

MATHEMATIK

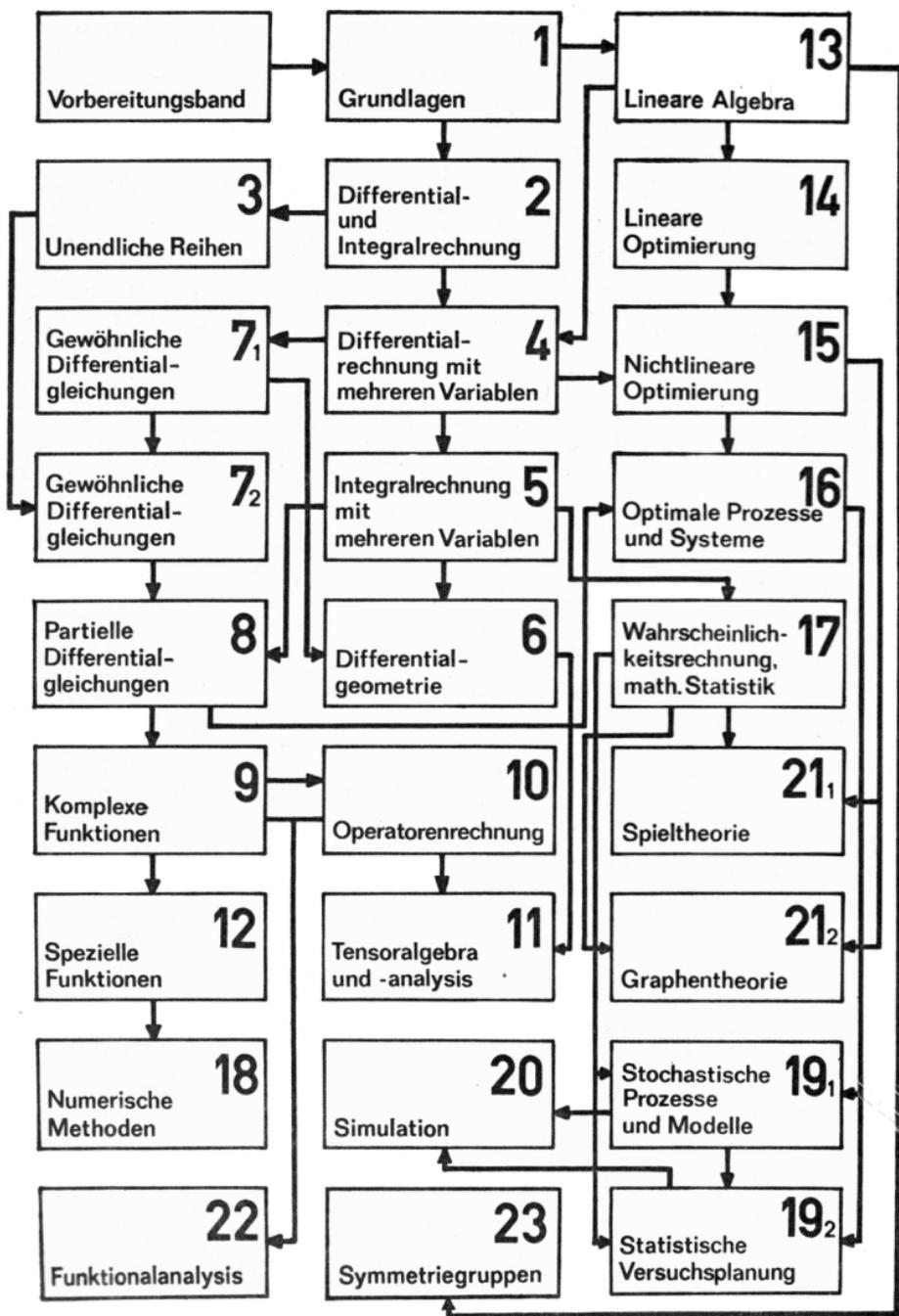
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

17

BEYER · HACKEL · PIEPER · TIEDGE

Wahrscheinlichkeitsrechnung
und mathematische Statistik

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 17

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. C. Großmann, Dresden
Prof. Dr. H. Kadner, Dresden · Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg
Prof. Dr. M. Schneider, Chemnitz · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

PROF. DR. O. BEYER

H. HACKEL

DR. V. PIEPER

DR. J. TIEDGE

Wahrscheinlichkeits- rechnung und mathematische Statistik

6. AUFLAGE



B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT K.-G.
1991

Das Lehrwerk wurde 1972 begründet und wird seither herausgegeben von:

Prof. Dr. Otfried Beyer, Prof. Dr. Horst Erfurth, Prof. Dr. Otto Greuel †, Prof. Dr. Horst Kadner,

Prof. Dr. Karl Manteuffel, Doz. Dr. Günter Zeidler

Außerdem gehören dem Herausgeberkollektiv an:

Prof. Dr. Manfred Schneider (seit 1989), Prof. Dr. Christian Großmann (seit 1989)

Verantwortlicher Herausgeber dieses Bandes:

Dr. rer. nat. habil. Horst Erfurth, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“, Leuna-Merseburg

Autoren:

Dr. sc. nat. Otfried Beyer, ordentlicher Professor an der Technischen Universität „Otto von Guericke“, Magdeburg

Horst Hackel, Lehrer im Hochschuldienst an der Technischen Universität „Otto von Guericke“, Magdeburg

Dr. sc. nat. Volkmar Pieper, wissenschaftlicher Oberassistent an der Technischen Universität „Otto von Guericke“, Magdeburg

Dr. sc. nat. Jürgen Tiede, Dozent an der Technischen Hochschule Köthen

Beyer, Otfried :

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik / O. Beyer ;

H. Hackel ; V. Pieper ; J. Tiede. - 6. Aufl. - Leipzig : B. G. Teubner, 1991. -

216 S. : 57 Abb.

(Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte ; 17)

NE: Hackel, Horst: ; Pieper, Volkmar: ; Tiede, Jürgen: ; GT

ISBN 3-322-00802-9

Math. Ing. Nat.wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 17

ISSN 0138-1318

© B. G. Teubner Verlagsgesellschaft K.-G., Leipzig, 1976

6. Auflage

VNL 294-375/34/91

Lektor: Dorothea Ziegler

Printed in Germany

Satz und Druck: Interdruck GmbH Leipzig

Bestell-Nr. 666 641 4

Inhalt

1.	Einleitung	7
2.	Wahrscheinlichkeitsrechnung	9
2.1.	Zufällige Ereignisse	9
2.1.1.	Zufällige Versuche	9
2.1.2.	Zufällige Ereignisse	10
2.1.3.	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen	12
2.1.4.	Das Ereignisfeld	16
2.1.5.	Ergänzende Betrachtungen in Verbindung mit dem Begriff des zufälligen Ereignisses	17
2.1.6.	Beispiele und Aufgaben	18
2.2.	Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	20
2.2.1.	Relative Häufigkeit	20
2.2.2.	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	23
2.2.2.1.	Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung	23
2.2.2.2.	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff	25
2.2.2.3.	Ergänzende Betrachtungen in Verbindung mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses	27
2.2.3.	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, unabhängige Ereignisse	28
2.2.3.1.	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	28
2.2.3.2.	Unabhängige Ereignisse	32
2.2.4.	Beispiele und Aufgaben	33
2.3.	Zufallsgrößen	36
2.3.1.	Begriff der Zufallsgröße	36
2.3.1.1.	Erklärung des Begriffs der Zufallsgröße	36
2.3.1.2.	Weiterführende Betrachtungen	38
2.3.2.	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße	38
2.3.2.1.	Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung	38
2.3.2.2.	Diskrete Zufallsgrößen	40
2.3.2.3.	Stetige Zufallsgrößen	43
2.3.2.4.	Beispiele	45
2.3.2.5.	Zusammenfassung	48
2.3.3.	Kennwerte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße	48
2.3.3.1.	Der Erwartungswert	48
2.3.3.2.	Die Varianz	51
2.3.3.3.	Der Erwartungswert von Funktionen einer Zufallsgröße	52
2.3.3.4.	Momente einer Zufallsgröße	55
2.3.3.5.	Zusammenfassung	56
2.3.3.6.	Einige weitere Kennwerte	57
2.3.4.	Aufgaben	58
2.3.5.	Einige spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	60
2.3.5.1.	Die Null-Eins-Verteilung	60
2.3.5.2.	Die Binomialverteilung	61
2.3.5.3.	Die Poissonverteilung	63
2.3.5.4.	Die hypergeometrische Verteilung	65
2.3.5.5.	Zusammenfassung	67
2.3.6.	Einige spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	67
2.3.6.1.	Die gleichmäßige stetige Verteilung	69
2.3.6.2.	Die Exponentialverteilung	70
2.3.6.3.	Die Normalverteilung	71
2.3.6.4.	Zusammenfassung	76
2.3.7.	Mehrdimensionale Zufallsgrößen	76

2.3.7.1.	Einleitung	76
2.3.7.2.	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer mehrdimensionalen Zufallsgröße	78
2.3.7.3.	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Korrelationskoeffizient, Kovarianzmatrix, bedingter Erwartungswert	83
2.3.8.	Funktionen von mehrdimensionalen Zufallsgrößen	86
2.3.8.1.	Problemstellung	86
2.3.8.2.	Summen von unabhängigen Zufallsgrößen	87
2.3.8.3.	Grundverteilungen der mathematischen Statistik	89
2.3.9.	Charakteristische Funktionen	93
2.3.9.1.	Definition und Beispiele	93
2.3.9.2.	Berechnung von Momenten	95
2.3.9.3.	Der Multiplikationssatz	97
2.3.9.4.	Erzeugende Funktionen	98
2.3.9.5.	Weiterführende Betrachtungen	99
2.3.10.	Grenzwertsätze	100
2.3.10.1.	Einleitung	100
2.3.10.2.	Das Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli	101
2.3.10.3.	Der Satz von Poisson	102
2.3.10.4.	Der zentrale Grenzwertsatz	104
2.3.10.5.	Weiterführende Bemerkungen	106
2.3.11.	Aufgaben	107
3.	Mathematische Statistik	110
3.1.	Beschreibende Statistik	110
3.1.1.	Beschreibende Statistik bei einem Merkmal	110
3.1.1.1.	Urliste, Häufigkeitstabellen, Häufigkeitsverteilungen	110
3.1.1.2.	Graphische Darstellungen von Häufigkeitsverteilungen	113
3.1.1.3.	Statistische Maßzahlen	116
3.1.2.	Beschreibende Statistik bei zwei Merkmalen	121
3.1.2.1.	Urliste, Korrelationstabelle, Häufigkeitsverteilung	121
3.1.2.2.	Statistische Maßzahlen	125
3.2.	Grundgesamtheit und Stichprobe	128
3.3.	Statistische Schätzverfahren	132
3.3.1.	Einleitung	132
3.3.2.	Punktschätzungen	133
3.3.2.1.	Begriff der Punktschätzung	133
3.3.2.2.	Maximum-Likelihood-Methode	137
3.3.2.3.	Momentenmethode	139
3.3.3.	Konfidenzschätzungen	140
3.3.3.1.	Begriff der Konfidenzschätzung	140
3.3.3.2.	Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz	141
3.3.3.3.	Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz	144
3.3.3.4.	Konfidenzschätzung für die Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit	146
3.3.3.5.	Konfidenzschätzung für den Parameter p einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit	147
3.3.3.6.	Weiterführende Betrachtungen	149
3.4.	Statistische Prüfverfahren	150
3.4.1.	Problemstellung und Grundbegriffe	150
3.4.2.	Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz	156

3.4.3.	Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz	157
3.4.4.	Prüfung der Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit	159
3.4.5.	Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten	161
3.4.6.	Prüfung der Gleichheit der Varianzen zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten	162
3.4.7.	Prüfung des Parameters p einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit	163
3.4.8.	Prüfung, ob eine Grundgesamtheit einer Normalverteilung unterliegt (mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes)	164
3.4.9.	Prüfung der Verteilungsfunktion einer Grundgesamtheit (Anpassungstest)	166
3.5.	Einführung in die Varianzanalyse	170
3.5.1.	Problemstellung	170
3.5.2.	Modell I bei einfacher Klassifikation	172
3.5.3.	Modell II bei einfacher Klassifikation	176
3.5.4.	Das allgemeine lineare Modell	179
3.6.	Einführung in die Regressions- und Korrelationsanalyse	179
3.6.1.	Problemstellung	179
3.6.2.	Regressionsanalyse	180
3.6.2.1.	Schätzung der Parameter β_1 , β_2 und σ^2	181
3.6.2.2.	Prüfung der Parameter β_1 und β_2 ; Konfidenzbereich für die Regressionsgerade	183
3.6.3.	Korrelationsanalyse	187
3.7.	Einführung in verteilungsunabhängige Prüfverfahren	190
3.8.	Aufgaben	196
	Lösungen der Aufgaben	199
	Anhang: Tafeln	201
	Literatur	211
	Namen- und Sachregister	212

1. Einleitung

In zunehmendem Maße werden in den letzten Jahren in vielen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens mathematische Verfahren angewandt, die in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik – gemeinsam mit ihren Anwendungsgebieten werden sie heute auch unter dem Oberbegriff *Stochastik* zusammengefaßt – gehören. Die Ursache dafür ist nicht zuletzt in der raschen Entwicklung der Naturwissenschaften, der Technik und der Gesellschaftswissenschaften zu suchen. Jedes dieser Wissenschaftsgebiete stellt der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik ständig neue, zahlreichere und umfangreichere Aufgaben, die entweder mit den schon vorhandenen Methoden gelöst werden können oder Anlaß zu neuen theoretischen Untersuchungen geben. Begünstigt wird diese Tendenz auch durch die Entwicklung der EDV; denn erst durch dieses Hilfsmittel wurde es möglich, viele Probleme bis zum numerischen Resultat zu bearbeiten.

Die Bedürfnisse der Praxis sind schon immer wesentliche Triebkräfte der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik gewesen.

Die Anfänge der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im 17. und 18. Jahrhundert liegen, entstanden aus der Bearbeitung von Aufgaben, die im Zusammenhang mit Glücksspielen gestellt wurden. Die Bearbeitung dieser Aufgaben führte zur Klärung wichtiger Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und zu Untersuchungen über eine Erweiterung der Anwendungsgebiete der erzielten Ergebnisse. Es wurde der Begriff des zufälligen Ereignisses geprägt und die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit gegeben. Der weitere Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 19. Jahrhundert ist eng verbunden mit der Entwicklung der Naturwissenschaften. In dieser Zeit bildete sich der Begriff der Zufallsgröße heraus. Eine der bekanntesten Verteilungen einer Zufallsgröße, die Normalverteilung, leitete C. F. Gauß (1777–1855) im Zusammenhang mit seiner Theorie der Beobachtungsfehler her. Erst Anfang der dreißiger Jahre dieses Jahrhunderts gelang es dann A. N. Kolmogorow (sowjetischer Mathematiker, geb. 1903), die Wahrscheinlichkeitsrechnung axiomatisch zu begründen und dadurch einen entscheidenden Schritt im Hinblick auf die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu geben. Auch bei der Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Anwendung in den letzten Jahrzehnten haben sowjetische Mathematiker einen großen Beitrag geliefert. Es seien B. W. Gnedenko (geb. 1912), J. K. Beljajew (geb. 1932) und J. J. Gichman (geb. 1918) genannt.

Die mathematische Statistik entwickelte sich im Ergebnis von Fragestellungen hinsichtlich der Auswertung von Versuchsergebnissen auf den Verfahren der beschreibenden Statistik aufbauend unter Verwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Begründung für den Einsatz von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik ergibt sich aus dem Charakter der untersuchten Erscheinungen. Diese sind zwar unter wohldefinierten Bedingungen mehrfach reproduzierbar, werden aber andererseits durch eine Vielzahl weiterer Einflüsse bestimmt, die entweder noch nicht bekannt oder nicht erfassbar sind. Solche Einflüsse werden als Zufallseinflüsse bezeichnet. Die erzielten Ergebnisse variieren in gewissen Grenzen. So wird z. B. die Qualität von Erzeugnissen auch unter möglichst stabilen Produktionsbedingungen und bei weitgehend homogenem Rohstoff trotzdem in gewissen Grenzen variieren. Diese Schwankung ist auf das Wirken von Zufallseinflüssen zurückzuführen.

Die Voraussetzungen für den Einsatz stochastischer Methoden sind bei Massenerscheinungen, wie sie z. B. in der modernen Industrieproduktion auftreten, gegeben. Unter Massenerscheinungen werden Vorgänge verstanden, die unter dem Einwirken von zufälligen

Einflüssen in Gesamtheiten stattfinden, die aus einer großen Anzahl von gleichberechtigten Elementen bestehen. Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es, Gesetzmäßigkeiten derartiger Massenerscheinungen zu untersuchen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist zugleich das theoretische Fundament der mathematischen Statistik. Diese liefert Verfahren, um an Hand von Stichproben, d. h. von konkretem Zahlenmaterial, Aufschlüsse über betrachtete Zufallsgrößen zu erhalten.

Aussagen, die mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik gewonnen wurden, drücken objektive Eigenschaften der untersuchten Erscheinungen aus. Durch sie werden objektiv existierende Beziehungen zwischen Erscheinungen der Wirklichkeit wiedergespiegelt. Mit anderen Worten: Die Gültigkeit des Kausalprinzips erstreckt sich auch auf zufällige Erscheinungen. Dabei können wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen die Vorstufe zur Aufdeckung von Kausalzusammenhängen sein. Es wird so oft möglich, die Ursachen von Massenerscheinungen Schritt für Schritt nachzuweisen. Andererseits ist es häufig aus prinzipiellen Gründen sinnvoll – das ist z. B. in der modernen Physik der Fall – ausschließlich wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen zu treffen und mit ihrer Hilfe die jeweiligen Erscheinungen zu erkennen.

Es ist das Ziel des vorliegenden Buches, dem Anwender der Mathematik, insbesondere dem Ingenieur, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirt, eine Einführung in die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik zu geben. Es soll ihm dadurch ermöglicht werden,

- einfache Fragestellungen der Praxis, zu deren Beantwortung die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik erforderlich sind, selbständig bearbeiten zu können,
- seine Kenntnisse auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik unter Verwendung von anderen Lehrbüchern und Monographien erweitern und vertiefen zu können,
- sich notwendige Voraussetzungen zur sich ständig erweiternden interdisziplinären Zusammenarbeit zu schaffen,
- eine Grundlage zum Verständnis wichtiger Anwendungsgebiete kennenzulernen.

Beweise werden nur dann gegeben, wenn sie der Vertiefung des Verständnisses dienen. Durch Beispiele werden wesentliche Begriffe und Aussagen erläutert.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigen.

Mit den Begriffen „zufälliges Ereignis“ und „Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses“ werden wir uns in den Abschnitten 2.1. und 2.2. vertraut machen.

Neben ihrer Erklärung wollen wir vor allem darstellen, wie die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet wird. Dabei müssen wir erst entscheiden, ob Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Untersuchung des Problems aus der Praxis eingesetzt werden müssen; bei Bejahung der Frage kommen wir von der Modellierung des entsprechenden Versuchs, der Ermittlung und Verknüpfung der erforderlichen zufälligen Ereignisse zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Um wichtige Seiten eines solchen mathematischen Modells besser erkennen und aufdecken zu können, werden gern „Hilfsmodelle“ eingesetzt. Beispiele von Modellen dieser Art sind das „Werfen eines Würfels“, das „Werfen einer Münze“, das „Ziehen einer Kugel aus einer Urne, in der Kugeln verschiedener Farbe in einem bestimmten Verhältnis enthalten sind“. Nicht zuletzt weil der Leser von diesen einfachen Modellen eine Vorstellung hat und die entsprechenden Versuche ohne große Mühe selbst durchführen kann, wollen wir die neuen Begriffe dieses Abschnitts – soweit möglich auch anderer Abschnitte – mit ihrer Hilfe erläutern.

Der Abschnitt 2.3. dient dann der Erklärung des Begriffs „Zufallsgröße“ und der Darstellung von Möglichkeiten zur Charakterisierung von Zufallsgrößen durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Momente. Außerdem wird auf spezielle Verteilungen eingegangen, die für die Bearbeitung von Problemen der Praxis bedeutsam sind.

2.1. Zufällige Ereignisse

2.1.1. Zufällige Versuche

Zum besseren Verständnis wollen wir vorerst das Wesen des Begriffs „zufälliger Versuch“ an einigen Beispielen, die in der umstehenden Übersicht zusammengestellt sind, erläutern.

Bei all diesen Beispielen ist das Ergebnis des jeweiligen Versuchs vor dessen Durchführung unbekannt. Da von den Bedingungen, unter denen dieser Versuch abläuft, nur ein gewisser Teil bekannt ist – wir wollen ihn als *festen Komplex von Bedingungen* bezeichnen –, kann das Ergebnis nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden. Demzufolge können bei einer mehrmaligen Wiederholung des Versuchs, d.h. bei einer mehrmaligen Realisierung des festen Komplexes von Bedingungen, verschiedene Ergebnisse auftreten.

Definition 2.1: Ein Versuch, der unter Beibehaltung eines festen Komplexes von Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist und dessen Ergebnis im Bereich gewisser Möglichkeiten ungewiß ist, wird als **zufälliger Versuch** bezeichnet.

Wir wollen nochmals festhalten: 1. Durch den festen Komplex von Bedingungen werden nicht alle Einflüsse erfaßt – häufig ist das gar nicht möglich oder nicht erforderlich –, die auf das Ergebnis des Versuchs Auswirkungen haben. Daraus resultieren dann aber auch die verschiedenen Versuchsergebnisse. Überlegen Sie selbst, welche erfaßbaren oder nichterfaßbaren Einflüsse u.a. auf das Ergebnis der in den Beispielen charakterisierten Versuche Auswirkungen haben.

2. Aus der Forderung der Wiederholbarkeit der Versuche ergibt sich erst die Möglichkeit zur Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten von zufälligen Erscheinungen.

Beispiel	zufälliger Versuch	mögliche Ergebnisse
2.1	Werfen eines Würfels	Augenzahl k ($k = 1, \dots, 6$)
2.2	Werfen einer Münze	„Zahl“; „Wappen“
2.3	dreimaliges Werfen einer Münze	„ZZZ“, „ZZW“, ..., „WWZ“, „WWW“ (wenn mit Z bzw. W der Wurf von „Zahl“ bzw. „Wappen“ angegeben wird)
2.4	Erfassung der Anzahl der Telephonanrufe, die während einer Zeiteinheit auf einer bestimmten Leitung eintreffen	Anzahl k ($k = 0, 1, 2, \dots$)
2.5	Ermittlung der Laufzeit eines Typs von PKW-Reifen unter vorgegebenen Bedingungen	Laufzeit t ($t \in (0, \infty)$)
2.6	Erfassung der Anzahl der Ausschußteile, die auf einer bestimmten Maschine während einer Schicht produziert werden	Anzahl k ($k = 0, 1, 2, \dots$)
2.7	Ermittlung der CO-Konzentration in Abgasen einer industriellen Anlage zu einem bestimmten Zeitpunkt	Konzentration c [%] ($0 \leq c \leq 100$)

2.1.2. Zufällige Ereignisse

D.2.2 Definition 2.2: Ein Ergebnis eines zufälligen Versuchs wird als zufälliges Ereignis bezeichnet.¹⁾

Ein zufälliges Ereignis ist also gekennzeichnet durch die Möglichkeit – nicht die Notwendigkeit! – seines Eintritts im Ergebnis eines gewissen zufälligen Versuchs.

Zufällige Ereignisse werden wir in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben (z. B. A, B, C, \dots) kennzeichnen, die bei Erfordernis noch mit einem Index versehen werden. Zu ihrer Veranschaulichung werden wir Punktmengen z. B. auf der Zahlengeraden oder in der Zahlenebene heranziehen, wobei die konkrete Bedeutung des jeweiligen zufälligen Ereignisses unberücksichtigt bleibt. Schließlich werden wir im folgenden an Stelle von einem „zufälligen Ereignis“ kurz von einem „Ereignis“ sprechen, wenn keine Mißverständnisse auftreten können.

Entsprechend der Aufgabenstellung werden die erforderlichen Ereignisse zusammengestellt. So könnten z.B. bei den obigen Beispielen folgende Ereignisse von Interesse sein:

Beispiel 2.1:

- $A_k \dots$ „Die Augenzahl k wurde geworfen“ ($k = 1, 2, \dots, 6$);
- $B \dots$ „Eine gerade Augenzahl wurde geworfen“;
- $C \dots$ „Es wurde mindestens die Augenzahl 3 geworfen“.

¹⁾ Vgl. Abschnitt 2.1.5.

Beispiel 2.2:

- A ... „Zahl liegt oben“;
 B ... „Wappen liegt oben“.

Beispiel 2.4:

- A_k ... „In der Zeiteinheit erfolgten k Anrufe“ ($k = 0, 1, \dots$);
 B ... „In der Zeiteinheit erfolgten nicht mehr als 3 Anrufe“;
 C ... „In der Zeiteinheit erfolgten mindestens 5 Anrufe“.

Beispiel 2.5:

- A_t ... „Die Laufzeit eines PKW-Reifens ist gleich t “;
 B_t ... „Die Laufzeit eines PKW-Reifens ist mindestens gleich t “.

Beispiel 2.6:

- A_k ... „In der Schicht traten k Ausschußteile auf“ ($k = 0, 1, \dots$);
 B_s ... „In der Schicht traten nicht mehr als s Ausschußteile auf“ ($s = 1, 2, \dots$).

Beispiel 2.7:

- A_x ... „Die Konzentration x wurde gemessen“;
 B_y ... „Die gemessene Konzentration ist kleiner als der maximal zulässige Wert y “;
 $C_{x_1 x_2}$... „Die gemessene Konzentration ist größer oder gleich x_1 und kleiner als x_2 “.

Wie wir später (Abschnitt 2.1.5.) sehen werden, kann ein Ereignis immer als Menge aufgefaßt werden. Dementsprechend können wir neben der oben angewandten verbalen Darstellung zur Beschreibung der Ereignisse auch die Symbolik der Mengenlehre heranziehen. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 2.1:

- $A_k = \{k\}, \quad k = 1, 2, \dots, 6;$
 $B = \{2, 4, 6\};$
 $C = \{3, 4, 5, 6\}.$

Beispiel 2.7:

- $A_x = \{x\};$
 $B_y = \{x \mid 0 \leq x < y\} = [0, y);$
 $C_{x_1 x_2} = \{x \mid x_1 \leq x < x_2\} = [x_1, x_2).$

Abschließend wollen wir zwei Ereignisse betrachten, die als Grenzfälle von zufälligen Ereignissen aufgefaßt werden können. Es sind dies das sichere und das unmögliche Ereignis.

Definition 2.3: Ein Ereignis, das im Ergebnis jeder Wiederholung eines zufälligen Versuchs ein- **D.2.3** tritt, wird als **sicheres Ereignis** bezeichnet.

Ein Ereignis, das im Ergebnis jeder Wiederholung eines zufälligen Versuchs niemals eintritt, wird als **unmögliches Ereignis** bezeichnet.

Das sichere Ereignis kennzeichnen wir mit dem Symbol Ω und das unmögliche mit dem Symbol \emptyset .

Beispiel 2.8: Beim Würfeln mit einem Würfel ist z. B.

– das Werfen irgendeiner der möglichen Augenzahlen ein sicheres Ereignis:

Ω ... „Werfen einer der 6 möglichen Augenzahlen“.

oder

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(dieses Ereignis tritt also bei der Realisierung jedes der Ereignisse A_k ($k = 1, \dots, 6$) im Beispiel 2.1 ein);

- das Werfen der Augenzahl 8 ein unmögliches Ereignis:
 $\emptyset \dots$ „Werfen der Augenzahl 8“;
- das gleichzeitige Werfen zweier Augenzahlen ein unmögliches Ereignis:
 $\emptyset \dots$ „Gleichzeitiges Werfen zweier Augenzahlen“.

Beispiel 2.9: Beim Ermitteln der Anzahl von Ausschußteilen in einer Serie von n Erzeugnissen ist es ein sicheres Ereignis, höchstens n fehlerhafte Teile zu zählen. Mehr als n Ausschußteile festzustellen ist dagegen ein unmögliches Ereignis.

