterscheidet man danach, auf welche Art und Weise die Punktfolge erzeugt wird:

1. Zurückführung auf simplexähnliche Verfahren (Abschnitt 7.2.),
2. Gradientenverfahren (Abschnitt 7.3.),
3. Zurückführung auf Probleme ohne Restriktionen (Abschnitt 7.4.),
4. lineare Approximationsverfahren (Abschnitt 7.5.),
5. direkte Verfahren, auch gradientenfreie oder Suchverfahren genannt (Abschnitt 7.6.).

Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere Klassen von Lösungsverfahren, auf die wir jedoch nicht eingehen können (vgl. dazu [3], [6], [9], [11], [14], [17], [19], [22]).

In den letzten Jahren wurden verstärkt Versuche zur Schaffung einer einheitlichen Theorie der Konvergenz der Lösungsverfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme unternommen (vgl. dazu [17], [9]). Neben der Konvergenz von Verfahren interessiert vor allem deren numerische Stabilität. Letztere hängt von der Verstärkung oder Dämpfung von Eingangsfehlern ab, die z. B. beim Runden der Koordinaten der Punkte und der benötigten Funktionswerte wegen der endlichen festen Wortlänge des Rechners notwendig auftreten. Über die Stabilität von Lösungsverfahren liegen bisher vorwiegend empirische Resultate vor.

Setzen wir ein stabiles Verfahren voraus, so interessieren Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit (vgl. dazu [6], [19], [22]), wobei meist stärkere Voraussetzungen über das Problem erforderlich sind als zum Nachweis der Konvergenz des Verfahrens.

7.2. Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme

7.2.1. Das Verfahren von Beale

Wir betrachten ein Verfahren zur Lösung von quadratischen Optimierungsproblemen, welches viele Analogien zum Simplexverfahren der linearen Optimierung (vgl. Band 14) aufweist. Insbesondere ist es für das Verständnis des Verfahrens von Beale ([10]) unbedingt erforderlich, das in [20] verwendete Austauschen von Basisvariablen (BV) gegen Nichtbasisvariablen (NBV) zu beherrschen.

Gegeben sei das (spezielle) quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \{ & \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0 \mid \mathbf{x} \in G \}, \\ G = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \mathbf{x}^3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_3 \mathbf{x}^3 + \mathbf{b} \right\}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

wobei gilt: Z_1, Z_2, Z_3 bilden eine Zerlegung der Indexmenge

$$\begin{aligned} J &= \{1, \dots, n\}, \\ \mathbf{x}^1 &= (x_i)_{i \in Z_1}, \quad \mathbf{x}^2 = (x_j)_{j \in Z_2}, \quad \mathbf{x}^3 = (x_k)_{k \in Z_3}, \quad \mathbf{x} = (x_p)_{p \in J}, \\ c_0 &\in \mathbb{R}, \quad \mathbf{B}_1 = (b_{ji})_{j \in Z_2, i \in Z_1}, \quad \mathbf{B}_3 = (b_{jk})_{j \in Z_2, k \in Z_3}, \\ \mathbf{C} &= (c_{pq})_{p, q \in J} \quad \text{symmetrisch und positiv semidefinit,} \\ \mathbf{c} &= (c_p)_{p \in J}, \quad \mathbf{b} = (b_j)_{j \in Z_2}, \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Wir nennen die Variablen

$$\begin{aligned} x_i, \quad i \in Z_1, \quad \text{und } x_k, \quad k \in Z_3, \quad \text{Nichtbasisvariable (NBV),} \\ x_j, \quad j \in Z_2, \quad \text{Basisvariable (BV).} \end{aligned}$$

Im allgemeinen kann man nicht erwarten, daß ein gegebenes Problem bereits die Form (7.1) hat. Durch Methoden der linearen Optimierung¹⁾ kann man aber ein System von Ungleichungen und Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_I \mathbf{x}^I &= \mathbf{b}^I, \\ \mathbf{A}_{II} \mathbf{x}^{II} &\leq \mathbf{b}^{II}, \end{aligned}$$

wobei evtl. Nichtnegativitätsbedingungen eingeschlossen sein sollen, stets auf die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 &= \mathbf{B}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_3 \mathbf{x}^3 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^4 &= \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{x}^1 + \hat{\mathbf{B}}_3 \mathbf{x}^3 + \hat{\mathbf{b}}, \quad \hat{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.2)$$

bringen, sofern es lösbar ist. Setzen wir den Ausdruck für \mathbf{x}^4 gemäß (7.2) in $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0$ mit $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}^{1T}, \mathbf{x}^{2T}, \mathbf{x}^{3T}, \mathbf{x}^{4T})$ ein, so ergibt sich eine Zielfunktion, die nicht mehr von \mathbf{x}^4 abhängt. Der zulässige Bereich \hat{G} des sich ergebenden Problems wird durch die Restriktionen (7.2) bestimmt. Da aber \mathbf{x}^4 nicht vorzeichenbeschränkt

¹⁾ Methode der künstlichen Variablen ([20], S. 26–33, und [21], S. 170–174), Zweiphasen- und Mehrphasen-Methode ([13]).

ist, stellt die zweite Gleichung in (7.2) nur eine Bestimmungsgleichung für \mathbf{x}^4 dar. Sie hat auf das Verfahren selbst keinen Einfluß¹⁾.

Wir kommen nun zur Beschreibung des Verfahrens.

Schritt 1: Setze $\mathbf{x}^2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{B}_3 \mathbf{x}^3 + \mathbf{b}$ in $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0$ ein. Es folgt

$$d_0 + 2\mathbf{d}^{1T} \mathbf{x}^1 + 2\mathbf{d}^{3T} \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^{1T} \mathbf{D}_{13} \mathbf{x}^3 + \mathbf{x}^{3T} \mathbf{D}_{31} \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^{1T} \mathbf{D}_1 \mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^{3T} \mathbf{D}_3 \mathbf{x}^3.$$

Schritt 2: Schreibe die Restriktionen (zeilenweise) sowie die neue Zielfunktion in folgendes Tableau:

		Blockschreibweise				Indesschreibweise			
Simplex- tableau	{	NBV	BV	\mathbf{x}^{1T}	\mathbf{x}^{3T}	1	NBV	BV	1
		\mathbf{x}^2	\mathbf{B}_1	\mathbf{B}_3	\mathbf{b}		$\dots x_{i'} \dots$	$\dots x_{k'} \dots$	
		\mathbf{x}^1	\mathbf{D}_1	\mathbf{D}_{13}	\mathbf{d}^1		$b_{ji'}$	$b_{jk'}$	b_j
		\mathbf{x}^3	\mathbf{D}_{31}	\mathbf{D}_3	\mathbf{d}^3		$d_{ii'}$	$d_{ik'}$	d_i
Ziel- tableau	{	1	\mathbf{d}^{1T}	\mathbf{d}^{3T}	d_0		$d_{ki'}$	$d_{kk'}$	d_k
							$d_{i'}$	$d_{k'}$	d_0
							$i' \in Z_1$	$k' \in Z_3$	

Im Gegensatz zur linearen Optimierung benötigen wir hier nicht nur eine Zeile für die Koeffizienten der Zielfunktion, sondern ein quadratisches Schema, das als Ziel-tableau bezeichnet wird.

Schritt 3: Optimalitätsbedingung bzw. Auswahl der Austauschspalte r

Fall 1: $d_i \geq 0 \quad \forall i \in Z_1$ und $d_k = 0 \quad \forall k \in Z_3$.

Dann ist

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{10} \\ \mathbf{x}^{20} \\ \mathbf{x}^{30} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^{10} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{20} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^{30} = \mathbf{0}$$

eine Lösung des Problems (7.1). (Während des Verfahrens auftretende zusätzliche Variable, die nur zur Berechnung der Lösung \mathbf{x}^0 dienen, werden nicht aufgeführt. Andere bereits eliminierte (ursprüngliche) Variable müssen nachträglich berechnet werden).

Das Verfahren ist beendet.

Fall 2: $\exists k_0 \in Z_3$ mit $d_{k_0} \neq 0$. Dann setze $r := k \rightarrow$ Schritt 4.

¹⁾ Während des Verfahrens auftretende Restriktionen dieser Art können daher, ohne das Verfahren zu beeinflussen, vernachlässigt werden (Schritt 6, Fall 2).

Fall 3: $d_k = 0 \quad \forall k \in Z_3, \exists i_0 \in Z_1$ mit $d_{i_0} < 0$. Dann setze $r := i_0 \rightarrow$ Schritt 4.

Schritt 4: Nichtlösbarkeitsbedingung bzw. Hinzufügen von Zeilen und Festlegen der Austauschzeile z . Setze

$$K = \{k \in Z_2 \mid b_{kr} d_r > 0\},$$

$$t_1 = \begin{cases} \frac{b_s}{|b_{sr}|} & \text{für } K \neq \emptyset, \text{ wobei } \frac{b_s}{|b_{sr}|} = \min_{k \in K} \frac{b_k}{|b_{kr}|} \text{ (Definition von } s \in Z_2), \\ \infty & \text{für } K = \emptyset, \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} \frac{|d_r|}{d_{rr}} & \text{für } d_{rr} > 0, \\ \infty & \text{für } d_{rr} = 0. \end{cases}$$

Fall 1: $t_1 = t_2 = \infty \Rightarrow$ Problem (7.1) besitzt keine Lösung. Das Verfahren ist beendet.

Fall 2: $t_1 \leq t_2, t_1 < \infty$. Dann setze $z := s \rightarrow$ Schritt 5.

Fall 3: $t_2 < t_1$. Dann nimm Zeile mit Index r aus dem Zieltabelleau, ersetze den Zeilenindex r durch den Index j_0 , wobei

$$j_0 = 1 + \max_{p \in Z_1 \cup Z_3 \cup Z_4} p$$

ist, und füge die Zeile

x_{j_0}	$\dots d_{j_0 i'} \dots$	$\dots d_{j_0 k'} \dots$	d_{j_0}
-----------	--------------------------	--------------------------	-----------

zum Simplextableau hinzu. Setze

$$Z_2 := Z_2 \cup \{j_0\}; z := j_0 \rightarrow \text{Schritt 5.}$$

Schritt 5: Tausche die NBV x_r gegen die BV x_z aus: Pivotelement¹⁾ ist b_{rz} ,

a) Austausch im Simplextableau wie in der linearen Optimierung ([20]).

b) Austausch im Zieltabelleau:

- Nebenrechnung $\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Austausch gemeinsam mit dem Simplextableau. Man erhält Matrix } \mathbf{H}. \\ 2. \text{ Transponieren von } \mathbf{H}. \\ 3. \text{ Nochmaliges Anwenden des Austauschschrittes auf die Matrix } \mathbf{H} \\ \text{mit obigem Pivotelement ergibt neues Zieltabelleau.} \end{array} \right.$

Das erhaltene Zieltabelleau wird unter das neue Simplextableau geschrieben \rightarrow Schritt 6.

Schritt 6: Fall 1a: $r \in Z_1$ und $z = j_0$. Dann setze

$$Z_1 := Z_1 \setminus \{r\}, \quad Z_2 := (Z_2 \cup \{r\}) \setminus \{z\}, \quad Z_3 := Z_3 \cup \{z\}.$$

Fall 1b: $r \in Z_1$ und $z = s$. Dann setze

$$Z_1 := (Z_1 \cup \{z\}) \setminus \{r\}, \quad Z_2 := (Z_2 \cup \{r\}) \setminus \{z\}, \quad Z_3 := Z_3.$$

Fall 2a: $r \in Z_3$ und $z = j_0$. Dann setze

$$Z_1 := Z_1,$$

$$Z_2 := Z_2 \setminus \{z\}$$

(die Zeile r im neuen Tableau wird gestrichen, da x_r nicht vorzeichenbeschränkt ist),

$$Z_3 := (Z_3 \cup \{z\}) \setminus \{r\}.$$

¹⁾ In Band 14 wird dieses Element als Kreuzelement bezeichnet.

Fall 2b: $r \in Z_3$ und $z = s$. Dann setze

$$Z_1 := Z_1 \cup \{z\}, \quad Z_2 := Z_2 \setminus \{z\}, \quad Z_3 := Z_3 \setminus \{r\}$$

(die Zeile r im neuen Tableau wird gestrichen, da x_r nicht vorzeichenbeschränkt ist) → Schritt 3.

Stellt man die wiederholte Anwendung von Schritt 5 schematisch dar, so ergibt sich die in Bild 7.1 dargestellte Blockstruktur. Über das dargelegte Verfahren hat man die Aussage von

Satz 7.1: *Das oben angegebene Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten mit Schritt 4 (Fall 1) oder mit Schritt 3 (Fall 1) ab!*

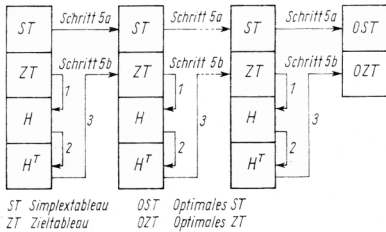


Bild 7.1

Beispiel 7.1: Für das Problem

$$\min \{x_1^2 + x_3^2 - 8x_1 - 10x_3 \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 18\}$$

erhält man $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \{2\}$, $Z_3 = \{3\}$ und gemäß Schritt 1 und Schritt 2 das folgende Tableau:

	NBV	NBV		
		x_1	x_3	1
NBV	BV			
	x_2	-3	-2	18
	x_1	1	0	-4
	x_3	0	1	-5
	1	-4	-5	0

Schritt 3: Fall 2, $r = 3$,
Schritt 4: $K = \{2\} \Rightarrow t_1 = 9, s = 2$,
 $|d_3| = 5, d_{33} = 1 \Rightarrow t_2 = 5$
 $\Rightarrow t_2 < t_1$, d. h. Fall 3.
Somit ist eine neue Zeile hinzuzufügen.

Die Zeile mit dem Index $r = 3$ im Zieltabelleau lautet

x_3	0	1	-5
-------	---	---	----

Wir ersetzen x_3 wegen $\max \{1, 2, 3\} + 1 = 4$ durch x_4 und erhalten das Tableau

		NBV		
		x_1	x_3	1
NBV	BV			
	x_2	-3	-2	18
	x_4	0	<u>1</u>	-5
	x_1	1	0	-4
	x_3	0	1	-5
	1	-4	-5	0

mit $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \{2, 4\}$, $Z_3 = \{3\}$
und $z = 4$.

Wir führen jetzt den Austausch mit b_{43} als Pivotelement durch und erhalten

Neben-
rechnung

H	1	0	-4
	0	1	0
	-4	-5	-25
H^T	1	0	-4
	0	1	-5
	-4	0	-25

neues
Simplex-
tableau
neues
Ziel-
tableau

	<div>NBV</div> <div>BV</div>	x_1	x_4	1
	x_2	-3	-2	8
	x_3	*	*	*
NBV	x_1	1	0	-4
	x_4	0	1	0
	1	-4	0	-25

Nach Schritt 6 wird wegen Fall 2a die Zeile mit x_3 gestrichen und braucht daher nicht berechnet zu werden. Es ergibt sich $Z_1 = \{1\}$, $Z_2 = \{2\}$, $Z_3 = \{4\}$. Jetzt beginnen wir wieder mit Schritt 3.

Wir geben nun das Beispiel auf umstehender Seite insgesamt in der Blockstruktur an und setzen jeweils unter die Blöcke die für die Durchführung der Schritte benötigten Parameter $r, s, z, t_1, t_2, Z_1, Z_2, Z_3, K$.

Schließlich erhält man das Schema:

		NBV		
		x_2	x_5	1
BV				
x_1		*	*	$\frac{40}{13}$
x_4		*	*	*
NBV	x_2	*	*	$\frac{2}{9}$
	x_5	*	*	0
	1	$\frac{4}{13}$	0	$-\frac{517}{13}$

Optimales Schema nach Schritt 3 (Fall 1). Die für die Berechnung der Lösung unwesentlichen Werte wurden durch „*“ ersetzt.

Lösung: $x_1^0 = \frac{40}{13}$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = \frac{57}{13}$;

Optimalwert: $-\frac{517}{13}$.

NBV	BV	x_1	x_3	1
x_2		-3	-2	18
x_4		0	1	-5
x_1		1	0	-4
x_3		0	1	-5
1		-4	-5	0
H		1	0	-4
		0	1	0
		-4	-5	-25
H ^T		1	0	-4
		0	1	-5
		-4	0	-25
**		0	1	5

NBV	BV	x_1	x_4	1
x_2		-3	-2	8
x_3				
x_1		1	0	-4
x_4		0	1	0
1		-4	0	-25
H		$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$
		0	1	0
		$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{107}{3}$
H ^T		$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
		$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{8}{3}$
		$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{107}{3}$
**		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

NBV	BV	x_2	x_4	1
x_1		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_5		$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{8}{9}$
x_2		$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
x_4		$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{8}{9}$
1		$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{353}{9}$
H		$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$
		0	1	0
		$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{517}{13}$
H ^T		$\frac{1}{13}$	0	$\frac{4}{13}$
		$\frac{2}{13}$	1	$\frac{8}{13}$
		$\frac{4}{13}$	0	$-\frac{517}{13}$
**		$-\frac{2}{13}$	$\frac{9}{13}$	$-\frac{8}{13}$

$$Z_1 = \{1\}, r = 3, s = 2,$$

$$Z_2 = \{2\} \Rightarrow Z_2 = \{2, 4\},$$

$$Z_3 = \{3\}, t_1 = 9,$$

$$j_0 = 4, t_2 = 5,$$

$$z = 4, K = \{2\},$$

Zeile mit x_4 hinzugefügt;

$$Z_1 = \{1\}, r = 1, s = 2,$$

$$Z_2 = \{2\}, t_1 = \frac{8}{3},$$

$$Z_3 = \{4\}, t_2 = 4,$$

$$K = \{2\}, z = 2,$$

Zeile mit x_3 gestrichen;

$$Z_1 = \{2\}, r = 4, s = 1,$$

$$Z_2 = \{1\} \Rightarrow Z_2 = \{1, 5\},$$

$$Z_3 = \{4\}, t_1 = 4, t_2 = \frac{8}{13},$$

$$j_0 = z = 5, K = \{1\},$$

Zeile mit x_5 hinzugefügt.