2.1.3. Relationen zwischen zufälligen Ereignissen

Dieser Abschnitt wird uns mit wichtigen Relationen zwischen zufälligen Ereignissen vertraut machen. Für das Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es wichtig, daß sich der Leser mit den neuen Begriffen und Operationen eingehend auseinandersetzt.

D.2.4 Definition 2.4: Tritt mit dem Ereignis A stets auch das Ereignis B ein, dann zieht das Ereignis A das Ereignis B nach sich. Schreibweise: $A \subseteq B$ (Bild 2.1).

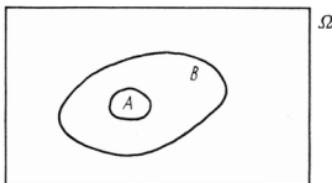


Bild 2.1. Ereignis A zieht Ereignis B nach sich:
 $A \subseteq B$

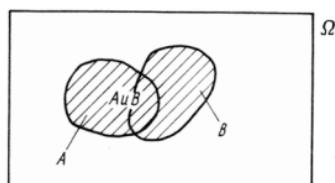


Bild 2.2. Summe der Ereignisse
 $A, B: A \cup B$

Im Beispiel 2.1 zieht z. B. das Ereignis A_4 das Ereignis B nach sich: $A_4 \subseteq B$.

D.2.5 Definition 2.5: Zieht das Ereignis A das Ereignis B und das Ereignis B das Ereignis A nach sich, dann werden die beiden Ereignisse als **gleich** bezeichnet.
 Wir können also schreiben:

$A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.

D.2.6 Definition 2.6: Tritt ein Ereignis C genau dann ein, wenn mindestens eines der beiden Ereignisse A oder B eintritt, dann wird das Ereignis C als die **Summe der Ereignisse** A, B bezeichnet. Schreibweise: $C = A \cup B$ (Bild 2.2).

Beispiel 2.8a: Beim Würfeln mit einem Würfel betrachten wir die Ereignisse:

- $A \dots$ „Es wird entweder die Augenzahl 2 oder die Augenzahl 4 geworfen“;
- $B \dots$ „Es wird entweder die Augenzahl 2 oder die Augenzahl 6 geworfen“;
- $C \dots$ „Es wird eine gerade Augenzahl geworfen“,

die unter Verwendung der Schreibweise der Mengenlehre auch so festgehalten werden können:

$$A = \{2, 4\}; \quad B = \{2, 6\}; \quad C = \{2, 4, 6\}.$$

Dann gilt:

$$C = A \cup B.$$

Die Definition der Summe von zwei Ereignissen können wir auf mehr als zwei Ereignisse erweitern:

Definition 2.6': Tritt ein Ereignis C bzw. D genau dann ein, wenn mindestens eines der endlich vielen Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bzw. abzählbar unendlich vielen Ereignisse B_i ($i = 1, 2, \dots$) eintritt, dann heißt das Ereignis C bzw. D Summe der Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bzw. B_i ($i = 1, 2, \dots$). D.2.6'

$$\text{Schreibweise: } C = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{bzw.} \quad D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Überzeugen Sie sich selbst, daß für beliebige Ereignisse A , B und C folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A; & A \cup \Omega &= \Omega; & A \cup \emptyset &= A; \\ A \cup B &= B \cup A; \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

Definition 2.7: Tritt ein Ereignis C genau dann ein, wenn sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B eintritt, dann wird das Ereignis C als das **Produkt der Ereignisse A , B** bezeichnet. D.2.7

Schreibweise: $C = A \cap B$ (Bild 2.3).

Beispiel 2.10: Beim Würfeln mit 2 unterscheidbaren Würfeln werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

- A ... „Mit dem einen Würfel wird die Augenzahl 6 geworfen“;
- B ... „Mit dem anderen Würfel wird die Augenzahl 6 geworfen“;
- C ... „Mit beiden Würfeln wird die Augenzahl 6 geworfen“.

Dann gilt: $C = A \cap B$.

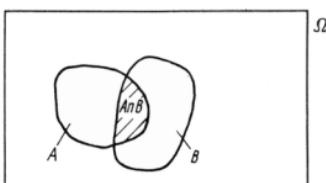


Bild 2.3. Produkt der Ereignisse
 A , B : $A \cap B$

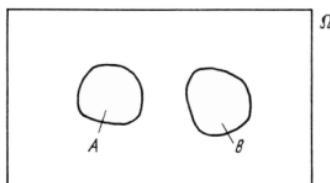


Bild 2.4. Die Ereignisse A und B schließen einander aus: $A \cap B = \emptyset$

Die Definition des Produktes von zwei Ereignissen können wir ebenfalls auf mehr als zwei Ereignisse erweitern:

Definition 2.7': Tritt ein Ereignis C bzw. D genau dann ein, wenn alle der endlich vielen Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bzw. abzählbar unendlich vielen Ereignisse B_i ($i = 1, 2, \dots$) eintreten, dann heißt das Ereignis C bzw. D Produkt der Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bzw. B_i ($i = 1, 2, \dots$). D.2.7'

$$\text{Schreibweise: } C = \bigcap_{i=1}^n A_i \quad \text{bzw.} \quad D = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Überzeugen Sie sich auch hier selbst, daß für beliebige Ereignisse A , B und C folgende Relationen gelten:

$$\begin{aligned} A \cap A &= A; \quad A \cap \Omega = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cap B &= B \cap A; \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

D.2.8 Definition 2.8: Zwei Ereignisse A und B werden als **einander ausschließend** (auch: als **unvereinbar**) bezeichnet, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist.

In Formeln: $A \cap B = \emptyset$ (Bild 2.4).

Beispiel 2.11: Beim Würfeln mit einem Würfel werden folgende Ereignisse betrachtet:
 $A = \{2\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad C = \{1, 3, 5\}$.

Sowohl die Ereignisse A und C als auch die Ereignisse B und C sind unvereinbar:

$$A \cap C = \emptyset; \quad B \cap C = \emptyset.$$

Demgegenüber sind die Ereignisse A und B vereinbar:

$$A \cap B = A.$$

D.2.9 Definition 2.9: Tritt ein Ereignis C genau dann ein, wenn ein Ereignis A , aber nicht gleichzeitig ein Ereignis B eintritt, dann wird es als die **Differenz** von A zu B bezeichnet (Bild 2.5).

Schreibweise: $C = A \setminus B$.

Überprüfen Sie, daß $C = A \setminus B$, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

D.2.10 Definition 2.10: Das Ereignis $\Omega \setminus A$ wird als das zu dem Ereignis A **komplementäre** (auch: **entgegengesetzte**) Ereignis \bar{A} bezeichnet.

Schreibweise: $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (Bild 2.6).

Das Ereignis \bar{A} tritt also genau dann ein, wenn das Ereignis A nicht eintritt.

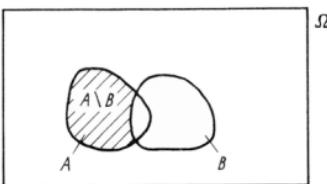


Bild 2.5. Differenz der Ereignisse
 $A, B: A \setminus B$

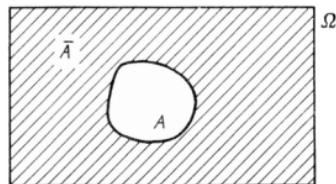


Bild 2.6. Ereignis \bar{A} komplementär
zu Ereignis A : $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Überprüfen Sie die Beziehung

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}!$$

Beispiel 2.12: Aus einer Menge von Erzeugnissen wird ein Element entnommen. Dieses kann entweder einwandfrei oder mit Fehlern behaftet sein. Die beiden Ereignisse

- $A \dots$ „Das Erzeugnis ist einwandfrei“,
- $B \dots$ „Das Erzeugnis ist fehlerhaft“

sind zueinander entgegengesetzt. Es gilt $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \Omega$.

Definition 2.11: Die Ereignisse A_i ($i = 1, \dots, n$) bilden ein vollständiges System von Ereignissen, wenn im Ergebnis eines Versuchs genau eines von ihnen eintreten muß.¹⁾

Diese Ereignisse erfüllen also folgende Relationen:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega; \quad A_i \cap A_j = \emptyset; \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Beispiel 2.13: Wir betrachten beim Würfeln mit einem Würfel die Ereignisse

$A_k \dots$ „Augenzahl k wird geworfen“ ($k = 1, \dots, 6$).

Diese bilden ein vollständiges System von Ereignissen; denn es gilt:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^6 A_i \dots \text{„Eine der Augenzahlen wird geworfen“};$$

$$\emptyset = A_i \cap A_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, 6 \dots \text{„Gleichzeitiges Werfen zweier Augenzahlen“}.$$

Beispiel 2.14: In einer Betriebsabteilung arbeiten 3 gleiche Maschinen. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird ermittelt, wie viele dieser Maschinen in Betrieb sind. Von Interesse sind die Ereignisse

$A_i \dots$ „Zum Zeitpunkt t arbeiten genau i Maschinen“, $i = 0, 1, 2, 3$.

Die Ereignisse A_i bilden ein vollständiges System von Ereignissen.

Durch die Gegenüberstellung entsprechender Eigenschaften der Summe und des Produkts von beliebigen Ereignissen A, B, C, \dots und unter Hinzunahme der entgegengesetzten Ereignisse $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ wollen wir uns abschließend nochmals einen Überblick verschaffen:

Summe	Produkt	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(2.1) (2.2)
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(2.3) (2.4)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(2.5) (2.6)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(2.7) (2.8)
$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	(2.9) (2.10)
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$	(2.11) (2.12)
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	(2.13) (2.14)

Außerdem wollen wir einige weitere Beziehungen angeben, die für das Rechnen mit Ereignissen sehr zweckmäßig sind:

1. Sind A_1, A_2, \dots zufällige Ereignisse, dann gelten die **de Morganschen²⁾ Formeln**:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \tag{2.15}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i. \tag{2.16}$$

¹⁾ Der Begriff des vollständigen Systems von Ereignissen ist auf abzählbar unendlich viele Ereignisse übertragbar.

²⁾ Augustus de Morgan (1806–1873), englischer Mathematiker.

2. Für die Ereignisse A, B gilt:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}. \quad (2.17)$$

Veranschaulichen Sie sich diese Formeln!

2.1.4. Das Ereignisfeld

Beim Münzenwurf werden wir uns nicht nur für die im Beispiel 2.2 genannten Ereignisse

$$\begin{aligned} A &\dots \text{ „Zahl liegt oben“}, \\ B &\dots \text{ „Wappen liegt oben“}, \end{aligned}$$

interessieren, sondern auch die Ereignisse

$$\begin{aligned} \Omega &\dots \text{ „Entweder Zahl oder Wappen liegt oben“}, \\ \emptyset &\dots \text{ „Weder Zahl noch Wappen liegt oben“} \end{aligned}$$

hinzufügen. Wenden wir nun auf die Menge dieser vier Ereignisse die im Abschnitt 2.1.3. angegebenen Relationen an, so werden wir erkennen, daß wir dabei immer wieder eines dieser vier Ereignisse erhalten, z. B.

$$A \cup B = \Omega, \quad \Omega \cup A = \Omega, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Diese kurze Betrachtung erlaubt es uns, den Begriff „Ereignisfeld“ einzuführen.

D.2.12 Definition 2.12: Enthält ein System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs alle in Verbindung mit diesem Versuch interessierenden Ereignisse und führt die Anwendung der im Abschnitt 2.1.3. angegebenen Relationen auf diese Ereignisse immer wieder auf ein zufälliges Ereignis dieses Systems, dann wird dieses System **Ereignisfeld** genannt und mit \mathfrak{E} bezeichnet. (Vgl. Abschnitt 2.1.5.)

Das System der beim oben betrachteten Münzenwurf interessierenden Ereignisse (A, B, Ω, \emptyset) bildet offensichtlich ein Ereignisfeld.

Beispiel 2.15: Interessieren wir uns beim Würfeln mit einem Würfel nur für die Ereignisse

$$\begin{aligned} \Omega &\dots \text{ „Würfeln einer geraden Augenzahl“}, \\ A &\dots \text{ „Würfeln einer ungeraden Augenzahl“}, \end{aligned}$$

dann bilden diese beiden Ereignisse unter Hinzunahme des sicheren und des unmöglichen Ereignisses

$$\begin{aligned} \Omega &\dots \text{ „Würfeln einer der 6 möglichen Augenzahlen“}, \\ \emptyset &\dots \text{ „Würfeln keiner der 6 möglichen Augenzahlen“} \end{aligned}$$

ein Ereignisfeld \mathfrak{E} . Überprüfen Sie diese Aussage an Hand der in Abschnitt 2.1.3. angegebenen Relationen.

Im folgenden wollen wir nun wichtige Eigenschaften eines Ereignisfeldes zusammenstellen:

1. Das Ereignisfeld \mathfrak{E} enthält als Element das sichere Ereignis Ω und das unmögliche Ereignis \emptyset : $\Omega \in \mathfrak{E}, \emptyset \in \mathfrak{E}$.

2. Sind die Ereignisse A und B Elemente des Ereignisfeldes \mathfrak{E} , dann sind es auch deren Summe $A \cup B$ und deren Produkt $A \cap B$:

$$A \in \mathfrak{E}, \quad B \in \mathfrak{E} \rightarrow A \cup B \in \mathfrak{E}, \quad A \cap B \in \mathfrak{E}.$$

3. Mit dem Ereignis A ist auch dessen Komplement \bar{A} Element des Ereignisfeldes \mathfrak{E} :

$$A \in \mathfrak{E} \rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{E}.$$

4. Mit den Ereignissen A_i ($i = 1, 2, \dots$) sind auch deren Summe und Produkt Elemente des Ereignisfeldes \mathfrak{E} :

$$A_i \in \mathfrak{E} \quad (i = 1, 2, \dots) \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{E}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{E}.$$

Zur Darstellung der Ereignisse eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} hat sich die Einführung der Begriffe „atomares Ereignis“ und „zusammengesetztes Ereignis“ bewährt.

Definition 2.13: Ein Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ wird als **atomares Ereignis** bezeichnet, wenn kein Ereignis $B \in \mathfrak{E}$ mit den Eigenschaften $B \neq \emptyset$ und $B \neq A$ existiert, so daß das Ereignis B das Ereignis A nach sich zieht. D.2.13

Es ist offensichtlich, daß ein Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ genau dann atomar ist, wenn es sich nicht als Summe von Ereignissen des Ereignisfeldes \mathfrak{E} darstellen läßt, die vom unmöglichen Ereignis \emptyset und vom Ereignis A verschieden sind.

Diese Erläuterung führt uns sofort zum Begriff „zusammengesetztes Ereignis“:

Definition 2.14: Ein Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ wird als **zusammengesetztes Ereignis** bezeichnet, wenn es sich als Summe von atomaren Ereignissen des betrachteten Ereignisfeldes darstellen läßt. D.2.14

Beispiel 2.16: Interessieren wir uns beim Würfeln mit einem Würfel im Gegensatz zum Beispiel 2.15 für alle möglichen Versuchsergebnisse, so sind die Ereignisse

$$A_i \dots \text{„Werfen der Augenzahl } i\text{“} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \\ A_i = \{i\},$$

atomare Ereignisse des in diesem Fall betrachteten Ereignisfeldes. Demgegenüber ist z.B. das Ereignis

$$B \dots \text{„Werfen einer geraden Augenzahl“,} \\ B = \{2, 4, 6\},$$

in diesem Ereignisfeld ein zusammengesetztes Ereignis; denn: $B = A_2 \cup A_4 \cup A_6$. Dagegen ist in dem im Beispiel 2.15 betrachteten Ereignisfeld das Ereignis B ein atomares Ereignis.

2.1.5. Ergänzende Betrachtungen in Verbindung mit dem Begriff des zufälligen Ereignisses

Wie wir oben schon andeuteten, besteht zwischen den Begriffen „zufälliges Ereignis“ und „Menge“ und auch zwischen den entsprechenden Relationen ein enger Zusammenhang.

Wir verwenden den Mengenbegriff als mathematisches Modell zufälliger Ereignisse.

Die zur Charakterisierung des sicheren Ereignisses benutzte Menge bezeichnen wir als Menge aller „Elementareignisse“ des zufälligen Versuchs. Damit deuten wir an, daß in dieser „Grundmenge“ alle denkbaren „Elementarausgänge“ des zufälligen Versuchs zusammengefaßt sind. Jedes zufällige Ereignis wird damit als eine gewisse Untermenge von Ω interpretiert.

Einem Ereignisfeld \mathfrak{E} entspricht dann ein gewisses System von Untermengen, das die Struktur einer sog. σ -Algebra besitzt.

Weitere Ausführungen finden Sie z. B. in [12; 3].

Beispiel 2.17: Beim Würfeln mit einem Würfel ist

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

die Menge der Elementareignisse. Wir betrachten dazu zwei mögliche Systeme von Untermengen, die die Eigenschaften einer σ -Algebra besitzen:

1. Das System von Untermengen von Ω

$$\{\emptyset, A, B, \Omega\} \quad \text{mit} \quad B = \{2, 4, 6\} \quad \text{und} \\ A = \{1, 3, 5\}$$

entspricht als σ -Algebra einem Ereignisfeld, wobei A und B atomare Ereignisse dieses Ereignisfeldes sind.

2. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ der Menge der Elementarereignisse entspricht als σ -Algebra einem Ereignisfeld, wobei hier die sechs einelementigen Untermengen $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$ atomare Ereignisse sind.

Überprüfen Sie, daß $\mathfrak{P}(\Omega) 2^6$ Ereignisse enthält!

2.1.6. Beispiele und Aufgaben

Wenn wir uns entschieden haben, ein praktisches Problem mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bearbeiten, kommt es darauf an, nach der Festlegung des entsprechenden zufälligen Versuchs die notwendigen zufälligen Ereignisse zu definieren und anschließend unter Verwendung der in Abschnitt 2.1.3. angegebenen Relationen die erforderlichen Verknüpfungen der Ereignisse durchzuführen. An zwei Beispielen wollen wir das Vorgehen zeigen.

Beispiel 2.18: Die störungsfreie Arbeit eines Systems S während der Zeit t wird wesentlich beeinflußt durch die störungsfreie Arbeit der Komponenten i ($i = 1, 2, \dots, n$), aus denen das System zusammengesetzt ist, während der Zeit t . Diese sollen unabhängig voneinander arbeiten. Die störungsfreie Arbeit des Systems ist durch die der Komponenten auszudrücken, und zwar dafür, daß

- a) der Ausfall einer Komponente den Ausfall des Systems nach sich zieht,
- b) erst der Ausfall aller Komponenten den Ausfall des Systems nach sich zieht.

Die Lösung dieser Aufgabe werden wir in 2 Schritten vornehmen. Während wir beim 1. Schritt die interessierenden Ereignisse erfassen, werden wir beim 2. Schritt – er ist für die Teilaufgaben getrennt durchzuführen – die Ereignisse entsprechend der Aufgabenstellung verknüpfen.

1. Schritt:

A ... „Das System arbeitet während der Zeit t “,

A_i ... „Die i -te Komponente arbeitet während der Zeit t “ ($i = 1, 2, \dots, n$).

2. Schritt: Den Tatbestand erfassen wir bei der Teilaufgabe a) bzw. Teilaufgabe b) symbolisch durch eine Reihenschaltung (Bild 2.7) bzw. Parallelschaltung (Bild 2.8) der n Komponenten und erhalten dann bei

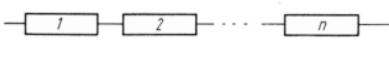


Bild 2.7. Reihenschaltung von Komponenten

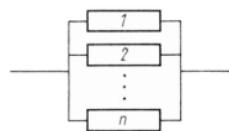


Bild 2.8. Parallelschaltung von Komponenten

- Teilaufgabe a)

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

und mit Hilfe von (2.15)

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i;$$

- Teilaufgabe b)

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

und mit Hilfe von (2.16)

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

Drücken Sie das Ergebnis in Worten aus!

Beispiel 2.19: In einem Kraftwerk wird die Havarie einer Anlage von drei unabhängig voneinander arbeitenden Kontrollsignalen angezeigt. Diese unterliegen einer gewissen Störanfälligkeit. Es sollen Aussagen über die Sicherheit des Signalsystems in einer bestimmten Zeit t gemacht werden.

Lösung: 1. Schritt: Folgende Ereignisse sind von Interesse:

- S_i ... „Das i -te Signal funktioniert“ ($i = 1, 2, 3$);
- A ... „Alle 3 Signale funktionieren“;
- B ... „Kein Signal funktioniert“;
- C ... „Mindestens ein Signal funktioniert“;
- D ... „Genau ein Signal funktioniert“.

Die Angaben beziehen sich dabei auf die o. g. Zeit.

2. Schritt: Die Ereignisse A, B, C, D werden durch die Verknüpfung der Ereignisse S_1, S_2, S_3 ausgedrückt:

$$\begin{aligned} A &= S_1 \cap S_2 \cap S_3, \\ B &= \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3, \\ C &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \quad \text{oder auch} \\ C &= \bar{B} = \overline{\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \quad (\text{nach 2.15}), \\ D &= (S_1 \cap \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3) \cup (\bar{S}_1 \cap S_2 \cap \bar{S}_3) \cup (\bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap S_3). \end{aligned}$$

Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben:

Aufgabe 2.1: Auf 20 Kärtchen steht jeweils eine der Zahlen 1 bis 20. Nach der sorgfältigen * Mischung dieser Karten wird eine willkürlich gewählt. Wir betrachten folgende zufälligen Ereignisse:

- A ... „Die gezogene Zahl ist höchstens gleich 12“;
- B ... „Die gezogene Zahl ist mindestens gleich 8“;
- C ... „Die gezogene Zahl ist gerade“;
- D ... „Die gezogene Zahl ist ein Vielfaches von 3“.

a) Beschreiben Sie die Ereignisse $A \cap C, B \cap C \cap D, B \cup D, (A \cup B) \cap D, \bar{B} \cap C$ und $(\bar{A} \cup B) \cap C \cap \bar{D}$ mit Worten!

b) Drücken Sie die folgenden zufälligen Ereignisse durch die Ereignisse A, B, C, D (und ihre Komplemente) aus:

$F \dots$ „Die gezogene Zahl ist eine aus der Menge $\{1, 3, 5, 7\}$ “;

$G \dots$ „Die gezogene Zahl ist gerade und größer als 12“;

$H \dots$ „Die gezogene Zahl ist gerade und kleiner als 8, oder sie ist ungerade und größer als 12“.

* Aufgabe 2.2: Zeigen Sie, daß die zufälligen Ereignisse $A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cap \bar{B}$ und $\bar{A} \cup \bar{B}$ ein vollständiges System von Ereignissen bilden!

* Aufgabe 2.3: Eine Anlage besteht aus 4 Kesseln, 2 Turbinen und einem Generator. Ist der Generator arbeitsfähig, dann liegt das Ereignis A vor. B_k ($k = 1, \dots, 4$) bzw. C_i ($i = 1, 2$) seien die Ereignisse, daß der k -te Kessel bzw. die i -te Turbine arbeitsfähig sind. Die Arbeitsfähigkeit der Anlage (Ereignis D) ist gewährleistet, wenn der Generator, mindestens ein Kessel und mindestens eine Turbine arbeitsfähig sind. Drücken Sie die Ereignisse D und \bar{D} durch die Ereignisse A, B_k und C_i aus!

2.2. Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Bei der Untersuchung von Massenerscheinungen mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es nicht ausreichend, wenn wir die im Ergebnis eines Versuches auftretenden interessierenden Ereignisse angeben. Wir werden die Zufälligkeit ihres Auftretens außerdem noch in irgendeiner Art quantifizieren müssen, um Aussagen über Gesetzmäßigkeiten der betrachteten Massenerscheinung machen zu können. Intuitiv wird sich dazu die *absolute* oder die *relative Häufigkeit* des Auftretens der interessierenden Ereignisse anbieten. Da sie aber immer auf der Basis einer endlichen Anzahl von Versuchen ermittelt werden und außerdem mit deren Anzahl stark schwanken, sind sie kein „idealer“ Quantifizierungsmaßstab. Wir werden zu einem allgemeineren Begriff der Quantifizierung kommen, dem der *Wahrscheinlichkeit* eines zufälligen Ereignisses. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sind Abstraktionen vom Begriff der relativen Häufigkeit, den wir deshalb an die Spitze unserer Betrachtungen stellen.

2.2.1. Relative Häufigkeit

Wir wollen ein Ereignis A eines Ereignisfeldes \mathfrak{C} betrachten und den Grad der Bestimmtheit seines Eintretens quantifizieren. Dazu werden wir den entsprechenden Versuch mehrmals wiederholen und feststellen, wie häufig das Ereignis A dabei eingetreten ist.

D.2.15 Definition 2.15: Ist bei n unabhängigen Wiederholungen eines zufälligen Versuchs ein Ereignis A eines Ereignisfeldes \mathfrak{C} $h_n(A)$ -mal eingetreten, dann wird $h_n(A)$ als **absolute Häufigkeit des Ereignisses A** und der Quotient $H_n(A) = \frac{h_n(A)}{n}$ als **relative Häufigkeit des Ereignisses A** in n Versuchen bezeichnet.

Anmerkung: Zufällige Versuche, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, werden als *unabhängig* bezeichnet.

Beispiel 2.20: Beim Schießen auf eine Scheibe beobachten wir das Ereignis $A \dots$ „Treffen der Scheibe“. Werden 35 Schüsse auf das Ziel abgegeben ($n = 35$) und dabei 21 Treffer erzielt ($h_n(A) = 21$), dann beträgt die relative Häufigkeit für das Ereignis A

$$H_n(A) = \frac{21}{35} = 0,6.$$

Es ist offensichtlich, daß bei n Wiederholungen eines Versuches die relative Häufigkeit eines Ereignisses A die Werte $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ annehmen kann. Welcher Wert sich in einer konkreten Versuchsreihe ergibt, kann aus den in Abschnitt 2.1.2. angegebenen Gründen nicht mit Bestimmtheit vorausgesagt werden. Er ist vom Zufall abhängig und schwankt dementsprechend, wenn mehrere Versuchsreihen zu je n Versuchen durchgeführt werden.

Nun wollen wir uns den Eigenschaften der relativen Häufigkeit, ihrer Stabilität und der bedingten relativen Häufigkeit zuwenden.

Eigenschaften der relativen Häufigkeit

1. Wir sehen sofort, daß für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$0 \leq H_n(A) \leq 1. \quad (2.18)$$

Dabei wird $H_n(A) = 0$ sein, wenn $A = \emptyset$, also bei diesen n Versuchen nicht eintreten kann. Andererseits ist $H_n(A) = 1$, wenn $A = \Omega$, also bei diesen n Versuchen stets eintritt. Wir können als 2. Eigenschaft angeben:

2. $H_n(\Omega) = 1. \quad (2.19)$

3. Wir betrachten die Ereignisse $A, B \in \mathfrak{C}$, für die $A \cap B = \emptyset$ gilt, d. h., sie sind unvereinbar. Ist nun bei n Versuchen das Ereignis $A k_1$ -mal und das Ereignis $B k_2$ -mal eingetreten, so ergibt sich:

$$H_n(A) = \frac{k_1}{n}, \quad H_n(B) = \frac{k_2}{n}, \quad H_n(A \cup B) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n},$$

folglich als 3. Eigenschaft:

$$H_n(A \cup B) = H_n(A) + H_n(B). \quad (2.20)$$

Folgerungen: 1. Für die relative Häufigkeit $H_n(\bar{A})$ des zu dem Ereignis $A \in \mathfrak{C}$ entgegengesetzten Ereignisses $\bar{A} \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$H_n(\bar{A}) = 1 - H_n(A); \quad (2.21)$$

denn aus (2.19), (2.20), (2.9) und (2.10) ergibt sich

$$1 = H_n(\Omega) = H_n(A \cup \bar{A}) = H_n(A) + H_n(\bar{A})$$

und damit

$$H_n(\bar{A}) = 1 - H_n(A).$$

2. Für die relative Häufigkeit $H_n(A \cup B)$ mit $A, B \in \mathfrak{C}$ gilt:

$$H_n(A \cup B) = H_n(A) + H_n(B) - H_n(A \cap B). \quad (2.22)$$

Versuchen Sie selbst, unter Anwendung der Beziehungen $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ diese Aussage zu beweisen!

Anmerkungen: 1. Aus $H_n(A) = 1$ bzw. $H_n(A) = 0$ darf niemals geschlossen werden, daß A sicheres bzw. unmögliches Ereignis ist; denn wir müssen immer bedenken, daß $H_n(A)$ auf der Basis von n Versuchen berechnet wurde. Bei einer $(n+1)$ -ten Wiederholung des Ver-

suches besteht die Möglichkeit, daß in dessen Ergebnis das Ereignis A nicht eintritt bzw. eintritt.

2. Mit Hilfe der relativen Häufigkeit wird jedem Ereignis $A \in \mathfrak{C}$ eine Zahl $H_n(A)$ zugeordnet. Wir können also sagen, daß mit der Zuordnung $A \rightarrow H_n(A)$ auf \mathfrak{C} eine Funktion definiert wird, die die genannten Eigenschaften besitzt.

Stabilität der relativen Häufigkeit

Wie wir schon oben andeuteten, ist $H_n(A)$ eine Größe, die vom Zufall abhängt. Ist die Anzahl n der Wiederholungen eines Versuchs klein, dann kann sich $H_n(A)$ von Versuchsreihe zu Versuchsreihe stark ändern. Es zeigt sich aber, daß $H_n(A)$ für hinreichend großes n „in der Nähe“ einer für das Ereignis A konstanten Zahl zwischen 0 und 1 bleibt, d. h., daß $H_n(A)$ für das Ereignis A eine gewisse Stabilität aufweist (Bild 2.9). Wir können also

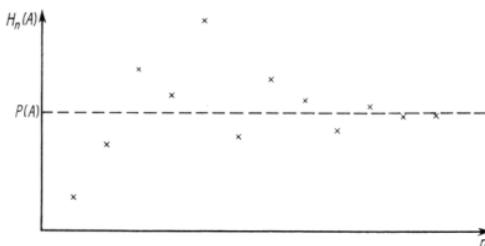


Bild 2.9. Zur Stabilität der relativen Häufigkeit

vermuten, daß es für das Ereignis A tatsächlich eine Konstante gibt, die unabhängig von der Versuchsreihe eine Quantifizierung seiner „Zufälligkeit“ gestattet. Wir werden diese später als die *Wahrscheinlichkeit* $P(A)$ des Ereignisses A erklären. Die relative Häufigkeit $H_n(A)$ können wir als Näherungswert der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A auffassen, der um so besser ist, je häufiger der Versuch wiederholt wird. Die folgende Tabelle [4], die Ergebnisse von Münzwürfen enthält, verschafft uns eine Vorstellung von der Stabilität der relativen Häufigkeit.

	Anzahl der Würfe	Anzahl des Auftretens des Ereignisses „Wappen“	relative Häufigkeit
Buffon ¹⁾	4 040	2 048	0,506 9
K. Pearson ²⁾	12 000	6 019	0,501 6
K. Pearson	24 000	12 012	0,500 5

Bedingte relative Häufigkeit

In diesem Zusammenhang wollen wir noch kurz auf den Begriff „bedingte relative Häufigkeit“ eingehen.

¹⁾ Compte de Buffon (1707–1788), französischer Mathematiker.

²⁾ Karl Pearson (1857–1936), englischer Mathematiker.

Zu seiner Erläuterung gehen wir von der in Beispiel 2.1 (in 2.1.2.) geschilderten Situation aus und interessieren uns für die relative Häufigkeit des Ereignisses A_2 unter der Bedingung, daß das Ereignis B eingetreten ist. Dazu führen wir n Wiederholungen des Würfelsperiments durch und nehmen an, daß in der Versuchsserie $(k_1 + k_2)$ -mal das Ereignis B und k_2 -mal die Ereignisse A_2 und B gleichzeitig beobachtet wurden. Für die relative Häufigkeit des Ereignisses A_2 unter der Bedingung B – Schreibweise: $H_n(A_2 / B)$ – ergibt sich dann:

$$H_n(A_2 / B) = \frac{k_2}{k_1 + k_2};$$

denn es spielen ja nur die Ergebnisse eine Rolle, bei denen das Ereignis B eingetreten ist.

Durch Erweiterung erhalten wir:

$$H_n(A_2 / B) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} = \frac{\frac{k_2}{n}}{\frac{k_1 + k_2}{n}} = \frac{H_n(A_2 \cap B)}{H_n(B)}. \quad (2.23)$$

$H_n(A_2 / B)$ wird *bedingte relative Häufigkeit* genannt. Sie errechnet sich als Quotient aus den relativen Häufigkeiten $H_n(A_2 \cap B)$ und $H_n(B)$, wobei $H_n(B) > 0$ vorausgesetzt wird. Sie besitzt dieselben Eigenschaften wie die relative Häufigkeit des Ereignisses A_2 , $H_n(A_2)$, die auch als *unbedingte relative Häufigkeit* bezeichnet wird. Versuchen Sie, diese Eigenschaften nachzuweisen!

2.2.2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Im vorangegangenen Abschnitt wiesen wir in Verbindung mit der Stabilität der relativen Häufigkeit darauf hin, daß einem Ereignis A eine Konstante zugeordnet werden kann, die wir später als Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A bezeichnen werden. In diesem Abschnitt wollen wir nun diesen Begriff der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses näher charakterisieren. Dabei werden uns die bei der Erklärung des Begriffs der relativen Häufigkeit eines Ereignisses gewonnenen Erkenntnisse wertvoll sein.

2.2.2.1. Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Beim axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehen wir von einem Ereignisfeld \mathfrak{E} aus und definieren eine Funktion P , die jedem Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet. Wir bezeichnen $P(A)$ als die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A*. Sie wird im einzelnen durch die folgenden Axiome charakterisiert:

Axiom 1: Für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ gilt:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (2.24)$$

Der Definitionsbereich der Funktion P ist also das Ereignisfeld \mathfrak{E} , während der Wertebereich das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ oder eine Teilmenge dieses Intervalls reeller Zahlen ist.

Axiom 2: Es gilt:

$$P(\Omega) = 1. \quad (2.25)$$

Axiom 3: Schließen die Ereignisse $A \in \mathfrak{E}$ und $B \in \mathfrak{E}$ einander aus ($A \cap B = \emptyset$), dann gilt: A.3

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (2.26)$$

Mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion lässt sich die Aussage des Axioms 3 auf endlich viele Ereignisse $A_i \in \mathfrak{E}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die paarweise einander ausschließen, übertragen. Das ist aber nicht für abzählbar unendlich viele Ereignisse möglich. Deshalb ist es sinnvoll, dies in einem vierten Axiom zu tun.

- A.4 Axiom 4:** Schließen die Ereignisse $A_i \in \mathfrak{E}$ ($i = 1, 2, \dots$) paarweise einander aus ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$), dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (2.27)$$

Während die Axiome 1–3 direkte Abstraktionen der Eigenschaften der relativen Häufigkeit von Ereignissen darstellen, ist das Axiom 4 eine sinnvolle Ergänzung; denn auf Grund der Erklärung des Ereignisfeldes \mathfrak{E} ist mit den Ereignissen $A_i \in \mathfrak{E}$ ($i = 1, 2, \dots$)

auch das Ereignis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Element des Ereignisfeldes \mathfrak{E} . Dementsprechend ist für dieses Ereignis nach Axiom 1 eine Wahrscheinlichkeit erklärt, deren Berechnung durch Axiom 4 festgelegt ist.

Warum treten dabei keine Konvergenzprobleme auf?

Betrachten wir nun einige Folgerungen aus obigen Axiomen. Wir wollen sie als Sätze formulieren und auch die Beweise angeben, da sie geeignet sind, das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten zu üben.

S.2.1 Satz 2.1: Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist null:

$$P(\emptyset) = 0. \quad (2.28)$$

Beweis: Da $\emptyset \in \mathfrak{E}$, existiert $P(\emptyset)$. Mit $A \neq \emptyset$ und $A \in \mathfrak{E}$ ist auch $A \cup \emptyset = A \in \mathfrak{E}$. Wegen $A \cap \emptyset = \emptyset$ gilt dann nach Axiom 3: $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) = P(A)$. Daraus folgt $P(\emptyset) = 0$. ■

S.2.2 Satz 2.2: Mit $A \in \mathfrak{E}$ ist auch $\bar{A} \in \mathfrak{E}$, und es gilt:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.29)$$

Beweis: Auf Grund der Eigenschaften von \mathfrak{E} ist mit $A \in \mathfrak{E}$ auch $\bar{A} \in \mathfrak{E}$. Demzufolge existiert nach Axiom 1 $P(\bar{A})$. Wegen $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ ergibt sich aus den Axiomen 2 und 3:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

und damit

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \blacksquare$$

S.2.3 Satz 2.3: Für beliebige Ereignisse $A \in \mathfrak{E}$ und $B \in \mathfrak{E}$ gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (2.30)$$

Versuchen Sie selbst, unter Verwendung der im Abschnitt 2.2.1. gegebenen Hilfsmittel diesen Satz zu beweisen! Falls die Ereignisse A und B unvereinbar sind, ist (2.30) identisch mit Axiom 3.

S.2.4 Satz 2.4: Bilden die Ereignisse $A_i \in \mathfrak{E}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ein vollständiges System von Ereignissen, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (2.31)$$

Beweis: Für die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad \text{mit} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Demzufolge ergibt sich mit Axiom 2:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(\Omega) = 1,$$

und weiterhin mit Axiom 3:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

und damit die Aussage. ■

Satz 2.5: Zieht das Ereignis $A \in \mathfrak{E}$ das Ereignis $B \in \mathfrak{E}$ nach sich, dann gilt:

S.2.5

$$P(A) \leq P(B). \quad (2.32)$$

Beweis: Wird das Ereignis B als Summe zweier unvereinbarer Ereignisse dargestellt:

$$B = A \cup (B \setminus A),$$

wobei mit $A \in \mathfrak{E}$ und $B \in \mathfrak{E}$ auch $(B \setminus A) \in \mathfrak{E}$ ist, dann folgt aus Axiom 3:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Da nach Axiom 1 $P(B \setminus A) \geq 0$ ist, folgt die Aussage des Satzes. ■

Dem Leser wird geraten, sich schon an dieser Stelle mit den ersten Beispielen in Abschnitt 2.2.4. zu beschäftigen.

2.2.2.2. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff werden wir dann zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten heranziehen, wenn ein Versuch nur endlich viele gleichmögliche atomare Ereignisse hat. Das ist z.B. beim Würfeln mit einem idealen Würfel – ein Würfel homogen im Material mit gleichen Kantenlängen – der Fall. Wir wollen den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff – eine Folgerung aus dem axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung – etwas ausführlicher darstellen.

Als Ausgangspunkt zu seiner Erklärung dient uns das Laplacesche Ereignisfeld.

Definition 2.16: Erfüllt ein Ereignisfeld \mathfrak{E} folgende zusätzliche Forderungen:

D.2.16

1. Das Ereignisfeld \mathfrak{E} ist endlich, d.h., seine Grundlage bilden endlich viele atomare Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
2. das Auftreten der atomaren Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ist gleichmöglich, dann wird es als Laplacesches¹⁾ Ereignisfeld bezeichnet.

Jedes Ereignis A ($A \neq \emptyset$) des Laplaceschen Ereignisfeldes können wir also als Summe der atomaren Ereignisse darstellen, die das Ereignis A nach sich ziehen.

Erfolgt z.B. im Beispiel 2.16 das Würfeln mit einem idealen Würfel, dann sind die Ereignisse A_i atomare Ereignisse, und es gilt:

$$B = A_2 \cup A_4 \cup A_6.$$

¹⁾ Pierre Simon Laplace (1749–1827), französischer Mathematiker.

Um nach der Charakterisierung des Laplaceschen Ereignisfeldes den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff erklären zu können, suchen wir zuerst auf der Grundlage des axiomatischen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit eines atomaren Ereignisses, die ja für alle atomaren Ereignisse gleich ist. Wir wollen sie mit p bezeichnen, also

$$P(A_i) = p \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Aus den Axiomen 2 und 3 ergibt sich (Warum?)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Mit $P(A_i) = p$ ($i = 1, 2, \dots, n$) erhalten wir $np = 1$ und daraus

$$p = \frac{1}{n}.$$

Wir können sagen: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines jeden atomaren Ereignisses A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ist gleich dem Kehrwert der Anzahl der atomaren Ereignisse:

$$P(A_i) = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33)$$

Betrachten wir nun ein beliebiges Ereignis A des Laplaceschen Ereignisfeldes \mathfrak{E} , dann läßt es sich in folgender Art darstellen:

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i, \quad (2.34)$$

wobei über alle atomaren Ereignisse A_i ($i = 1, \dots, k$) summiert wird, die das Ereignis A nach sich ziehen. Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A nach Axiom 3:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = \frac{k}{n}. \quad (2.35)$$

Wir sind nun in der Lage, die **klassische Definition der Wahrscheinlichkeit** anzugeben:

D.2.17 Definition 2.17: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses $A \in \mathfrak{E}$, wobei \mathfrak{E} ein Laplacesches Ereignisfeld ist, errechnet sich zu

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahl der atomaren Ereignisse } A_i \in \mathfrak{E}, \text{ für die } A_i \subseteq A}{\text{Anzahl der atomaren Ereignisse } A_i \in \mathfrak{E}}.$$

In der Literatur werden die atomaren Ereignisse $A_i \in \mathfrak{E}$ auch als *mögliche* und diejenigen, die das Ereignis A nach sich ziehen, als *günstige* Ereignisse bezeichnet, so daß die obige Definition häufig auch wie folgt gegeben wird:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahl der für das Eintreten von } A \text{ günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}.$$

Beispiel 2.21: Ein Fernsprechteilnehmer will eine Telefonnummer wählen. Er vergaß jedoch die letzte Ziffer und wählte sie „auf gut Glück“ aus. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er die richtige Nummer gewählt hat.

Lösung: A sei das zufällige Ereignis, daß die richtige Ziffer gewählt wurde. Der Teilneh-

mer kann beliebig aus 10 Ziffern auswählen; daher ist die Anzahl der atomaren Ereignisse gleich 10. Diese Ereignisse sind gleichmöglich. Für das Eintreten des Ereignisses A erweist sich eines dieser Ereignisse als günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit gleich $P(A) = 1/10$.

Die Berechnung der Anzahl der günstigen und die der möglichen Ereignisse erfolgt häufig mit Methoden der Kombinatorik (vgl. Bd. 1 dieser Reihe).

Die Maxwell-Boltzmann-, die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Statistik sind physikalische Beispiele für die Anwendung der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit. Da auf sie hier nicht näher eingegangen werden kann, sei z. B. auf [4] verwiesen.

Wir hatten gesehen, daß die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit dann anwendbar ist, wenn der Versuch endlich viele atomare Ereignisse hat. Nicht selten tritt aber der Fall auf, daß im Ergebnis eines Versuchs unendlich viele gleichmögliche Ergebnisse eintreten können. In diesem Fall kann in gleicher Weise wie beim Laplaceschen Ereignisfeld ein Wahrscheinlichkeitsbegriff, der Begriff der *geometrischen Wahrscheinlichkeit*, aufgebaut werden:

Beispiel 2.22: Bei dem Kinderspiel „Schweinestechen“ wird zuerst ein Schwein S (Flächeninhalt F_S) aufgezeichnet. Dann versucht ein Kind, dessen Augen verbunden wurden, mit einem Bleistift einen Körperteil des Schweines, z. B. das Ohr s , zu treffen. Wir nehmen an, daß das Schwein in jedem Fall getroffen wird, und zwar jedes Teilstück gleichen Flächeninhalts mit derselben Wahrscheinlichkeit, d. h., das Treffen jedes Punktes von S ist gleichmöglich. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Ohr des Schweines (Flächeninhalt F_s) getroffen wird. Wenn wir das Ereignis „Treffen des Ohres“ mit A bezeichnen, dann liegt es nahe, seine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ mit Hilfe des Quotienten aus F_s und F_S zu erklären. Damit können wir – entsprechend der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit – die Definition der geometrischen Wahrscheinlichkeit angeben.

Definition 2.18: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, daß ein zufällig aus einem Gebiet S (Flächeninhalt F_S) ausgewählter Punkt in einem Gebiet $s \subseteq S$ (Flächeninhalt F_s) liegt (Ereignis A), ist gegeben durch D.2.18

$$P(A) = \frac{F_s}{F_S}. \quad (2.36)$$

Sie wird **geometrische Wahrscheinlichkeit** genannt.

2.2.2.3. Ergänzende Betrachtungen in Verbindung mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses

Im Abschnitt 2.1.5. gingen wir von der Menge der Elementarereignisse Ω aus und erklärten Untermengen als zufällige Ereignisse. Wir bezeichneten weiter jedes System \mathfrak{C} von Untermengen von Ω , das die Eigenschaften des Ereignisfeldes besitzt, als σ -Algebra. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses $A \in \mathfrak{C}$ wird durch eine Mengenfunktion P auf \mathfrak{C} erklärt. Sie hat folgende Eigenschaften, wobei A, B, A_i ($i = 1, 2, \dots$) $\in \mathfrak{C}$ gilt:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset$;
4. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots$

Im Sinne der Maßtheorie (vgl. Band 2) werden das Tupel $[\Omega, \mathfrak{C}]$ als *meßbarer Raum*, die Mengenfunktion P als *Wahrscheinlichkeitsmaß* und das Tupel $[\Omega, \mathfrak{C}, P]$ als *Wahrscheinlichkeitsraum* bezeichnet.

Damit kann das Axiomensystem von A. N. Kolmogorow, das die Grundlage des axiomatischen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet, wie folgt angegeben werden:

1. Die Elemente einer gegebenen Menge Ω werden als mögliche „Elementarausgänge“ eines zufälligen Versuchs aufgefaßt. Jedes Element wird als Elementarereignis und Ω als Menge der Elementarereignisse bezeichnet.

2. Die Elemente eines Systems von Untermengen \mathfrak{C} von Ω , das die Struktur einer σ -Algebra besitzt, werden als zufällige Ereignisse bezeichnet.

3. Für jedes Element $A \in \mathfrak{C}$ ist durch ein auf \mathfrak{C} gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß seine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ gegeben.

Dem Leser, der sich eingehender mit diesen Fragen beschäftigen will, seien u.a. [3; 12] empfohlen.

2.2.3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten, unabhängige Ereignisse

2.2.3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die in (2.23) angegebene Beziehung wollen wir in folgender Art für Wahrscheinlichkeiten übertragen:

D.2.19 Definition 2.19: Gegeben seien die Ereignisse $A, B \in \mathfrak{C}$, und es gelte $P(A) > 0$. Dann wird

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2.37)$$

als die **bedingte Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses B unter der Bedingung des Ereignisses A bezeichnet.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B/A)$ wird also als Quotient zweier bekannter Wahrscheinlichkeiten definiert.

Anmerkung 1: Im allgemeinen sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A)$ und $P(A/B)$ voneinander verschieden. Auf Grund der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$P(B/A) P(A) = P(A/B) P(B). \quad (2.38)$$

Anmerkung 2: Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B/A)$ für festes $A \in \mathfrak{C}$ und beliebiges $B \in \mathfrak{C}$ gelten dieselben Rechenregeln wie für die unbedingte Wahrscheinlichkeit $P(B)$. Versuchen Sie selbst, diese Eigenschaften nachzuweisen!

Beispiel 2.23: In einer Urne befinden sich 4 weiße und 4 rote Kugeln. Aus der Urne wird zweimal „auf gut Glück“ je eine Kugel entnommen, die nicht wieder zurückgelegt wird. Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer weißen Kugel beim 2. Versuch (Ereignis B), wenn beim 1. Versuch eine rote Kugel gezogen wurde (Ereignis A). Wir haben also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B/A)$ zu bestimmen. Sie ergibt sich mit (2.35) zu $P(B/A) = 4/7$.

Im folgenden wollen wir nun auf die Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten, auf die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit und auf die Bayessche Formel eingehen.

Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten

Die Formel (2.37) gibt uns die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ des Ereignisses $A \cap B$ zu berechnen.

Durch Auflösen erhalten wir:

$$P(A \cap B) = P(B/A) P(A). \quad (2.39)$$

In Definition 2.19 war $P(A) > 0$ vorausgesetzt worden. Nehmen wir $P(A) = 0$ an, so ergibt sich wegen $A \cap B \subseteq A$ und der daraus resultierenden Relation $P(A \cap B) \leq P(A)$ die Aus-

sage: $P(A \cap B) = 0$. Für diesen speziellen Fall ist das Aufstellen einer gesonderten Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeiten $P(A \cap B)$ demzufolge nicht erforderlich.

Auf Grund der Vertauschbarkeit der Ereignisse A und B können wir zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auch folgende Formel angeben:

$$P(A \cap B) = P(A / B) P(B). \quad (2.40)$$

(2.39) bzw. (2.40) wollen wir als **Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten** bezeichnen.

Für die in Beispiel 2.23 erklärten Ereignisse A und B ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ ihres gleichzeitigen Eintretens nach (2.38):

$$P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}.$$

Die Multiplikationsregel für zwei Ereignisse gibt uns die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit des Produktes von mehr als zwei Ereignissen zu berechnen. Wir wollen uns auf den Fall von drei Ereignissen A, B, C eines Ereignisfeldes \mathcal{E} beschränken, wobei wir immer voraussetzen wollen, daß auftretende bedingte Wahrscheinlichkeiten erklärt sind:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A / B \cap C) P(B \cap C) \\ &= P(A / B \cap C) P(B / C) P(C). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Versuchen Sie, diese Multiplikationsregel auf das Produkt von n zufälligen Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n eines Ereignisfeldes \mathcal{E} zu übertragen und anschließend mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion zu beweisen.

Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit wollen wir an folgendem Beispiel kennenlernen:

Beispiel 2.24: In einem Betrieb wird ein bestimmtes Erzeugnis auf vier Maschinen hergestellt. Die Tabelle gibt den Anteil jeder Maschine an der Gesamtproduktion und den dabei auftretenden Ausschußanteil an. Das Fertigprodukt der vier Maschinen wird in einem Lager erfaßt, in dem eine Unterscheidung der Erzeugnisse hinsichtlich ihrer Fertigung auf den einzelnen Maschinen nicht möglich ist. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß ein dem Lager entnommenes Erzeugnis nicht den Qualitätsanforderungen entspricht.

Maschine	Anteil (%)	Ausschuß (%)
1	40	1
2	30	2
3	20	4
4	10	5

Zur Beantwortung dieser Fragestellung führen wir folgende Ereignisse ein:

- $A_i \dots$ „Das Erzeugnis wurde auf Maschine i ($i = 1, 2, 3, 4$) gefertigt“;
- $B \dots$ „Das dem Lager entnommene Erzeugnis entspricht nicht den Qualitätsanforderungen“.

Die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) bilden ein vollständiges System von Ereignissen, d. h.,

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = \Omega \quad \text{und} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Es gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4). \end{aligned}$$

Diese Beziehung wird in Bild 2.10 veranschaulicht.

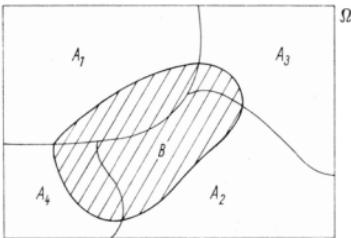


Bild 2.10. Veranschaulichung
von $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

Da die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) paarweise einander ausschließen, gilt dasselbe auch für die Ereignisse $B \cap A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ des gesuchten Ereignisses B :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^4 (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^4 P(B \cap A_i).$$

Mit (2.39) formen wir um:

$$P(B) = \sum_{i=1}^4 P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^4 P(B/A_i) P(A_i).$$

Nun können wir die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ aus den Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ und $P(B/A_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), die sich aus der Aufgabenstellung ergeben, berechnen:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0,4; & P(B/A_1) &= 0,01; & P(A_3) &= 0,2; & P(B/A_3) &= 0,04; \\ P(A_2) &= 0,3; & P(B/A_2) &= 0,02; & P(A_4) &= 0,1; & P(B/A_4) &= 0,05; \\ P(B) &= 0,01 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,04 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,1 = 0,023. \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel lernten wir einen typischen Fall für die Anwendung der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit kennen, die wir nun allgemein formulieren wollen:

Bilden die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} ein vollständiges System von Ereignissen und gilt $P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dann ergibt sich für ein Ereignis B desselben Ereignisfeldes \mathfrak{E} die (totale bzw. unbedingte) Wahrscheinlichkeit $P(B)$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) zu:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i) \tag{2.42}$$

(Formel für die totale Wahrscheinlichkeit).

Der Beweis dieser Formel erfolgt in gleicher Weise wie im Beispiel 2.24. Versuchen Sie, diesen Beweis zu führen!

Die Bayessche Formel

Auch die Bayessche Formel wollen wir an einem Beispiel kennenlernen.

Beispiel 2.25: Als Ausgangspunkt nehmen wir die in Beispiel 2.24 geschilderte Situation. Wir wollen jedoch jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür ermitteln, daß ein dem Lager entnommenes und nicht den Qualitätsanforderungen entsprechendes Erzeugnis auf der i -ten Maschine ($i = 1, 2, 3, 4$) gefertigt wurde, d. h., wir suchen die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i/B)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Dazu gehen wir von der Relation (2.38)

$$P(B/A_i) P(A_i) = P(A_i/B) P(B), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

aus und lösen diese nach der gesuchten Wahrscheinlichkeit $P(A_i/B)$ auf:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) P(A_i)}{P(B)}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Setzen wir für $P(B)$ nun (2.42) ein, so erhalten wir:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) P(A_i)}{\sum_{k=1}^4 P(B/A_k) P(A_k)}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Mit den Werten aus Beispiel 2.24 berechnen wir schließlich:

$$P(A_1/B) = \frac{0,01 \cdot 0,4}{0,023} = 0,174,$$

$$P(A_2/B) = \frac{0,02 \cdot 0,3}{0,023} = 0,261,$$

$$P(A_3/B) = \frac{0,04 \cdot 0,2}{0,023} = 0,348,$$

$$P(A_4/B) = \frac{0,05 \cdot 0,1}{0,023} = 0,217.$$

Mit Hilfe dieses Beispiels wird der Leser das Wesen der folgenden Bayesschen Formel verstehen:

Bilden die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) eines Ereignisfeldes \mathfrak{G} ein vollständiges System von Ereignissen, gilt $P(A_i) > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und ist das Ereignis B ein weiteres Element des Ereignisfeldes \mathfrak{G} , dann errechnen sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_i/B)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nach der **Bayesschen¹⁾ Formel:**

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B/A_k) P(A_k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.43)$$

Der Beweis dieser Formel wird entsprechend dem Vorgehen im Beispiel 2.24 geführt. Versuchen Sie, diesen Beweis zu erbringen!

Im Zusammenhang mit der Bayesschen Formel werden die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) auch als *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* und die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i/B)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) als *a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet.

¹⁾ Thomas Bayes (1702–1763), englischer Mathematiker.

2.2.3.2. Unabhängige Ereignisse

Im allgemeinen unterscheiden sich die unbedingte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A und die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ desselben Ereignisses A unter der Bedingung eines Ereignisses B . Wir wollen nun den Fall betrachten, daß beide Wahrscheinlichkeiten gleich sind und keines der beiden Ereignisse das unmögliche Ereignis ist, d. h. $P(A|B) = P(A)$. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A ändert sich also nicht unter der Bedingung des Ereignisses B . Mit anderen Worten: Das Eintreten des Ereignisses A wird nicht von dem des Ereignisses B beeinflußt, d. h., das Eintreten des Ereignisses A ist unabhängig vom Eintreten des Ereignisses B .

D.2.20 Definition 2.20: Ist für die Elemente A und B eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} die Relation

$$P(A|B) = P(A) \quad (2.44)$$

erfüllt, dann heißt das Ereignis A unabhängig vom Ereignis B .