Bei diesem Beispiel handelt es sich um ein einfaches Prinzipbeispiel, das mit den bekannten Methoden der Analysis einfacher und schneller gelöst werden kann. Erst für Aufgaben größerer Dimension erweist sich das angegebene Verfahren als vorteilhaft.

Die Schritte des Verfahrens sind in Bild 7.2 dargestellt.

Aufgabe 7.1: Man zeige, daß die Matrix $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_{13} \\ D_{31} & D_3 \end{pmatrix}$, die aus Schritt 1 folgt, symmetrisch und

positiv semidefinit ist bezüglich der Vektorvariablen $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}$. (Man betrachte in (7.1) den vereinfachten Fall $Z_3 = \emptyset$.)

¹⁾ Diese Zeile kann zur Berechnung von x_3^0 nach Beendigung des Verfahrens verwendet werden. Wir benötigen sie nicht, da wir x_3^0 direkt aus der Restriktion $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 18$ berechnen. Analoges gilt für x_4 (vgl. Schritt 3, Fall 1).

²⁾ Um die Rechnungen zu erleichtern, schreiben wir unter das Tableau die neue Pivotzeile „**“. Für die Durchführung des Algorithmus selbst ist diese Zeile nicht erforderlich.

³⁾ NBV.

- a) Ist das Verfahren von Beale anwendbar?
 b) Existiert eine Lösung des Problems?

Aufgabe 7.5: Wir nehmen an, daß das Interesse eines Konsumenten an n Produkten durch eine Nutzenfunktion $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ (\mathbf{C} negativ semidefinit) erfaßt werden kann, wobei x_j , $j = 1, \dots, n$, die Menge des Produktes j ist, die der Konsument kauft. Verfügt er über einen Betrag β und ist p_j der Stückgutpreis des Produktes j , so findet man die maximale Menge x_j^0 jedes Produktes j , die der Konsument kaufen kann, durch die Lösung eines Optimierungsproblems.

a) Man formuliere das quadratische Optimierungsproblem!

b) Für $n = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $\beta = 10$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$ löse man dieses Problem mit dem Verfahren von Beale!

7.2.2. Andere Lösungsverfahren

Für das Verfahren von Beale wurde von Land und Morton ein Analogon zur revidierten Simplexmethode angegeben.

Neben dem Verfahren von Beale, das die Kuhn-Tucker-Bedingungen bzw. äquivalente Formulierungen nur als Optimalitätsbedingung benutzt, gibt es weitere Verfahren, die die Simplexmethode verwenden und die Kuhn-Tucker-Bedingungen direkt einbeziehen. Wir nennen hier die Verfahren von Wolfe (1959), Dantzig (1963) und Jagannathan (1965).

Überblicke über Lösungsverfahren für quadratische Optimierungsprobleme findet man in [10], [13], [16].

Quadratische Optimierungsprobleme mit nicht notwendig konvexer Zielfunktion werden u. a. in [17] behandelt.

7.3. Gradientenverfahren

7.3.1. Allgemeine Bemerkungen

Das in diesem Abschnitt behandelte Verfahren unterscheidet sich im praktischen Vorgehen wesentlich von dem in 7.2. erörterten Lösungsverfahren, obwohl 7.2. theoretisch auch hier eingeordnet werden kann.

Wir betrachten das Problem

$$\min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \quad G \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (7.3)$$

mit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Zur Beschreibung des Verfahrens benötigen wir die folgenden zwei Definitionen.

Definition 7.1: Eine Richtung $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$) heißt **zulässig im Punkt** $\mathbf{x} \in G$, wenn eine Zahl $\alpha_0 > 0$ existiert mit

$$\mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \in G \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_0).$$

Eine zulässige Richtung \mathbf{s} heißt **Abstiegsrichtung im Punkt** $\mathbf{x}^0 \in G$, wenn gilt:

$$\mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}^0) < 0.$$

Ist \mathbf{s} eine Abstiegsrichtung, so folgt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen für hinreichend kleines $\alpha > 0$:

$$f(\mathbf{x}^0 + \alpha \mathbf{s}) < f(\mathbf{x}^0).$$

Definition 7.2: Existiert für einen Punkt $\mathbf{x}^0 \in G$ keine Abstiegsrichtung, so nennen wir ihn **stationären Punkt**.

Offenbar gilt in einem stationären Punkt für jede zulässige Richtung \mathbf{s} die Beziehung

$$\mathbf{s}^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \geq 0. \quad (7.4)$$

Gelten in \mathbf{x}^0 bezügl. G gewisse Regularitätsbedingungen, so ist (7.4) mit den Kuhn-Tucker-Bedingungen äquivalent (vgl. dazu [6])¹⁾.

Bei den hier erörterten Verfahren wird eine i. allg. unendliche Punktfolge $\{\mathbf{x}^k\} \subset G$ so konstruiert, daß sie Häufungspunkte besitzt und diese stationäre Punkte von (7.3) sind. Damit sind die Glieder \mathbf{x}^k dieser Folge nur Näherungen eines stationären Punktes von (7.3). Die Methode der Konstruktion solcher Folgen $\{\mathbf{x}^k\}$ ergibt die Bezeichnung für diese Verfahren. Beginnend mit einem Startpunkt $\mathbf{x}^1 \in G$ bewegen wir uns in G längs einer Abstiegsrichtung. Gelangen wir so zu einem Punkt $\mathbf{x}^2 \in G$ mit $f(\mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1)$, dann suchen wir in \mathbf{x}^2 eine neue Abstiegsrichtung und gelangen zu $\mathbf{x}^3 \in G$ usw. Genügt die Auswahl der \mathbf{x}^k gewissen Bedingungen, so ist ein Häufungspunkt der Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ zugleich stationärer Punkt des Problems (7.3). Je nach Wahl des Startpunktes können sich dabei verschiedene stationäre Punkte ergeben (Bild 7.3). Die zu diesen stationären

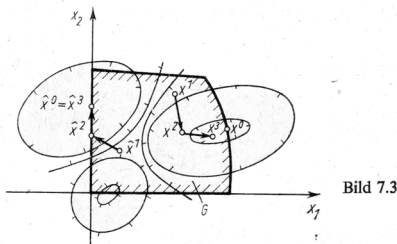


Bild 7.3

Punkten gehörenden Funktionswerte der Zielfunktion sind i. allg. voneinander verschieden, da stationäre Punkte i. allg. keine Lösung des Problems (7.3) sind. Wir können also feststellen, daß dieses Verfahren im allgemeinen Fall nicht die Lösung von (7.3) liefert, sondern nur Näherungen für stationäre Punkte. Dies bedeutet nicht, daß die Gradientenverfahren ungenauer sind als andere Verfahren. Bei **jedem** Verfahren, das nicht nach endlich vielen Schritten die exakte Lösung liefert, erhält man nur Näherungslösungen. Aber auch bei endlichen Verfahren wie bei der Simplexmethode liefert der Rechner (wegen der endlichen Stellenzahl) nur Näherungslösungen.

Wir formulieren nun folgenden allgemeinen Algorithmus:

Schritt 1: Wähle einen Startpunkt $\mathbf{x}^1 \in G$.

Schritt 2: Setze $k := 0$.

Schritt 3: Setze $k := k + 1$.

¹⁾ Werden bezüglich G keine Voraussetzungen gemacht, so kann der Fall eintreten, daß in $\mathbf{x}^0 \in G$ a) keine zulässige Richtung existiert oder b) zwar zulässige Richtungen, aber keine Abstiegsrichtungen existieren (z. B. $G = \{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = x_2^2, x_1 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2)^T \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$, a) $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$, b) $f(\mathbf{x}) = -x_1$, $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$).

Schritt 4: Erfüllt \mathbf{x}^k eine Abbruchbedingung?¹⁾ Wenn ja \rightarrow Abbruch des Verfahrens; \mathbf{x}^k ist Näherung für einen stationären Punkt von (7.3). Wenn nein \rightarrow Schritt 5.

Schritt 5: Suche eine Abstiegsrichtung \mathbf{s}^k im Punkte $\mathbf{x}^k \in G$.

Fall 1: Es gibt keine Abstiegsrichtung in $\mathbf{x}^k \rightarrow$ Abbruch des Verfahrens; \mathbf{x}^k ist stationärer Punkt von (7.3).

Fall 2: Es gibt eine Abstiegsrichtung \mathbf{s}^k in \mathbf{x}^k . Bestimme $\mathbf{s}^k \rightarrow$ Schritt 6.

Schritt 6: Bestimme α^k als Lösung des Problems

$$\min \{f(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{s}^k) \mid \alpha \geq 0, \mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{s}^k \in G\}.^{2)}$$

Schritt 7: Setze $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{s}^k \rightarrow$ Schritt 3.

Die einzelnen Verfahren, die als Relaxationsverfahren bezeichnet werden, unterscheiden sich in der konkreten Durchführung der Schritte 4, 5 und 6. Insbesondere gibt es wesentliche Unterschiede bei der Auswahl von \mathbf{s}^k (Schritt 5):

a) \mathbf{s}^k wird als Lösung (Näherungslösung) eines (7.3) angepaßten Optimierungsproblems erhalten: Richtungssuchverfahren;

b) \mathbf{s}^k wird durch eine Rechenvorschrift bestimmt.

Das von uns im folgenden behandelte reduzierte Gradientenverfahren gehört zur zweiten Gruppe von Verfahren.

7.3.2. Das reduzierte Gradientenverfahren

Gegeben sei das spezielle Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \\ G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

wobei gilt: $W \supset G$ eine offene Menge, $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, \mathbf{A} eine nicht-entartete (m, n) -Matrix, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Definition 7.3: Eine (m, n) -Matrix \mathbf{A} ($m \leq n$) heißt **nichtentartet**, wenn gilt:

1. Je m Spalten von \mathbf{A} sind linear unabhängig.

2. Jede Lösung \mathbf{x} des Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ hat mindestens m positive Koordinaten.

Unter den obigen Voraussetzungen kann man die Indexmenge $J = \{1, \dots, n\}$ in Abhängigkeit vom Punkt $\mathbf{x} \in G$ einteilen gemäß

$$J_1(\mathbf{x}) = \{j_i \in J \mid x_{j_i} > 0, i = 1, \dots, m\}; \quad J_2(\mathbf{x}) = J \setminus J_1(\mathbf{x}).$$

Ferner erklären wir die Vektoren der

Basisvariablen (BV): $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (x_j), j \in J_1(\mathbf{x})$ und

Nichtbasisvariablen (NBV): $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = (x_j), j \in J_2(\mathbf{x})$.

Wir setzen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}^j = (a_{ij}), i = 1, \dots, m; \quad j \in J,$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}^j)_{j \in J_1(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}^j)_{j \in J_2(\mathbf{x})}.$$

¹⁾ Als Abbruchbedingung kann man u. a. bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die beiden folgenden Tests verwenden: a) $f(\mathbf{x}^{k-1}) - f(\mathbf{x}^k) < \varepsilon$, b) $\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\| < \varepsilon$. Näheres findet man in [9], [11], [17].

²⁾ Unter gewissen Voraussetzungen kann man anstelle der Lösungen dieser Aufgabe lediglich Näherungslösungen verwenden [17]. Vgl. dazu die Bemerkung über die Stabilität eines Optimierungsproblems in 6.3.

Wenn keine Verwechslungen möglich sind, ersetzen wir $J_1(\mathbf{x}^k)$, $J_2(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{z}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}^k)$ durch J_1^k , J_2^k , \mathbf{y}^k , \mathbf{z}^k , \mathbf{B}_k , \mathbf{C}_k .

Unter $f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ verstehen wir den Funktionswert $f(\mathbf{x})$, wobei \mathbf{x} in die zugehörigen Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{z} zerlegt wurde. Mit $\nabla_{\mathbf{y}} f(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ und $\nabla_{\mathbf{z}} f(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ bezeichnen wir die Gradienten von f bezüglich der Variablen x_j , $j \in J_1(\mathbf{x})$, bzw. x_j , $j \in J_2(\mathbf{x})$, im Punkte $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})^T$ ¹⁾. Schließlich bezeichnen wir mit \mathbf{B}_k^{-1} die Inverse der Matrix \mathbf{B}_k (diese Inverse existiert, da \mathbf{A} nichtentartet ist).

Der Algorithmus für das reduzierte Gradientenverfahren hat folgende Form:

Schritt 1: Bestimme eine zulässige Basislösung mittels Methoden der linearen Optimierung ([20]). Man erhält aus $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{C}\mathbf{z}^1, \quad \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}.$$

Tableau 1:

	$(\mathbf{z}^1)^T$	1
\mathbf{y}^1	$-\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{C}_1$	$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}$

Setze: $\mathbf{y}_0^1 := \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_0^1 := \mathbf{0}$ (man kann \mathbf{y}_0^1 und \mathbf{z}_0^1 auch anders wählen, vgl. Aufgabe 7.7).

Schritt 2: Setze $k := 1$.

Schritt 3: Berechne $\mathbf{r}_y^k := \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}_0^k, \mathbf{z}_0^k)$, $\mathbf{r}_z^k := \nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{y}_0^k, \mathbf{z}_0^k)$.

Schritt 4: Berechne $(\mathbf{r}^k)^T := (-\mathbf{r}_z^k)^T + (\mathbf{r}_y^k)^T \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{C}_k$.

Schritt 5: Berechne

$$\Delta \mathbf{z}_j^k := \begin{cases} r_j^k & \text{für } r_j^k > 0 \text{ oder } z_{0j}^k > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn $\Delta \mathbf{z}^k = \mathbf{0} \rightarrow$ Schritt 12, sonst \rightarrow Schritt 6.

Tableau 2:

	$(\mathbf{z}^k)^T$	1				
\mathbf{y}^k	$-\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{C}_k$	$\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{b}$	\mathbf{y}_0^k	$-\mathbf{r}_y^k$	$\Delta \mathbf{y}^k$	$\left(\frac{y_{0j}^k}{ \Delta y_j^k } \right)$
	$(\mathbf{z}_0^k)^T$					α_1^k
	$(-\mathbf{r}_z^k)^T$					
	$(\mathbf{r}^k)^T$					
	$(\Delta \mathbf{z}^k)^T$					
	$\left(\frac{z_{0j}^k}{ \Delta z_j^k } \right)^T$	α_2^k				

$$\alpha_1^k = \min_{\substack{j \in J_1^k \\ \Delta y_j^k < 0}} \frac{y_{0j}^k}{|\Delta y_j^k|},$$

$$\alpha_2^k = \min_{\substack{j \in J_2^k \\ \Delta z_j^k < 0}} \frac{z_{0j}^k}{|\Delta z_j^k|}.$$

¹⁾ Diese Schreibweise symbolisiert nur, daß die Zusammenfassung der Koordinaten von $\bar{\mathbf{y}}$ und $\bar{\mathbf{z}}$ nach der Sortierung bez. der Indizes mit $\bar{\mathbf{x}}$ übereinstimmt. Ein Koordinatenvergleich von $\bar{\mathbf{x}}$ und $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})^T$ ist nicht zulässig, z. B. $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^T$; $\bar{\mathbf{y}} = (x_3)$, $\bar{\mathbf{z}} = (x_1, x_2)^T$.

Wir vereinbaren, anstelle $\frac{z_{0j}^k}{|\Delta z_j^k|}$ bzw. $\frac{y_{0j}^k}{|\Delta y_j^k|}$ das Zeichen ∞ in das Tableau 2 zu setzen, falls $\Delta z_j^k \geq 0$ bzw. $\Delta y_j^k \geq 0$ gilt.

Schritt 6: Berechne $\Delta y^k := -\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{C}_k \Delta z^k$.

Schritt 7: Berechne α_1^k aus $\max \{\alpha \mid \mathbf{y}_0^k + \alpha \Delta \mathbf{y}^k \geq \mathbf{0}\}$, α_2^k aus $\max \{\alpha \mid \mathbf{z}_0^k + \alpha \Delta \mathbf{z}^k \geq \mathbf{0}\}$ (vgl. Tableau 2).

Schritt 8: Berechne α^k aus

$$\min \{f(\mathbf{y}_0^k + \alpha \Delta \mathbf{y}^k, \mathbf{z}_0^k + \alpha \Delta \mathbf{z}^k) \mid 0 \leq \alpha \leq \min \{\alpha_1^k, \alpha_2^k\}\}.$$

Schritt 9: Setze

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}^k &:= \mathbf{y}_0^k + \alpha^k \Delta \mathbf{y}^k, \\ \hat{\mathbf{z}}^k &:= \mathbf{z}_0^k + \alpha^k \Delta \mathbf{z}^k. \end{aligned}$$

Wenn $\hat{\mathbf{y}}^k > \mathbf{0}$ (d. h. $\alpha_1^k > \alpha^k$), setze man $\mathbf{y}_0^{k+1} := \hat{\mathbf{y}}^k$, $\mathbf{z}_0^{k+1} := \hat{\mathbf{z}}^k$, $\mathbf{B}_{k+1} := \mathbf{B}_k$, $\mathbf{C}_{k+1} := \mathbf{C}_k$ \rightarrow Schritt 10, sonst (d. h. $\alpha_1^k = \alpha^k < \alpha_2^k$) \rightarrow Schritt 11.

Schritt 10: $k := k + 1 \rightarrow$ Schritt 3.