Beispiel 2.26: Eine Münze wird zweimal geworfen. Das Auftreten von „Wappen“ im zweiten Versuch (Ereignis A) ist unabhängig davon, ob im 1. Versuch „Zahl“ auftrat (Ereignis B), d. h.

$$P(A) = P(A|B).$$

Versuchen Sie unter Verwendung von (2.39) zu beweisen, daß aus der Unabhängigkeit des Ereignisses A vom Ereignis B auch die Unabhängigkeit des Ereignisses B vom Ereignis A folgt. Diese Symmetrieeigenschaft kommt auch zum Ausdruck in der **Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse**: Die Wahrscheinlichkeit des Produktes zweier unabhängiger Ereignisse A und B eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \quad (2.45)$$

Anmerkungen: 1. Mit (2.45) wird oft die Unabhängigkeit der Ereignisse A und B definiert. Es besteht Äquivalenz zur Definition 2.20, falls $P(B) > 0$ gilt.

2. Vor der Anwendung von (2.45) müssen wir uns vergewissern, ob die auftretenden Ereignisse unabhängig sind. Das geschieht häufig durch Betrachtungen, die von der Bedeutung des Begriffs der Unabhängigkeit ausgehen.

3. Die Aussage der Multiplikationsregel ist nicht nur – wie bisher vorausgesetzt – für den Fall gültig, daß die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B von null verschieden sind, sondern auch dann, wenn eines von ihnen die Wahrscheinlichkeit Null hat. Warum?

Wir wollen nun den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen zuerst auf drei und dann auf endlich viele Ereignisse erweitern.

D.2.21 Definition 2.21: Die Ereignisse A , B , C eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} heißen unabhängig (auch vollständig unabhängig), wenn die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C), \quad (2.46)$$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B), \quad (2.47)$$

$$P(A \cap C) = P(A) P(C), \quad (2.48)$$

$$P(B \cap C) = P(B) P(C). \quad (2.49)$$

Gelten nur die Relationen (2.47)–(2.49), dann werden die Ereignisse A , B , C paarweise unabhängig genannt.

Aus der paarweisen Unabhängigkeit der Ereignisse A , B , C dürfen wir also nicht auf deren vollständige Unabhängigkeit schließen.

Ganz analog wird die vollständige Unabhängigkeit von n Ereignissen definiert:

Definition 2.22: Die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) eines Ereignisfeldes \mathfrak{E} heißen **unabhängig** (auch **vollständig unabhängig**), wenn für jedes $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ und beliebige natürliche Zahlen $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ die Relation gilt:

$$P\left(\bigcap_{s=1}^k A_{i_s}\right) = \prod_{s=1}^k P(A_{i_s}). \quad (2.50)$$

Auch hier dürfen wir nicht aus der paarweisen Unabhängigkeit der Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) auf deren vollständige Unabhängigkeit schließen.

Überlegen Sie, wieviele Bedingungen erfüllt sein müssen, daß n Ereignisse eines Ereignisfeldes vollständig unabhängig sind!

2.2.4. Beispiele und Aufgaben

Wie im Abschnitt 2.1.6. wollen wir wieder einige ausführliche Beispiele angeben.

Beispiel 2.27: Zwei Schützen schießen unbeeinflußt voneinander auf eine Zielscheibe. Es ist bekannt, daß der erste mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 und der zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 trifft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens einer der Schützen die Zielscheibe trifft?

Die Lösung der Aufgabe führen wir in vier Schritten durch. Im 1. Schritt werden zunächst die interessierenden Ereignisse aufgeschrieben:

- A ... „Der 1. Schütze trifft die Scheibe“;
- B ... „Der 2. Schütze trifft die Scheibe“;
- C ... „Mindestens ein Schütze trifft die Scheibe“.

Aus der Aufgabe sind die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0,7$ und $P(B) = 0,8$ bekannt; gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(C)$.

Im 2. Schritt gilt es, das Ereignis C durch die Ereignisse A und B auszudrücken:

$$C = A \cup B.$$

Wir halten außerdem fest, daß $A \cap B = \emptyset$.

Im 3. Schritt ermitteln wir nun $P(C)$. Es gilt

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Die Ereignisse A und B sind offensichtlich unabhängig. Damit ergibt sich mit (2.38)

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Im 4. Schritt ergibt sich schließlich durch Einsetzen der Zahlenwerte die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(C) = 0,94.$$

Beispiel 2.28: In einer Urne befinden sich 76 weiße und 4 schwarze Kugeln. Ohne Zurücklegen werden 5 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 1 schwarze Kugel gezogen wird?

Wie im vorigen Beispiel werden wir die Lösung in 4 Schritten durchführen.

1. Schritt:

$A_1 \dots$ „Die i -te gezogene Kugel ist schwarz“ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$);

$A \dots$ „Unter den 5 gezogenen Kugeln ist mindestens eine schwarze“.

2. Schritt: Es gilt:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5.$$

Da aber $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$, ist es günstiger, von \bar{A} auszugehen:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5.$$

Außerdem sind die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) nicht unabhängig.

3. Schritt:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5) \\ &= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) P(\bar{A}_4 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cdot \\ &\quad \cdot P(\bar{A}_5 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4). \end{aligned}$$

Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten sind zu bestimmen.

4. Schritt:

$$P(\bar{A}_1) = \frac{76}{80};$$

$$P(\bar{A}_2 / \bar{A}_1) = \frac{75}{79};$$

$$P(\bar{A}_3 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = \frac{74}{78};$$

$$P(\bar{A}_4 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \frac{73}{77};$$

$$P(\bar{A}_5 / \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) = \frac{72}{76};$$

$$P(\bar{A}) = \frac{76}{80} \cdot \frac{75}{79} \cdot \frac{74}{78} \cdot \frac{73}{77} \cdot \frac{72}{76} = 0,769;$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,231.$$

Beispiel 2.29: Ein Schütze gibt auf eine Zielscheibe vier unabhängige Schüsse ab. Die Treffwahrscheinlichkeit betrage für jeden Schuß 1/2.

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Schütze bei vier Schüssen k Treffer erzielt ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

Lösung:

1. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$A_i \dots \text{"Der } i\text{-te Schuß ist ein Treffer"} \ (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$B_k \dots \text{"Unter 4 Schüssen werden genau } k \text{ Treffer erzielt"} \ (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Laut Aufgabenstellung sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3, A_4 unabhängig, und es gilt

$$P(A_i) = 1/2 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4.$$

2. Wir drücken die Ereignisse B_k mit Hilfe der A_i aus:

$$B_0 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4,$$

$$B_1 = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4),$$

$$B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4),$$

$$B_3 = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4),$$

$$B_4 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4.$$

3. Unter Anwendung von (2.46) und (2.26) erhalten wir

$$P(B_0) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) P(\bar{A}_4)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625,$$

$$P(B_1) = P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$P(B_2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} = 0,375,$$

$$P(B_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25,$$

$$P(B_4) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

Anmerkung: Wir benutzten hier die Tatsache, daß bei Unabhängigkeit der Ereignisse A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) auch deren Komplemente bzw. beliebige Kombinationen von Ereignissen A_i und \bar{A}_j ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$) unabhängig sind (siehe Aufg. 2.6).

Lösen Sie folgende Aufgaben:

2.4: Zwölf verschiedene Bücher werden auf gut Glück in ein Regal gestellt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß drei bestimmte Bücher

- a) in einer vorgegebenen Reihenfolge
- b) in beliebiger Reihenfolge nebeneinander stehen!

2.5: In einem Betrieb trifft eine Sendung von n elektronischen Bauelementen ein, von denen a defekt sind. Aus dieser Sendung werden k Bauelemente zufällig ausgewählt und überprüft.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle k Bauelemente brauchbar sind?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein oder mehrere Bauelemente brauchbar sind?

2.6: Es ist zu zeigen, daß aus der Unabhängigkeit der Ereignisse A und B die Unabhängigkeit der Ereignisse A und \bar{B} , \bar{A} und B , \bar{A} und \bar{B} folgt!

2.7: Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Aussage:
Sind die zufälligen Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ unvereinbar, dann sind sie nicht voneinander unabhängig!

2.8: Drei Kisten enthalten jeweils 10 Teile. In der ersten Kiste sind 8, in der zweiten Kiste 7 und in der dritten Kiste 9 standardisierte Teile. Aus jeder Kiste wird auf gut Glück ein Teil ausgewählt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle drei ausgewählten Teile standardisiert sind.

- * **2.9:** In einem Kasten befinden sich zwei brauchbare und zwei defekte Transistoren. Diese werden nacheinander getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zweite defekte Transistor
 - a) der zweite
 - b) der dritte
 - c) der vierte getestete Transistor ist?
- * **2.10:** Nach statistischen Angaben einer Werkstatt entfallen von 30 Stillständen einer Drehmaschine 15 auf das Auswechseln des Meißels, 6 auf den Defekt des Antriebes und 2 auf die nicht rechtzeitige Lieferung der Werkstücke. Die übrigen Stillstände haben andere Ursachen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Drehmaschinen auf Grund anderer Ursachen!
- * **2.11:** In einer Druckerei befinden sich 4 unabhängig voneinander arbeitende Maschinen, die mit den Wahrscheinlichkeiten 0,9; 0,95; 0,7 bzw. 0,85 in einem bestimmten Moment nicht ausfallen. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß in einem bestimmten Moment
 - a) wenigstens eine Maschine arbeitet,
 - b) genau eine Maschine,
 - c) genau zwei Maschinen,
 - d) genau drei Maschinen,
 - e) alle vier Maschinen arbeiten.

2.3. Zufallsgrößen

2.3.1. Begriff der Zufallsgröße

2.3.1.1. Erklärung des Begriffs der Zufallsgröße

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir zufällige Ereignisse als Ergebnisse zufälliger Versuche untersucht. Hierbei mußten wir die zufälligen Ereignisse in der Regel verbal charakterisieren. Für die meisten Belange der Praxis ist es zweckmäßiger, die Vorteile, die im Umgang mit reellen Zahlen liegen, für die Beschreibung der Ergebnisse zufälliger Versuche nutzbar zu machen. Indirekt haben wir diese Möglichkeit u. a. schon im Beispiel 2.5 bei der Charakterisierung des Ereignisses „Die Laufzeit eines Typs von PKW-Reifen beträgt t Zeiteinheiten“ – hier durch die reelle Zahl t – genutzt. Eine derartige zahlenmäßige Beschreibung der Ergebnisse eines zufälligen Versuches, die wir als eine Abbildung des Sachverhaltes in den Bereich der reellen Zahlen ansehen können, führt uns auf den Begriff der *Zufallsgröße*.

Zur Erläuterung wollen wir uns zunächst einige einfache Beispiele ansehen.

Beispiel 2.30: Zufälliger Versuch: Werfen einer Münze:

zufällige Ereignisse	zahlenmäßige Beschreibung
A ... „Wappen liegt oben“	$\rightarrow 1$
B ... „Zahl liegt oben“	$\rightarrow 0$

Beispiel 2.31: Zufälliger Versuch: Feststellung der Anzahl der Ausschußteile unter n Teilen:

zufällige Ereignisse	zahlenmäßige Beschreibung
A_0 ... „Unter n Teilen kein Ausschußteil“	$\rightarrow 0$
A_1 ... „Unter n Teilen genau 1 Ausschußteil“	$\rightarrow 1$

$A_2 \dots$ „Unter n Teilen genau 2 Ausschußteile“	$\rightarrow 2$
\vdots	\vdots
$A_n \dots$ „Unter n Teilen genau n Ausschußteile“	$\rightarrow n$
$B \dots$ „Unter n Teilen mindestens 1 Ausschußteil“	$\rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$
$C \dots$ „Unter n Teilen höchstens 3 Ausschußteile“	$\rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$

Beispiel 2.32: Zufälliger Versuch: Feststellung der in einem Zählrohr während eines bestimmten Zeitabschnittes registrierten Teilchen der kosmischen Strahlung:

zufällige Ereignisse	zahlenmäßige Beschreibung
$A_0 \dots$ „Kein Teilchen wurde registriert“	$\rightarrow 0$
$A_1 \dots$ „Genau 1 Teilchen wurde registriert“	$\rightarrow 1$
\vdots	\vdots
$A_n \dots$ „Genau n Teilchen wurden registriert“	$\rightarrow n$
\vdots	\vdots
$B \dots$ „Mindestens 2 Teilchen wurden registriert“	$\rightarrow \{2, 3, \dots\}$

Kehren wir nochmals zum Beispiel 2.31 zurück. Mit Hilfe der Festlegung

„ $X :=$ zufällige Anzahl der Ausschußteile unter n Teilen“

erhalten wir eine Größe X , die die im Beispiel angedeutete Abbildung u. a. folgendermaßen charakterisiert:

1. Die Größe X nimmt den Wert i an ($X = i$) genau dann, wenn das Ereignis A_i eintritt. Dabei kann i die Werte $0, 1, \dots, n$ durchlaufen.
2. Die Größe X nimmt einen Wert der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ an ($X \in \{1, 2, \dots, n\}$) genau dann, wenn das Ereignis B eintritt.

Die Größe X nimmt folglich bei der Durchführung des betrachteten zufälligen Versuches in Abhängigkeit von dessen Ergebnis jeweils einen bestimmten Wert an.

Eine derartige Größe bezeichnen wir – der am Ende des Abschnitts folgenden Erklärung teilweise voreingefordert – als *Zufallsgröße*. Als Symbole für Zufallsgrößen verwenden wir die großen lateinischen Buchstaben X, Y, Z , die wir gegebenenfalls indizieren.

Zur Charakterisierung einer Zufallsgröße X benötigen wir die Kenntnis aller möglichen Werte, die diese Zufallsgröße annehmen kann. Diese bezeichnen wir mit dem entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben x .

Im Beispiel 2.31 erhalten wir also die Werte $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$.

In den letzten drei Beispielen haben wir Zufallsgrößen behandelt, bei denen die Menge der möglichen Werte (Wertebereich der Zufallsgröße) – $\{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. im Beispiel 2.32 $\{x_1, x_2, \dots\}$ – endlich bzw. abzählbar unendlich ist und deren Werte demzufolge mit den natürlichen Zahlen indiziert werden können. Derartige Zufallsgrößen nennen wir *diskrete Zufallsgrößen*. Wir werden sie im Abschnitt 2.3.2.2. näher untersuchen.

Daß daneben auch Zufallsgrößen mit überabzählbar vielen Werten von Bedeutung sind, wollen wir uns am Beispiel 2.7 (vgl. S. 10) klarmachen.

Beispiel 2.7: Zufälliger Versuch: Bestimmung der CO-Konzentration in den Abgasen einer industriellen Anlage zu einem bestimmten Zeitpunkt:

zufällige Ereignisse	zahlenmäßige Beschreibung	$X :=$ zufällige CO-Konzentration
A_x	$\rightarrow x$	$X = x$
B_y	$\rightarrow [0, y)$	$0 \leq X < y$
C_{x_1, x_2}	$\rightarrow [x_1, x_2)$	$x_1 \leq X < x_2$

In diesem Beispiel charakterisieren wir die möglichen Versuchsergebnisse durch eine Zu-

fallsgröße X , deren Wertebereich ein Intervall auf der positiven Halbachse ist. Wie wir aber wissen, enthält ein derartiges Intervall überabzählbar viele reelle Zahlen.

Nach der Behandlung dieser einführenden Beispiele kommen wir zur Erklärung des Begriffs Zufallsgröße.

Erklärung 2.1¹⁾: Wir betrachten einen zufälligen Versuch mit einem entsprechenden Ereignisfeld \mathfrak{E} .

Mit Hilfe einer Zufallsgröße beschreiben wir jedes zufällige Ereignis aus \mathfrak{E} durch eine reelle Zahl bzw. durch ein Intervall reeller Zahlen bzw. durch eine geeignete Menge reeller Zahlen.

2.3.1.2. Weiterführende Betrachtungen

Wie wir im Abschnitt 2.2.2.3. gesehen haben, können wir einen zufälligen Versuch durch das Paar (Ω, \mathfrak{E}) charakterisieren. Dabei ist Ω die Menge der Elementarereignisse des Versuches und \mathfrak{E} ein zugehöriges Ereignisfeld (System der zu betrachtenden zufälligen Ereignisse).

Mit einer Zufallsgröße X ordnen wir jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl zu.

Dadurch erreichen wir, daß jedes zufällige Ereignis A aus dem Ereignisfeld \mathfrak{E} im Bereich der reellen Zahlen durch eine gewisse Menge der reellen Zahlen repräsentiert wird. Einschränkend müssen wir fordern, daß diese Zuordnung so beschaffen ist, daß jedes Intervall der Form $(-\infty, t)$ (t bel. reell) – und damit jede „interessierende“ Zahlenmenge – bei dieser Zuordnung aus einem zufälligen Ereignis aus \mathfrak{E} hervorgeht.

Die für praktische Belange in der Regel „interessierenden“ Zahlenmengen sind die sogenannten *Borel-Mengen*, die durch die Verknüpfungen $\bigcup_{i=1}^{\infty}, \bigcap_{i=1}^{\infty}, \setminus, \cap$ aus Intervallen der Form $(-\infty, t)$ (t bel. reell) erzeugt werden. Hierzu gehören u. a. alle offenen, halboffenen und abgeschlossenen Intervalle.

Wir kommen damit zu folgender Definition einer Zufallsgröße:

D.2.23 Definition 2.23: Unter einer Zufallsgröße X verstehen wir eine Funktion

$$X = X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

die jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl zuordnet. Dabei fordern wir, daß jedes Intervall der Form $(-\infty, t)$ (t bel. reell) aus einem zufälligen Ereignis aus \mathfrak{E} hervorgeht, d. h., das Urbild eines jeden Intervalls $(-\infty, t)$ ist ein zufälliges Ereignis aus \mathfrak{E} .

Anmerkung: Der Definitionsbereich der Funktion $X(\omega)$ ist die Menge Ω ; ihr Wertebereich ist die Menge der Werte der Zufallsgröße X .

Das System aller Borel-Mengen des \mathbb{R}^1 bildet – wie wir es ebenfalls vom Ereignisfeld \mathfrak{E} gefordert hatten – eine σ -Algebra, die wir mit \mathfrak{B} bezeichnen. Somit ist eine Zufallsgröße $X = X(\omega)$ eine Funktion, die eine gewisse Beziehung zwischen den beiden σ -Algebren \mathfrak{E} und \mathfrak{B} herstellt.

Derartige Funktionen werden in der Mathematik als $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ -meßbare Funktionen bezeichnet. Für weitergehende Studien in dieser Richtung verweisen wir auf [3; 12].

2.3.2. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

2.3.2.1. Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zur vollständigen Beschreibung eines zufälligen Versuches hatten wir im Abschnitt 2.1. nach der Festlegung des Ereignisfeldes jedem zufälligen Ereignis A aus \mathfrak{E} dessen Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zugeordnet.

Entsprechend werden wir jetzt verfahren und zu jeder interessierenden Menge reeller Zahlen die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, daß die zur zahlenmäßigen Beschrei-

¹⁾ Dem Anliegen dieses Buches entsprechend halten wir hier das Wesentliche dieser neuen Begriffsbildung in Form einer Erklärung fest. Die im Abschnitt 2.3.1.2. folgende Präzisierung trägt für unsere Belange weiterführenden Charakter und ist für das Verstehen der übrigen Abschnitte nicht unbedingt erforderlich.

bung des Versuches eingeführte Zufallsgröße einen Wert aus dieser Menge annimmt. Die Gesamtheit dieser Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir als die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* (oder *Verteilung*) der Zufallsgröße. Durch die genannten Wahrscheinlichkeiten wird festgelegt, wie die gesamte „Wahrscheinlichkeitsmasse“ 1 auf der Zahlengeraden verteilt ist.

Von zentraler Bedeutung sind hierunter Wahrscheinlichkeiten der Form

$$P(X < t) \quad (t \text{ beliebig reell}).$$

Definition 2.24: Die Funktion

D.2.24

$$F_X(t) := P(X < t)$$

(2.51)

der reellen Variablen t bezeichnen wir als **Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X .

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten $P(X < t)$ gehen wir folgendermaßen vor:

Für ein beliebiges festes reelles t_0 wählen wir aus dem Ereignisfeld \mathfrak{E} das zufällige Ereignis A aus mit der Eigenschaft, daß die Zufallsgröße X genau dann einen Wert aus dem Intervall $(-\infty, t_0)$ annimmt ($X < t_0$), wenn das zufällige Ereignis A eintritt. Nach dem Axiom 1 haben wir aber diesem Ereignis A die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zugeordnet.¹⁾ Wir setzen schließlich

$$P(X < t_0) := P(A). \quad (2.52)$$

Zur Verdeutlichung betrachten wir die im Beispiel 2.30 eingeführte Zufallsgröße

$$X := \begin{cases} 1, & \text{falls das Ereignis } A \text{ eintritt,} \\ 0, & \text{falls das Ereignis } B \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Wir erhalten z. B. für $t_0 = 0,5$

$$F_X(0,5) := P(X < 0,5) := P(B) = 1/2$$

oder für $t_0 = 2$

$$F_X(2) := P(X < 2) := P(A \cup B) = P(\Omega) = 1.$$

Entsprechend setzen wir

$$P(X = 0) = P(B) = 1/2$$

und

$$P(X = 1) = P(A) = 1/2.$$

Damit erhalten wir andererseits

$$F_X(0,5) = P(X < 0,5) = P(X = 0)$$

und

$$F_X(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1).$$

Daß wir mit Hilfe der Verteilungsfunktion alle uns interessierenden Wahrscheinlichkeiten berechnen können, wollen wir uns verdeutlichen, indem wir Wahrscheinlichkeiten der Form

$$P(t_1 \leq X < t_2)$$

bestimmen. Für zwei beliebige feste reelle Zahlen $t_1 < t_2$ betrachten wir folgende zufällige Ereignisse:

¹⁾ Durch die im Abschnitt 2.3.1.2. getroffene Festlegung ist gesichert, daß ein solches Ereignis A und damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße stets existiert.

Ereignis $A \dots „X < t_2“$,
 Ereignis $B \dots „X < t_1“$,
 Ereignis $C \dots „t_1 \leq X < t_2“$.

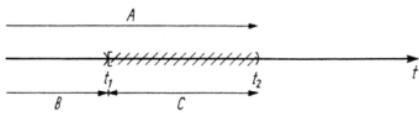


Bild 2.11. Zur Berechnung von $P(t_1 \leq X < t_2)$

Wie wir Bild 2.11 entnehmen, gilt

$$A = B \cup C \quad \text{mit} \quad B \cap C = \emptyset.$$

Unter Anwendung des Axioms 3 erhalten wir

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

und damit

$$P(C) = P(A) - P(B).$$

Im Ergebnis kommen wir somit zu der Beziehung

$$P(t_1 \leq X < t_2) = P(X < t_2) - P(X < t_1) = F_X(t_2) - F_X(t_1). \quad (2.53)$$

Wir sehen hieran, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit eindeutig durch die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ bestimmt ist.

2.3.2.2. Diskrete Zufallsgrößen

Wie wir schon im Abschnitt 2.3.1.1. angedeutet hatten, gehen wir aus von folgender

D.2.25 Definition 2.25: Eine Zufallsgröße nennen wir diskret, wenn ihr Wertebereich eine endliche oder höchstens abzählbare Menge ist.

Am Beispiel 2.29 (vgl. S. 34) werden wir auf dem im Abschnitt 2.3.2.1. angegebenen Weg die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße bestimmen.

Beispiel 2.29: Auf eine Zielscheibe werden unabhängig voneinander 4 Schüsse abgegeben. Die Treffwahrscheinlichkeit betrage für jeden Schuß 1/2. Es sei X die zufällige Anzahl der Treffer bei 4 unabhängigen Schüssen.

Als Werte der Zufallsgröße X erhalten wir

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3 \quad \text{und} \quad x_5 = 4.$$

Zur Bestimmung von $F_X(t)$ greifen wir einige spezielle Werte von t heraus und erhalten:

$$F_X(-1) = P(X < -1) = 0,$$

$$F_X(0) = P(X < 0) = 0,$$

$$F_X(0,5) = P(X < 0,5) = P(X = 0) = \frac{1}{16},$$

$$F_X(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{16},$$

$$F_X(1,5) = P(X < 1,5) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{16},$$

$$F_X(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{16},$$

$$F_X(2,5) = P(X < 2,5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{11}{16},$$

$$F_X(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{11}{16},$$

$$F_X(3,5) = P(X < 3,5) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$+ P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{15}{16},$$

$$F_X(4) = P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$+ P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{15}{16},$$

$$F_X(4,1) = P(X < 4,1) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$+ P(X = 4) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 1.$$

Schließlich kommen wir für beliebige t zu der in Bild 2.12 dargestellten Funktion $F_X(t) = P(X < t)$ in der Form

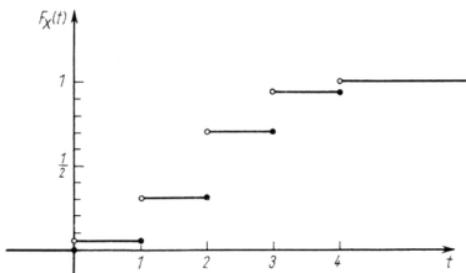


Bild 2.12. Verteilungsfunktion $F_X(t)$ aus Beispiel 2.29

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \frac{1}{16} & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ \frac{5}{16} & \text{für } 1 < t \leq 2, \\ \frac{11}{16} & \text{für } 2 < t \leq 3, \\ \frac{15}{16} & \text{für } 3 < t \leq 4, \\ 1 & \text{für } t > 4. \end{cases}$$

Aus Bild 2.12 erkennen wir folgende Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße:

1. $F_X(t)$ ist für alle reellen t definiert, d. h., der Definitionsbereich ist das Intervall $(-\infty, +\infty)$.
2. Der Wertebereich liegt im Intervall $[0, 1]$, d. h., es gilt

$$0 \leq F_X(t) \leq 1. \quad (2.54)$$

3. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad (2.55)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1. \quad (2.56)$$

4. $F_X(t)$ ist eine monoton nichtfallende (aus $t_1 < t_2$ folgt $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$) Treppenfunktion.

5. $F_X(t)$ ist linksseitig stetig, d. h., es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_X(t-h) = F_X(t) \quad (2.57)$$

für alle reellen t .

Bei der Bestimmung von $F_X(t)$ im Beispiel 2.29 haben wir die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0), P(X=1), \dots, P(X=4)$ benutzt.

D.2.26 Definition 2.26: Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten x_1, x_2, \dots , so bezeichnen wir

$$p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

als Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X .

($P(X=x)$ wird auch als Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X bezeichnet.)

Einen Eindruck von der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße gewinnen wir, indem wir die Einzelwahrscheinlichkeiten in einer Verteilungstabelle wie in Tab. 2.1 oder graphisch wie in Bild 2.13 für das Beispiel 2.29 darstellen.

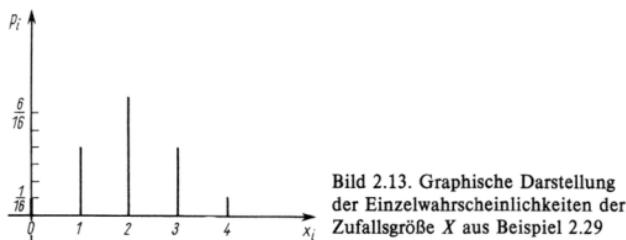


Bild 2.13. Graphische Darstellung der Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X aus Beispiel 2.29

Tabelle 2.1: Verteilungstabelle der Zufallsgröße X aus Beispiel 2.29

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Prüfen Sie unter Anwendung der Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgende Eigenschaften der Einzelwahrscheinlichkeiten nach:

1. $0 \leq p_i \leq 1$, (2.58)

$$2. \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \quad (2.59)$$

Schließlich haben wir am Beispiel folgenden Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und den Einzelwahrscheinlichkeiten verifiziert:

1. Durch Vorgabe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße eindeutig bestimmt:

$$F_X(t) = \sum_{\substack{i \\ x_i < t}} P(X = x_i) \quad (2.60)$$

(hierbei summieren wir über alle i mit der Eigenschaft $x_i < t$).

2. Die Unstetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße sind die Werte x_1, x_2, \dots . An der Stelle x_i ($i = 1, 2, \dots$) erfährt $F_X(t)$ einen Sprung der Höhe $p_i = P(X = x_i)$. Wir bezeichnen deshalb die Werte x_1, x_2, \dots auch als **Sprungstellen** und die entsprechenden Einzelwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots als **Sprunghöhen**.

Damit erhalten wir bei vorgegebener Verteilungsfunktion die Einzelwahrscheinlichkeiten eindeutig aus der Beziehung

$$p_i = P(X = x_i) = \lim_{h \rightarrow +0} F_X(x_i + h) - F_X(x_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$

Wir sehen hier, daß ein Wert einer diskreten Zufallsgröße dadurch gekennzeichnet ist, daß die Verteilungsfunktion an dieser Stelle einen positiven Zuwachs erfährt.

Anmerkung: Die Werte der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße an den Sprungstellen lassen sich rekursiv aus

$$F_X(x_1) = 0, \quad F_X(x_i) = F_X(x_{i-1}) + p_{i-1} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots \quad (2.61)$$

berechnen. Diese Rekursionsformel ist Ausgangspunkt für die rechentechnische Behandlung von (2.60).

2.3.2.3. Stetige Zufallsgrößen

Wir wenden uns nun der Behandlung von Zufallsgrößen mit überabzählbar vielen Werten zu. Dieser Fall liegt z. B. dann vor, wenn der Wertebereich ein Intervall der reellen Zahlengeraden oder die gesamte Zahlengerade ist.

Unter diesen nichtdiskreten Zufallsgrößen interessieren wir uns besonders für die Klasse der stetigen Zufallsgrößen.

Definition 2.27: Eine Zufallsgröße X nennen wir **stetig**, wenn es eine integrierbare Funktion D.2.27

$$f_X(x) \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.62)$$

derart gibt, daß sich die Verteilungsfunktion $F_X(t) = P(X < t)$ für alle reellen t in der Form

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx \quad (2.63)$$

darstellen läßt.

Die Funktion $f_X(x)$, von der wir fordern, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.64)$$

ist, bezeichnen wir als **Dichtefunktion** von X .

Ausgehend von der geometrischen Deutung des Integralbegriffs erhalten wir $F_X(t)$ als Flächeninhalt der Fläche zwischen der Kurve $f_X(x)$ und der Abszissenachse in den Grenzen $-\infty$ und t (s. Bild 2.14).

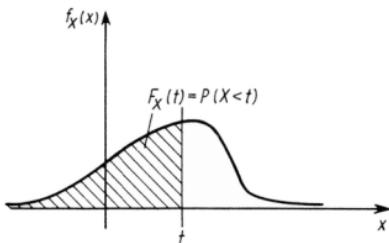


Bild 2.14. Geometrische Deutung des Zusammenhangs zwischen Dichte- und Verteilungsfunktion

Überzeugen Sie sich selbst, daß die durch die Darstellungsformel (2.63) gegebene Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße folgende Eigenschaften besitzt:

1. Der Definitionsbereich von $F_X(t)$ ist das Intervall $(-\infty, +\infty)$.
2. Der Wertebereich ist das Intervall $[0, 1]$, d.h., es gilt

$$0 \leq F_X(t) \leq 1. \quad (2.65)$$

3. Es ist

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad (2.66)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1. \quad (2.67)$$

4. $F_X(t)$ ist eine monoton nichtfallende Funktion

(aus $t_1 < t_2$ folgt $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$).

5. $F_X(t)$ ist stetig, d.h., für alle reellen t gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_X(t+h) = F_X(t). \quad (2.68)$$

Da $F_X(t)$ gemäß (2.63) eine Stammfunktion der Dichte $f_X(x)$ ist, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Formel (2.53) für $t_1 < t_2$

$$P(t_1 \leq X < t_2) = F_X(t_2) - F_X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x) dx. \quad (2.69)$$

Somit können wir gemäß Bild 2.15 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X einen Wert aus dem Intervall $[t_1, t_2]$ annimmt, als Fläche zwischen Dichtefunktion und Abszissenachse in den Grenzen t_1 und t_2 interpretieren. Wir setzen nun $t_1 = t$ und $t_2 = t + \Delta t$ und betrachten den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$. Dabei erhalten wir

$$\begin{aligned} P(X = t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} P(t \leq X < t + \Delta t) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow +0} (F_X(t + \Delta t) - F_X(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \int_t^{t + \Delta t} f_X(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Für eine stetige Zufallsgröße X verschwinden folglich alle Wahrscheinlichkeiten der Form $P(X = t)$, obwohl die Ereignisse „ $X = t$ “ nicht mit dem unmöglichen Ereignis zusammenfallen müssen.

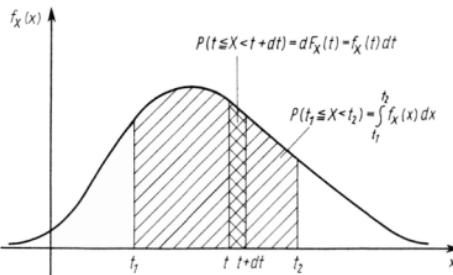


Bild 2.15. Geometrische Deutung der Wahrscheinlichkeit
 $P(t_1 \leq X < t_2)$
 und des Wahrscheinlichkeitelementes

Ist t eine Stetigkeitsstelle der Dichtefunktion, so gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_X(x) dx = f_X(t).$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_X(x) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_X(t + \Delta t) - F_X(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dF_X(t)}{dt} = F'_X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Bei vorgegebener Verteilungsfunktion ist die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße somit eindeutig in ihren Stetigkeitsstellen bestimmt und dort gleich der ersten Ableitung der Verteilungsfunktion.

Wir wollen hier hervorheben, daß $f_X(t)$ selbst keine Wahrscheinlichkeit darstellt.

Erst durch formale Umstellung der Beziehung (2.70) erhalten wir das sog. *Wahrscheinlichkeitelement* der Stelle t

$$P(t \leq X < t + dt) = dF_X(t) = f_X(t) dt, \quad (2.71)$$

womit wir die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen wollen, daß die Zufallsgröße X einen Wert aus der infinitesimalen Umgebung $[t, t + dt]$ der Stelle t annimmt (vgl. auch Bild 2.15).

2.3.2.4. Beispiele

Beispiel 2.33: Eine automatische Anlage produziert nacheinander bestimmte Teile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein beliebiges produziertes Teil brauchbar ist, sei p ($0 < p < 1$). $1 - p = q$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teil Ausschuß ist. Die einzelnen Teile sollen unabhängig voneinander produziert werden. Nach der Produktion eines unbrauchbaren Teils wird die Arbeit unterbrochen. Zu untersuchen ist die Zufallsgröße $X :=$ zufällige Anzahl der bis zur ersten Unterbrechung produzierten Teile.

Zu bestimmen sind die Verteilungstabelle und die Verteilungsfunktion $F_X(t)$.

Lösung: 1. Wir betrachten folgende Ereignisse:

- $A_1 \dots$ „Das erste Produkt ist Ausschuß“,
- $A_2 \dots$ „Das zweite Produkt ist Ausschuß“,
- \vdots
- $A_k \dots$ „Das k -te Produkt ist Ausschuß“.

Laut Aufgabenstellung sind die Ereignisse A_k ($k = 1, 2, \dots$) unabhängig, und es gilt

$$P(A_k) = 1 - p \quad \text{und} \quad P(\bar{A}_k) = p \quad \text{für } k = 1, 2, \dots$$

2. X besitzt die Werte 1, 2, 3, ... Gemäß Abschnitt 2.3.2.1. erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} P(X=1) &:= P(A_1) = q, \\ P(X=2) &:= P(\bar{A}_1 \cap A_2) = qp, \\ &\vdots \\ P(X=k) &:= P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k) = qp^{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Damit kommen wir zu folgender Verteilungstabelle:

k	1	2	3	\dots	k	\dots
$p_k = P(X=k)$	q	qp	qp^2	\dots	qp^{k-1}	\dots

mit $p_k = P(X=k) = qp^{k-1} > 0$ für $k = 1, 2, \dots$ Damit ist die Beziehung (2.58) erfüllt.

Zur Bestätigung der Eigenschaft (2.59) benutzen wir die Formel für die unendliche geometrische Reihe und erhalten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} qp^{k-1} = q \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} = q \frac{1}{1-p} = 1.$$

3. Gemäß Formel (2.60) bestimmen wir die Verteilungsfunktion:

$$F_X(t) = P(X < t) = \sum_{k \leq t} qp^{k-1}.$$

Beispiel 2.34: Für welchen Wert der Konstanten a ist

$$f_X(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ? Gesucht ist außerdem

$$F_X(t) = P(X < t).$$

Lösung: 1. Aus der Eigenschaft (2.62) folgt $a > 0$.

2. Wir betrachten die Forderung (2.64) und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx \\ &= a \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ c \rightarrow \infty}} (\arctan x|_{-b}^c) = a \left[\lim_{c \rightarrow \infty} \arctan c - \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan (-b) \right] \\ &= a \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = a\pi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$a = \frac{1}{\pi}.$$

3. Nach Formel (2.63) berechnen wir $F_X(t)$:

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan t, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Beispiel 2.35: Es ist zu zeigen, daß

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0) \quad (2.73)$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist. Gesucht sind außerdem die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(1 \leq X < 2)$.

Lösung: 1. (2.62) ist erfüllt.

2. Wir überprüfen (2.64):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} (-e^{-\lambda x})|_0^c \\ &= -\lim_{c \rightarrow +\infty} e^{-\lambda c} + e^{00} = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

3. Bei der Bestimmung der Verteilungsfunktion gemäß (2.63) müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen:

1. Fall: $t \leq 0$:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0.$$

2. Fall: $t > 0$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Damit erhalten wir

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

4. Nach der Formel (2.53) bekommen wir

$$P(1 \leq X < 2) = F_X(2) - F_X(1) = 1 - e^{-2\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}.$$

In Bild 2.16 sind Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der in diesem Beispiel behandelten Zufallsgrößen dargestellt.

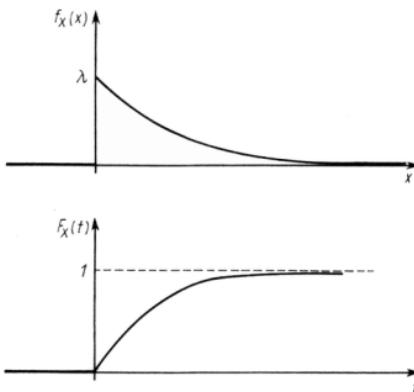


Bild 2.16. Dichte- und Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X aus Beispiel 2.35

2.3.2.5. Zusammenfassung

Die bisherigen Ergebnisse über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße wollen wir in Tabelle 2.2 zusammenfassend darstellen.

Tabelle 2.2

diskrete Zufallsgröße	stetige Zufallsgröße	
höchstens abzählbar viele Werte	überabzählbar viele Werte	
Einzelwahrscheinlichkeiten p_i $p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$	Dichtefunktion $f_X(x)$ $f_X(x) dx = P(x \leq X < x + dx)$, $f_X(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$	
Verteilungsfunktion		
$F_X(t) = \sum_{\substack{i \\ x_i < t}} p_i$ $F_X(t) = P(X < t)$ $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq F_X(t) \leq 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$, $F_X(t)$ – monoton nichtfallend, $F_X(t)$ – wenigstens linksseitig stetig $F_X(t)$ – wenigstens linksseitig stetig Treppenfunktion	$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$ $F_X(t) – stetig$	
$P(t_1 \leq X < t_2)$ $= \sum_{\substack{i \\ t_1 \leq x_i < t_2}} p_i$	$P(t_1 \leq X < t_2)$ $= F_X(t_2) - F_X(t_1)$	$P(t_1 \leq X < t_2)$ $= \int_{t_1}^{t_2} f_X(x) dx$
$p_i = \lim_{h \rightarrow +0} F_X(x_i + h) - F_X(x_i)$	$f_X(x) = F'_X(x)$	

2.3.3. Kennwerte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, daß die Verteilung einer Zufallsgröße durch ihre Verteilungsfunktion oder die Dichtefunktion bzw. die Einzelwahrscheinlichkeiten im stetigen bzw. diskreten Fall vollständig bestimmt ist.

Wichtige Informationen über eine Verteilung – wenn auch in der Regel keine vollständige Beschreibung – liefern uns bestimmte Kennwerte (Parameter).

2.3.3.1. Der Erwartungswert

Häufig begegnen uns Größen folgender Art:

„Das monatliche Durchschnittseinkommen einer Familie“

„Die mittlere Laufzeit eines PKW-Reifens“

⋮

Von unseren Vorstellungen über derartige „Mittelwerte“ abstrahierend gelangen wir zum Begriff des Erwartungswertes einer Zufallsgröße, mit dem wir ein gewisses Zentrum bezeichnen, um das sich die Werte der betrachteten Zufallsgröße gruppieren.

Dazu gehen wir von folgenden Überlegungen aus:

Bei n Messungen seien s verschiedene Meßwerte x_i ($i = 1, \dots, s$) mit den absoluten

Häufigkeiten h_i ($i = 1, \dots, s$; $\sum_{i=1}^s h_i = n$) aufgetreten:

Meßwerte	x_1	x_2	...	x_s	
absolute Häufigkeiten	h_1	h_1	h_2	...	h_s

Zur Auswertung einer solchen Meßreihe berechnen wir häufig als Kennwert das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 h_1 + \dots + x_s h_s) = x_1 H_1 + \dots + x_s H_s,$$

wobei $H_i = \frac{h_i}{n}$ ($i = 1, \dots, s$) die relative Häufigkeit¹⁾ des Meßwertes x_i ist.

Unter Berücksichtigung des im Abschnitt 2.2.1. angedeuteten Zusammenhangs zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit kommen wir zu folgender

Definition 2.28: Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten x_i und den Einzelwahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ ($i = 1, 2, \dots$), so nennen wir D.2.28

$$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad (2.74)$$

den Erwartungswert (oder die mathematische Erwartung) der Zufallsgröße X , falls

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$$

ist. Ist diese Bedingung der absoluten Konvergenz der Reihe (2.74) nicht erfüllt, so existiert kein Erwartungswert.

Hinweis: Welche Analogien zum Begriff des Massenschwerpunktes eines Systems von Punktmassen lassen sich erkennen?

Wir setzen die Behandlung der Beispiele 2.29 (vgl. S. 40) und 2.33 (vgl. S. 45) mit der Berechnung der entsprechenden Erwartungswerte fort.

Beispiel 2.29:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2.$$

Schießt also ein Schütze in Serien von je 4 Schuß auf eine Zielscheibe, so wird er im Mittel in jeder Serie 2 Treffer verzeichnen können.

¹⁾ Gemäß der im Abschnitt 2.2.1. eingeführten Symbolik entspricht H_i der relativen Häufigkeit $H_s(\{X = x_i\})$ des zuf. Ereignisses $\{X = x_i\}$... „Die Zufallsgröße X nimmt den Wert x_i an“ in n Versuchen. Zur Vereinfachung wurde von dieser Symbolik abgewichen.

Beispiel 2.33:

$$P(X = k) = p^{k-1}q \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1q + 2pq + 3p^2q + \dots + kp^{k-1}q + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}q \\ &= q \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = q \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1}. \end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung differenzieren wir die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1} \quad \text{für } |x| < 1:$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = (1-x)^{-2}.$$

Daraus erhalten wir

$$E(X) = q \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} = q(1-p)^{-2} = \frac{1}{q}, \quad \text{da } 1-p=q \text{ ist.}$$

Für $p = 1/4$ ist $E(X) = 4/3$, d. h., der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße muß nicht mit einem Wert dieser Zufallsgröße zusammenfallen.

Der im Abschnitt 2.3.2.4. angedeutete Zusammenhang zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen bildet die Grundlage für die folgende Definition.

D.2.29 Definition 2.29: Ist X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion $f_X(x)$, so bezeichnen wir

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx \tag{2.75}$$

als **Erwartungswert (oder mathematische Erwartung)** von X , falls das uneigentliche Integral (2.75) absolut konvergent ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty.$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert kein Erwartungswert.

Wir berechnen den Erwartungswert der im Beispiel 2.35 (vgl. S. 47) betrachteten Zufallsgröße X :

Beispiel 2.35:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

2.3.3.2. Die Varianz

Mit dem Erwartungswert haben wir ein gewisses Zentrum der Verteilung einer Zufallsgröße eingeführt. Wir wollen nun mit einem weiteren Kennwert charakterisieren, wie stark die Werte der Zufallsgröße um den Erwartungswert streuen. Das gebräuchlichste Streuungsmaß ist die *mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert*, die sogenannte *Varianz*.

Definition 2.30: Ist X eine Zufallsgröße, so nennen wir

D.2.30

$$D^2(X) := E[(X - E(X))^2] \quad (2.76)$$

die **Varianz (oder Dispersion)** von X .

Die Größe $\sqrt{D^2(X)}$ bezeichnen wir als **Standardabweichung** und den Quotienten $V(X) = \frac{\sqrt{D^2(X)}}{E(X)}$ als **Variationskoeffizienten** von X . Hierbei setzen wir voraus, daß der Erwartungswert auf der rechten Seite von (2.76) existiert und $E(X) \neq 0$ ist.

Im diskreten Fall berechnen wir $D^2(X) = E[(X - E(X))^2]$ gemäß (2.74) nach der Formel

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_1)^2 p_i. \quad (2.77)$$

Im stetigen Fall erhalten wir entsprechend nach (2.75)

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 f_X(x) dx. \quad (2.78)$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $m_1 := E(X)$ gesetzt. Eine nähere Begründung dieser Formeln werden wir im Abschnitt 2.3.3.3. geben.

Betrachten wir nun einige Beispiele zur Berechnung der Varianz.

Nach der Aufgabenstellung im Beispiel 2.29 (vgl. S. 40 und 49) erhalten wir:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \sum_{k=0}^4 (k - 2)^2 P(X = k) = (0 - 2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (1 - 2)^2 \cdot \frac{4}{16} \\ &\quad + (2 - 2)^2 \cdot \frac{6}{16} + (3 - 2)^2 \cdot \frac{4}{16} + (4 - 2)^2 \cdot \frac{1}{16} = 1. \end{aligned}$$

Wir bestimmen $D^2(X)$ für das Beispiel 2.33 (vgl. S. 45 und 49):

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k - \frac{1}{q} \right)^2 q p^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 - 2 \frac{k}{q} + \frac{1}{q^2} \right) q p^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[k(k-1) + k - 2 \frac{k}{q} + \frac{1}{q^2} \right] q p^{k-1} \\ &= qp \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p^{k-2} + \left(1 - \frac{2}{q} \right) q \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \\ &= qp 2(1-p)^{-3} + \left(1 - \frac{2}{q} \right) q(1-p)^{-2} + \frac{1}{q}(1-p)^{-1} \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \frac{p}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q^2}.$$

Hierbei benutzten wir die 1. und 2. Ableitung der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$ für $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} (1-x)^{-1} = (1-x)^{-2}$$

und

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{d^2}{dx^2} (1-x)^{-1} = 2(1-x)^{-3}.$$

Schließlich ergibt sich im Beispiel 2.35 (vgl. S. 47 und 50):

$$\begin{aligned} D^2(X) &= \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhalten wir hieraus

$$D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{und} \quad V(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{-1}} = 1.$$

Im Abschnitt 2.3.3.4. werden wir Erwartungswert und Varianz in eine umfassendere Klasse von Kennwerten einordnen und Regeln für das Rechnen mit diesen Kennwerten zusammenstellen. Dafür schaffen wir mit der folgenden Behandlung von Funktionen von Zufallsgrößen die nötigen Voraussetzungen.

2.3.3.3. Der Erwartungswert von Funktionen einer Zufallsgröße

Häufig begegnen uns Zufallsgrößen Y , die vermöge einer gegebenen Funktion g aus einer anderen (im allg. leichter zugänglichen) Zufallsgröße X hervorgehen:

$$Y = g(X).$$

Welche Informationen über Y können wir aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X erhalten? Dazu betrachten wir das folgende einfache

Beispiel 2.36: X sei die zufällige Wegstrecke, die ein Gabelstapler bei der Erledigung eines Transportauftrages zurücklegen muß. Zum Durchlaufen einer Wegeinheit werden 4 Zeiteinheiten benötigt. Dann ist $Y = 4X$ die zufällige benötigte Zeit.

Nun sei X eine diskrete Zufallsgröße mit der Verteilungstabelle

x_i	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

und der Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 2, \\ \frac{1}{4} & \text{für } 2 < t \leq 4, \\ 1 & \text{für } 4 < t. \end{cases}$$

Mit Hilfe der einfachen Umformungen

$$P(X = x_i) = P(4X = 4x_i) = P(Y = 4x_i) = P(Y = y_i)$$

($i = 1, 2$) bzw.

$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(4X < t) = P\left(X < \frac{t}{4}\right) = F_X\left(\frac{t}{4}\right)$$

erhalten wir für $Y = 4X$ die Verteilungstabelle

y_i	8	16
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

und die Verteilungsfunktion

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 8, \\ \frac{1}{4} & \text{für } 8 < t \leq 16, \\ 1 & \text{für } 16 < t. \end{cases}$$

Gemäß Formel (2.74) berechnen wir den Erwartungswert von Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2) = 8P(Y = 8) + 16P(Y = 16) \\ &= 8P(X = 2) + 16P(X = 4) = 8 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{3}{4} = 14. \end{aligned}$$

An diesem Beispiel können wir folgende Berechnungsformeln für den Erwartungswert $E[g(X)]$ einer Funktion $Y = g(X)$ einer Zufallsgröße X verifizieren:

Ist X eine diskrete Zufallsgröße, so erhalten wir

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X = x_i). \quad (2.79)$$

Analog gilt im stetigen Fall

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (2.80)$$

Hierbei setzen wir voraus, daß dieser Erwartungswert existiert.

Beide Formeln zeigen, daß wir zur Berechnung des Erwartungswertes der Zufallsgröße $Y = g(X)$ nur die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (hier in Form der Größen $P(X = x_i)$ bzw. $f_X(x)$) benötigen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß im allgemeinen die Beziehung $E(g(X)) = g(E(X))$ nicht gilt. Für die Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} x\lambda^2 e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \quad \lambda > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

gilt z. B.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x x\lambda^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}$$

und für $Y = g(X) = \frac{1}{X}$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} x \lambda^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda.$$

Auf die Möglichkeiten zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $Y = g(X)$, die über die im Beispiel 2.36 angedeutete Vorgehensweise hinausgehen, können wir in diesem Rahmen nicht eingehen. Informieren Sie sich darüber in [3].

Auf einige wichtige Regeln für das Rechnen mit Erwartungswerten führen uns die folgenden Beispiele zu (2.79) und (2.80).

Beispiel 2.37: Bei der Definition der Varianz gemäß (2.76) benutzten wir die Funktion $Y = (X - m_1)^2$ mit $m_1 := E(X)$. (2.77) bzw. (2.78) ist also eine Anwendung der Formel (2.79) bzw. (2.80).

Beispiel 2.38: Wir betrachten die diskreten Zufallsgrößen X und $Y = aX + b$ (a, b konstant). Hat X die Werte x_1, x_2, \dots und die Einzelwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots , so erhalten wir nach (2.79)

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b)p_i = a \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{\infty} p_i \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + b \cdot 1 \quad \left(\text{wegen } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \right) \end{aligned}$$

und damit (falls $E(X)$ existiert)

$$E(aX + b) = aE(X) + b. \quad (2.81)$$

Für $a = 0$ entsteht hieraus

$$E(b) = b. \quad (2.82)$$

Führen Sie selbständig den Beweis der wichtigen Beziehung (2.81) für den stetigen Fall durch!

Beispiel 2.39: Es sei $Y = [(aX + b) - E(aX + b)]^2$ (a, b konstant).

Dann ist $E(Y) = D^2(aX + b)$ gemäß (2.76). Unter Anwendung von (2.81) erhalten wir

$$\begin{aligned} Y &= [aX + b - (aE(X) + b)]^2 = [aX - aE(X)]^2 = a^2[X - E(X)]^2 \\ &= a^2[X - m_1]^2 \quad \text{mit } m_1 := E(X). \end{aligned}$$

Damit wird nach (2.81) und (2.76)

$$E(Y) = E[a^2(X - m_1)^2] = a^2 E[(X - m_1)^2] = a^2 D^2(X)$$

und somit

$$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X) \quad (2.83)$$

(vorausgesetzt, daß $D^2(X)$ existiert). Für $a = 1$ erhalten wir

$$D^2(X + b) = D^2(X). \quad (2.84)$$

Der Fall $a = 0$ liefert die Beziehung

$$D^2(b) = 0,$$

d.h., die Varianz einer Konstanten ist null.

Beispiel 2.40: X sei eine Zufallsgröße, für die

$$E(X) = m_1 \quad \text{und} \quad D^2(X) = \sigma^2 \quad (\sigma^2 \neq 0)$$

existieren. Wir betrachten die Funktion

$$Y = g(X) = \frac{X - m_1}{\sigma}. \quad (2.85)$$

Die Formeln (2.81) und (2.83) mit $a = \frac{1}{\sigma}$ und $b = -\frac{m_1}{\sigma}$ liefern

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{1}{\sigma} m_1 = \frac{1}{\sigma} (m_1 - m_1) = 0$$

und

$$D^2(Y) = \frac{1}{\sigma^2} D^2(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Hiermit haben wir die Möglichkeit, einer Zufallsgröße X eine zugehörige in gewissem Sinne standardisierte Zufallsgröße Y zuzuordnen.

Definition 2.31: Eine Zufallsgröße Y nennen wir **standardisierte Zufallsgröße**, falls D.2.31

$$E(Y) = 0$$

und

$$D^2(Y) = 1$$

gilt. Die durch die Formel (2.85) definierte Transformation bezeichnen wir als **Standardisierung der Zufallsgröße X** .

2.3.3.4. Momente einer Zufallsgröße

Erwartungswert und Varianz sind Vertreter einer umfassenderen Klasse von Kennwerten, der sog. Momente.

Definition 2.32: Ist X eine beliebige Zufallsgröße, so bezeichnen wir D.2.32

$$m_k = E(X^k)$$

als das (gewöhnliche) **Moment k -ter Ordnung** ($k = 1, 2, \dots$).¹⁾

Nach (2.79) und (2.80) erhalten wir folgende Berechnungsformel:

$$m_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, & \text{falls } X \text{ diskret ist;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig ist.} \end{cases} \quad (2.86)$$

Wie wir sehen, ist der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X das Moment 1. Ordnung.

Definition 2.33: $\mu_k := E[(X - m_1)^k]$ nennen wir das **zentrale (auf das Zentrum $m_1 = E(X)$ bezogene) Moment k -ter Ordnung** ($k = 1, 2, \dots$).¹⁾ D.2.33

Stellen Sie selbstständig die zu (2.86) analogen Berechnungsformeln auf!

Das zentrale Moment 2. Ordnung einer Zufallsgröße X ist die Varianz $D^2(X)$.

Die zentralen Momente lassen sich durch die gewöhnlichen Momente ausdrücken und umgekehrt. Wir zeigen dies für die Ordnung $k = 2$:

$$D^2(X) = E[(X - m_1)^2]$$

¹⁾ Wir setzen hierbei voraus, daß die angeführten Erwartungswerte existieren.

$$\begin{aligned}
&= E[X^2 - 2m_1X + m_1^2] \\
&= E(X^2) - 2m_1E(X) + m_1^2 \\
&= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 \\
&= m_2 - m_1^2.
\end{aligned}$$

Die hier erhaltene Beziehung

$$D^2(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.87)$$

können wir oft vorteilhaft bei der Berechnung der Varianz benutzen. Bestätigen Sie selbst unter Benutzung von (2.79) und (2.80) die hier verwendete Relation:

$$E(X^2 + aX + b) = E(X^2) + aE(X) + b.$$

Abschließend wollen wir noch folgendes anmerken:

In den Abschnitten 2.3.3.1. bis 2.3.3.4. spielte der Begriff des Erwartungswertes eine zentrale Rolle. Diesen Begriff führten wir gesondert für diskrete und stetige Zufallsgrößen ein. Mit Hilfe des Stieltjes-Integrals (s. Band 2) können wir den Erwartungswert einer beliebigen Zufallsgröße X mit der Verteilungsfunktion $F_X(t) = P(X < t)$ definieren:

$$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} t \, dF_X(t).$$

Dabei setzen wir voraus, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| \, dF_X(t) < \infty$$

ist.