Schritt 11: Tausche die BV von $\hat{\mathbf{y}}^k$ mit $\hat{y}_j^k = 0$ ($j = j_0$) gegen eine positive NBV von $\hat{\mathbf{z}}^k$ ($i = i_0$) aus.

Verwende dazu das Austauschverfahren. Nach dem Austausch enthält das neue Tableau 2 die folgenden Terme:

Tableau 3:

	$(\mathbf{z}^{k+1})^T$	1		
\mathbf{y}^{k+1}	$-\mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{C}_{k+1}$	$\mathbf{B}_{k+1}^{-1} \mathbf{b}$	\mathbf{y}_0^{k+1}	...
	$(\mathbf{z}_0^{k+1})^T$			
	\vdots			

mit

$$\begin{aligned} y_{0j}^{k+1} &:= \begin{cases} \hat{y}_j^k & \text{für } j \neq j_0, \\ \hat{z}_{i_0}^k & \text{für } j = j_0, \end{cases} \\ z_{0i}^{k+1} &:= \begin{cases} \hat{z}_i^k & \text{für } i \neq i_0, \\ 0 & \text{für } i = i_0, \end{cases} \end{aligned}$$

\rightarrow Schritt 10.

Schritt 12: \mathbf{x}_0^k ist ein stationärer Punkt. Das Verfahren ist beendet.

Anmerkung zum Algorithmus: Bis auf Schritt 3 und Schritt 8 werden alle anderen auszuführenden Produktsummen mit Hilfe des Tableaus ausgeführt (vgl. auch Beispiel 7.2). Schritt 3 und Schritt 8 werden in einer Nebenrechnung durchgeführt. Falls kein Austausch erfolgt, bleiben $\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{C}_k$ und $\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{b}$ erhalten. Es kann dann mit dem vorhergehenden Tableau fortgesetzt werden.

Beispiel 7.2:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (32, 34) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x \in G \right\}, \\ G &= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4; x_1 + x_3 = 2, x_1 + 2x_2 + x_4 = 6\}. \end{aligned}$$

Damit hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man stellt fest, daß nicht je zwei Spalten linear unabhängig sind. Obwohl die erste Bedingung in Definition 7.3 nicht erfüllt ist, kann das Verfahren angewandt werden, wenn sich während des Verfahrens zeigt, daß alle benötigten \mathbf{B}_k^{-1} berechnet werden können. Existiert ein \mathbf{B}_k^{-1} nicht, so liegt Entartung vor und der Algorithmus muß abgeändert werden. Darauf gehen wir hier nicht ein.

Die zweite Bedingung in Definition 7.3 braucht nicht überprüft zu werden. Man stellt in Schritt 11 fest, ob sie erfüllt ist oder nicht.

Schritt 1: Anfangstableau (Auflösen nach x_3 und x_4)

Tableau 1a:

	x_1	x_2	1
x_3	-1	0	2
x_4	-1	-2	6

Wegen $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ ist $(0, 0, 2, 6)^T \in G$ eine zulässige Lösung (ein Eckpunkt von G). Dabei hat man

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{y}^1 = (x_3, x_4)^T, \quad \mathbf{z}^1 = (x_1, x_2)^T, \quad k = 1.$$

Schritte 3, 4, 5, 6: $\mathbf{r}_y^1 = \nabla_y f(\mathbf{y}_0^1, \mathbf{z}_0^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{r}_z^1 = \nabla_z f(\mathbf{y}_0^1, \mathbf{z}_0^1) = 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ -4 \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -32 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Tableau 2a:

	z_1	z_2	1	y_0^1	$-\mathbf{r}_y^1$	$\Delta \mathbf{y}^1$
y_3	-1	0	2	2	0	-32
y_4	-1*	-2	6	6	0*	-40
$(\mathbf{z}_0^1)^T$	0	0				
$(-\mathbf{r}_z^1)^T$	32	4				
$(\mathbf{r}^1)^T$	32	4				
$(\Delta \mathbf{z}^1)^T$	32	4				

Zur Berechnung von \mathbf{r}^k :

$$0 \cdot \underline{\underline{(-1)}} + 0^* \cdot \underline{\underline{(-1)}}^* + \underline{\underline{32}} = \underline{\underline{32}},$$

$$0 \cdot \underline{\underline{(0)}} + 0^* \cdot \underline{\underline{(-2)}} + 4 = 4.$$

Zur Berechnung von $\Delta \mathbf{y}^k$:

$$-32 = \underline{\underline{32}} \underline{\underline{(-1)}} + 4 \cdot \underline{\underline{(0)}}.$$

$$-40 = \underline{\underline{32}} \underline{\underline{(-1)}}^* + 4 \underline{\underline{(-2)}}.$$

Schritt 7:

Tableau 2b:

	z_1	z_2	1	y_0^1	$-\mathbf{r}_y^1$	$\Delta \mathbf{y}^1$	$\left(\frac{y_{0j}^1}{ \Delta y_j^1 } \right)$	$\hat{\mathbf{y}}^1$
y_3	-1	0	2	2	0	-32	$\frac{1}{16}$	0
y_4	-1	-2	6	6	0	-40	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{2}$
$(\mathbf{z}_0^1)^T$	0	0						
$(-\mathbf{r}_z^1)^T$	32	4					$\frac{1}{16} = \alpha_1^1$	
$(\mathbf{r}^1)^T$	32	4						
$(\Delta \mathbf{z}^1)^T$	32	4						
$\left(\frac{z_{0j}^1}{ \Delta z_j^1 } \right)^T$	∞	∞	$\alpha_2^1 = \infty$	$\alpha_2^1 = \min_j \frac{z_{0j}^1}{ \Delta z_j^1 },$				
$(\hat{\mathbf{z}}^1)^T$	2	$\frac{1}{4}$		$\alpha_1^1 = \frac{1}{16}.$				

Falls $\Delta y_j^1 \geq 0$ bzw. $\Delta z_j^1 \geq 0$ gilt, wird als Quotient jeweils ∞ definiert, denn für diese Richtungen kann $y_j \geq 0$ bzw. $z_j \geq 0$ nicht verletzt werden.

Schritte 8, 9 (Anwendung von Satz 5.3):

$$\alpha^1 = \min \left\{ \frac{- \left[2(0, 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-32, -4) \right] \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix}}{2(32, 4) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix}}, \frac{1}{16}, \infty \right\}$$

$$= \min \left\{ \frac{65}{514}, \frac{1}{16}, \infty \right\} = \alpha_1^1 = \frac{1}{16}.$$

Damit hat man $\alpha^1 = \alpha_1^1 < \alpha_2^1$ und folglich

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \hat{y}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -32 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \hat{z}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(vgl. Tableau 2b).

Schritt 11: Wegen $\hat{y}_3 = 0$ wird \hat{y}_3 gegen $\hat{z}_1 = 2$ und damit x_3 gegen x_1 ausgetauscht.

Tableau 3a:

	x_1	x_2	1		x_3	x_2	1	y_2^0	
x_3	-1	0	2	\rightarrow	x_1	-1	0	2	2
x_4	-1	-2	6		x_4	1	-2	4	$\frac{7}{2}$
K	*	0	2		z_0^{2T}	0	$\frac{1}{4}$...
							

Setze $k = 2$ und gehe zu Schritt 3:

$$r_y^2 = \nabla_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}} f(x_0^2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_z^2 = \nabla_{\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}} f(x_0^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Schritte: 4-8: Tableau 2c auf Seite 71.

Schritt 9:

$$\hat{\alpha}^2 = - \frac{\left[2 \left(2, \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-32, -4) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0, \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}} = 1 > \frac{1}{2} = \alpha_1^2$$

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha_1^2$; \hat{y}_4 wird gegen \hat{z}_2 ausgetauscht. Fortsetzung Tableau 3b auf S. 71.

Schritt 4-8:

Tableau 2c:

	x_3	x_2	1	y_0^2	$-r_y^2$	Δy^2	$\left(\frac{y_{0j}^2}{ \Delta y_j^2 }\right)$	\hat{y}^2
x_1	-1	0	2	2	16	0	∞	2
x_4	1	-2	4	$\frac{7}{2}$	0	-7	$\frac{1}{2}$	0
z_0^2	0	$\frac{1}{4}$						$\frac{1}{2} = \alpha_1^2$
$(-r_z^2)^T$	0	$\frac{7}{2}$						
$(r^2)^T$	-16	$\frac{7}{2}$						
$(\Delta z^2)^T$	0	$\frac{7}{2}$						
$\left(\frac{z_{0j}^2}{ \Delta z_j^2 }\right)^T$	∞	∞	$\infty = \alpha_2^2$					
$(\hat{z}^2)^T$	0	2						

Fortsetzung Schritt 9 auf S. 70.

Tableau 3b:

	x_3	x_4	y_0^3	$-r_y^3$
x_1	-1	0	2	16
x_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	0
$(z_0^3)^T$	0	0		
$(-r_z^3)^T$	0	0		
$(r^3)^T$	-16	0		
$(\Delta z^3)^T$	0	0		

$$r_y^3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_z^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach den Schritten 5, 12 ist $\mathbf{x}^3 = (2, 2, 0, 0)^T$ ein stationärer Punkt des Problems, und wegen Satz 4.5 ist \mathbf{x}^3 zugleich Lösung des Problems. Auch dieses Beispiel ist als einfaches Prinzipbeispiel aufzufassen.

7.3.3. Ergänzende Bemerkungen zum reduzierten Gradientenverfahren

Für das System $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ folgt mit Beachtung von Definition 7.3 die Existenz der Zerlegung von $\mathbf{A} = (\mathbf{B}, \mathbf{C})$ mit

$$\mathbf{By} + \mathbf{Cz} = \mathbf{b}, \quad \text{also} \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Cz}.$$

Eigentlich hängen \mathbf{B} , \mathbf{C} von \mathbf{y} ab; solange jedoch $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ gilt, sind diese Matrizen konstant. Man erhält

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{z}(\mathbf{x})\},$$

$$f(\mathbf{y}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{z}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{x})).$$

Damit ergibt sich aus (7.5)

$$\min \{f(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{z}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{z}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in G\}.$$

Hat man nun ein $\mathbf{x}^1 = (\mathbf{y}^1, \mathbf{z}^1)^T$ als Startpunkt mit $\mathbf{y}^1 > \mathbf{0}$ gefunden, so verändert sich das Vorzeichen von \mathbf{y}^1 nicht, wenn man \mathbf{z}^1 um $\Delta\mathbf{z}^1$ mit $\|\Delta\mathbf{z}^1\| < \varepsilon$ (ε hinreichend klein) abändert. Hieraus erhält man, da \mathbf{B} und \mathbf{C} für alle $\mathbf{z}^1 + \Delta\mathbf{z}^1$ mit $\|\Delta\mathbf{z}^1\| < \varepsilon$ konstant sind, die Aussage:

$(\mathbf{y}^1, \mathbf{z}^1)$ ist genau dann ein stationärer Punkt von (7.5), wenn gilt

$$\nabla g(\mathbf{z}^1)^T \Delta\mathbf{z}^1 \geq 0 \quad \text{für alle } \Delta\mathbf{z}^1 \text{ mit } \mathbf{z}^1 + \Delta\mathbf{z}^1 \geq \mathbf{0}, \|\Delta\mathbf{z}^1\| < \varepsilon$$

mit $g(\mathbf{z}) = f(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{z}, \mathbf{z})$.

Damit erhalten wir als stärkste Abstiegsrichtung von g (vgl. Band 4, S. 61, S. 111):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= -\nabla g(\mathbf{z})^T = -\nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})^T - \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})^T \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{y}(\mathbf{z}) \big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{z})} \\ &= -\nabla_{\mathbf{z}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})^T + \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{y}, \mathbf{z})^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \big|_{\mathbf{y}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{z}} \end{aligned}$$

(vgl. dazu im Algorithmus die Schritte 3 und 4). Um die Voraussetzung

$$\mathbf{z} + \alpha\Delta\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad \text{für } \alpha \in [0, \alpha_0)$$

nicht zu verletzen, wählen wir

$$\Delta z_j = \begin{cases} r_j & \text{für } r_j > 0 \text{ oder } z_j > 0, j \in J_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.6)$$

Dann hat man folgende Aussage:

Satz 7.2: $\mathbf{x} \in G$ und $\Delta\mathbf{z}$ seien gemäß Vorschrift (7.6) bestimmt. Dann gilt

$$\Delta\mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \text{ ist stationärer Punkt des Problems (7.5).}$$

Hieraus folgt das Abbruchkriterium im Schritt 5 des Algorithmus. Zugleich haben wir für den allgemeinen Algorithmus in 7.3.1. den Schritt 5 durchgeführt mit $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\mathbf{z} \end{pmatrix}$, $\Delta\mathbf{y} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\Delta\mathbf{z}$.

Für Schritt 6 dieses allgemeinen Algorithmus ist noch $\alpha^k \geq 0$ zu bestimmen. Wir lösen dazu das eindimensionale Optimierungsproblem

$$\min \{f(\mathbf{y} + \alpha\Delta\mathbf{y}, \mathbf{z} + \alpha\Delta\mathbf{z}) \mid \alpha \geq 0, \mathbf{y} + \alpha\Delta\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} + \alpha\Delta\mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}$$

(α ist hier die Variable, $\mathbf{y}, \Delta\mathbf{y}, \mathbf{z}, \Delta\mathbf{z}$ sind hingegen fest).

Entweder löst man diese Aufgabe näherungsweise (vgl. dazu 7.6.) oder für einfache Funktionen f exakt (vgl. Satz 7.3).

Daß die Bestimmung des größtmöglichen Wertes α , für den $\mathbf{y} + \alpha\Delta\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{z} + \alpha\Delta\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ erfüllt ist, wie im Schritt 6, 7, 8 des Algorithmus in 7.3.2. erfolgen kann, ist leicht einzusehen, wenn man alles koordinatenweise aufschreibt.

Satz 7.3: Für quadratische Optimierungsprobleme mit positiv definiter Matrix \mathbf{C} ergibt sich die Größe α^k wie folgt:

$$\alpha^k = \min \left\{ \frac{-(2\mathbf{x}^{kT}\mathbf{C} + \mathbf{c}^T)\Delta\mathbf{x}^k}{2(\Delta\mathbf{x}^k)^T\mathbf{C}\Delta\mathbf{x}^k}, \alpha_1^k, \alpha_2^k \right\}.$$

Zum Beweis vgl. Aufgabe 7.6.

Bei der Wahl von $\Delta\mathbf{z}$ gemäß (7.6) ist nicht gesichert, daß ein Häufungspunkt von $\{\mathbf{x}^k\}$ zugleich auch stationärer Punkt von (7.5) ist. Eine Zusatzforderung garantiert

jedoch, daß jeder Häufungspunkt der Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ auch stationärer Punkt von (7.5) ist.

Satz 7.4: Wählt man beim reduzierten Gradientenverfahren $\Delta \mathbf{z}$ gemäß

$$\Delta \mathbf{z}_j^k := \begin{cases} r_j^k & \text{für } r_j^k > 0, \\ z_j^k r_j^k & \text{für } r_j^k \leq 0, \end{cases}$$

und tauscht man in Schritt 11 die größte NBV z_j gegen die BV $y_{j_0} = 0$ aus, so ist jeder Häufungspunkt der Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ ein stationärer Punkt des Problems (7.5).

Aufgabe 7.6: Beweisen Sie Satz 7.3!

Aufgabe 7.7: a) Auf das Problem

$$\min \{x_2 - 2(x_1 - 2)^3 + 7(x_1 - 2) \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 5\}$$

mit dem Startpunkt $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, x_1, x_2 als NBV, ist das reduzierte Gradientenverfahren anzuwenden.

b) Dieselbe Aufgabe für den Startpunkt $\mathbf{x}^{11} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Tragen Sie für die Zielfunktion die Höhenlinien für $c = 0, \pm 2, \pm 4, 6$ in G ein! Der Iterationsverlauf ist zu skizzieren!

d) Wie lautet die Lösung des Problems?

7.3.4. Weitere Verfahren

Das Verfahren von Beale und andere Verfahren zur Lösung von quadratischen Optimierungsproblemen können als spezielle Verfahren der zulässigen Richtungen aufgefaßt werden (z. B. das in [2] angegebene Verfahren von Frank und Wolfe). In [14] findet man für diese speziellen Verfahren Programme in FORTRAN und ALGOL.

In [3] und [9] ist eine allgemeine Beschreibung der Verfahren der zulässigen Richtungen angegeben, insbesondere sind dort auch Richtungssuchverfahren mit erfaßt. In [6], [10], [11] werden speziell numerische Aspekte diskutiert. Verschiedene Varianten bezüglich der Strahlminimierung (Schritt 6 im allgemeinen Algorithmus) werden in [13] und [17] erörtert.

Eine umfassende und allgemeine Begründung der Gradientenverfahren¹⁾ erfolgt in [22].

7.4. Straf- und Barriereverfahren

7.4.1. Allgemeine Bemerkungen

Die in diesem Abschnitt behandelten Verfahren sind auf Optimierungsprobleme der Form

$$P: \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}, \quad (7.7)$$

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in X, \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in I_g, \quad j \in I_h\}$$

anwendbar, wie sie in Abschnitt 1. definiert wurden.

¹⁾ Diese Bezeichnung ist eigentlich nur für spezielle Klassen von Verfahren gerechtfertigt. Geeigneter ist die Bezeichnung Relaxations- bzw. Abstiegsverfahren.

Die Menge X sei durch lineare Restriktionen beschrieben ($X = R^n$ ist nicht ausgeschlossen).