2.3.3.5. Zusammenfassung

Wir wollen die wichtigsten in den vorangehenden Abschnitten erhaltenen Ergebnisse über die Momente in Form einer Tabelle zusammenfassend darstellen. Damit setzen wir die Tabelle 2.2 aus 2.3.2.5. (S. 48) fort und benutzen die dort verwendete Symbolik.

Voraussetzungen:

- Die angeführten Momente existieren, d.h., die entsprechenden Reihen bzw. Integrale sind absolut konvergent.
- a und b sind beliebige reelle Konstanten.

Tabelle 2.2 (Fortsetzung)

diskrete Zufallsgröße	stetige Zufallsgröße
Erwartungswert	
$E(X) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$	$E(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, dx$
Erwartungswert einer Funktion $g(X)$	
$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$	$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \, dx$

Tabelle 2.2 (Fortsetzung)

diskrete Zufallsgröße	stetige Zufallsgröße
$E(aX + b) = aE(X) + b$	
$E(b) = b$	
Moment k -ter Ordnung	
$(k = 1, 2, \dots)$	
$m_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i$	$m_k := E(X^k);$
	$m_1 = E(X)$
	$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$
	zentrales Moment k -ter
	Ordnung ($k = 1, 2, \dots$)
	$\mu_k := E[(X - E(X))^k]$
$E[(X - E(X))^k] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_1)^k p_i$	$E[(X - E(X))^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k f_X(x) dx$
	Varianz
	$D^2(X) := E[(X - E(X))^2]$
	$D^2(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$
	$D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$
	$D^2(b) = 0$
	Standardisierung der
	Zufallsgröße X
	$[m_1 = E(X), \sigma^2 = D^2(X) \neq 0]$
	$Y = \frac{X - m_1}{\sigma}$
	$[E(Y) = 0, D^2(Y) = 1]$

2.3.3.6. Einige weitere Kennwerte

Neben den bisher behandelten Momenten einer Zufallsgröße werden (vor allem in der mathematischen Statistik) häufig folgende Kennwerte angewandt:

1. Quantile

Definition 2.34: Ist p eine beliebig reelle Zahl ($0 < p < 1$), so heißt eine Zahl Q_p mit den Eigenschaften

$$F_X(Q_p) = P(X < Q_p) \leqq p$$

und

$$P(X > Q_p) \leqq 1 - p$$

Quantil der Ordnung p (oder p -Quantil) der Zufallsgröße X . Das Quantil der Ordnung 1/2 wird als Median der Zufallsgröße X bezeichnet.

Bei gegebenem p ist Q_p durch die angeführten Ungleichungen nicht in jedem Fall eindeutig bestimmt (vgl. Aufg. 2.19). Ist $F_X(t)$ streng monoton wachsend, so ist Q_p bei beliebigem p eindeutig bestimmt. In diesem Fall existiert also zu vorgegebenem Funktionswert der Verteilungsfunktion $F_X(Q_p) = p$ eindeutig der zugehörige Wert Q_p des Argumentes dieser Funktion. Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt durch eine Skizze!

Der Median $Q_{1/2}$ ist neben dem Erwartungswert ein weiterer Kennwert zur Charakteri-

sierung des Zentrums einer Zufallsgröße. Im Fall symmetrisch verteilter Zufallsgrößen ($P(X < m_1 - x) = P(X > m_1 + x)$ für $0 \leq x < \infty$) gilt $m_1 = Q_{1/2}$.

2. Absolutes zentrales Moment 1. Ordnung

Als Kennwert für die Streuung der Werte einer Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert hatten wir das zentrale Moment 2. Ordnung benutzt. Das zentrale Moment 1. Ordnung liefert – wie in Aufgabe 2.17 zu zeigen ist – keine Information über die Eigenschaften einer Zufallsgröße. Demgegenüber stellt das absolute zentrale Moment 1. Ordnung einen weiteren Kennwert für die Streuung einer Zufallsgröße dar.

D.2.35 Definition 2.35: Der Erwartungswert der Zufallsgröße $Y = |X - m_1|$ wird als **absolutes zentrales Moment 1. Ordnung** bezeichnet:

$$E(|X - m_1|).$$

Wir setzen voraus, daß dieser Erwartungswert existiert.

3. Schiefe

Wie in der Aufgabe 2.18 am Beispiel einer stetigen Zufallsgröße nachzuweisen ist, nimmt das zentrale Moment 3. Ordnung für symmetrisch verteilte Zufallsgrößen den Wert 0 an. Es kann deshalb zur Charakterisierung der Asymmetrie oder Schiefe der Verteilung einer Zufallsgröße herangezogen werden.

D.2.36 Definition 2.36: Das auf die dritte Potenz der Standardabweichung bezogene zentrale Moment 3. Ordnung wird als **Schiefe** der Zufallsgröße X bezeichnet:

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{mit} \quad \mu_3 = E[(X - m_1)^3] \quad \text{und} \quad \sigma^2 = E[(X - m_1)^2].$$

Wir setzen voraus, daß diese Momente existieren.

4. Exzeß

D.2.37 Definition 2.37: Ist X eine Zufallsgröße mit den Momenten $\sigma^2 = E[(X - m_1)^2]$ und $\mu_4 = E[(X - m_1)^4]$, deren Existenz vorausgesetzt wird, so heißt

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Exzeß der Zufallsgröße X .

Für die Normalverteilung, die wir im Abschnitt 2.3.6.3. behandeln werden, verschwindet der Exzeß. Wir können ihn deshalb als Maß für die Abweichung der Verteilung von X gegenüber der Normalverteilung (mit gleichem Erwartungswert und gleicher Varianz) ansehen.

2.3.4. Aufgaben

- * 2.12: In einer Werkstatt arbeiten unabhängig voneinander zwei gleichartige Maschinen. Jede dieser beiden Maschinen kann im Zeitintervall $[0, T]$ mit der Wahrscheinlichkeit p ausfallen. Man bestimme die Verteilungstabelle der Zufallsgröße X mit

$$X := \text{Differenz zwischen der Anzahl der arbeitenden und ausgefallenen Maschinen}$$
und überprüfe die Eigenschaft (2.59).

2.13: Gegeben sei

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ a & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

a) Welchen Wert muß die Konstante a annehmen, damit $f_X(x)$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße ist?

b) Gesucht ist die Verteilungsfunktion von X .

2.14: Es sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = |x| e^{-x^2}.$$

Gesucht sind $F_X(t)$ und $P(0 \leq X < 1)$.

2.15: Berechnen Sie den Erwartungswert der diskreten Zufallsgröße X mit den Werten $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots$ und den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

2.16: Die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X sei durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ \frac{4}{x^5} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie

- a) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
- b) $P(1 \leq X < 2)$,
- c) $E(X)$,
- d) $D^2(X)$,
- e) $P(X \geq E(X))$.

2.17: Die Zufallsgröße X besitze den Erwartungswert $m_1 = E(X)$. Zeigen Sie, daß stets

$$\mu_1 = E(X - m_1) = 0$$

ist!

2.18: Es sei X eine stetige Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $m_1 = E(X)$. Die Dichtefunktion sei symmetrisch bzgl. m_1 :

$$f_X(m_1 - x) = f_X(m_1 + x) \quad (\forall 0 \leq x < \infty).$$

Zeigen Sie:

- 1. $P(X < m_1) = P(X > m_1) = 1/2$;
- 2. $\mu_3 = E[(X - m_1)^3] = 0$.

2.19: Die diskrete Zufallsgröße X besitze die Verteilungstabelle:

x_i	-3	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,1	0,25	0,4

Bestimmen Sie

- a) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
- b) $P(X > 0)$,
- c) $E(X)$,
- d) $D^2(X)$.

2.3.5. Einige spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Abschnitt werden wir einige spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen untersuchen, die für die Beschreibung zahlreicher Problemstellungen von Bedeutung sind.

2.3.5.1. Die Null-Eins-Verteilung

Zufallsgrößen mit einer Null-Eins-Verteilung benutzen wir zur Beschreibung zufälliger Versuche, bei denen uns nur zwei Versuchsausgänge – das Eintreten eines zufälligen Ereignisses A oder des komplementären Ereignisses \bar{A} – interessieren.

Beispiele hierfür sind

- das Werfen einer Münze ($A \dots$ „Zahl liegt oben“)
- das Prüfen eines Produkts aus einem vorgegebenen Warenposten
($A \dots$ „Das Produkt genügt den Ansprüchen“)
- die Inspektion einer technischen Anlage
($A \dots$ „Die Anlage ist funktionsfähig“)
- das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit M weißen und $N - M$ schwarzen Kugeln
($A \dots$ „Die gezogene Kugel ist weiß“).

Zur zahlenmäßigen Beschreibung eines derartigen Versuchsschemas benutzen wir die diskrete Zufallsgröße

$$X := \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ eintritt,} \end{cases}$$

mit den Werten 0 und 1.

Hat das zufällige Ereignis A die Wahrscheinlichkeit p , so erhalten wir

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p. \quad (2.88)$$

D.2.38 Definition 2.38: Eine Zufallsgröße X unterliegt einer Null-Eins-Verteilung mit dem Parameter p , wenn sie die Einzelwahrscheinlichkeiten (2.88) besitzt.

Die Verteilungstabelle der Null-Eins-Verteilung mit dem Parameter p hat damit folgende Gestalt:

x_i	0	1
p_i	$1 - p$	p

Anstelle der beiden Werte 0; 1, die in der Regel aus Zweckmäßigkeitsgründen bevorzugt werden, könnten zwei beliebige reelle Zahlen gewählt werden. In diesem Sinne ist die Null-Eins-Verteilung Spezialfall der sog. Zweipunktverteilung.

Als wichtigste Kennwerte berechnen wir Erwartungswert und Varianz.

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p, \quad (2.89)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p). \quad (2.90)$$

Beispiel 2.41: Aus einem Posten von insgesamt 500 Teilen, unter denen sich 5 Ausschußteile befinden, wird auf gut Glück ein Teil entnommen und geprüft. Wir setzen

$X :=$ zufällige Anzahl der Ausschußteile bei Entnahme eines Teils

und erhalten nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) = \frac{5}{500} = 0,01 \quad \text{und} \quad P(X = 0) = \frac{495}{500} = 0,99.$$

Weiterhin ist

$$F_X(t) = P(X < t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 0,99 & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < t \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion von X und

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,01, \\ D^2(X) &= 0,0099. \end{aligned}$$

2.3.5.2. Die Binomialverteilung

Typische Beispiele für die hier zu behandelnden Zufallsgrößen sind

- die zufällige Anzahl der in einem bestimmten Zeitabschnitt ausfallenden Maschinen von insgesamt 15 voneinander unabhängig arbeitenden Maschinen gleicher Bauart unter der Annahme gleicher Einsatzbedingungen für alle 15 Maschinen;
- die zufällige Anzahl der Treffer bei 20 voneinander unabhängigen Schüssen gleicher Treffwahrscheinlichkeit;
- die zufällige Anzahl der Ausschußteile unter 100 voneinander unabhängig produzierten Teilen, wenn jedes produzierte Teil mit der Wahrscheinlichkeit 0,03 Ausschuß ist.

Allen diesen Beispielen liegt das sog. *Bernoullische*¹⁾ Versuchsschema zugrunde:

- Wir führen n ($n = 1, 2, \dots$) voneinander unabhängige Versuche durch. In jedem dieser Versuche interessieren uns nur zwei Versuchsausgänge (das Eintreten eines zufälligen Ereignisses A bzw. des komplementären Ereignisses \bar{A}).
- Wir setzen voraus, daß die Wahrscheinlichkeit von A in jedem Versuch die gleiche ist:

$$P(A) = p \quad (0 < p < 1).$$

Ausgehend von diesem Versuchsschema untersuchen wir die Zufallsgröße

$X_n :=$ zufällige Anzahl der Versuche (von insgesamt n Versuchen), in denen A eintritt.

X_n besitzt die Werte 0, 1, ..., n . Für $n = 1$ unterliegt X_1 einer Null-Eins-Verteilung.

Zur Bestimmung der Einzelwahrscheinlichkeiten von X_n

$$P(X_n = k) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

gehen wir zunächst auf das Beispiel 2.29 im Abschnitt 2.2.4. zurück.

Beispiel 2.29: Es sei

$X_4 :=$ zufällige Anzahl der Treffer bei 4 unabhängigen Schüssen.

Laut Voraussetzung liegt das Bernoullische Versuchsschema mit $n = 4$ und $p = 1/2$ (Treffwahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Schuß) vor.

Mit Hilfe der im Abschnitt 2.2.4. (vgl. S. 34) bei der Behandlung des Beispiels eingeführten Ereignisse B_0, B_1, \dots, B_4 ergeben sich die Einzelwahrscheinlichkeiten (Bild 2.17)

$$P(X_4 = 0) = P(B_0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625,$$

$$P(X_4 = 1) = P(B_1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-1} = 0,25,$$

¹⁾ Jacob Bernoulli (1654–1705), Schweizer Mathematiker.

$$P(X_4 = 2) = P(B_2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = 0,375,$$

$$P(X_4 = 3) = P(B_3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-3} = 0,25,$$

$$P(X_4 = 4) = P(B_4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-4} = 0,0625.$$

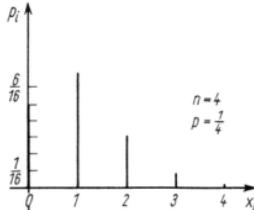
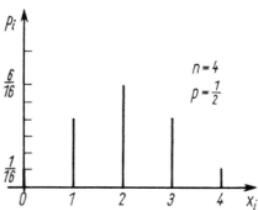


Bild 2.17. Gegenüberstellung der Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 4$, $p = 1/2$ und der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 4$, $p = 1/4$

Für beliebige n ($n = 1, 2, \dots$) und p ($0 < p < 1$) erhalten wir die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (2.91)$$

Leiten Sie selbständig in Anlehnung an die im Beispiel 2.29 demonstrierte Vorgehensweise die Einzelwahrscheinlichkeiten (2.91) her, und zeigen Sie unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes, daß

$$\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$$

ist.

D.2.39 Definition 2.39: Eine diskrete Zufallsgröße X_n unterliegt einer **Binomialverteilung mit den Parametern n und p** , falls sie die Einzelwahrscheinlichkeiten (2.91) besitzt.

X_n besitzt die Verteilungstabelle

x_i	0	1	...	k	...	n
$P(X_n = x_i)$	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$...	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$...	p^n

und die Verteilungsfunktion

$$F_{X_n}(t) = P(X_n < t) = \sum_{\substack{k \\ 0 \leq k < t}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (2.92)$$

Für Erwartungswert und Varianz erhalten wir

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np, \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} D^2(X_n) &= E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2 = np(1-p). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Beispiel 2.42: Auf ein Ziel werden unabhängig voneinander 20 Schüsse abgegeben. Jeder einzelne Schuß trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit 0,8.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

- a) genau 5 Treffer zu verzeichnen sind,
- b) wenigstens ein Treffer gelingt,
- c) höchstens 10 Treffer erzielt werden;
- d) außerdem ist die mittlere Anzahl der Treffer zu berechnen.

Wir setzen

$$X_{20} := \text{zufällige Anzahl der erzielten Treffer bei } 20 \text{ unabhängigen Schüssen.}$$

Diese Zufallsgröße unterliegt einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0,8$.

- a) $P(X_{20} = 5) = \binom{20}{5} 0,8^5 \cdot 0,2^{15};$
- b) $P(X_{20} \geq 1) = \sum_{k=1}^{20} P(X_{20} = k) = \sum_{k=1}^{20} \binom{20}{k} 0,8^k 0,2^{20-k}$
oder
$$P(X_{20} \geq 1) = 1 - P(X_{20} = 0) = 1 - 0,2^{20};$$
- c) $P(X_{20} \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} P(X_{20} = k) = \sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k} 0,8^k 0,2^{20-k};$
- d) $E(X_{20}) = 20 \cdot 0,8 = 16.$

Anmerkung: Die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = P(X_n = k)$ gemäß (2.91) genügen den Rekursionsbeziehungen

$$p_0 = (1-p)^n,$$

$$p_k = \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{1-p} p_{k-1} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

bzw.

$$p_n = p^n,$$

$$p_k = \frac{1-p}{p} \frac{k+1}{n-k} p_{k+1} \quad \text{für } k = n-1, n-2, \dots, 0,$$

die die Grundlage für ein Rechnerprogramm bilden können. (Zur Berechnung der Verteilungsfunktion s. Anmerkung S. 43)

2.3.5.3. Die Poissonverteilung¹⁾

Typische Beispiele für Zufallsgrößen, die wir – zumindest näherungsweise – als poissonverteilt ansehen können, sind

¹⁾ Simeon Denis Poisson (1781–1840), französischer Mathematiker.

- die zufällige Anzahl von nichtkeimenden Samenkörnern aus einer Packung von 1000 Körnern, wenn von diesem Saatgut durchschnittlich 1% nicht keimt;
- die zufällige Anzahl der Telefonanrufe, die in einem bestimmten Zeitabschnitt in einer Telefonzentrale einlaufen;
- die zufällige Anzahl der α -Teilchen, die von einer radioaktiven Substanz in einem bestimmten Zeitintervall emittiert werden.

Zwar könnten wir diese Zufallsgrößen mit Hilfe der Binomialverteilung beschreiben, jedoch wird die Bestimmung ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten hier durch folgende Besonderheiten des der Binomialverteilung zugrunde liegenden Bernoullischen Versuchsschemas erschwert:

- Die Anzahl n der durchgeführten unabhängigen Versuche ist sehr groß (im 3. Beispiel die Anzahl der am Zerfallsprozeß beteiligten Atomkerne);
- Die Wahrscheinlichkeit $p_n = P(A)$ des interessierenden Ereignisses A in jedem einzelnen Versuch (bei einer Serie von n Versuchen) ist sehr klein¹⁾ (im 3. Beispiel die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines einzelnen Kerns im betrachteten Zeitintervall).

Wir setzen

$X :=$ zufällige Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis A eintritt.

Unter den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \infty, \\ p_n &\rightarrow 0, \\ np_n &\rightarrow \lambda > 0 \end{aligned}$$

lassen sich für X die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.95)$$

als Grenzwerte der Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung herleiten.²⁾

D.2.40 Definition 2.40: Eine diskrete Zufallsgröße X unterliegt einer Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn sie die Einzelwahrscheinlichkeiten (2.95) besitzt.

Verteilungstabelle und Verteilungsfunktion lauten:

x_i	0	1	2	...	k	...
$P(X = x_i)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$...

$$F_X(t) = P(X < t) = \sum_{0 \leq k < t} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.96)$$

Die Einzelwahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung sind in der Tafel 6 des Anhangs für ausgewählte Parameterwerte tabelliert.

Bestätigen Sie selbstständig die folgenden Ergebnisse für Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda, \quad (2.97)$$

¹⁾ Die Poissonverteilung wird aus diesem Grund häufig auch als Gesetz der „seltenen“ Ereignisse bezeichnet.

²⁾ Den hier angedeuteten Zusammenhang zwischen Binomial- und Poissonverteilung präzisieren wir im Abschnitt 2.3.10.3. bei der Behandlung des sog. Poissonschen Grenzwertsatzes.

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda. \quad (2.98)$$

Beispiel 2.43: Eine Fernsprechvermittlung erhalte während der Spitzenbelastungszeit durchschnittlich 300 Anrufe pro Stunde. Entsprechend ihrer Kapazität können maximal 10 Verbindungen pro Minute hergestellt werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Spitzenbelastungszeit die Anzahl der Anrufe die Kapazität übersteigt.

Lösung:

$X :=$ zufällige Anzahl der Anrufe pro Minute.

Wir können diese Zufallsgröße als poissonverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = E(X) = \frac{300}{60} = 5$$

ansehen (Bild 2.18).

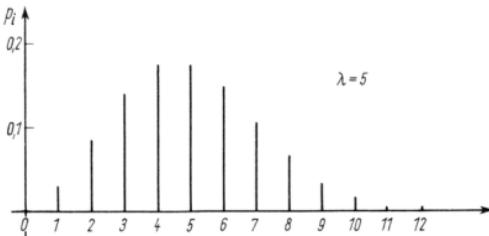


Bild 2.18. Einzelwahrscheinlichkeiten einer Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{10} P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5} \\ &\approx 0,014. \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = k)$ gemäß (2.95) genügen der Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-\lambda}, \\ p_k &= \frac{\lambda}{k} p_{k-1} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(Zur Berechnung der Verteilungsfunktion s. Anmerkung S. 43)

2.3.5.4. Die hypergeometrische Verteilung

Wir betrachten ein Beispiel aus der Qualitätskontrolle.

Beispiel 2.44: Eine Lieferung von 100 Erzeugnissen wird einer Qualitätskontrolle unterzogen. Dabei werden auf gut Glück 5 der 100 Erzeugnisse herausgegriffen und überprüft. Es sei X die zufällige Anzahl der dabei festgestellten fehlerhaften Erzeugnisse.

Gesucht ist $P(X = k)$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) unter der Voraussetzung, daß die gesamte Lieferung 10 fehlerhafte Teile enthält.

Bevor wir uns der Lösung dieses Problems zuwenden, formulieren wir die hier vorliegende Aufgabenstellung in Form eines Urnenschemas:

In einer Urne befinden sich M schwarze und $N - M$ weiße Kugeln. Ohne Zurücklegen werden n Kugeln auf gut Glück der Urne entnommen.

Zu untersuchen ist die Zufallsgröße

$X :=$ zufällige Anzahl der dabei gezogenen schwarzen Kugeln.

X unterliegt einer Verteilung, deren Einzelwahrscheinlichkeiten wir nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (unter Benutzung von Ergebnissen aus der Kombinatorik) bestimmen:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad (2.99)$$

k durchläuft dabei alle ganzen Zahlen, die die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq k \leq n, \\ k &\leq M, \\ n - k &\leq N - M \end{aligned}$$

erfüllen.

Anmerkung: Wenden wir das gleiche Versuchsschema mit Zurücklegen an, so erhalten wir eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und $p = M/N$.

D.2.41 Definition 2.41: Eine diskrete Zufallsgröße X unterliegt einer **hypergeometrischen Verteilung**, wenn ihre Einzelwahrscheinlichkeiten durch (2.99) gegeben sind.

Verteilungstabelle (hier für den Fall $n \leq M, n \leq N - M$), Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz der hypergeometrischen Verteilung sind:

x_i	0	1	...	k	...	n
$P(X = x_i)$	$\frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{\binom{M}{1} \binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}}$...	$\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$...	$\frac{\binom{M}{n}}{\binom{N}{n}}$

$$F_X(t) = \sum_{\substack{k \\ 0 \leq k < t}} \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad (2.100)$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n \frac{M}{N}, \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
 D^2(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(n \frac{M}{N}\right)^2 \\
 &= n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Wir kehren nun zum Beispiel 2.44 zurück. Hier ist

$$\begin{aligned}
 N &= 100, \\
 M &= 10, \\
 n &= 5.
 \end{aligned}$$

Für die hier eingeführte Zufallsgröße stellen wir die Verteilungstabelle auf (Bild 2.19):

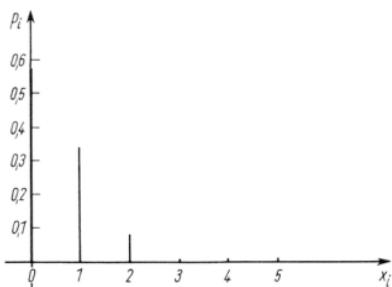


Bild 2.19. Einzelwahrscheinlichkeiten der hypergeometrischen Verteilung aus Beispiel 2.44 ($N = 100$, $M = 10$, $n = 5$)

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,5837	0,3394	0,0694	0,0064	0,0002	0,0000

Nehmen wir an, daß vereinbart wurde, die Lieferung anzunehmen, wenn unter den 5 geprüften Erzeugnissen höchstens ein fehlerhaftes Erzeugnis gefunden wird, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Annahme

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\
 &= \frac{\binom{10}{0} \binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{1} \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} = 0,5837 + 0,3394 = 0,9231.
 \end{aligned}$$

2.3.5.5. Zusammenfassung

In Form einer Übersicht wollen wir in Tabelle 2.3a die wichtigsten Charakteristiken einiger diskreter Zufallsgrößen zusammenstellen (s. S. 68).

2.3.6. Einige spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im folgenden sollen einige spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet werden, die häufig in der Praxis Anwendung finden.

Tabelle 2.3a

Verteilung der Zufallsgröße X	Parameter	Einzelwahrscheinlichkeiten	$E(X)$	$D^2(X)$	Bemerkungen
Binomialverteilung	$n = 1, 2, \dots;$ $0 < p < 1$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)	np	$np(1-p)$	$n = 1:$ Null-Eins-Verteilung
Poissonverteilung	$\lambda > 0$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	λ	λ	
Hypergeometrische Verteilung	$N = 1, 2, \dots$ $M = 1, 2, \dots, N$ $n = 1, 2, \dots, N$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ ($0 \leq k \leq n, k \leq M,$ $n - k \leq N - M,$ k ganzzahlig)	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$	
Geometrische Verteilung	$0 < p < 1$	$P(X = k) = (1-p)p^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$)	$\frac{1}{1-p}$	$\frac{p}{(1-p)^2}$	
Gleichmäßige diskrete Verteilung	$n = 1, 2, \dots$	$P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$)	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right]^2$	

2.3.6.1. Die gleichmäßige stetige Verteilung

Wir gehen von folgendem Beispiel aus.

Beispiel 2.45: Die Effektivität eines Produktionsprozesses werde u. a. durch einen Einflußfaktor X (z. B. Umwelteinfluß, Merkmal der verwendeten Rohstoffe usw.) beeinflußt. Von diesem Einflußfaktor sei lediglich bekannt, daß er im Intervall $[a, b]$ variiert. Stehen keine weiteren Informationen zur Verfügung, so werden wir für eine erste Untersuchung von der Hypothese ausgehen, daß keiner der Werte aus dem Intervall $[a, b]$ bevorzugt wäre. Sobald weitere Informationen verfügbar sind, ist diese Ausgangshypothese natürlich zu überprüfen.

Als einfaches mathematisches Modell dieses Sachverhaltes betrachten wir folgenden zufälligen Versuch:

Aus dem Intervall $[a, b]$ wählen wir zufällig einen Punkt, wobei kein Punkt aus $[a, b]$ vom Zufall begünstigt werde. Mit X bezeichnen wir die Koordinate dieses zufällig gewählten Punktes. Für die Berechnung der Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = P(X < t)$$

betrachten wir zunächst den Fall $a < t \leq b$. In diesem Fall gibt $F_X(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der zufällig gewählte Punkt im Intervall $[a, t]$ liegt. Nach der geometrischen Definition der Wahrscheinlichkeit erhalten wir für $a < t \leq b$

$$F_X(t) = P(X < t) = P(a \leq X < t) = \frac{t - a}{b - a}.$$

Für beliebige t ist damit

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq a, \\ \frac{t - a}{b - a} & \text{für } a < t \leq b, \\ 1 & \text{für } b < t. \end{cases} \quad (2.103)$$

Die zugehörige Dichtefunktion bestimmen wir nach Formel (2.63) bzw. (2.70):

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{für } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.104)$$

Definition 2.42: Eine stetige Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion (2.104) bezeichnen wir als **D.2.42 gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ verteilt** (Bild 2.20).

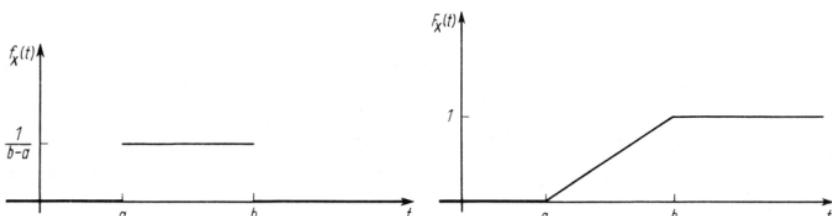


Bild 2.20. Dichte- und Verteilungsfunktion einer auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig verteilten Zufallsgröße X

Wegen der Form der Dichte (vgl. Bild 2.20) ist auch die Bezeichnung „Rechteckverteilung“ gebräuchlich.

Erwartungswert und Varianz berechnen wir nach Formel (2.75) bzw. (2.87)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}, \quad (2.105)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.106)$$

2.3.6.2. Die Exponentialverteilung

Die Bedeutung der Exponentialverteilung liegt u. a. darin, daß ihre Anwendung die Beschreibung einer Reihe anwendungsbezogener mathematischer Modelle wesentlich vereinfacht. Die Darlegung der Gründe hierfür übersteigt den Rahmen dieses Bandes (Näheres finden Sie im Band 19/1.).

Erfolgreiche Anwendungen der Exponentialverteilung finden wir u. a. bei folgenden Problemen:

- zufällige Zeitspanne bis zum ersten Auftreten eines Ereignisses;
- zufällige Zeit bis zum ersten Ausfall von Bauelementen, bei denen Alterungserscheinungen vernachlässigt werden können (z. B. gewisse elektronische Bauelemente);
- zufällige Zeitspanne für die Durchführung bestimmter Instandhaltungsmaßnahmen an technischen Anlagen;
- zufällige Zeitspanne für gewisse Dienstleistungen;
- zufällige Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anrufen in einer Telefonzentrale.

D.2.43 Definition 2.43: Eine stetige Zufallsgröße X unterliegt einer **Exponentialverteilung** (mit dem Parameter $\lambda > 0$), wenn sie die Dichtefunktion

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad (2.107)$$

besitzt (Bild 2.21).

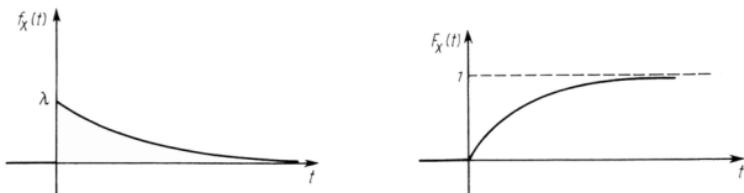


Bild 2.21. Dichte- und Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

Diese Verteilung haben wir schon als Musterbeispiel 2.35 in den Abschnitten 2.3.2.4. und 2.3.3. benutzt, so daß wir uns hier auf die Zusammenstellung der Ergebnisse beschränken:

$$F_X(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0, \end{cases} \quad (2.108a)$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \quad (2.108b)$$

$$D^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.108c)$$

Beispiel 2.46: Die zufällige Zeit (gemessen in h), die zur Reparatur eines Fernsehgerätes aufgewendet werden muß, unterliege einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0,5$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Reparatur eines beliebigen Gerätes mindestens 3 Stunden aufgewendet werden müssen.

Wieviel Stunden werden im Durchschnitt zur Reparatur eines Gerätes benötigt?

Lösung:

$X :=$ zufällige Reparaturzeit in h,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - F_X(3)$$

$$= 1 - [1 - e^{-0,5 \cdot 3}]$$

$$= e^{-1,5}$$

$$= 0,2231,$$

$$E(X) = \frac{1}{0,5} = 2.$$

2.3.6.3. Die Normalverteilung

Mit der Normalverteilung lernen wir eine der grundlegenden Verteilungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik kennen. Sie findet darüber hinaus Anwendung bei zahlreichen praktischen Problemen.

Als normalverteilt können wir Zufallsgrößen ansehen, die durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflußgröße nur einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert. Wir werden diese Problematik im Abschnitt 2.3.10.4. in Form des zentralen Grenzwertsatzes präzisieren.

Beispiele für normalverteilte Zufallsgrößen sind:

- zufällige Beobachtungs- oder Meßfehler;
- zufällige Abweichungen vom Nennmaß bei der Fertigung von Werkstücken;
- zufällige Flugweite eines Geschosses;
- Effekte beim Prozeß der Brownschen Molekularbewegung.

Definition 2.44: Eine stetige Zufallsgröße X unterliegt einer **Normalverteilung** (mit den Parametern μ und $\sigma > 0$), wenn ihre Dichtefunktion durch

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (2.109)$$

gegeben ist.

Wir schreiben abkürzend: X ist $N(\mu; \sigma)$ -verteilt.

Gemäß Formel (2.63) erhalten wir die zugehörige Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx. \quad (2.110)$$

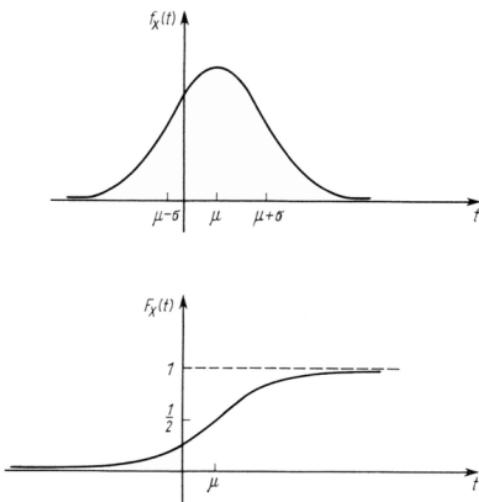


Bild 2.22. Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 1$, $\sigma = 1,5$

In Bild 2.22 sind Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung skizziert.

Aufschluß über die Bedeutung der Verteilungsparameter μ und σ gewinnen wir bei der Bestimmung von Erwartungswert und Varianz:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu, \quad (2.111)$$

$$D^2(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \sigma^2. \quad (2.112)$$

Um die Abhängigkeit der durch (2.109) und (2.110) gegebenen Dichte- und Verteilungsfunktion von den Parametern μ und σ hervorzuheben, verwenden wir die Symbolik

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \varphi(t; \mu, \sigma), \\ F_X(t) &= \Phi(t; \mu, \sigma). \end{aligned}$$

In Bild 2.23 ist der Einfluß von μ und σ auf die Gestalt der Dichtefunktion $\varphi(t; \mu, \sigma)$ dargestellt:

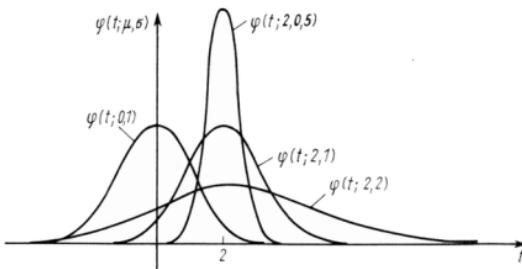


Bild 2.23. Einfluß der Parameter σ und μ auf die Gestalt der Dichtefunktion der Normalverteilung

- $\varphi(t; \mu, \sigma)$ hat im Punkt $\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ ihr Maximum;
- $\varphi(t; \mu, \sigma)$ ist symmetrisch bezüglich der Geraden $t = \mu$;
- die Abszissen der Wendepunkte sind $t_{1,2} = \mu \pm \sigma$;
- eine Veränderung des Erwartungswertes μ ergibt eine entsprechende Verschiebung der Dichte entlang der t -Achse;
- eine Veränderung der Standardabweichung σ bewirkt eine Streckung bzw. Stauchung der Dichtefunktion; je kleiner die Standardabweichung σ ist, desto stärker ist die Konzentration der „Wahrscheinlichkeitsmasse“ in der Umgebung des Erwartungswertes μ , d. h., desto kleiner ist die Streuung der Zufallsgröße um den Erwartungswert μ (wir finden hier die Tatsache bestätigt, daß $\sigma = \sqrt{D^2(X)}$ ein sinnvolles Streuungsmaß ist).

Zur Vereinfachung des Arbeitens mit normalverteilten Zufallsgrößen ist in Tafel 1 bzw. 2 des Anhangs die Dichtefunktion $\varphi(t; 0, 1)$ bzw. die Verteilungsfunktion $\Phi(t; 0, 1)$ der standardisierten Normalverteilung ($\mu = 0, \sigma = 1$) tabelliert.¹⁾ In diesen Tafeln ist nur der Bereich der nichtnegativen Argumente ($t \geq 0$) erfaßt.

Wegen der Symmetrie der Dichtefunktion erhalten wir die Funktionswerte für negative Argumente aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\varphi(-t; 0, 1) &= \varphi(t; 0, 1), \\ \Phi(-t; 0, 1) &= 1 - \Phi(t; 0, 1).\end{aligned}\tag{2.113}$$

Für die rechentechnische Behandlung eignet sich folgende Approximation (nach Abramowitz/Stegun):

$$1 - \Phi(t; 0, 1) = \varphi(t; 0, 1) \sum_{i=1}^5 b_i x^i + \varepsilon(t) \quad (t \geq 0)$$

mit

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{1+at}, \quad a = 0,231\,641\,9, \\ b_1 &= 0,319\,381\,530, \\ b_2 &= -0,356\,563\,782, \\ b_3 &= 1,781\,477\,937, \\ b_4 &= -1,821\,255\,978, \\ b_5 &= 1,330\,274\,429.\end{aligned}$$

Dabei ist $|\varepsilon(t)| < 7,5 \cdot 10^{-8}$.

Die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X mit $E(X) = \mu$ und $D^2(X) = \sigma^2$ läßt sich mit Hilfe von (2.85) und (2.113) ermitteln. Die Vorgehensweise ist folgendermaßen:

1. Gemäß (2.85) bilden wir die standardisierte Zufallsgröße

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma};$$

¹⁾ Für Anwendungen in der mathematischen Statistik ist häufig der Einsatz von Tabellen für die Funktionen

$$\Phi_0(t; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx$$

und

$$\Phi_1(t; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx \quad (t \geq 0)$$

günstig.

Y unterliegt einer Normalverteilung mit

$$E(Y) = 0 \quad \text{und} \quad D^2(Y) = 1.$$

Damit können wir Werte der Funktion

$$F_Y(t) = P(Y < t) = \Phi(t; 0, 1)$$

aus Tafel 2 entnehmen.

2. Zur Bestimmung der gesuchten Verteilungsfunktion nehmen wir folgende Umformungen vor:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= P(X < t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{t - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Y < \frac{t - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}; 0, 1\right). \end{aligned}$$

3. Weiterhin soll die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X einen Wert aus dem Intervall $[a, b]$ annimmt ($a < b$), angegeben werden.

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Y < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)^1. \end{aligned}$$

Nach Formel (2.69) erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F_Y\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_Y\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}; 0, 1\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}; 0, 1\right). \end{aligned}$$

Beispiel 2.47: Wir betrachten den Fall $\mu = 6$, $\sigma = 2$.

1. Für $t = 7$ erhalten wir

$$\begin{aligned} F_X(7) &= P(X < 7) = P\left(Y < \frac{7 - 6}{2}\right) = \Phi\left(\frac{7 - 6}{2}; 0, 1\right) \\ &= \Phi(0,5; 0,1) \\ &= 0,691462. \end{aligned}$$

2. Für $t = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_X(3) &= P(X < 3) = P\left(Y < \frac{3 - 6}{2}\right) \\ &= \Phi(-1,5; 0, 1) \end{aligned}$$

¹⁾ Hier benutzen wir die Eigenschaft der stetigen Zufallsgröße Y , daß für alle reellen t $P(Y = t) = 0$ ist (vgl. Abschnitt 2.3.2.3.).

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \Phi(1,5; 0, 1) \\
 &= 1 - 0,933\,193 \\
 &= 0,066\,807.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad P(6,2 \leq X \leq 8) &= P\left(\frac{6,2 - 6}{2} \leq Y \leq \frac{8 - 6}{2}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{8 - 6}{2}; 0, 1\right) - \Phi\left(\frac{6,2 - 6}{2}; 0, 1\right) \\
 &= \Phi(1; 0, 1) - \Phi(0,1; 0, 1) \\
 &= 0,841\,345 - 0,539\,828 \\
 &= 0,301\,517. \\
 4. \quad P(4,6 \leq X \leq 7) &= P\left(\frac{4,6 - 6}{2} \leq Y \leq \frac{7 - 6}{2}\right) \\
 &= \Phi(0,5; 0, 1) - \Phi(-0,7; 0, 1) \\
 &= \Phi(0,5; 0, 1) - [1 - \Phi(0,7; 0, 1)] \\
 &= \Phi(0,5; 0, 1) + \Phi(0,7; 0, 1) - 1 \\
 &= 0,691\,462 + 0,758\,036 - 1 \\
 &= 0,449\,498.
 \end{aligned}$$

Die Bedeutung des Parameters σ einer Normalverteilung wird bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß diese Zufallsgröße Werte aus den Intervallen $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ ($k = 1, 2, 3$) annimmt, verdeutlicht:

$$\begin{aligned}
 P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) &= P(|X - \mu| \leq k\sigma) \\
 &= P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \leq k\right) \\
 &= P(|Y| \leq k) \\
 &= \Phi(k; 0, 1) - \Phi(-k; 0, 1) \\
 &= \Phi(k; 0, 1) - [1 - \Phi(k; 0, 1)] \\
 &= 2\Phi(k; 0, 1) - 1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(|X - \mu| \leq \sigma) &= 2 \cdot 0,841\,345 - 1 = 0,682\,690, \\
 P(|X - \mu| \leq 2\sigma) &= 2 \cdot 0,977\,250 - 1 = 0,954\,500, \\
 P(|X - \mu| \leq 3\sigma) &= 2 \cdot 0,998\,650 - 1 = 0,997\,300.
 \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten dafür, daß eine normalverteilte Zufallsgröße X einen Wert innerhalb der „ $k\sigma$ -Grenzen“ ($k = 1, 2, 3$) annimmt, stellen wir in der folgenden Tabelle zusammen:

k	$P(X - \mu \leq k\sigma) = P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$
1	0,682 690
2	0,954 500
3	0,997 300

Das für $k = 3$ erhaltene Ergebnis wird auch als 3σ -Regel bezeichnet.

Beispiel 2.48: Ein Werkstück besitzt die gewünschte Qualität, wenn die Abweichung eines bestimmten Maßes vom entsprechenden Nennmaß dem Betrage nach nicht größer als 3,6 mm ist. Der Herstellungsprozeß sei so beschaffen, daß dieses Maß als eine normalverteilte Zufallsgröße angesehen werden kann, deren Erwartungswert mit dem Nennmaß übereinstimmt. Weiterhin sei $\sigma = 3$ mm bekannt.

Wieviel Prozent der Werkstücke einer Serie werden durchschnittlich mit gewünschter Qualität produziert?

Lösung:

$X :=$ zufällige Abweichung vom Nennmaß,

X ist normalverteilt mit

$$E(X) = \mu = 0 \quad \text{und} \quad D^2(X) = \sigma^2 = 9.$$

$Y = \frac{X}{\sigma} = \frac{X}{3}$ ist die zugehörige standardisierte Zufallsgröße.

$$\begin{aligned} P(|X| \leq 3,6) &= P\left(\left|\frac{X}{3}\right| \leq \frac{3,6}{3}\right) \\ &= P(|Y| \leq 1,2) \\ &= \Phi(1,2; 0, 1) - \Phi(-1,2; 0, 1) \\ &= \Phi(1,2; 0, 1) - [1 - \Phi(1,2; 0, 1)] \\ &= 2\Phi(1,2; 0, 1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,88493 - 1 \\ &= 0,76986. \end{aligned}$$

Etwa 77 % aller Werkstücke genügen durchschnittlich den Qualitätsansprüchen.

2.3.6.4. Zusammenfassung

In Form einer Übersicht wollen wir in Tabelle 2.3.b die wichtigsten Charakteristika einiger stetiger Zufallsgrößen zusammenstellen (s. S. 77).

Auf Grund der großen Bedeutung für die Anwendung nehmen wir in diese Übersicht die Erlang-, Weibull-Verteilung und die logarithmische Normalverteilung mit auf.

2.3.7. Mehrdimensionale Zufallsgrößen

2.3.7.1. Einleitung

Bisher haben wir bei zufälligen Versuchen das Verhalten einer Größe untersucht. In der Praxis ist es aber oft notwendig, mehrere Größen gleichzeitig zu beobachten. Wir werden so zur Problematik der *mehrdimensionalen Zufallsgrößen* geführt, die wir auch als *Zufallsvektoren*¹⁾ bezeichnen.

Im folgenden werden wir uns auf zweidimensionale Zufallsgrößen beschränken; die bei ihnen geltenden Beziehungen lassen sich leicht auf n -dimensionale Zufallsgrößen ($n > 2$) verallgemeinern.

Die Einführung mehrdimensionaler Zufallsgrößen wollen wir in den folgenden beiden Beispielen motivieren:

Beispiel 2.49: Ein System besteht aus zwei gleichartigen parallel geschalteten Elementen. Bei Ausfall eines der beiden Elemente arbeitet das System weiter, und es wird sofort mit der Reparatur des fehlerhaften Elements begonnen. Eine ausfallfreie Arbeit des Systems ist dann gegeben, wenn die Reparatur vor dem Ausfall des anderen Elementes beendet ist. Es ist daher notwendig, neben der zufälligen Reparaturzeit auch die ausfallfreie Arbeitszeit des zweiten Elementes zu untersuchen.

Dieses Problem können wir in folgender Weise behandeln. Es sei

$X :=$ zufällige Reparaturzeit des zur Zeit t ausgefallenen Elementes,

$Y :=$ zufällige Zeit, die das zum Zeitpunkt t arbeitende Element nach t noch ausfallfrei arbeitet.

¹⁾ Diese Bezeichnung wird im Band 19/2 dieser Reihe verwendet.

Tabelle 2.3 b

Verteilung der Zufallsgröße X	Parameter	Dichtefunktion	$E(X)$	$D^2(X)$	Bemerkungen
Gleichmäßige stetige Verteilung	$a, b, a < b$	$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Exponentielle Verteilung	$\lambda > 0$	$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
Normalverteilung	$-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$	$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty < t < +\infty)$	μ	σ^2	
Logarithmische Normalverteilung	$-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$	$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	X unterliegt einer logarithmischen Normalverteilung, wenn $\ln X$ eine Normalverteilung besitzt
Weibullverteilung	$\lambda > 0, \alpha > 0$	$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^\frac{1}{\alpha}}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^\frac{2}{\alpha}}$	Γ : Gammafunktion, Anwendung als Lebensdauerverteilung, $\alpha = 1$: Exponentialverteilung
Erlang-verteilung	$\lambda > 0, k = 1, 2, \dots$	$f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$	$k = 1$: Exponentialverteilung Die Summe von k unabhängigen exponentiellverteilten Zufallsgrößen mit dem Parameter λ unterliegt einer Erlangverteilung

Durch Zusammenfassung der Zufallsgrößen X und Y zum geordneten Paar (X, Y) erhalten wir eine zweidimensionale Zufallsgröße, mit deren Hilfe die Arbeitsweise des Systems untersucht werden kann.

Beispiel 2.50: In einem Produktionsprozeß werden während eines bestimmten Zeitintervales n gleiche Teile gefertigt. Hiervon gehört eine zufällige Zahl der einwandfreien Teile zur Sorte 1 und die anderen einwandfreien Teile zur Sorte 2. Der Rest entspricht nicht den Qualitätsanforderungen. Durch die Festlegungen

$$X := \text{zufällige Zahl der Teile, die zur Sorte 1 gehören,}$$

$$Y := \text{zufällige Zahl der Teile, die zur Sorte 2 gehören,}$$

ist mit der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) die Qualitätsbeschreibung des Produktionsprozesses möglich.

Im eindimensionalen Fall unterscheiden wir zwischen stetigen und diskreten Zufallsgrößen. Auch bei mehrdimensionalen Zufallsgrößen sind derartige Unterscheidungen möglich. Im Beispiel 2.49 sind X und Y stetige Zufallsgrößen. Entsprechend bezeichnen wir (X, Y) als *stetige zweidimensionale Zufallsgröße*. Im Beispiel 2.50 ist durch (X, Y) eine *diskrete zweidimensionale Zufallsgröße* gegeben. Natürlich treten auch solche zweidimensionalen Zufallsgrößen (X, Y) auf, bei welchen die eine Zufallsgröße, z. B. X , diskret und die andere, z. B. Y , stetig ist.

2.3.7.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer mehrdimensionalen Zufallsgröße

Einzelwahrscheinlichkeiten im diskreten Fall:

Bei einer diskreten eindimensionalen Zufallsgröße X haben wir durch Angabe der Werte x_i ($i = 1, 2, \dots$) und der Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$ die Verteilungstabelle gewonnen.

Betrachten wir im Falle einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße (X, Y) ihre Wertepaare (x_i, y_k) ($i, k = 1, 2, \dots$) und die entsprechenden Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik}$, so hat die Verteilungstabelle von (X, Y) die in Tab. 2.4 angegebene Form.

Tabelle 2.4. Verteilungstabelle einer zweidimensionalen diskreten Zufallsgröße (X, Y)

X	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_s	Σ
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	...	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	p_{n4}	...	p_{ns}	$p_{n\cdot}$
Σ	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	$p_{\cdot 4}$...	$p_{\cdot s}$	1

In Tab. 2.4 wurde zur Vereinfachung angenommen, daß die Zufallsgrößen X und Y jeweils eine endliche Anzahl von Werten besitzen. In ihr sind neben den Einzelwahrscheinlichkeiten p_{ik} auch die Größen $p_{i\cdot}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und $p_{\cdot k}$ ($k = 1, 2, \dots, s$) angegeben. Sie werden wie folgt eingeführt:

$$p_{i\cdot} := \sum_{k=1}^s P(X = x_i, Y = y_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.114)$$

und

$$p_{\cdot k} := \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_k) \quad (k = 1, 2, \dots, s); \quad (2.115)$$

$p_{i \cdot} = P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß X den Wert x_i und Y einen beliebigen Wert annimmt. Geben Sie entsprechend $p_{\cdot k} = P(Y = y_k)$ verbal an!

Definition 2.45: Die Gesamtheit der Wahrscheinlichkeiten

D.2.45

$$p_{i \cdot} = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

bzw.

$$p_{\cdot k} = P(Y = y_k), \quad k = 1, 2, \dots, s,$$

wird als **Randverteilung der Zufallsgröße X bzw. Y** (in der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y)) bezeichnet.

Für diese gilt:

$$\sum_{i=1}^n p_{i \cdot} = \sum_{k=1}^s p_{\cdot k} = 1.$$

Beispiel 2.50: Präzisieren wir die Fragestellung des Beispiels 2.50 durch die Annahme, daß unabhängig voneinander 5 Teile produziert werden und mit den Wahrscheinlichkeiten 0,85 bzw. 0,1 ein Teil zur Sorte 1 bzw. Sorte 2 gehört, so erhalten wir die in Tab.2.5 angegebene Verteilungstabelle.

Tabelle 2.5. Verteilungstabelle der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) aus Beispiel 2.50

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	5	Σ
0	0,000 00	0,000 00	0,000 01	0,000 03	0,000 03	0,000 01	0,000 08
1	0,000 03	0,000 21	0,000 64	0,000 85	0,000 43	0	0,002 16
2	0,000 90	0,005 42	0,010 84	0,007 22	0	0	0,024 38
3	0,015 35	0,061 41	0,061 41	0	0	0	0,138 17
4	0,130 50	0,261 00	0	0	0	0	0,391 50
5	0,443 71	0	0	0	0	0	0,443 71
Σ	0,590 49	0,328 04	0,072 90	0,008 10	0,000 46	0,000 01	1,000 00

Bei diesem Problem hat der einzelne Versuch (Qualitätsprüfung eines Teils) im Vergleich zum Bernoullischen Versuchsschema 3 Ausgänge. Die Einzelwahrscheinlichkeiten werden wie bei der Binomialverteilung berechnet. Es sei

$A_r \dots$ „Das geprüfte Teil gehört zur Sorte r “ ($r = 1, 2$),

$A_3 \dots$ „Das geprüfte Teil ist Ausschuß“.

Bekannt sind: $P(A_1) = p_1 = 0,85$, $P(A_2) = p_2 = 0,10$ und $P(A_3) = p_3 = 0,05$. Nimmt bei 5 unabhängigen Versuchen X den Wert i und Y den Wert k an, so bedeutet dies, daß A_1 i -mal, A_2 k -mal und A_3 $(5 - i - k)$ -mal beobachtet wird. Dafür gibt es $\frac{5!}{i!k!(5-i-k)!}$ verschiedene Möglichkeiten. Deshalb ergibt sich für die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = i, Y = k) = \frac{5!}{i!k!(5-i-k)!} 0,85^i 0,10^k (1 - 0,85 - 0,10)^{5-i-k} \quad \text{für } i + k \leq 5. \quad (2.116)$$

Die Verteilung dieser Zufallsgröße (X, Y) ist ein Beispiel für eine **Polynomialverteilung** [3].

Entsprechend der Definition der Randverteilung beschreibt die Zufallsgröße X in (X, Y) die zufällige Anzahl der Teile, die zur Sorte 1 gehören, und unterliegt einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0,85$. Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind in der letzten Spalte von Tabelle 2.5 eingetragen.

Die Randverteilung von Y in (X, Y) ist eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0,1$. Die Einzelwahrscheinlichkeiten sind der letzten Zeile der Tabelle 2.5 zu entnehmen.

Analog zum Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit, den wir im Abschnitt 2.2.3.1 kennengelernt haben, wollen wir uns jetzt mit den bedingten Verteilungen bei diskreten zweidimensionalen Zufallsgrößen befassen.

D.2.46 Definition 2.46: Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, und Y eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten y_k , $k = 1, 2, \dots, s$, so werden die Größen

$$P(X = x_i / Y = y_k) := \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.117)$$

als **bedingte Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X unter der Bedingung $\{Y = y_k\}$** , $k = 1, 2, \dots, s$, und die Größen

$$P(Y = y_k / X = x_i) := \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(X = x_i)} \quad (k = 1, 2, \dots, s) \quad (2.118)$$

als **bedingte Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße Y unter der Bedingung $\{X = x_i\}$** , $i = 1, 2, \dots, n$, bezeichnet, wobei $P(Y = y_k) > 0$ bzw. $P(X = x_i) > 0$ vorausgesetzt wird.

Unter Verwendung der Bezeichnungen $P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik}$, $P(Y = y_k) = p_{\cdot k}$ und $P(X = x_i) = p_i$ können wir (2.117) bzw. (2.118) in der Form

$$P(X = x_i / Y = y_k) = \frac{p_{ik}}{p_{\cdot k}}$$

bzw.

$$P(Y = y_k / X = x_i) = \frac{p_{ik}}{p_i}$$

schreiben.

Zeigen Sie unter Berücksichtigung von (2.114) bzw. (2.115), daß

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i / Y = y_k) = 1$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^s P(Y = y_k / X = x_i) = 1$$

gilt!

Beispiel 2.50: Im Beispiel 2.50 erhalten wir für die Bedingung $\{Y = 0\}$ folgende Verteilungstabelle der bedingten Einzelwahrscheinlichkeiten:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i / Y = 0)$	0,000 00	0,000 04	0,001 53	0,026 00	0,221 01	0,751 42

Die Größen $P(X = x_i / Y = 0)$ sind Einzelwahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung

mit $n = 5$ und $p = P(A_1 / \bar{A}_2) = \frac{0,85}{0,9}$, da

$$p = P(A_1 / \bar{A}_2) = P(A_1 / A_1 \cup A_3) = \frac{P(A_1 \cap (A_1 \cup A_3))}{P(A_1 \cup A_3)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_3)}$$

gilt.

Dichtefunktion im stetigen Fall

Zur Charakterisierung einer stetigen Zufallsgröße X verwenden wir die Dichtefunktion $f_X(t)$. Die stetige zweidimensionale Zufallsgröße (X, Y) lässt sich entsprechend durch die Dichtefunktion $f_{(X, Y)}(t_1, t_2)$ beschreiben. So können wir z. B. die Verteilung einer Zufallsgröße (X, Y) , bei der die Zufallsgrößen X und Y normalverteilt sind – sie wird als **zweidimensionale Normalverteilung** bezeichnet – durch die Dichtefunktion

$$f_{(X, Y)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\varrho^2} \left(\frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(t_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\varrho \frac{(t_1 - \mu_1)(t_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right] \quad (2.119)$$

mit den Parametern $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$, $\sigma_1^2 = D^2(X)$, $\sigma_2^2 = D^2(Y)$ und ϱ beschreiben. Über die Bedeutung des Parameters ϱ werden wir später etwas sagen.