Wir setzen voraus, daß das Problem P eine Lösung besitzt. Dem Problem P wird eine Folge $\{P_k\}$ von Ersatzproblemen zugeordnet gemäß

$$P_k: \min \{H(\mathbf{x}, p_k) \mid \mathbf{x} \in X\}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.8)$$

Dabei seien die Funktionen $H(\cdot, p_k)$ so beschaffen, daß die Probleme P_k folgende Eigenschaften besitzen:

1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ besitzt P_k mindestens eine Lösung, etwa \mathbf{x}^k .
 2. Jede Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ von Lösungen der Probleme P_k , $k \in \mathbb{N}$, enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert \mathbf{x}^0 eine Lösung von P darstellt.
- $$\left. \vphantom{\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}} \right\} (7.9)$$

Die Methode der Konstruktion der Funktionen $H(\cdot, p_k)$ führte auf die Bezeichnungen *Strafverfahren* (in 7.4.2.) und *Barriereverfahren* (in 7.4.3.).

7.4.2. Strafverfahren

Wir stellen uns vor, daß ein Produktionsprozeß optimiert werden soll, wobei f die Kostenfunktion darstellt und $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i \in I_g$, sowie $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j \in I_h$, gewisse Beschränkungen darstellen, deren Verletzung zwar technisch möglich, aber ökonomisch nicht gerechtfertigt ist.

Der Bereich X hingegen soll diejenigen Restriktionen erfassen, die unter keinen Umständen verletzt werden dürfen, da sonst der gesamte Produktionsprozeß in Frage gestellt ist (z. B. Entstehen von Havarien).

Es ist nun möglich, das Verletzen der Restriktionen $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ und $h_j(\mathbf{x}) = 0$ dadurch zu verhindern (bzw. zu reduzieren), daß eine Verletzung dieser Restriktionen mit „Strafkosten“ geahndet wird, die die Kosten des Produktionsprozesses erhöhen. Durch die Festlegung der Höhe dieser Strafkosten kann somit die Einhaltung der Restriktionen gesteuert werden. Je höher die Strafkosten gewählt werden, desto weniger werden die Restriktionen $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ und $h_j(\mathbf{x}) = 0$ verletzt.

Bei dem hier zu beschreibenden Verfahren gehen wir in ähnlicher Weise vor. Das Verletzen der Restriktionen $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i \in I_g$, und $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j \in I_h$, wird mit einer Strafe belegt; der Strafterm $S: R^n \rightarrow R_+$ wird mit einem Faktor p_k multipliziert und zur Funktion f addiert. Die so entstehende Funktion

$$H(\mathbf{x}, p_k) = f(\mathbf{x}) + p_k S(\mathbf{x})$$

nennen wir *Straffunktion*, wenn für sie außerdem gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } S: R^n \rightarrow R_+ \text{ stetig, } S(\mathbf{x}) \begin{cases} > 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin G, \\ = 0 & \text{für } \mathbf{x} \in G, \end{cases} \\ \text{b) } p_{k+1} > p_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty. \end{array} \right\} (7.10)$$

Durch die Forderung $p_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und dem damit verbundenen unbegrenzten Anwachsen der Strafkosten werden die Restriktionen $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $h_j(\mathbf{x}) = 0$ mit wachsendem k weniger verletzt.

Folgende Funktionen S haben sich bewährt: Es seien

$$S_1(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } t > 0, \\ = 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad S_2(t) \begin{cases} = 0 & \text{für } t = 0, \\ > 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad (7.11a)$$

stetige Funktionen. Dann setzen wir (Bild 7.4)

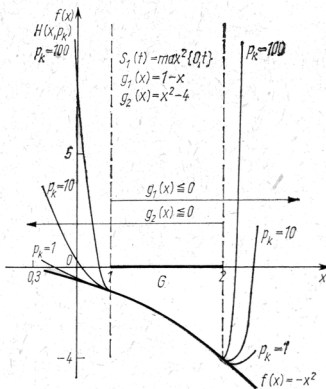


Bild 7.4

$$\left. \begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \max_{i \in I_g} S_1(g_i(\mathbf{x})) + \max_{j \in I_h} S_2(h_j(\mathbf{x})) \\ \text{oder} \quad S(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I_g} S_1(g_i(\mathbf{x})) + \sum_{j \in I_h} S_2(h_j(\mathbf{x})). \end{aligned} \right\} \quad (7.11b)$$

Aufgabe 7.8: a) Zeigen Sie, daß mit $S_1(t) = \max\{0, t\}$, $r \geq 1$, und $S_2(t) = |t|^r$, $r \geq 1$, die Funktion $S(\mathbf{x})$ die erste Bedingung in (7.10) erfüllt!

b) Für welche Werte von r sind die Funktionen S_1 und S_2 einmal stetig differenzierbar?

Beispiel 7.3: Für das Problem

$$P: \min \{f(x) = -x^2 \mid x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq 0, \quad x^2 - 4 \leq 0\}$$

ergibt sich wegen (7.10) und (7.11) für $r = 2$

$$\begin{aligned} H(x, p_k) &= -x^2 + p_k [\max\{0, 1 - x\} + \max\{0, x^2 - 4\}], \\ X &= \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Schreiben wir (7.12) ausführlich auf, so folgt

$$H(x, p_k) = \begin{cases} -x^2 + p_k[(1-x)^2 + (x^2-4)^2] & \text{für } x < -2, \\ -x^2 + p_k(1-x)^2 & \text{für } -2 \leq x < 1, \\ -x^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ -x^2 + p_k(x^2-4)^2 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Wegen $\frac{dH(x, p_k)}{dx} < 0 \quad \forall x \leq 2$ und $p_k \geq 1$ folgt, daß die Funktion $H(x, p_k)$ ihr Minimum nur für $x > 2$ annehmen kann. Dort liefern aber die klassischen Methoden

$$0 = \frac{d}{dx} (-x^2 + p_k (x^2 - 4)^2) = 2x(-1 + 2p_k[x^2 - 4])$$

und somit

$$x_k = \sqrt{\frac{1}{2p_k} + 4}$$

als Lösung von P_k .

$$x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2p_k} + 4} = 2$$

ist Lösung von P , wie man verifiziert.

Die folgenden Sätze kennzeichnen einige Eigenschaften der Straffunktionen $H(x, p_k)$.

Satz 7.4: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Existiert ein $z \in G$, für welches die Niveaumenge

$$N(f(z)) = \{x \in X \mid f(x) \leq f(z)\}$$

kompakt ist, so besitzen alle Probleme $P_k, k \in \mathbb{N}$, Lösungen x^k .

Die obige Bedingung ist natürlich nur hinreichend für die Existenz von Lösungen der Probleme P_k . Das Beispiel 7.3 erfüllt z. B. diese Forderung über die Kompaktheit einer Niveaumenge nicht. Dennoch haben die Probleme P_k jeweils Lösungen x_k .

Satz 7.5: Es seien $\{x^k\}$ eine Folge von Lösungen der Probleme $P_k, k \in \mathbb{N}$, und $\alpha = \min_{x \in G} f(x)$ der Optimalwert des Problems P . Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} 1. H(x^k, p_k) \leq H(x^{k+1}, p_{k+1}) \\ 2. f(x^k) \leq f(x^{k+1}) \\ 3. f(x^k) \leq H(x^k, p_k) \leq \alpha \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Aussage. Es sei x^k Lösung von P_k . Dann gilt

$$H(x^k, p_k) \leq H(x, p_k) \quad \forall x \in X$$

und damit wegen $p_k \leq p_{k+1}$ und $S(x) \geq 0$

$$H(x^k, p_k) \leq H(x^{k+1}, p_k) \leq H(x^{k+1}, p_{k+1}).$$

Satz 7.6: Ist $\{x^k\}$ eine Folge von Lösungen der Probleme $P_k, k \in \mathbb{N}$, so ist jeder Häufungspunkt \bar{x} der Folge $\{x^k\}$ eine Lösung von P , d. h. es gilt:

$$\bar{x} \in G \quad \text{und} \quad f(\bar{x}) = \min_{x \in G} f(x).$$

Der obige Satz garantiert die in (7.9) geforderten Eigenschaften der Probleme P_k . Für ein gegebenes Problem (7.7) hat man also die Folge $\{P_k\}$ von Problemen (7.8) zu lösen und einen Häufungspunkt \bar{x} der Lösungsfolge $\{x^k\}$ zu ermitteln. Die Probleme P_k können auf Grund ihrer Struktur mit Verfahren aus 7.3. oder 7.2. gelöst werden.

Als Abbruchkriterium kann z. B. der Test

$$f(x^{k-1}) - f(x^k) < \varepsilon$$

dienen. Bei konvexen Problemen könnte man eine zu $\{x^k\}$ gehörige Folge $\{z^k\} \subset G$ konstruieren, deren zugeordnete Folge $\{f(z^k)\}$ von oben gegen den Optimalwert des Problems P strebt. Dadurch ist mit $f(z^k) - f(x^k) < \varepsilon$ ein aussagekräftigeres Abbruchkriterium gegeben (vgl. Aufgabe 7.9).

Weitere Ausführungen zu Verfahren der Straffunktionen findet man in [6], [9], [13].

Aufgabe 7.9: Es ist folgendes zu zeigen: Erfüllt eine Lösung \mathbf{x}^{k_0} des Problems P_{k_0} die Bedingung $\mathbf{x}^{k_0} \in G$, so ist \mathbf{x}^{k_0} zugleich Lösung des Problems P .

Aufgabe 7.10: Für das Problem

$$\min \{x_1^2 + 2x_2^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$$

ist die Folge $\{P_k\}$ von Ersatzproblemen anzugeben und das Problem P_k in Abhängigkeit von p_k zu lösen. Für die Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ der Lösung ist ein Häufungspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ zu ermitteln.

7.4.3. Barriereverfahren

Die Barriereverfahren hängen nach den Bemerkungen in 7.4.1. eng mit den Strafverfahren zusammen. Es gibt jedoch einige wesentliche Unterschiede:

- Im Gegensatz zum Verfahren der Straffunktionen gilt stets $\{\mathbf{x}^k\} \subset G^1$.
- Es können nur Ungleichungsrestriktionen berücksichtigt werden (d. h. in (7.7) gilt $I_h = \emptyset$).
- Um eine Aussage analog zu Satz 7.6 zu beweisen, ist eine zusätzliche Regularitätsbedingung erforderlich.

Wie in 7.4.2. konstruieren wir wieder eine Funktion $H(\mathbf{x}, q_k)$. Die zur Funktion f addierten Zusatzterme verhindern, daß der Bereich G verlassen wird, indem H bei Annäherung an den Rand von G unbeschränkt wächst: Barriere (Bild 7.5).

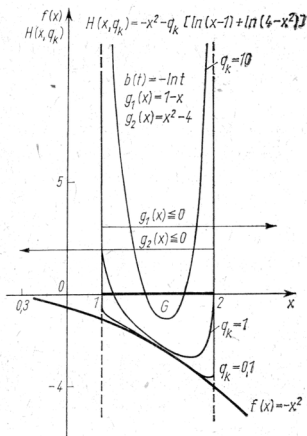


Bild 7.5

¹⁾ Eine Aussage analog zu der in Aufgabe 7.9 ist daher nicht möglich.

Eine Funktion H mit derartigen Eigenschaften, die als *Barrierefunktion* bezeichnet wird, erhalten wir wie folgt

$$\left. \begin{aligned} 1. H(\mathbf{x}, q_k) &= f(\mathbf{x}) + q_k B(\mathbf{x}), \\ 2. B: Q \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } \tilde{G} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } \tilde{G} &= \{\mathbf{x} \in Q \mid \mathbf{x} \in X, g_i(\mathbf{x}) < 0, i \in I_g\}, \\ 3. \lim_{k \rightarrow \infty} B(\mathbf{x}^k) &= \infty \text{ f\"ur jede Folge } \{\mathbf{x}^k\} \subset \tilde{G} \text{ mit} \\ &\mathbf{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \in G \setminus \tilde{G}, \quad \|\mathbf{y}\| < \infty, \\ 4. \{q_k\} &\text{ strebt monoton fallend gegen } 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Ohne Beweis geben wir einige Realisierungen für die Abbildung B an:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } B(\mathbf{x}) &= \max_{i \in I_g} b(-g_i(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \tilde{G}, \\ \text{b) } B(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I_g} b(-g_i(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \tilde{G}, \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

mit $b: (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\lim_{t \rightarrow +0} b(t) = \infty$.

Speziell können die folgenden Funktionen verwendet werden:

$$b(t) = t^{-r}, \quad r > 0; \quad b(t) = -\ln t \quad (\text{Bild 7.5}). \quad (7.15)$$

Aufgabe 7.11: Man zeige, daß die Eigenschaften (7.13) für $H(\mathbf{x}, q)$ erfüllt sind, wenn man die speziellen Abbildungen $b(t)$ aus (7.15) verwendet.

Wichtige Eigenschaften der Barriereverfahren sind in den folgenden Sätzen enthalten:

Satz 7.7: Es seien $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in X, g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g\}$ kompakt, $\tilde{G} \neq \emptyset$ und f stetig. Dann existieren stets Lösungen \mathbf{x}^k der Probleme P_k , d. h. zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mathbf{x}^k \in \tilde{G}$ mit

$$H(\mathbf{x}^k, q_k) = \min_{\mathbf{x} \in \tilde{G}} H(\mathbf{x}, q_k).$$

Satz 7.8: Es seien $\{\mathbf{x}^k\}$ eine Folge von Lösungen der Probleme $P_k, k \in \mathbb{N}$, und $\alpha = \min_{\mathbf{x} \in G} f(\mathbf{x})$ der Optimalwert des Problems P (mit $I_h = \emptyset$). Dann gilt:

$$1. f(\mathbf{x}^k) \geq f(\mathbf{x}^{k+1}) \geq \alpha.$$

2. Für $B(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \tilde{G}$ gilt außerdem

$$H(\mathbf{x}^k, q_k) \geq H(\mathbf{x}^{k+1}, q_{k+1}),$$

$$H(\mathbf{x}^k, q_k) \geq f(\mathbf{x}^k) \geq \alpha.$$

Die Bedingung $B(\mathbf{x}) \geq 0$ ist z. B. erfüllt, wenn in (7.14) gilt:

$$b(-g_i(\mathbf{x})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad \forall i \in I_g.$$

Verwendet man in (7.14) die erste der angegebenen Funktionen B , so genügt es, wenn $b(-g_i(\mathbf{x})) \geq 0$ ist für mindestens einen Index i , der von $\mathbf{x} \in X$ abhängig sein kann.

Im Gegensatz zu den Verfahren der Straffunktionen ist für eine zu Satz 7.6 analoge Aussage über Verfahren der Barrierefunktionen eine Regularitätsbedingung an den Bereich G erforderlich:

$$(\text{RB}) \quad \inf_{\mathbf{x} \in \tilde{G}} f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in G} f(\mathbf{x}) = \alpha. \quad (7.16)$$

Aufgabe 7.12: Es ist zu zeigen: a) im Falle $\bar{G} = G$ ist (RB) erfüllt.
b) Für das Problem

$$\min \{-x \mid g(x) \leq 0, x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x < 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ x(x-2) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

ist die Bedingung (RB) verletzt.

Satz 7.9: Es seien die Voraussetzungen von Satz 7.8 und die Bedingung (RB) erfüllt. Dann ist jeder Häufungspunkt \bar{x} der Folge $\{x^k\}$ eine Lösung von P, d. h. es gilt

$$\bar{x} \in G \quad \text{und} \quad f(\bar{x}) = \min_{x \in G} f(x) = \alpha.$$

Es gilt die gleiche Bemerkung wie nach Satz 7.6.

Außerdem kann man das in 7.4.2. angegebene Abbruchkriterium verwenden. Bei konvexen Problemen kann man über das duale Problem der Folge $\{x^k\}$ eine andere Folge $\{z^k\}$ zuordnen, so daß die zugehörige Folge $\{f(z^k)\}$ von unten gegen den Optimalwert des Problems P strebt. Das Kriterium $f(x^k) - f(z^k) < \varepsilon$ liefert dann eine aussagekräftigere Abbruchbedingung.

Weitere Ausführungen zu Verfahren der Barrierefunktionen findet man in [6], [9], [13].

Aufgabe 7.13: Man löse das in Aufgabe 7.10 angegebene Problem mit Barriereverfahren für $b(t) = -\ln t$.

7.5. Schnittebenenverfahren

7.5.1. Allgemeine Bemerkungen

Wir betrachten das konvexe Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion

$$P: \min \{c^T x \mid x \in G\}, \\ G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i \in I_g\},$$

wobei gilt: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I_g$, konvex und differenzierbar.

Der Grundgedanke des Schnittebenenverfahrens ist der folgende:

Da G beschränkt ist, gibt es ein konvexes Polyeder M_1 mit $G \subseteq M_1$. Wir minimieren nun $c^T x$ über M_1 . Aus der linearen Optimierung ([20]) ist bekannt, daß sich ein Eckpunkt x^1 von M_1 als Lösung dieses (linearen) Problems ergibt. Jetzt schneidet man den Punkt x^1 von G durch eine x^1 und G trennende Hyperebene $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q^T x = \alpha\}$ ab (Bild 7.6) und erhält als neues Polyeder $M_2 = \{x \in M_1 \mid q^T x \leq \alpha\}$. Man minimiert

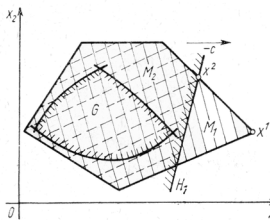


Bild 7.6

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ über M_2 und erhält \mathbf{x}^2 als Lösung, wählt wieder eine trennende Hyperebene H_2 usw. Bei der Auswahl der Hyperebenen H_k nach gewissen Regeln ergibt sich die Lösung \mathbf{x}^0 als ein Häufungspunkt der durch dieses Vorgehen erzeugten Punktfolge $\{\mathbf{x}^k\}$. Die Art und Weise der Auswahl der H_k bestimmt die unterschiedlichen Schnittebenenverfahren. Wir erörtern im folgenden das Verfahren von Kelley [13].

7.5.2. Das Schnittebenenverfahren von Kelley

Zunächst geben wir für dieses Verfahren den Algorithmus an.

Schritt 1: Bestimme ein Polyeder $M_1 \supseteq G$. Setze $k := 1$.

Schritt 2: Löse das Problem

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in M_k \}.$$

Schritt 3: Liegt die Lösung \mathbf{x}^k von Schritt 2 in G ? Wenn ja $\rightarrow \mathbf{x}^k$ ist Lösung von P. Das Verfahren ist beendet. Wenn nein \rightarrow Schritt 4.

Schritt 4: Wähle ein $\mathbf{z}^k \in \{ \mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \nabla g_i(\mathbf{x}^k), i \in I_k \}$ mit $I_k = \{ i \in I_g \mid \max_{j \in I_g} g_j(\mathbf{x}^k) = g_i(\mathbf{x}^k) \}$ und setze

$$M_{k+1} = \{ \mathbf{x} \in M_k \mid g_i(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \mathbf{z}^k \leq 0 \}$$

mit $i \in I_k$ beliebig, aber fest gewählt. Setze $k := k + 1 \rightarrow$ Schritt 2 (damit gilt stets $G \subset M_{k+1} \subset M_k \subset \dots \subset M_1$, vgl. Bild 7.6).

Ist z. B.

$$G = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) := (x-1)(x+1) \leq 0 \} \quad \text{und} \quad x^k = 2,$$

so stellt die Funktion $h(x) := g(2) + (x-2)g'(2)$ die Tangente an $g(x)$ im Punkte $(2, g(2))$ dar (Bild 7.7). Analog zu den Verfahren in 7.3. und 7.4. kann man hier ebenfalls eine Abbruchbedingung festlegen.

Die folgenden Aussagen enthalten wichtige Eigenschaften des Verfahrens.

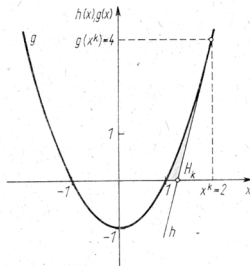


Bild 7.7

Satz 7.10: \mathbf{x}^0 sei Lösung von $\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in G \}$. Dann gilt:

1. $G \subseteq M_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Satz 7.11: 1. Gilt für eine Lösung \mathbf{x}^k des linearen Ersatzproblems $\mathbf{x}^k \in G$, so ist \mathbf{x}^k auch Lösung des Ausgangsproblems P.

2. Gilt $\mathbf{x}^k \notin G \quad \forall k \in \mathbb{N}$, so ist jeder Häufungspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ von $\{\mathbf{x}^k\}$ eine Lösung des Ausgangsproblems.

Anmerkung: Für die Gültigkeit des Verfahrens genügt es, daß die Funktionen g_i , $i \in I_g$, auf der gesamten Menge M_1 erklärt sind.

Beispiel 7.4: Für das Problem

$$\min \{2x_1 + x_2 \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, 2\}$$

mit

$$g_1(\mathbf{x}) := (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4,$$

$$g_2(\mathbf{x}) := (x_1 - 3)^2 - x_2$$

findet man leicht das Polyeder $M_1 = [0,5] \times [0,4]$. Hieraus folgt das lineare Optimierungsproblem

$$P_1: \min \left\{ (2, 1)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \leq 5, x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, i = 1, 2 \right\}.$$

Das folgende Tableau (vgl. [20]) ist optimal, und man erhält $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3, x_4 sind nur Schlupfvariablen und für das Ergebnis ohne Bedeutung.

NBV \ BV	x_1	x_2	1
x_3	-1	0	5
x_4	0	-1	4
\mathbf{c}^T	2	1	0

$$\nabla g_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $g_i(\mathbf{0}) = 9$, $i = 1, 2$, $I_1 = \{1, 2\}$ kann $\mathbf{z}^1 = \nabla g_1(\mathbf{0})$ oder $\mathbf{z}^1 = \nabla g_2(\mathbf{0})$ gewählt werden. Für $\mathbf{z}^1 = \nabla g_2(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist die zusätzliche Restriktion

$$-6x_1 - x_2 \leq -9$$

mit der Schlupfvariablen x_5 hinzuzufügen.

	x_1	x_2	1
x_3	-1	0	5
x_4	0	-1	4
x_5	-6	-1	-9
\mathbf{c}^T	2	1	0
=====			
	x_5	x_2	1
x_3	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{2}$
x_4	0	-1	4
x_1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
\mathbf{c}^T	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

Dieses Tableau ist ein duales Simplextableau wegen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$. Mit -6 als Pivotelement folgt das nächste Tableau nach dem dualen Simplexverfahren.

Dieses Tableau ist optimal mit der Lösung $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nach Schritt 4 folgt weiter

$$g_1(\mathbf{x}^2) = -\frac{7}{4}, \quad g_2(\mathbf{x}^2) = \frac{9}{4}, \quad I_2 = \{2\}, \quad \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Neue Restriktion: $-3x_1 - x_2 \leq -\frac{27}{4}$, Schlupfvariable x_6 . Wegen $x_1 = \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{3}{2}$ folgt nach Einsetzen in die neue Restriktion $-\frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_2 \leq -\frac{9}{4}$ und damit das neue duale Simplextableau

	x_5	x_2	1
x_3	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{2}$
x_4	0	-1	4
x_1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$
x_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$
\mathbf{c}^T	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
**	2	-1	$\frac{9}{2}$

	x_6	x_2	1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{4}$
x_4	0	-1	4
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{9}{4}$
x_5	2	-1	$\frac{9}{2}$
\mathbf{c}^T	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{2}$

Tableau ist optimal: $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Schritt 4 ergibt wieder

$$g_1(\mathbf{x}^3) = -\frac{55}{16}, \quad g_2(\mathbf{x}^3) = \frac{9}{16}, \quad I_3 = \{2\}, \quad \mathbf{z}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Neue Restriktion: $-\frac{3}{2}x_1 - x_2 \leq -\frac{63}{16}$.

	x_6	x_2	1
x_3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{4}$
x_4	0	-1	4
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{9}{4}$
x_5	2	-1	$\frac{9}{2}$
x_7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{16}$
\mathbf{c}^T	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{2}$
**	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$

	x_6	x_7	1
x_3	*	*	$\frac{19}{8}$
x_4	*	*	$\frac{23}{8}$
x_1	*	*	$\frac{15}{8}$
x_5	*	*	$\frac{27}{8}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
\mathbf{c}^T	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{39}{8}$

Tableau ist optimal: $\mathbf{x}^4 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,875 \\ 1,125 \end{pmatrix}$.

Man erkennt leicht aus Bild 7.8, daß $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Ausgangsproblems ist. Für die 4. Näherung gilt $\|\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}^0\| = \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0,158$, und die Differenz zwischen $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^4$ und $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0$ beträgt $\frac{1}{8}$.

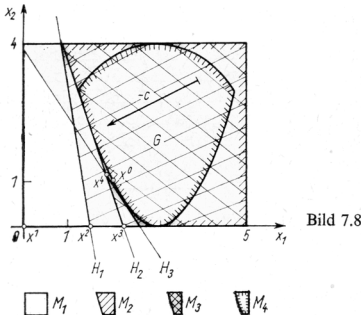


Bild 7.8

7.5.3. Weitere Verfahren

Die verschiedenen Schnittebenenverfahren unterscheiden sich im wesentlichen durch die Art und Weise der Bestimmung der Schnittebene H_k . Bei dem von uns beschriebenen Verfahren von Kelley wird H_k durch die Restriktion

$$g_i(\mathbf{x}^k) + \mathbf{z}^k(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = 0, \quad \mathbf{z}^k = \nabla g_i(\mathbf{x}^k), \quad i \in I_k,$$

bestimmt. Beim Verfahren von Kleibohm/Veinott (vgl. [6], [16]) wählt man in G einen inneren Punkt \mathbf{a} und bestimmt den Durchstoßpunkt \mathbf{y}^k der durch \mathbf{a} und \mathbf{x}^k bestimmten Geraden mit dem Rand von G . H_k wird dann so festgelegt, daß G durch H in \mathbf{a} berührt wird und daß gilt $G \cap H = \emptyset$. Numerisch ist dieses Verfahren nicht vorteilhaft, da durch die auftretenden Rundungsfehler Teile von G mit weggeschnitten werden können. Eine Verbesserung des Verfahrens erhält man, indem an Stelle eines festen inneren Punktes $\mathbf{a} \in G$ eine geeignete Folge $\{\mathbf{a}^k\} \subset G$ von inneren Punkten gewählt wird.

Darüber hinaus gibt es auch Schnittebenenverfahren, die man bei nichtkonvexen Optimierungsproblemen anwenden kann. Jedoch läßt sich für den allgemeinen Fall keine Aussage über das Lösungsverhalten der konstruierten Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ angeben.

7.6. Direkte Verfahren

7.6.1. Allgemeine Bemerkungen

Direkte Optimierungsverfahren, oft auch Suchverfahren genannt, zeichnen sich dadurch aus, daß für ihre Anwendung nicht die Ermittlung von Werten der Ableitungen von Ziel- oder Restriktionsfunktionen erforderlich ist. Dadurch entfallen analytische Vorarbeiten, die nicht oder nur fehlerbehaftet mit digitalen Rechenanlagen ausgeführt werden können.

Eine lehrbuchmäßige Darstellung einer beträchtlichen Anzahl direkter Verfahren findet man z. B. in [11]. Allerdings fehlen dort meist Bedingungen, unter denen die Verfahren mit Sicherheit eine Lösung des Optimierungsproblems ermitteln. Entsprechende Aussagen wurden für einige Verfahren in [6] bewiesen. Eine ausführliche Darstellung dieser Klasse von Lösungsverfahren findet man in [4].

Direkte Verfahren können insbesondere auch dann Anwendung finden, wenn etwa die Zielfunktionswerte nur experimentell bestimmbar sind und nicht durch Auswertung einer in geschlossener analytischer Form vorliegenden Funktionsgleichung gewonnen werden können. Auch beschränkt sich die Anwendbarkeit direkter Verfahren nicht nur auf die Lösung konvexer Optimierungsprobleme. Allerdings kann beim Vorhandensein nicht-globaler Extrema nur die Ermittlung eines lokalen Extremums garantiert werden.

Wir geben deshalb zunächst eine Klasse von Funktionen an, bei denen jedes lokale Extremum auch global ist.

Definition 7.4: Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f **streng quasikonvex** auf M , wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M \\ f(\mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1) \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^0, \lambda + \mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) < f(\mathbf{x}^1). \quad (7.17)$$

Für streng quasikonvexe Funktionen gelten die folgenden Eigenschaften (vgl. [6]):

$$\left. \begin{array}{l} 1. f \text{ streng quasikonvex,} \\ \text{stetig und } f(\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leq f(\mathbf{x}^1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda + \mu = 1. \quad (7.18)$$

2. Die Niveaumengen

$$\bar{N}_\alpha = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \quad \text{und} \quad N_\alpha = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) < \alpha\}$$

sind konvex für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ (vgl. Satz 2.12).

3. f konvex auf $M \Rightarrow f$ streng quasikonvex auf M .

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung der letzten Aussage nicht gilt.

Beispiel 7.5: $f(x) = -e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ist nicht konvex, aber streng quasikonvex auf \mathbb{R} (Bild 7.9).

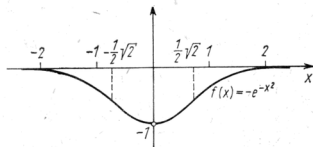


Bild 7.9

f ist zweimal stetig differenzierbar mit

$$f''(x) = 2(1 - 2x^2)e^{-x^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \geq 0 & \text{für } |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Nach Satz 2.16 ist daher f auf $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ konvex und auf $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ bzw. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ konkav.

Nun sei $f(x^2) < f(x^1)$. Dann folgt $x^2 \in (-x^1, x^1)$ und $f(\lambda x^1 + \mu x^2) < f(x^1)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^0$, $\lambda + \mu = 1$ (vgl. Bild 7.9). Wegen $\lambda x^1 + \mu x^2 \in (-x^1, x^1)$ ist f gemäß Definition 7.4 streng quasikonvex.

Wir formulieren nun eine für direkte Verfahren wichtige Aussage über das Verhalten streng quasikonvexer Funktionen bezüglich lokaler und globaler Minima (vgl. dazu Satz 3.2 und Satz 3.3).

Satz 7.12: *Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex sowie $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ auf G stetig, nach unten beschränkt und streng quasikonvex. Dann nimmt f das globale Minimum bezüglich G auf einer nichtleeren konvexen abgeschlossenen Menge $G^0 \subseteq G$ an. Weitere lokale Minima von f existieren nicht auf G .*

Beweis: Jede auf einer abgeschlossenen Menge stetige und nach unten beschränkte Funktion nimmt dort das globale Minimum auf einer abgeschlossenen Menge G^0 an. Wir nehmen an, daß G^0 nicht konvex ist. Dann gibt es Punkte $x^1, x^2 \in G^0$ und Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$, so daß gilt:

$$f(\lambda x^1 + \mu x^2) > f(x^1) = f(x^2)$$

im Widerspruch zu (7.18). Also ist G^0 konvex.

Wir nehmen ferner an, daß neben $x^2 \in G^0$ ein Punkt $x^3 \in G$ mit

$$f(x^1) > f(x^3) \quad (7.19)$$

existiert, wobei f in x^3 ein lokales Minimum besitzen möge. Dann gibt es gemäß Definition 3.1 eine Umgebung $U(x^3)$, so daß gilt:

$$f(x) \geq f(x^3) \quad \forall x \in U(x^3) \cap G. \quad (7.20)$$

Nun ist $(x^2, x^3) \subseteq G$ und $(x^2, x^3) \cap U(x^3) \neq \emptyset$. Folglich gibt es auch auf (x^2, x^3) Punkte x , für die (7.20) gilt. Unter Berücksichtigung von (7.19) widerspricht dies (7.17), also der Voraussetzung, daß f streng quasikonvex auf G ist. Mithin existiert auf $G \setminus G^0$ keine Stelle eines lokalen Minimums.

Ohne Beweis nennen wir die

Folgerung: f erfülle die Voraussetzungen von Satz 7.12, und es sei $x^2 \in G^0$, $x^3 \in G \setminus G^0$. Dann ist f auf $[x^2, x^3] \setminus G^0$ streng monoton.

7.6.2. Der eindimensionale Fall

Wir betrachten zunächst die Anwendung direkter Verfahren auf Optimierungsprobleme der Form

$$P1: \min \{f(x) \mid x \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}.$$

Die Problemstellung wurde nicht nur historisch zuerst behandelt, sondern stellt auch methodisch insofern einen Sonderfall dar, als dafür eine besondere Klasse von Verfahren entwickelt wurde, aus der sich effektivste direkte Verfahren angeben lassen.

Das Prinzip dieser sogenannten *Eliminationsverfahren* besteht darin, ausgehend von $[a, b]$ eine Folge $\{[a_n, b_n]\}$ von Intervallen zu erzeugen, die sämtlich eine Lösung x_0 des Problems P1 enthalten.

Der Übergang von einem Intervall der Folge zum nächsten Intervall erfolgt durch Elimination eines Teilintervalls, das x_0 nicht enthalten kann. Die Ermittlung dieses Teilintervalls gelingt z. B. bei stetiger, streng quasikonvexer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch Vergleich der Funktionswerte in mindestens zwei inneren Punkten des Intervalls.

Dabei erweist sich die Verwendung von genau zwei Vergleichspunkten, von denen derjenige mit dem kleineren Funktionswert jeweils für den folgenden Vergleich beibehalten wird, als ein effektivstes Verfahren in folgendem Sinne:

Es sei $b_k - a_k$ die maximale Länge eines Intervalles $[a_k, b_k]$, das in der beschriebenen Folge mittels einer festen Anzahl (etwa n) Funktionswertberechnungen bestimmt werden kann. Dann kann bei dem oben skizzierten Vorgehen das sogenannte Verkürzungsverhältnis $\frac{b_k - a_k}{b - a}$, bezogen auf das Ausgangsintervall $[a, b]$, gegenüber jedem anderen Vergleichsverfahren minimiert werden (vgl. [6], [4]).

Im folgenden beschreiben wir dieses Verfahren etwas genauer (Bild 7.10).

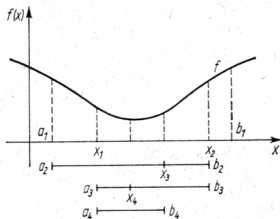


Bild 7.10

Algorithmus des Eliminationsverfahrens

Schritt 1: $a_1 := a$, $b_1 := b$. Wähle $x_1 \in (a_1, b_1)$, $x_2 \in (a_1, b_1)$, $x_1 \neq x_2$. Berechne $f(x_1)$ und $f(x_2)$. Setze $k := 1$.

Schritt 2: a) Im Falle $f(x_k) < f(x_{k+1})$, $x_k < x_{k+1}$, setze $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := x_{k+1}$, wähle $x_{k+2} \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus \{x_k\}$ und setze $x_{k+1} := x_k \rightarrow$ Schritt 3.

b) Im Falle $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$, $x_k < x_{k+1}$, setze $a_{k+1} := x_k$, $b_{k+1} := b_k$, wähle $x_{k+2} \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus \{x_{k+1}\} \rightarrow$ Schritt 3.

c) Im Falle $f(x_k) < f(x_{k+1})$, $x_k > x_{k+1}$, setze $a_{k+1} := x_{k+1}$, $b_{k+1} := b_k$, wähle $x_{k+2} \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus \{x_k\}$, setze $x_{k+1} := x_k \rightarrow$ Schritt 3.

d) Im Falle $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$, $x_k > x_{k+1}$, setze $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := x_k$, wähle $x_{k+2} \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus \{x_{k+1}\} \rightarrow$ Schritt 3.

Schritt 3: Berechne $f(x_{k+2})$. Setze $k := k + 1$.

a) Im Falle $f(x_{k-1}) = f(x_k) = f(x_{k+1})$ sind x_{k-1} , x_k , x_{k+1} Lösungen von P1 \rightarrow Abbruch des Verfahrens.

b) Im Falle $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ vorgegeben, ist x_{k+1} eine Näherungslösung \rightarrow Abbruch des Verfahrens.

c) Sonst \rightarrow Schritt 2.

Offenbar sind für die Ermittlung von k Intervallen mittels Eliminationsverfahren genau k Funktionswertberechnungen erforderlich.

Die Ermittlung einer Lösung x_0 von P1 durch Eliminationsverfahren gelingt mit Hilfe von

Satz 7.13: Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng quasikonvex auf $[a, b]$. Es existiere eine Zahl $C \in (0, 1)$ derart, daß für die durch das obige Eliminationsverfahren erzeugte Intervallfolge $\{[a_k, b_k]\}$ gilt:

$$\max \{b_k - x_{k+1}, x_{k+1} - a_k\} \leq C(b_k - a_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (7.21)$$

Dann bildet die Folge $\{[a_k, b_k]\}$ eine Intervallschachtelung, die eine Lösung x_0 von P1 erfaßt.

Beim praktischen Rechnen erfolgt die Wahl der Lage der Punkte x_k , $k \in \mathbb{N}$, häufig nach folgendem Prinzip:

Die Länge eines Intervalles $[a_k, b_k]$, $k \geq 2$, ist genau dann unabhängig vom Eintreten eines der im Schritt 2 des Eliminationsverfahrens beschriebenen 4 Fälle, wenn x_{k+1} und x_k symmetrisch zum Mittelpunkt des Intervalles $[a_{k-1}, b_{k-1}]$; $k \geq 2$, gewählt werden.

Setzen wir voraus, daß für jedes $k \geq 2$ gilt:

$$\text{a) } b_k - x_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = C(b_k - a_k) \quad \text{und}$$

$$\text{b) } b_{k-1} - a_{k-1} = b_k - a_k + b_{k+1} - a_{k+1},$$

so erhalten wir eine Teilung des Intervalles nach dem Goldenen Schnitt:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C} + 1, \quad \text{d. h. } \frac{1}{C} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618 > 1.$$

Wegen $C \in (0, 1)$ sind die Voraussetzungen von Satz 7.13 erfüllt. Wir erhalten speziell das Verfahren des Goldenen Schnitts (vgl. [4], [6]).

In Schritt 1 bzw. 2 ist die Auswahl von x_1 , x_2 bzw. x_{k+2} wie folgt zu spezialisieren:

Schritt 1: Wähle

$$x_1 := Ca_1 + C^2b_1, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$x_2 := C^2a_1 + Cb_1.$$

Schritt 2:

$$x_k = Ca_k + C^2b_k < x_{k+1} = C^2a_k + Cb_k.$$

$$\text{a) Wähle } x_{k+2} = Ca_{k+1} + C^2b_{k+1}.$$

$$\text{b) Wähle } x_{k+2} = C^2a_{k+1} + Cb_{k+1},$$

$$x_{k+1} = Ca_k + C^2b_k < x_k = C^2a_k + Cb_k.$$

$$\text{c) Wähle } x_{k+2} = C^2a_{k+1} + Cb_{k+1}.$$

$$\text{d) Wähle } x_{k+2} = Ca_{k+1} + C^2b_{k+1}.$$

Wir erläutern das Vorgehen beim Goldenen-Schnitt-Verfahren an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 7.6: Wir lösen P1 mit

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 3] \subset \mathbb{R}.$$

Dazu setzen wir $C \approx 0,618$, $C^2 \approx 0,382$. Da das Verfahren praktisch nach endlich vielen Schritten abbrechen muß, verwenden wir eine Schranke $\varepsilon > 0$ für $|x_{k+1} - x_k|$ als Abbruchbedingung. Dies entspricht rechentechnischen Überlegungen, da hinreichend dicht beieinander liegende reelle Zahlen im Digitalrechner nicht mehr unterscheidbar sind. Um das Beispiel übersichtlich zu halten, wählen wir $\varepsilon := 0,01$. In Tabelle 7.1 läßt sich die Rechnung verfolgen. Der Abbruch erfolgt bei $k = 10$, und man erhält $x_0 \in [-0,021; 0,015]$, $f(x_0) < 0,000225$. Die exakte Lösung ist $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$.

Tabelle 7.1

k	a_k	x_k	$f(x_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	b_k	x_{k+2}
1	-1,000	0,528	0,279	1,472	2,17	3,000	-0,076
2	-1,000	0,528	0,279	-0,076	0,00580	1,472	-0,445
3	-1,000	-0,076	0,00580	-0,445	0,198	0,528	0,157
4	-0,445	-0,076	0,00580	0,157	0,0247	0,528	-0,215
5	-0,445	-0,076	0,00580	-0,215	0,0463	0,157	0,015
6	-0,215	-0,076	0,00580	0,015	0,000225	0,157	0,068
7	-0,076	0,015	0,000225	0,068	0,00463	0,157	-0,021
8	-0,076	0,015	0,000225	-0,021	0,000441	0,068	0,034
9	-0,021	0,015	0,000225	0,034	0,00116	0,068	0
10	-0,021	0,015	0,000225	0	0,000000	0,034	-0,007
11	-0,021	0	0,000000	(-0,007)		0,015	

7.6.3. Der n -dimensionale Fall

Im Falle $n \geq 2$ erweisen sich **vielen** Eliminationsverfahren als unvertretbar aufwendig. Daher werden hier direkte Verfahren verwendet, denen ein „Kletterprinzip“ zugrunde liegt (Kletterverfahren):

Durch eine geeignete Vorschrift wird eine Punktfolge $\{\mathbf{x}^k\}$ erzeugt. Wir beschränken uns auf den Fall $\mathbf{x}^k \in G \quad \forall k \geq 1$. Für die zugehörige Folge $\{f(\mathbf{x}^k)\}$ der Zielfunktionswerte gilt dann im Falle eines Minimierungsproblems

$$f(\mathbf{x}^{k+1}) \leq f(\mathbf{x}^k) \quad \forall k \geq 1.$$

Jeder Häufungspunkt der nach der Vorschrift erzeugten Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ ist dann Lösung des Problems.

Häufig sind derartige direkte Verfahren zur Lösung von Problemen der Form

$$P2: \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in R^n\}$$

(Probleme ohne Restriktionen) vorgesehen. Solche Aufgabenstellungen treten z. B. bei Verfahren der Straf- und Barrierefunktionen auf (vgl. 7.4.).

Als Beispiel stellen wir das Verfahren der koordinatenweisen Suche (KS-Verfahren) vor.

Wir bezeichnen im folgenden mit $L_k = L_k(\mathbf{x}^k)$ die Gerade durch \mathbf{x}^k parallel zur x_j -Achse, $j \in \{1, \dots, n\}$ und $j = k + qn$ für ein gewisses ganzzahliges q .

Für $n = 3$ hat man z. B.

- L_1 Parallele zur x_1 -Achse durch \mathbf{x}^1 ,
- L_2 Parallele zur x_2 -Achse durch \mathbf{x}^2 ,
- L_3 Parallele zur x_3 -Achse durch \mathbf{x}^3 ,
- L_4 Parallele zur x_1 -Achse durch \mathbf{x}^4 .

Algorithmus des Kletterverfahrens

Schritt 1: Wähle $\mathbf{x}^1 \in R^n$ beliebig. Setze $k := 2$.

Schritt 2: Löse das Problem $\min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in L_{k-1}\}$. \mathbf{x}^k sei eine zugehörige Lösung.

Schritt 3: a) Im Falle $f(\mathbf{x}^k) = f(\mathbf{x}^{k+1}) = \dots = f(\mathbf{x}^{k+n})$ Abbruch des Verfahrens. Unter den Voraussetzungen von Satz 7.15 sind $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots, \mathbf{x}^{k+n}$ Lösungen des Problems.

b) Im Falle $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| < \varepsilon$ Abbruch des Verfahrens. Unter den Voraussetzungen von Satz 7.15 ist \mathbf{x}^k eine Näherungslösung des Problems.

c) Sonst $k := k + 1 \rightarrow$ Schritt 2.

In Abb. 7.11 wird das Vorgehen im Falle $n = 2$ veranschaulicht.

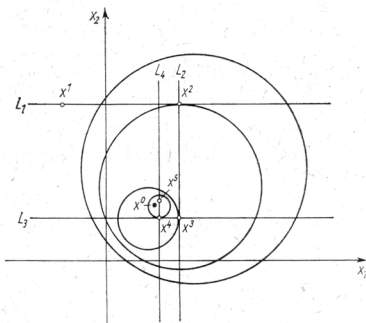


Bild 7.11

Ist $f: R^n \rightarrow R$ stetig, nach unten beschränkt und streng quasikonvex, so kann zur Ausführung von Schritt 2 das Eliminationsverfahren verwendet werden. Dazu hat man ein beschränktes Intervall auf L_{k-1} zu suchen, in welchem die Lösung \mathbf{x}^k liegt. Die Existenz eines derartigen Intervalles ist durch die obigen Voraussetzungen gesichert, wenn das Problem in Schritt 2 als lösbar vorausgesetzt wird. Zur Bestimmung der Intervallenden $\mathbf{a}^{k-1}, \mathbf{b}^{k-1}$ auf L_{k-1} bestimmen wir ausgehend von \mathbf{x}^{k-1} auf L_{k-1} eine Folge $\{\mathbf{y}^l\}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ äquidistanter Punkte, wobei gilt:

$\mathbf{y}^0 = \mathbf{x}^{k-1}$; \mathbf{y}^l läuft für $l \geq 0$ in Richtung der Koordinatenachse, zu der L_{k-1} parallel ist, und für $l \leq 0$ in entgegengesetzter Richtung.

Nun berechnen wir für ein $l > 0$ die Werte $f(\mathbf{y}^l)$ und $f(\mathbf{y}^{-l})$. Wir können o. B. d. A. $f(\mathbf{y}^l) \geq f(\mathbf{x}^k)$ setzen (andernfalls hätte man $f(\mathbf{y}^{-l}) \geq f(\mathbf{x}^k)$ wegen der strengen Quasikonvexität von f). Anschließend berechnen wir die Werte $f(\mathbf{y}^{-l-i})$ für $i = 1, 2, \dots$ solange, bis ein Index i_0 auftritt mit $f(\mathbf{y}^{-l-i_0}) \geq f(\mathbf{y}^{-l-i_0+1})$.

Die angegebenen Voraussetzungen sind jedoch nicht hinreichend dafür, daß jeder Häufungspunkt der Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ eine Lösung von P2 ist, wie das durch Abb. 7.12 dargestellte Beispiel zeigt. In diesem Falle ist offenbar $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k_0} \quad \forall k \geq k_0$. \mathbf{x}^{k_0} ist also Häufungspunkt von $\{\mathbf{x}^k\}$, \mathbf{x}^{k_0} ist jedoch nicht Lösung des Minimierungsproblems. Als Ur-

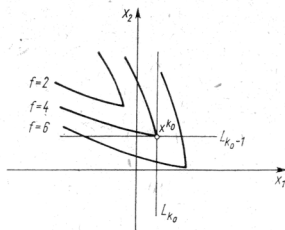


Bild 7.12

sache dafür kann das Auftreten singulärer Punkte auf den Niveaulinien $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \alpha\}$ verantwortlich gemacht werden. Solche Punkte können nicht auftreten, wenn f als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird und $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ nur für $\mathbf{x} \in G^0$ gilt. Man beachte jedoch, daß damit nicht notwendig die Ermittlung des Gradienten von f verbunden ist.

Die erforderliche Verschärfung der Voraussetzungen gegenüber Satz 7.13 erfordert die Verwendung einer weiteren Eigenschaft differenzierbarer Funktionen.

Definition 7.5: Sind $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf M , dann heißt f **pseudokonvex** auf M , wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in M \\ f(\mathbf{x}^1) > f(\mathbf{x}^2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1)^T \nabla f(\mathbf{x}^1) < 0. \quad (7.22)$$

Der Zusammenhang zwischen pseudokonvexen und streng quasikonvexen Funktionen wird ausgedrückt durch den

Satz 7.14: Sind $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene konvexe Menge und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf M , dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ pseudokonvex} \\ \text{auf } M \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ streng quasikonvex} \\ \text{auf } M. \end{array} \right.$$

Zum Beweis vgl. [6].

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht, wie Gegenbeispiele zeigen.

Aufgabe 7.14: Man zeige, daß die Funktion $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, auf \mathbb{R} zwar streng quasikonvex, aber nicht pseudokonvex ist.

Es folgt nun eine Aussage über die Anwendbarkeit des KS-Verfahrens.

Satz 7.15: Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und pseudokonvex. Für die durch das KS-Verfahren erzeugte Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ existiere eine kompakte Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit $\{\mathbf{x}^k\} \subseteq X$. Dann ist jeder Häufungspunkt dieser Folge $\{\mathbf{x}^k\}$ eine Lösung von P2.

Abschließend zeigen wir das Vorgehen an einem Beispiel, wobei wir auf die ausführliche Darlegung der Lösung des Optimierungsproblems (7.22) mittels Eliminationsverfahren verzichten.

Beispiel 7.7: Wir lösen P2 mit

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen der Notwendigkeit des Abbruches nach endlich vielen Schritten verwenden wir wieder eine Schranke $\varepsilon > 0$ für $\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|$ als Abbruchbedingung. Mit $\varepsilon = 0,1$ erfolgt der Abbruch im Schritt 11. Man erhält $\mathbf{x}^0 \approx (0,125, 0,125)^T$ mit $f(\mathbf{x}^0) < 0,016$. Die exakte Lösung lautet $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$, $f(\mathbf{x}^0) = 0$. Der Verlauf der Rechnung ergibt sich aus Tabelle 7.2.

Tabelle 7.2

k	x_1^k	x_2^k	$f(\mathbf{x}^k)$
1	3,000	2,000	5,000
2	2,000	2,000	4,000
3	2,000	1,000	2,000
4	1,000	1,000	1,000
5	1,000	0,500	0,500
6	0,500	0,500	0,250
7	0,500	0,250	0,125
8	0,250	0,250	0,062
9	0,250	0,125	0,031
10	0,125	0,125	0,016
11	0,125	(0,062)	

Lösungen der Aufgaben

2.1: Für beliebige $x^1, x^2 \in K$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt

$$\|\lambda x^1 + \mu x^2\| \leq \lambda \|x^1\| + \mu \|x^2\| \leq \lambda r + \mu r = r$$

und damit $\lambda x^1 + \mu x^2 \in K$.

2.2: Für beliebige $x^1, x^2 \in P$ und beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ mit $\lambda + \mu = 1$ gilt

$$A(\lambda x^1 + \mu x^2) = \lambda(Ax^1) + \mu(Ax^2) \leq \lambda b + \mu b = b$$

und damit $\lambda x^1 + \mu x^2 \in P$.

2.3: $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ sind konvexe Mengen (wegen Satz 2.11) mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Nach Satz 2.8 sind M_1 und M_2 trennbar, und zwar durch jede der Geraden

$$H = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx\} \quad \text{mit} \quad c \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

2.4: a) Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $x_1 \neq x_2$, gilt bekanntlich $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$. Hieraus folgt für beliebige $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda + \mu = 1$:

$$\lambda \mu (x_1 + x_2) > 2\lambda \mu \sqrt{x_1 x_2},$$

$$\lambda x_1 + \mu x_2 > \lambda^2 x_1 + 2\lambda \mu \sqrt{x_1 x_2} + \mu^2 x_2,$$

$$\sqrt{\lambda x_1 + \mu x_2} > \lambda \sqrt{x_1} + \mu \sqrt{x_2}$$

und damit $f(\lambda x_1 + \mu x_2) > \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$, d. h. f ist streng konkav auf \mathbb{R}_+ .

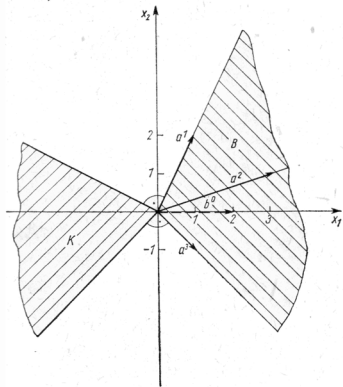
b) Wenn wir die Stelle $x_0 = 0$ ausschließen, so ist f auf $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ zweimal differenzierbar mit

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}} < 0. \quad \text{Nach Band 2, Satz 7.10, ist daher } f \text{ streng konkav auf } \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

2.5: Nach Satz 2.10 ist f als Summe der konvexen Funktionen $f_1(x_1, x_2) = x_1^2$ und $f_2(x_1, x_2) = 2x_2$ konvex auf \mathbb{R}^2 .

2.6: Wegen $f''(x) = e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ist $y^T H_f(x) y = y^2 e^{-x}$ positiv definit und daher f streng konvex auf \mathbb{R} .

2.7: a)



b) Wählt man $A = \begin{pmatrix} a^{1T} \\ a^{2T} \\ a^{3T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, so

läßt sich $b^0 \in B$ nach Satz 2.19 als nicht-negative Linearkombination der a^i ($i = 1, 2, 3$) darstellen:

$$A^T y = b^0, \quad y \geq 0.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat die Lösung}$$

$$c_1 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5} c_3, \quad c_2 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} c_3,$$

wobei man wegen $c_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3$) die Bedingung $\frac{1}{2} \leq c_3 \leq \frac{4}{3}$ zu beachten hat.

Bild 2.23

4.1: Das gegebene Problem kann in der Form geschrieben werden $\min \{-f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \widehat{G}\}$,
 $\widehat{G} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I_g\}$, wobei $-f$ und $-g_i, i \in I_g$, konvexe Funktionen sind.

4.2: Man führe die Restriktionen $\widehat{g}_k(\mathbf{x}) = -x_k \leq 0, k = 1, \dots, n$, ein.

4.3: a) f konvex, G nach Satz 2.12 und Satz 2.3 konvex; Satz 3.2 ergibt daher die gewünschte Aussage von Satz 4.2.

b) (Beweis indirekt): Die Annahme, daß \mathbf{x}^1 und $\mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}^1$ Lösungen des Problems (4.1) sind, führt wegen

$$\lambda f(\mathbf{x}^1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}^2) = f(\lambda \mathbf{x}^1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}^2) \quad (\text{Satz 4.3, 1. Aussage})$$

auf einen Widerspruch zur strengen Konvexität von f .

4.4: Ist \mathbf{x}^0 ein innerer Punkt von G , so existiert wegen (4.2) ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon. \quad (*)$$

Aus der Annahme $\nabla f(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ folgt die Existenz eines $\widehat{\mathbf{x}}$ mit $\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon$ und

$$(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) > 0. \quad (**)$$

Für $\mathbf{y} = -(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{x}^0$ folgt wegen (*) einerseits $(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \geq 0$, andererseits hat man wegen (**)

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) = -(\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) < 0,$$

und das ist ein Widerspruch.

4.5: a) $\mathbf{x}^0 = (2, 2)^T$; (4.2) gilt, aber nicht (4.3) (\mathbf{x}^0 ist kein innerer Punkt von G).

b) $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$; \mathbf{x}^0 ist innerer Punkt von G . (4.3) gilt und damit auch (4.2).

4.6: Es ist $C = H_0(\mathbf{x})$ mit G konvex. Nach Satz 2.16 folgen die zu beweisenden Aussagen.

4.7: Es ist $\nabla Q(\mathbf{x}^0) = 2C\mathbf{x}^0 + \mathbf{c}$; aus Satz 4.5 folgen die zu beweisenden Aussagen.

4.8: 1. a) $\alpha > 4$, b) $\alpha = 4$, c) $\alpha < 4$

2. $\alpha = 1$: $\mathbf{x}_I^0 = (1, 0)^T$ und $\mathbf{x}_{II}^0 = (0, 1)^T$; $\alpha = 4$: $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$;
 $\alpha = 8$: $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$.

3. Höhenlinien sind

a) im Falle $\alpha = 1$: Hyperbeln

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 3x_1'^2 - x_2'^2 = c$$

mit dem Mittelpunkt $(0, 0)^T$ und den Asymptoten

$$(2 + \sqrt{3})x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + (2 + \sqrt{3})x_2 = 0 \quad (\text{Bild 4.2}),$$

b) im Falle $\alpha = 4$: Parallelgeraden

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = 5x_2'^2 = c$$

mit dem Anstieg $-\frac{1}{2}$ (Bild 4.3),

c) im Falle $\alpha = 8$: Ellipsen

$$\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = \frac{9 + \sqrt{65}}{2} x_1'^2 + \frac{9 - \sqrt{65}}{2} x_2'^2 = c$$

mit dem Mittelpunkt $(0, 0)^T$ und mit φ gemäß

$$\tan 2\varphi = -\frac{4}{7} \quad (\text{Bild 4.4}).$$

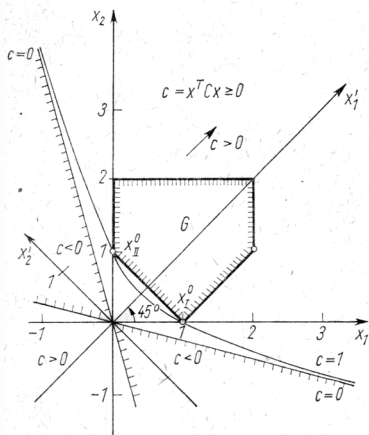


Bild 4.2

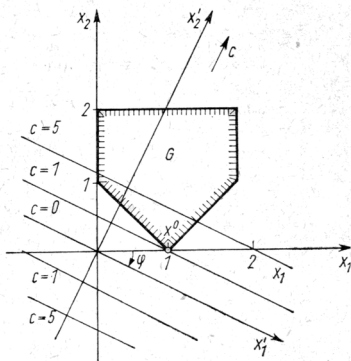


Bild 4.3

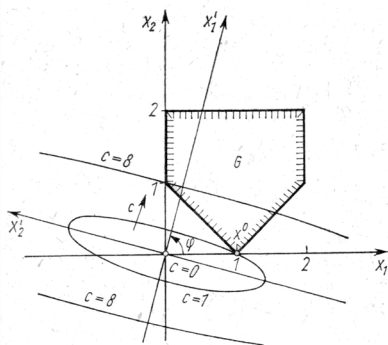


Bild 4.4

4.9: a) Im Problem

$$\max \{3e^{x_1} + x_2 \mid \mathbf{x} \in G\},$$

$$G = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, 2 \ln x_1 + \ln x_2 \leq \ln 16\}$$

sind offenbar die Variablen separiert.

b) Wir bilden in der Zielfunktion $\ln(x_3 x_4) = \ln x_3 + \ln x_4$ und setzen

$$x_5 = x_1 \sin x_2, \quad x_6 = x_3^2 \ln x_4, \quad x_7 = 4e^{x_1 x_3}, \quad x_8 = x_2 \cos x_4.$$

Durch Logarithmieren dieser Gleichungen und anschließendes Einsetzen in die Restriktionen erhält man ein System von Gleichungen und Ungleichungen, in welchem die Variablen separiert sind. Dieses System kann leicht in die Form (4.10), (4.11) gebracht werden, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Ausgangsvariablen positiv sein müssen.

4.10: Es sei $(y^0, t^0)^T$ eine Lösung von (4.14). Dann ist

$$f(y^0, t^0) = \frac{c^T y^0 + c_0 t^0}{d^T y^0 + d_0 t^0} = \frac{c^T y^0 \lambda + c_0 t^0 \lambda}{d^T y^0 \lambda + d_0 t^0 \lambda} = f(\lambda y^0, \lambda t^0).$$

Für $\lambda > 0$ ist $\lambda t^0 > 0$, $\lambda y^0 - b \lambda t^0 \leq 0$ und damit $(\lambda y^0, \lambda t^0)^T \in G^*$. Daher ist $(\lambda y^0, \lambda t^0)^T$ Lösung von (4.14).

4.11: Dem gegebenen Problem ist das lineare Problem

$$\min \{3y_1 - y_2 + 3t \mid (y, t)^T \in G^{**}\},$$

$$G^{**} = \{(y, t)^T \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 \leq 4t, 2y_1 - y_2 \leq 2t, y \geq 0, y_1 + 2y_2 + t = 1, t > 0\}$$

zugeordnet. Mit der Simplexmethode folgt als Lösung $(y_1^0, y_2^0, t^0)^T = \left(0, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)^T$. Durch Transformation folgt hieraus als Lösung des Ausgangsproblems $(x_1^0, x_2^0)^T = (0, 4)^T$.

5.1: Aus $u^0 \in \mathbb{R}_+^m$ und $g(x^0) \leq 0$ folgt zunächst $u_i^0 g_i(x^0) \leq 0 \forall i \in I_g$. Aus der Annahme $u_i^0 g_i(x^0) < 0$ für ein $i \in I_g$ erhält man $u^{0T} g(x^0) < 0$ im Widerspruch zu (5.12).

5.2: Es ist

$$x^T C x + c^T x = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + (-8, -10)x.$$

C ist positiv definit, G ist konvex;

$$F(x, u) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 - u_1 x_1 - u_2 x_2 + u_3(3x_1 + 2x_2 - 6).$$

Die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen (5.11), (5.12) lauten

$$\left. \begin{aligned} \nabla_x F(x^0, u^0) &= \begin{pmatrix} 2x_1^0 - 8 - u_1^0 + 3u_3^0 \\ 2x_2^0 - 10 - u_2^0 + 2u_3^0 \end{pmatrix} = 0, \\ \nabla_u F(x^0, u^0) &= \begin{pmatrix} -x_1^0 \\ -x_2^0 \\ 3x_1^0 + 2x_2^0 - 6 \end{pmatrix} \leq 0, \\ u_1^0 x_1^0 &= 0, \quad u_2^0 x_2^0 = 0, \quad u_3^0(3x_1^0 + 2x_2^0 - 6) = 0. \end{aligned} \right\} (*)$$

Nach Satz 4.3, Satz 5.2 und Satz 5.5 hat das gegebene Problem genau eine Lösung, und zwar die Lösung des Systems (*):

$$x^0 = \frac{1}{13} (4, 33)^T.$$

Grafische Lösung: Bild 5.3. Es ist

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 - 41.$$

5.3: Die Zielfunktion des Problems ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ konkav, d. h. Satz 5.2 und Satz 5.5 sind nicht anwendbar.

a) Es ist

$$-x_1^2 - x_2^2 - tx_1 - 2tx_2 = -\left(x_1 + \frac{t}{2}\right)^2 - (x_2 + t)^2 + \frac{5}{4}t^2.$$

Als Lösung x^0 ergibt sich (Bild 5.4)

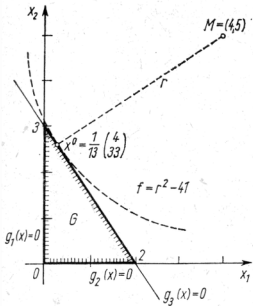


Bild 5.3

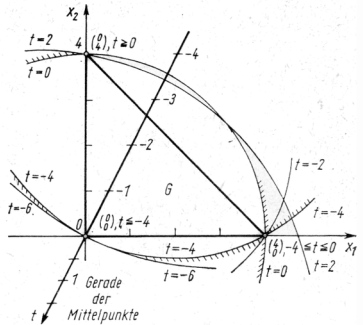


Bild 5.4

$$t < -4: \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t = 0: \mathbf{x}^0 \in \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$t = -4: \mathbf{x}^0 \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad t > 0: \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$-4 < t < 0: \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Nein, c) nein.

5.4: Man findet $\mathbf{x}^0 = (1, 0)^T$ (Bild 5.5).

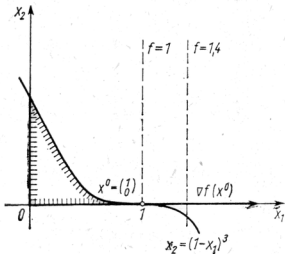


Bild 5.5

a) Es ist $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -x_1 - u_1 x_1 - u_2 x_2 + u_3(x_2 - (1 - x_1)^3)$.
Aus

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \begin{pmatrix} -1 & -u_1^0 \\ -u_2^0 & u_3^0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

folgt $u_1^0 = -1 < 0$, d. h. $\mathbf{u}^0 \notin \mathbb{R}_+^3$.

b) Es müßte gelten $\mathbf{z}^T \nabla g_2(\mathbf{x}^2) = -z_2 < 0$ und $\mathbf{z}^T \nabla g_3(\mathbf{x}^0) = z_2 < 0$, und das ist nicht möglich.

5.5: Als Lösung des Systems (5.11), (5.12) folgt

$$\mathbf{x}^0 = (2, 0)^T, \mathbf{u}^0 = (0, 2, \alpha, \alpha)^T \text{ mit } \alpha \geq 0.$$

Da das Innere von G leer ist, ist B nicht erfüllt und damit Satz 5.6 nicht anwendbar. Es ist

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \leq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in G. \text{ Nach Satz 4.8 hat man } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla f(\mathbf{x}^0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

5.6: Es ist $\mathbf{x} \in R_+^n \Leftrightarrow -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Wir führen für das neue Problem die Lagrange-Funktion

$$\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{v}^T \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^T \mathbf{x};$$

$$\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R_+^m, \mathbf{v} \in R_+^n,$$

ein. Dann folgt aus der (5.11) entsprechenden Bedingung

$$\nabla_{\mathbf{x}} \hat{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0) = \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) - \mathbf{v}^0 = \mathbf{0},$$

$$\text{d. h. } \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = \mathbf{v}^0 \geq \mathbf{0}.$$

Aus $v_j^0 \neq 0$ folgt wegen (5.12) und Aufgabe 5.1 sofort

$$x_j^0 = 0 \quad \text{und damit} \quad x_j^0 \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

$$\text{d. h. } \mathbf{x}^{0T} \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = 0.$$

6.1: Nach Satz 5.6 ist (5.12) erfüllt. Daher gilt $\mathbf{u}^{0T} \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = 0$, und hieraus folgt $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) = f(\mathbf{x}^0)$.

6.2: $P: \min \{f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2 \mid \mathbf{x} \in G\}, G = \{\mathbf{x} \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$

$$D: \max \{F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_1^2 - x_2 + u(x_1^2 + x_2^2 - 1) \mid (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in G^*\},$$

$$G^* = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T \in R^2 \times R \mid u \geq 0, \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

$$\text{a) } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) = F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq F(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x} \in G, \quad \forall (\mathbf{y}, \mathbf{u})^T \in G^*,$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = (2y_1 + 2y_1u, -1 + 2y_2u)^T = \mathbf{0},$$

z. B.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad u = 1 \quad \text{sind zulässig.}$$

Daraus folgt

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \geq f(\mathbf{x}^0) \geq F(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = -\frac{5}{4}.$$

b) Lösung von $P: x_1^0 = 0, x_2^0 = 1;$

Lösung von $D: x_1^0 = 0, x_2^0 = 1, u^0 = \frac{1}{2}$ ($u^0 = 0$ ergibt einen Widerspruch).

6.3: $\bar{D}: \max \{-3x_1^4 - 2x_2^2 + 5x_3 - x_4 \mid \mathbf{x} \in G\},$

$$G = \{\mathbf{x} \in R^4 \mid x_1, x_2 \in R, x_3, x_4 \in R_+, 4x_3 - 2x_4 \leq 4x_1^3, 2x_3 + x_4 \leq 4x_2\},$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 4x_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = x_3, u_2 = x_4, \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^4 + 2x_2^2;$$

$$\bar{P}: \min \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \bar{G}\}, \quad \bar{G} = \left\{ \mathbf{x} \in R^2 \mid \mathbf{x} \in R_+^2, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man erhält die Lösung $x_1^0 = \frac{7}{8}$, $x_2^0 = \frac{3}{4}$.

$$\bar{D}_1: \max \left\{ 5u_1 - u_2 \mid u_1, u_2 \geq 0, 4u_1 - 2u_2 \leq \frac{4 \cdot 7^3}{8^3} (\approx 2,68), 2u_1 + u_2 \leq 3 \right\}.$$

Man erhält als Lösung $u_1^0 = u_3^0 = \frac{1111}{1024} (\approx 1,08)$; $u_2^0 = u_4^0 = \frac{425}{512} (\approx 0,83)$.

6.4: Duales Problem im Sinne von Dorn:

$$D: \max \{ -x^T Cx - u^T b \mid (x, u)^T \in G^* \},$$

$$G^* = \{ (x, u)^T \in R^n \times R^m \mid u \in R_+^m, -A^T u \leq 2Cx + c \}.$$

Duales Problem im Sinne von Wolfe:

$$\hat{D}: \max \{ x^T Cx + c^T x + u^T (Ax - b) - v^T x \mid (x, u)^T \in \hat{G}^* \},$$

$$\hat{G}^* = \{ (x, u, v)^T \in R^n \times R^m \times R^n \mid u \in R_+^m, v \in R_+^n, 2Cx + c + A^T u - v = 0 \}.$$

Wegen \hat{G}^* hat man $2x^T Cx + c^T x + x^T A^T u - x^T v = 0$

und damit das Problem

$$\max \{ -x^T Cx - u^T b \mid (x, u)^T \in \tilde{G}^* \},$$

$$\tilde{G}^* = \{ (x, u, v)^T \in R^n \times R^m \times R^n \mid u \in R_+^m, v \in R_+^n, -A^T u + v = 2Cx + c \}.$$

Wegen $v \in R_+^n$ sind folglich \hat{D} und D identisch.

6.5: Aus $F(x, u) = c^T x + u^T (-Ax + b)$ folgt $\nabla_x F(x, u) = c - A^T u = 0$ und damit $F(x, u) = b^T u$ für $A^T u = c$ und $D: \max \{ b^T u \mid A^T u = c, u \in R_+^m \}$.

$$7.1 \quad x^T Cx = (x^1, x^2)^T \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^T C_{11} x_1 + x_2^T C_{22} x_2 + x_1^T C_{12} x_2 + x_2^T C_{21} x_1$$

$$\text{mit } C_{11}^T = C_{11}, C_{22}^T = C_{22}, C_{12}^T = C_{21}.$$

(*)

Einsetzen von $x^2 = B_1 x^1 + b$ ergibt

$$x^T Cx = x_1^T (C_{11} + B_1^T C_{12} + C_{12} B_1 + B_1^T C_{22} B_1) x^1 + d^T x^1 + d_0$$

$$\text{und damit } D = C_{11} + B_1^T C_{12} + C_{12} B_1 + B_1^T C_{22} B_1.$$

Wegen (*) folgt $D^T = D$. Es gilt

$$D = (E^T, B_1^T) C \begin{pmatrix} E \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (E \text{ Einheitsmatrix}).$$

Aus der Annahme $q = x^{1T} D x^1 < 0$ für ein $x^1 \neq 0$ folgt dann

$$0 > q = x^{1T} (E^T, B_1^T) C \begin{pmatrix} E \\ B_1 \end{pmatrix} x^1$$

$$= y^T C y \quad \text{für ein } y \in R^n \quad \text{mit } y = \begin{pmatrix} E \\ B_1 \end{pmatrix} x^1$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, wonach C positiv semidefinit ist.

7.2: Es seien $d_k = 0$, $k \in Z_3$, und $d_i \geq 0$, $i \in Z_1$.

(**)

Wegen der positiven Semidefinitheit ist $Q(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{x}} + 2\mathbf{d}^T \bar{\mathbf{x}} + d_0$ mit $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, eine konvexe Funktion. Nach Satz 4.6 ergibt sich wegen

$$\nabla Q(\bar{\mathbf{x}}) = 2\mathbf{D}\bar{\mathbf{x}} + 2\mathbf{d}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^3 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{x}}^{10} = \bar{\mathbf{x}}^{30} = \mathbf{0},$$

$\nabla Q(\bar{\mathbf{x}}^0)^T (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^0) = \nabla Q(\bar{\mathbf{x}}^0)^T \bar{\mathbf{x}} = 2\mathbf{d}^T \bar{\mathbf{x}} \geq 0$ für alle $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, \mathbf{x}^3 beliebig
als Lösung des Problems $\mathbf{x}^{10} = \mathbf{x}^{30} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^{20} = \mathbf{b}$.

7.3: $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^{0T} \mathbf{C} \mathbf{x}^0 + \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = -304$.

7.4: a) C negativ semidefinit \Rightarrow Verfahren nicht anwendbar.

b) $x_2 = 0$ und $x_1 \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G$ und $\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow -\infty$.

7.5: a) $\min \{-Q(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in G\}$, $G = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n p_j x_j \leq \beta, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$,

b) $x_1^0 = \frac{308}{59}$, $x_2^0 = \frac{156}{59}$.

7.6: $\frac{d}{d\alpha} (\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}) = 2\alpha \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} = 0$, (*)

$\frac{d^2}{d\alpha^2} (\dots) = 2\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} > 0$ nach Voraussetzung. Auflösung von (*) nach α ergibt $\hat{\alpha}$. Im Falle $\hat{\alpha} \geq 0$ ergibt sich $\alpha^k = \min \{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \hat{\alpha}\}$. Im Falle $\hat{\alpha} < 0$ gibt es keine Abstiegsrichtung.

7.7: a) Tableau zu Startpunkt \mathbf{x}^1 , $\tilde{\mathbf{x}}^T := (\mathbf{y}, \mathbf{z})^T$, $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2)$.

	x_1	x_2	1	y_0^1
x_3	-1	0	4	2
x_4	0	-1	3	1
x_5	-1	-1	5	1
z_0^{1T}	2	2		

$\nabla_{\mathbf{y}} f(\tilde{\mathbf{x}}) = (0, 0, 0)^T$,
 $\nabla_{\mathbf{z}} f(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -6(x_1 - 2)^2 + 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, (*)
 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$\frac{df(\tilde{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \tilde{\mathbf{x}})}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\Delta x_1} \left(2 - x_1 - \sqrt{\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + 7 \right)} \right)$, (**)

$-\mathbf{r}_z^1 = \mathbf{r}^1 = \Delta \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1^1 = \infty$, $\alpha_2^1 = \frac{2}{7}$, $\alpha^1 \approx 0,1559$, $\mathbf{z}_0^2 \approx \begin{pmatrix} 0,9089 \\ 1,8441 \end{pmatrix}$,

$-\mathbf{r}_z^2 = \mathbf{r}^2 = \Delta \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 0,1429 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1^2 \approx 19,75$, $\alpha_2^2 = \alpha^2 \approx 1,8441$, $\mathbf{z}_0^3 \approx \begin{pmatrix} 1,1723 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$-\mathbf{r}_z^3 = \mathbf{r}^3 = \Delta \mathbf{z}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_0^4 \approx \begin{pmatrix} 0,9199 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \left(2 - \sqrt{\frac{7}{6}} \right) = \mathbf{x}^{01}$, $\Delta \mathbf{z}^4 = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \mathbf{x}^{01}$ stationärer Punkt (vgl. Bild 7.13).

b) Tableau zu Startpunkt x^{II}

	x_1	x_2	1	y_0^1	$-r_y$	Δy^1	$\left(\frac{y_j^1}{ \Delta y_j^1 }\right)$	\hat{y}_0^2
x_3	-1	0	4	0,5	0	-6,5	0,0769	0
x_4	0	-1	3	2	0	1	∞	2,0769
x_5	-1	-1	5	0,5	0	-5,5	0,0909	0,0769
$(z_0^1)^T$	3,5	1	$\alpha^1 = 0,0769$				$0,0769 = \alpha_1^1$	
$(r^1)^T = (-r_z^1)^T$ $= (\Delta z^1)^T$	6,5	-1						
$\left(\frac{z_j^1}{ \Delta z_j^1 }\right)^T$	∞	1	$1 = \alpha_2^1$					
$(\hat{z}_0^2)^T$	4,0	0,9231						

Danach Austausch von x_3 gegen x_1 und Durchführung einer weiteren Iteration.

	x_3	x_2	1	y_0^2	$-r_y^2$	Δy^2	$\left(\frac{y_j^2}{ \Delta y_j }\right)$
x_1	-1	0	4	4,0	17	0	∞
x_4	0	-1	3	2,0769	0	1	∞
x_5	1	-1	1	0,0769	0	1	∞
$(z_0^2)^T$	0	0,9231	$\nabla_y f(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_4} \\ f_{x_5} \end{pmatrix}$				∞
$(-r_z^2)^T$	0	-1					
$(r^2)^T$	-17	-1					
$(\Delta z^2)^T$	0	-1					
$\left(\frac{z_j^2}{ \Delta z_j^2 }\right)^T$	∞	0,9231	$0,9231 = \alpha^2$		$\nabla_z f(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_{x_2} \\ f_{x_3} \end{pmatrix}$		

Es folgt $z_0^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^{\text{OIII}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Delta z^3 = 0$. Daher ist x^{OIII} ein stationärer Punkt.

Obwohl x^{OIII} nicht Stelle eines lokalen Minimums wie x^{OI} oder x^{OII} ist, gilt dort $\Delta z^1 = 0$, d. h. x^{OIII} ist ein stationärer Punkt (lokales Maximum von f bei $x_2 = 0$).

c) Vgl. Bild 7.13.

d) Nach dem Verlauf der Höhenlinie ist x^{OI} die Lösung des Optimierungsproblems. Es gilt $f(x^{\text{OI}}) \approx -5,0406$, $f(x^{\text{OII}}) = -2$, $f(x^{\text{OIII}}) \approx 5,0406$.

7.8: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \max \{f(t), g(t)\}$ stetig \Rightarrow

$\Rightarrow \max \{0, t\}$ stetig $\Rightarrow \max^r \{0, t\}$ stetig ($r \geq 1$).

$|t|$ stetig $\Rightarrow f(t) = |t|^r$ stetig ($r \geq 1$) und

$$\max^r \{0, t\} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ t^r & \text{für } t > 0; \end{cases} \quad |t|^r = \begin{cases} (-t)^r & \text{für } t \leq 0, \\ t^r & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

b) $r > 1$.

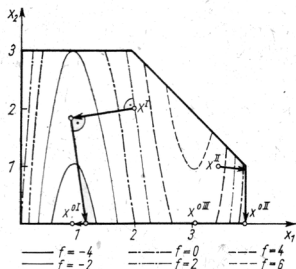


Bild 7.13

7.9: $\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^{k_0} \text{ Lösung von } P_{k_0} \Rightarrow f(\mathbf{x}^{k_0}) \leq H(\mathbf{x}^{k_0}, p_{k_0}) \leq \alpha \\ \mathbf{x}^{k_0} \in G \Rightarrow f(\mathbf{x}^{k_0}) \geq \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow f(\mathbf{x}^{k_0}) = \alpha.$

7.10: $P_k: \min \{x_1^2 + 2x_2^2 + p_k \max^2 \{0, 1 - x_1^2 - x_2^2\} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$ (*)

$$\nabla H(\mathbf{x}, p_k) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4p_k(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 \\ 4x_2 - 4p_k(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla H(\mathbf{x}^k, p_k)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^k) \cap R_+^2 \quad \text{ergibt:}$$

$\mathbf{x}^k > \mathbf{0} \Rightarrow \text{Widerspruch, } \mathbf{x}^k = \mathbf{0} \text{ keine Lösung von } P_k,$

$$\begin{aligned} x_1^k = 0, x_2^k > 0 &\Rightarrow x_2^k = \sqrt{1 - \frac{1}{p_k}} \\ x_2^k = 0, x_1^k > 0 &\Rightarrow x_1^k = \sqrt{1 - \frac{2}{p_k}} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Einsetzen in (*) zeigt} \\ \mathbf{x}^k = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{2}{p_k}} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

In Bild 7.14 ist der Sachverhalt skizziert (für $p_k = k$; I, II, III bedeutet $k = 4, 5$ bzw. 10).

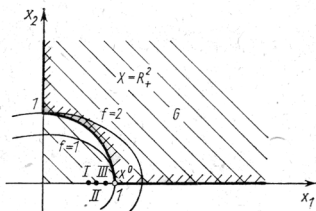


Bild 7.14

$$7.11: \quad \left. \begin{array}{l} b(t) = t^{-r}, r > 0 \\ b(t) = -\ln t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b \text{ stetig für } t > 0 \\ g_t \text{ stetig für } x \in X \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x^k \rightarrow y \in G \setminus \tilde{G} \Rightarrow g_t(x^k) \rightarrow g_t(y) = 0 \Rightarrow B(x^k) \rightarrow \infty.$$

7.12: a) x^0 sei Lösung von P, d. h. $f(x^0) = \alpha$, $x^0 \in G$. Dann existiert wegen $\tilde{\tilde{G}} = G$ eine Folge $x^k \in \tilde{G}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$, und es gilt

$$f(x^0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq \inf_{x \in \tilde{G}} f(x) \geq \inf_{x \in G} f(x) = f(x^0).$$

b) $\inf_{x \in \tilde{G}} (-x) = -1 \neq \inf_{x \in G} (-x) = -2$ (vgl. Bild 7.15).

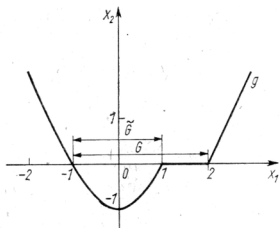


Bild 7.15

7.13: $P_k: \min \{x_1^2 + 2x_2^2 + q_k \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$

$$\nabla H(x, q_k) = \begin{pmatrix} 2x_1 + q_k \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \\ 4x_2 + q_k \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \end{pmatrix},$$

$$\nabla H(x^k, q_k)^T (x - x^k) \geq 0 \quad \forall x \in U(x^k) \cap R_+^2 \text{ ergibt}$$

$$x^k > 0 \Rightarrow \text{Widerspruch};$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1^k = 0 \Rightarrow x_2^k = -\frac{q_k}{4} + \sqrt{1 + \frac{q_k^2}{16}} \\ x_2^k = 0 \Rightarrow x_1^k = -\frac{q_k}{2} + \sqrt{1 + \frac{q_k^2}{4}} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Einsetzen in } H(x, q_k) \text{ zeigt} \\ x^k = \begin{pmatrix} -\frac{q_k}{2} + \sqrt{1 + \frac{q_k^2}{4}} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$\text{Der Grenzübergang } q_k \rightarrow 0 \text{ ergibt } x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7.14: $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ist differenzierbar und offenbar streng quasikonvex auf \mathbb{R} . Für $x_1 = 0$ und $x_2 < 0$ gilt aber $f(x_1) > f(x_2)$ und $(x_2 - x_1)f'(x_1) = 0$. Daher ist f nicht pseudokonvex auf \mathbb{R} .

Literatur

- [1] *Bachmann, G.; Elster, K.-H.; Petry, K.*: Zur Problemstellung der geometrischen Optimierung. Wiss. Z. TH Ilmenau **19** (1973) 1, 3–39.
- [2] *Berge, C.; Ghoulia-Houri, A.*: Programme, Spiele, Transportnetze. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969.
- [3] *Blum, E.; Oettli, W.*: Mathematische Optimierung, Grundlagen und Verfahren. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag 1975.
- [4] *Donath, G.*: Über direkte Lösungsverfahren der nichtlinearen Optimierung. Diss. A, TH Ilmenau 1975.
- [5] *Duffin, R. J.; Peterson, E. L.; Zener, C.*: Geometric Programming: Theory and Application. New York, London, Sydney: Wiley 1967.
- [6] *Elster, K.-H.; Reinhardt, R.; Schäuble, M.; Donath, G.*: Einführung in die nichtlineare Optimierung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1977.
- [7] *Fichtenholz, G. M.*: Differential- und Integralrechnung (Band I, 10. Aufl.) (Übers. a. d. Russ.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1977.
- [8] *Golstein, E. G.*: Konvexe Optimierung. (Übers. a. d. Russ.) WTB. Band 122. Berlin: Akademie-Verlag 1973.
- [9] *Großmann, Ch.; Kleinmichel, H.*: Verfahren der nichtlinearen Optimierung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.
- [10] *Hadley, G.*: Nichtlineare und dynamische Programmierung (Übers. a. d. Engl.). Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1969.
- [11] *Himmelblau, D. M.*: Applied Nonlinear Programming. London: McGraw-Hill 1972.
- [12] *Иоффе А. Д.; Тухомиров, В. М.*: Теория экстремальных задач. Москва: Изд. Наука 1975.
- [13] *Krekó, B.*: Optimierung, Nichtlineare Modelle (Übers. a. d. Ung.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1974.
- [14] *Künzi, H. P.; Tzschach, H. G.; Zehnder, C. A.*: Numerische Methoden der mathematischen Optimierung mit ALGOL- und FORTRAN-Programmen. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969.
- [15] *Mangasarian, O. L.*: Nonlinear Programming. New York: McGraw-Hill 1969.
- [16] *Martos, B.*: Nonlinear Programming, Theory and Methods. Budapest: Akadémiai Kiadó 1975.
- [17] *Polak, E.*: Computational Methods in Optimization: A Unified Approach. New York: Academic Press 1971.
- [18] *Pšeničnyi, B. N.*: Notwendige Optimalitätsbedingungen (Übers. a. d. Russ.). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972.
- [19] *Пишечный Б. Н.; Данилин, Ю. Н.*: Численные методы в экстремальных задачах. Москва: Изд. Наука 1975.
- [20] *Seiffart, E.; Manteuffel, K.*: Lineare Optimierung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1974.
- [21] *Vogel, W.*: Lineares Optimieren. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1970.
- [22] *Василюев, Ф. П.*: Лекции по методам решения экстремальных задач. Москва; Изд. Московского университета 1974.

Register

Abstiegsrichtung 64
 allgemeines Optimierungsproblem 9
 Alternativsatz für konvexe Systeme 26
 – von Motzkin 24

Barrierefunktion 78
 Barriereverfahren 77
 Bereich, zulässiger 9

Dualitätssatz von Dorn 53
 – – Wolfe 52

Eckpunkt 12
 Eliminationsverfahren 85
 Epigraph 18
 Extremalpunkt 12
 Extremum, eigentliches 27

Funktion, konkave 17
 –, konkave 17
 –, linear-affine 9
 –, pseudokonkave 90
 –, streng konkave 17
 –, streng konkave 17
 –, streng quasikonkave 84

globale Kuhn-Tucker-Bedingung 43
 Gradientenverfahren, reduziertes 66

Halbzylinder, oberer 18
 Hessesche Matrix 22
 Hülle, konvexe 13
 hyperbolische Optimierungsprobleme 10, 37

Jacobische Matrix 29

klassische Optimierungsprobleme 10
 Kletterverfahren 88
 konkave Funktion 17
 konvexe Funktion 17
 – Hülle 13
 – Linearkombination 12
 – Menge 11
 – Optimierungsprobleme 10, 31
 – Vektorfunktion 26
 konvexes Polyeder 14
 Kuhn-Tucker-Bedingung 43

Lagrange-Funktion 29
 Lagrange-Multiplikatoren 29
 linear-affine Funktion 9
 – Vektorfunktion 26
 Lösung 9
 lokale Kuhn-Tucker-Bedingungen 43
 lokales Minimum 9

Matrix, nichtentartete 66
 Maximum 27
 Minimum, absolutes 27
 –, globales 27
 –, lokales 9, 27
 –, relatives 27

Nebenbedingungen 9
 nichtentartete Matrix 66
 nichtlineares Optimierungsproblem 9

Optimalpunkt 9
 Optimalwert 9
 Optimierungsproblem, allgemeines 9
 –, hyperbolisches 10, 37
 –, klassisches 10
 –, konvexes 10, 31
 –, nichtlineares 9
 –, quadratisches 10, 34
 –, separables 10, 36

pseudokonvexe Funktion 90
 Punkt, stationärer 65

quadratische Optimierungsprobleme 10, 34

reduziertes Gradientenverfahren 66
 Regularitätsbedingung von Slater 42
 Restriktionen 9
 –, aktive 45
 Restriktionsfunktion 9
 Richtung, zulässige 64

Sattelpunkt 40
 Sattelpunktproblem 40
 Satz von Farkas-Minkowski 24
 – – Kuhn und Tucker 45
 Schnittebenenverfahren 79
 separable Optimierungsprobleme 10, 36
 stationärer Punkt 65
 Straffunktion 74
 Strafverfahren 74
 streng konkave Funktion 17
 – konkave Funktion 17
 – quasikonvexe Funktion 84
 – trennbare Mengen 15
 – trennende Hyperebene 15

trennbare Mengen 15
 trennende Hyperebene 14
 Trennungssatz 15, 16

Vektorfunktion 26
 Verfahren, Barriere- 77
 – der koordinatenweisen Suche 88
 – – zulässigen Richtungen 64
 – des Goldenen Schnitts 87
 –, reduziertes Gradienten- 66
 –, Schnittebenen- 79
 –, Straf- 74

Zielfunktion 9
 zulässige Richtung 64
 zulässiger Bereich 9