In Bild 2.24 ist die Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung grafisch dargestellt.

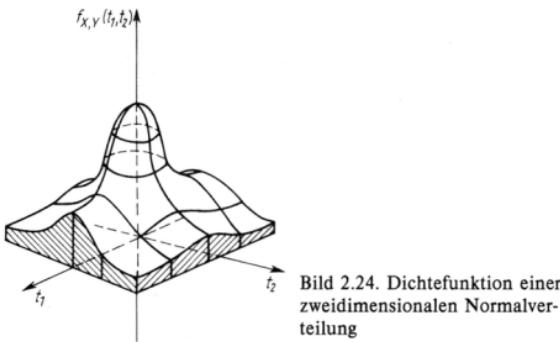


Bild 2.24. Dichtefunktion einer zweidimensionalen Normalverteilung

Analog zum diskreten Fall lässt sich die Randverteilung der Zufallsgröße X bzw. Y durch die sogenannte **Randdichte**

$$f_X(t_1) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X, Y)}(t_1, t_2) dt_2 \quad (2.120)$$

bzw.

$$f_Y(t_2) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X, Y)}(t_1, t_2) dt_1 \quad (2.121)$$

charakterisieren.

Für den Fall einer zweidimensionalen Normalverteilung gemäß Formel (2.119) erhalten wir unter Benutzung der Beziehung

$$\begin{aligned} & \frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(t_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{t_1 - \mu_1}{\sigma_1} \frac{t_2 - \mu_2}{\sigma_2} \\ & = \frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} (1 - \rho^2) + \left(\frac{t_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{t_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \end{aligned}$$

für (2.120) nach Substitution

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\frac{t_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{t_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \\ f_X(t_1) &= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right] = \varphi(t_1; \mu_1, \sigma_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Randverteilung von X in (X, Y) eine Normalverteilung mit den Parametern μ_1 und σ_1 .

Zur Beschreibung der bedingten Verteilungen verwenden wir die **bedingten Dichtefunktionen**

$$f_X(t_1 | Y = t_2) := \frac{f_{(X, Y)}(t_1, t_2)}{f_Y(t_2)} \quad (2.122)$$

bzw.

$$f_Y(t_2 | X = t_1) := \frac{f_{(X, Y)}(t_1, t_2)}{f_X(t_1)}, \quad (2.123)$$

wobei $f_Y(t_2) > 0$ bzw. $f_X(t_1) > 0$ vorausgesetzt wird.

Zeigen Sie, daß die Größen $f_X(t_1)$, $f_Y(t_2)$, $f_X(t_1 | Y = t_2)$ und $f_Y(t_2 | X = t_1)$ die Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllen!

Unterliegt (X, Y) einer zweidimensionalen Normalverteilung, so gilt für die bedingte Dichtefunktion $f_X(t_1 | Y = t_2)$

$$f_X(t_1 | Y = t_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\left(t_1 - \left(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (t_2 - \mu_2) \right) \right)^2}{\sigma_1^2 (1 - \rho^2)} \right]$$

$f_X(t_1 | Y = t_2)$ ist Dichtefunktion einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert $\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (t_2 - \mu_2)$ und der Varianz $\sigma_1^2 (1 - \rho^2)$.

Verteilungsfunktion im diskreten und stetigen Fall

D.2.47 Definition 2.47: Ist (X, Y) eine beliebige zweidimensionale Zufallsgröße, so ist durch

$$F_{(X, Y)}(t_1, t_2) := P(X < t_1, Y < t_2) \quad (2.124)$$

ihre **Verteilungsfunktion definiert**.

$F_{(X, Y)}(t_1, t_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (X, Y) ein Wertepaar aus dem in Bild 2.25 schraffierten Gebiet annimmt.

Wegen (2.124) können wir die Verteilungsfunktion durch die Beziehungen

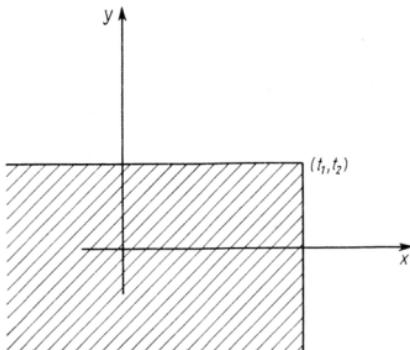


Bild 2.25.
Zur Deutung der Verteilungsfunktion
einer zweidimensionalen Zufallsgröße

$$F_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sum_i \sum_k P(X = x_i, Y = y_k), & \text{wenn } (X, Y) \text{ diskret}, \\ \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy, & \text{wenn } (X, Y) \text{ stetig}, \end{cases} \quad (2.125)$$

berechnen.

2.3.7.3. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Korrelationskoeffizient, Kovarianzmatrix, bedingter Erwartungswert

1. Im Abschnitt 2.2.3.2. haben wir die Unabhängigkeit von zufälligen Ereignissen kennengelernt. Entsprechend lässt sich auch die Unabhängigkeit von Zufallsgrößen definieren.

Definition 2.48: Zwei Zufallsgrößen X, Y heißen unabhängig, wenn die Bedingungen D.2.48

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) P(Y = y_k) \quad \text{für alle } i, k = 1, 2, \dots \quad (2.127)$$

bzw.

$$f_{(X,Y)}(t_1, t_2) = f_X(t_1) f_Y(t_2) \quad \text{für alle } -\infty < t_1, t_2 < +\infty \quad (2.128)$$

im diskreten bzw. stetigen Fall erfüllt sind.

Anmerkung: Unter Verwendung der Verteilungsfunktion lässt sich die Def. 2.48 ergänzen:

Zwei beliebige Zufallsgrößen X, Y heißen unabhängig, wenn

$$F_{(X,Y)}(t_1, t_2) = F_X(t_1) F_Y(t_2)$$

für alle $-\infty < t_1, t_2 < +\infty$ gilt. (2.127) und (2.128) sind Spezialfälle dieser Relation.

Beispiel 2.51: (2.119) liefert für $\rho = 0$ folgende Dichtefunktion:

$$f_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(t_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right].$$

Die Randverteilung bezüglich X ergibt sich wie folgt:

$$f_X(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t_1, t_2) dt_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] dt_2.$$

Der als Faktor auftretende Integrationsausdruck ist gerade das Integral über die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße (siehe 2.3.6.3.) und hat nach Eigenschaft (2.64) den Wert 1.

Damit erhalten wir

$$f_X(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right].$$

Analog können wir $f_Y(t_2)$ berechnen. Es gilt

$$f_Y(t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(t_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right].$$

Damit ergibt sich:

$$f_{(X, Y)}(t_1, t_2) = f_X(t_1) f_Y(t_2).$$

Hieraus können wir wegen Def.2.4.8 folgern, daß bei einer zweidimensionalen Normalverteilung im Falle $\varrho = 0$ die beiden Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind.

Mit Hilfe des Begriffs der zweidimensionalen Zufallsgröße und der zum Abschnitt 2.3.3.3. analogen Beziehung zur Berechnung des Erwartungswertes von Funktionen einer zweidimensionalen Zufallsgröße (hier nur für den stetigen Fall aufgeschrieben),

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1, t_2) f_{(X, Y)}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

ist es möglich, einige weitere Eigenschaften des Erwartungswertes und der Varianz anzugeben:

- Zwischen den Erwartungswerten der Zufallsgrößen X , Y und $X \pm Y$ besteht folgende Beziehung:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y), \quad (2.129)$$

falls die entsprechenden Erwartungswerte existieren.

- Sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig, dann gilt:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y), \\ D^2(X \pm Y) &= D^2(X) + D^2(Y), \end{aligned} \quad (2.130)$$

falls die entsprechenden Erwartungswerte und Varianzen existieren.

Versuchen Sie, den Beweis dieser Eigenschaften – auch für n unabhängige Zufallsgrößen – selbstständig unter Beachtung der Definition des Erwartungswertes durchzuführen!

2. Wir wollen uns nun der näheren Betrachtung des in (2.119) erstmalig auftretenden Parameters ϱ zuwenden.

D.2.49 Definition 2.49: Sind X und Y zwei beliebige Zufallsgrößen, so wird die Größe

$$\varrho(X, Y) := \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{D^2(X) D^2(Y)}} \quad (2.131)$$

als **Korrelationskoeffizient** von X und Y bezeichnet (auch $\varrho_{X, Y}$).

Berechnen wir für die zweidimensionale Normalverteilung den Korrelationskoeffizien-

ten (2.131) mit Hilfe der Berechnungsformeln für Momente, so erhalten wir den in der Dichtefunktion (2.119) auftretenden Parameter ϱ .

Für $X = Y$ gilt $\varrho(X, Y) = 1$, und für $X = -Y$ erhalten wir $\varrho(X, Y) = -1$. Allgemein gilt $|\varrho(X, Y)| \leq 1$.

Sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig, dann folgt aus (2.130), daß $\varrho(X, Y) = 0$ ist. Warum?

Die Umkehrung dieser Aussage gilt im allgemeinen nicht, d.h., falls $\varrho(X, Y) = 0$ ist, dann brauchen die Zufallsgrößen X und Y nicht unabhängig zu sein. Im Beispiel 2.51 haben wir jedoch zwei Zufallsgrößen betrachtet, für die diese Umkehrung der Aussage möglich ist.

Nicht zuletzt wegen der angeführten Eigenschaften ist der Korrelationskoeffizient $\varrho(X, Y)$ ein Kennwert für den linearen algebraischen Zusammenhang zwischen X und Y .

Neben dem Begriff des Korrelationskoeffizienten wird zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Zufallsgrößen X und Y häufig der Begriff der Kovarianz eingeführt.

Definition 2.50: Sind X und Y zwei beliebige Zufallsgrößen, so wird die Größe

D.2.50

$$b(X, Y) := E[(X - E(X))(Y - E(Y))]^1 \quad (2.132)$$

als **Kovarianz von X und Y** bezeichnet.

Aus (2.132) und (2.76) folgt $b(X, X) = D^2(X)$ und $b(Y, Y) = D^2(Y)$. Die in Verbindung mit der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) auftretenden Kovarianzen fassen wir zu einer Matrix $\mathbf{B}(X, Y)$, der **Kovarianzmatrix**, zusammen:

$$\mathbf{B}(X, Y) := \begin{pmatrix} b(X, X) & b(X, Y) \\ b(Y, X) & b(Y, Y) \end{pmatrix}. \quad (2.133)$$

Entsprechend bilden wir die Kovarianzmatrix $\mathbf{B}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ der n -dimensionalen Zufallsgröße (X_1, X_2, \dots, X_n) für $n > 2$:

$$\mathbf{B}(X_1, X_2, \dots, X_n) := \begin{pmatrix} b(X_1, X_1) & b(X_1, X_2) & \dots & b(X_1, X_n) \\ b(X_2, X_1) & b(X_2, X_2) & \dots & b(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b(X_n, X_1) & b(X_n, X_2) & \dots & b(X_n, X_n) \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

3. Zur Charakterisierung einer zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) mit Hilfe von Kennwerten der Verteilung werden außer den Erwartungswerten $E(X)$, $E(Y)$ und den Varianzen $D^2(X)$, $D^2(Y)$ und dem Korrelationskoeffizienten $\varrho(X, Y)$ häufig die bedingten Erwartungswerte und die bedingten Varianzen herangezogen. Wir wollen im folgenden die Definition der bedingten Erwartungswerte angeben.

Definition 2.51: Ist (X, Y) eine diskrete zweidimensionale Zufallsgröße mit den Wertpaaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_s)^2$, so wird

$$E(X/Y = y_k) := \sum_{i=1}^n x_i \frac{p_{ik}}{p \cdot k} \quad (2.135)$$

$$E(Y/X = x_i) := \sum_{k=1}^s y_k \frac{p_{ik}}{p_i}. \quad (2.136)$$

¹⁾ Der in (2.131) eingeführte Korrelationskoeffizient $\varrho(X, Y)$ ist damit die auf das Produkt der Standardabweichungen von X und Y bezogene Kovarianz.

²⁾ Wir beschränken uns hier auf diskrete Zufallsgrößen mit endlich vielen Wertpaaren.

als **bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $\{Y = y_k\}$** ($k = 1, 2, \dots, s$) bzw.
als **bedingter Erwartungswert von Y unter der Bedingung $\{X = x_i\}$** ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet.

Beispiel 2.50: Da die Zufallsgröße X unter der Bedingung $\{Y = 0\}$ einer Binomialverteilung unterliegt, gilt

$$E(X/Y=0) = 5 \cdot \frac{0,85}{0,9} \approx 4,72.$$

D.2.52 Definition 2.52: Ist (X, Y) eine stetige zweidimensionale Zufallsgröße, so wird

$$E(X/Y=t_2) := \int_{-\infty}^{+\infty} t_1 f_X(t_1/Y=t_2) dt_1 \quad (2.137)$$

bzw.

$$E(Y/X=t_1) := \int_{-\infty}^{+\infty} t_2 f_Y(t_2/X=t_1) dt_2 \quad (2.138)$$

als **bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung $\{Y = t_2\}$** bzw. als **bedingter Erwartungswert von Y unter der Bedingung $\{X = t_1\}$** bezeichnet.

Unterliegt (X, Y) einer zweidimensionalen Normalverteilung, so gilt

$$E(X/Y=t_2) = \mu_1 + \varrho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (t_2 - \mu_2)$$

bzw.

$$D^2(X/Y=t_2) = \sigma_1^2 (1 - \varrho^2).$$

Als besondere Eigenschaft der Normalverteilung erkennen wir hier den in t_2 linearen bedingten Erwartungswert und die konstante bedingte Varianz.

Versuchen Sie in gleicher Art, die bedingten Varianzen zu definieren.

Zeigen Sie, daß im Fall der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X und Y

$$E(X/Y=y_k) = E(X),$$

$$E(Y/X=x_i) = E(Y),$$

$$E(X/Y=t_2) = E(X),$$

$$E(Y/X=t_1) = E(Y)$$

gilt! Berücksichtigen Sie dabei die Beziehungen (2.127) und (2.128)!

2.3.8. Funktionen von mehrdimensionalen Zufallsgrößen

2.3.8.1. Problemstellung

Analog zum Problem der Funktionen von eindimensionalen Zufallsgrößen (vgl. Abschn. 2.3.3.3.) treten sehr häufig auch solche von mehrdimensionalen Zufallsgrößen auf. Wir wollen ein Beispiel behandeln.

Beispiel 2.52: Die Reparaturdauer eines Gerätes eines bestimmten Typs ist eine stetige Zufallsgröße; sie unterliege einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ . Es sind 10 Geräte dieses Typs ausgefallen, die nun zu reparieren sind. Es ist die Verteilung der Gesamtreparaturdauer zu bestimmen.

Wir definieren:

$X_i :=$ zufällige Reparaturdauer des i -ten Gerätes ($i = 1, 2, \dots, 10$),

$Z :=$ Gesamtreparaturdauer.

Auf Grund der Aufgabenstellung gilt:

$$Z = g(X_1, \dots, X_{10}) = \sum_{i=1}^{10} X_i.$$

In diesem Beispiel tritt als spezielle Funktion der zehndimensionalen Zufallsgröße (X_1, \dots, X_{10}) die Summe der einzelnen Größen X_1, \dots, X_{10} auf.

Bei einer zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) können außer der Summe $Z = X + Y$ u. a. die folgenden Funktionen auftreten:

$$Z_1 = X - Y, \quad Z_2 = XY, \quad Z_3 = \frac{X}{Y}.$$

2.3.8.2. Summen von unabhängigen Zufallsgrößen

Wir wollen uns auf zweidimensionale Zufallsgrößen (X, Y) beschränken und uns mit der Verteilung der Zufallsgröße $Z = X + Y$ beschäftigen. Dabei setzen wir die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X und Y voraus.

Im Fall diskreter ganzzahliger Zufallsgrößen X und Y mit den Werten $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ können wir die Einzelwahrscheinlichkeiten von Z mit den Werten $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ wie folgt berechnen:

$$P(Z = k) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} P(X = i, Y = j) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$P(Z = k) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} P(X = i) P(Y = j)$$

und damit für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$P(Z = k) = \sum_i P(X = i) P(Y = k - i). \quad (2.139)$$

Beispiel 2.53: X und Y seien zwei binomialverteilte unabhängige Zufallsgrößen mit den Parametern n_1 und p bzw. n_2 und p .

Wegen (2.139) können wir die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $Z = X + Y$ mit den Werten $z_k = k$ ($k = 0, 1, \dots, n_1 + n_2$) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k \left[\binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \right] \left[\binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i} \right] \\ &= \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n_1 + n_2). \end{aligned}$$

Wir erhalten wieder eine binomialverteilte Zufallsgröße. Diese hat die Parameter $n_1 + n_2$ und p .

Mit diesem Ergebnis lässt sich induktiv nachweisen, daß die Summe von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), die alle mit dem Parameter p Null-Eins-verteilt sind, einer Binomialverteilung mit den Parametern n und p unterliegt.

Im Falle stetiger Zufallsgrößen X und Y mit den Dichtefunktionen $f_X(t_1)$ und $f_Y(t_2)$ können wir die Verteilungsfunktion $F_Z(t)$ von Z mit Hilfe der Beziehung

$$F_Z(t) = P(Z < t) = \int_{t_1 + t_2 < t} \int f_{X, Y}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

bestimmen. Da X und Y unabhängig sind, erhalten wir mit Hilfe von (2.128) und nach Umformung der Integrationsgrenzen:

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t - t_1} f_Y(t_2) dt_2 f_X(t_1) dt_1.$$

Die Integration bezüglich t_2 liefert dann

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(t - t_1) f_X(t_1) dt_1. \quad (2.140)$$

Aus (2.140) erhalten wir durch Differentiation nach t die Dichtefunktion der Verteilung von Z . Es gilt:

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t - t_1) f_X(t_1) dt_1. \quad (2.141)$$

Beispiel 2.54: Es seien X und Y zwei unabhängige im Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig verteilte Zufallsgrößen. Unter Verwendung der Formel (2.141) und unter Berücksichtigung, daß Z Werte aus dem Intervall $[0, 2]$ annehmen kann, erhalten wir

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ t & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ 2 - t & \text{für } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{für } 2 < t. \end{cases}$$

In Bild 2.26 ist die Dichtefunktion der Zufallsgröße Z graphisch dargestellt.

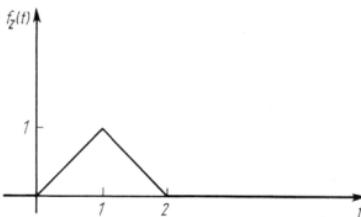


Bild 2.26. Dichtefunktion der dreieckverteilten Zufallsgrößen Z aus Beispiel 2.54

Anmerkung: Eine Zufallsgröße, deren Dichtefunktion die in Bild 2.26 dargestellte Form besitzt, wird als **dreieckverteilt** bezeichnet.

Während wir im Beispiel 2.53 als Summe zweier binomialverteilter Zufallsgrößen wieder eine binomialverteilte Zufallsgröße erhalten haben, ist im Beispiel 2.54 der Verteilungstyp nicht erhalten geblieben. Es zeigt sich also, daß bei der Summation von Zufallsgrößen nur in speziellen Fällen der Verteilungstyp erhalten bleibt. Dies ist häufig von großer Bedeutung. Verteilungen, bei denen der Verteilungstyp bei Summation erhalten bleibt, sind neben der Binomialverteilung (unter den im Beispiel 2.53 angeführten Voraussetzungen) zum Beispiel die Poissonverteilung und die Normalverteilung.

Anmerkung: Die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $Z = X + Y$ berechnet sich im Falle

der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X und Y aus den Verteilungsfunktionen $F_X(t_1)$ und $F_Y(t_2)$ durch die sogenannte *Faltung*. (2.140) ist ein entsprechendes Beispiel.

Wird die Verteilung der Summe von n unabhängigen Zufallsgrößen X_i , $i = 1, \dots, n$, mit identischer Verteilung

$$F_{X_i}(t) \equiv F_X(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

gesucht, so sprechen wir von der *n-fachen Faltung der Verteilung* von X . Diese wird schrittweise unter Anwendung der Formeln (2.139), (2.140) bzw. (2.141) berechnet.

Wir setzen die Behandlung des Beispiels 2.52 fort.

Beispiel 2.52: Die zufälligen Reparaturzeiten X_i ($i = 1, \dots, 10$) sind identisch exponentialverteilt:

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0, \quad i = 1, \dots, 10).$$

Um die Verteilung der Gesamtreparaturdauer $Z = \sum_{i=1}^{10} X_i$ zu bestimmen, haben wir also die 10fache Faltung der Exponentialverteilung vorzunehmen. Wir erhalten eine sog. *Erlang-verteilung*¹⁾ der Ordnung 10 mit der Verteilungsfunktion

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^9 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

und der Dichtefunktion

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^{10} t^9}{9!} e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

2.3.8.3. Grundverteilungen der mathematischen Statistik

Wir behandeln in diesem Abschnitt einige Funktionen einer n -dimensionalen Zufallsgröße (X_1, \dots, X_n) ($n = 1, 2, \dots$), die große Bedeutung für die mathematische Statistik haben. Dabei gehen wir stets von folgenden Voraussetzungen aus:

Die Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \dots, n$) sind unabhängig und identisch normalverteilt mit den Parametern μ und σ .

Verteilung des arithmetischen Mittels \bar{X} von normalverteilten Zufallsgrößen

Unter den o. g. Voraussetzungen unterliegt die Zufallsgröße

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

einer Normalverteilung mit den Parametern $n\mu$ und $\sigma\sqrt{n}$. Diese Aussage lässt sich durch Bestimmung der n -fachen Faltung der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ bestätigen. Im Abschnitt 2.3.9.3. werden wir nochmals auf dieses Problem zurückkommen. Eine für die mathematische Statistik grundlegende Folgerung formulieren wir im folgenden Satz:

¹⁾ Vgl. Abschnitt 2.3.6.4.

S.2.6 Satz 2.6: Das arithmetische Mittel

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.142)$$

der unabhängigen und identisch normalverteilten Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \dots, n$) mit den Parametern

$$E(X_i) = \mu \quad \text{und} \quad \sqrt{D^2(X_i)} = \sigma \quad (i = 1, \dots, n)$$

ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $E(\bar{X}) = \mu$ und $\sqrt{D^2(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Chi-Quadrat(χ^2)-Verteilung

Wir gehen von den o.g. Voraussetzungen mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ aus und betrachten die Zufallsgröße

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (2.143)$$

Y_n ist eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f_{Y_n}(t) = \begin{cases} \frac{\frac{n}{2}-1}{2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{t}{2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.144)$$

Hierbei ist $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ($x > 0$) die Gammafunktion (vgl. Band 12).

Y_n besitzt die Kennwerte

$$E(Y_n) = n$$

und

$$D^2(Y_n) = 2n.$$

Der Parameter n ist hierbei die Anzahl der in die Summe Y_n eingehenden unabhängigen Summanden, die sog. *Anzahl der Freiheitsgrade*.

D.2.53 Definition 2.53: Eine Zufallsgröße Y_n mit der Dichtefunktion (2.144) unterliegt einer Chi-Quadrat-Verteilung (kurz χ^2 -Verteilung) mit n Freiheitsgraden.

In der mathematischen Statistik werden wir häufig folgende Aussage benutzen:

S.2.7 Satz 2.7: Sind X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern μ und σ , so unterliegt die Zufallsgröße

$$Y_{n-1}^* := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.145)$$

einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden.

Anmerkungen: 1. Wir wollen uns hier auf eine heuristische Deutung der Tatsache beschränken, daß sich in (2.145) die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 vermindert: Durch die Bildung von \bar{X} gemäß (2.142) wird eine Abhängigkeit zwischen den n Summanden in (2.145) hergestellt, d.h., es wird ein Freiheitsgrad gebunden.

2. Für die numerische Behandlung der Chi-Quadrat-Verteilung mit der Dichte
 $f_{Y_n}(t)$ gemäß (2.144)

und der Verteilungsfunktion

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n < t)$$

können folgende Rekursionsformeln genutzt werden:

$$f_{Y_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}}, \quad f_{Y_2}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}},$$

$$f_{Y_n}(t) = \frac{t}{n-2} f_{Y_{n-2}}(t) \quad \text{für } n = 3, 4, \dots,$$

$$F_{Y_1}(t) = 2 \Phi(\sqrt{t}; 0, 1) - 1,$$

$$F_{Y_2}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}},$$

$$F_{Y_n}(t) = F_{Y_{n-2}}(t) - 2f_{Y_n}(t) \quad \text{für } n = 3, 4, \dots$$

Student-Verteilung (t-Verteilung)¹⁾

Wir gehen von folgenden Voraussetzungen aus:

- X sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$;
- Y_n unterliege einer Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden;
- X und Y_n seien unabhängige Zufallsgrößen.

Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir die stetige Zufallsgröße

$$Z_n := \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}}. \tag{2.146}$$

Sie hat die Dichtefunktion

$$f_{Z_n}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{2.147}$$

Definition 2.54: Eine stetige Zufallsgröße Z_n mit der Dichtefunktion (2.147) unterliegt einer **D.2.54 Student-Verteilung (t-Verteilung) mit n Freiheitsgraden**.

Die Anwendung der Student-Verteilung in der mathematischen Statistik basiert auf folgenden Überlegungen:

Für unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \dots, n$) mit den Parametern μ und σ gilt:

- Das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist normalverteilt mit den Parametern μ und

¹⁾ Student – Pseudonym für W. S. Gosset (1876–1937), englischer Naturforscher.

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dann ist die Zufallsgröße

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ebenfalls normalverteilt mit den Parametern 0 und 1.

- $Y_{n-1}^* = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ unterliegt einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden.
- Es läßt sich weiter zeigen, daß Z und Y_{n-1}^* unabhängige Zufallsgrößen sind.
Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

Satz 2.8: Sind X_1, \dots, X_n unabhängige und identisch normalverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern μ und σ , so unterliegt die stetige Zufallsgröße

$$Z_{n-1}^* := \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}} \quad (2.148)$$

einer Student-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden.

Fishersche F-Verteilung

Wir betrachten den Quotienten

$$W_{n_1, n_2} = \frac{n_2 Y_{n_1}}{n_1 Y_{n_2}},$$

wobei Y_{n_1} und Y_{n_2} unabhängige Chi-Quadrat-verteilte Zufallsgrößen mit den Freiheitsgraden n_1 bzw. n_2 sind.

W_{n_1, n_2} ist eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f_{W_{n_1, n_2}}(t) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} t^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} t\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.149)$$

Dabei ist $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ die Betafunktion (vgl. Band 12).

D.2.55 Definition 2.55: Eine stetige Zufallsgröße W_{n_1, n_2} unterliegt einer **Fisherschen¹⁾ F-Verteilung mit (n_1, n_2) Freiheitsgraden, wenn sie die Dichtefunktion (2.149) besitzt.**

Die Anwendung der F-Verteilung in der mathematischen Statistik wird durch die Aussage des folgenden Satzes ermöglicht.

¹⁾ Ronald A. Fisher (1890–1962), englischer Statistiker.

Satz 2.9: Sind

$$X_1^{(1)}, \dots, X_{n_1}^{(1)}$$

und

$$X_1^{(2)}, \dots, X_{n_2}^{(2)}$$

unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern

$$E(X_i^{(1)}) = \mu_1, \quad \sqrt{D^2(X_i^{(1)})} = \sigma_1 \quad (i = 1, \dots, n_1)$$

und

$$E(X_j^{(2)}) = \mu_2, \quad \sqrt{D^2(X_j^{(2)})} = \sigma_2 \quad (j = 1, \dots, n_2)$$

und gilt

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad (\mu_1, \mu_2 \text{ beliebig}),$$

so unterliegt die Zufallsgröße

$$W_{n_1 - 1, n_2 - 1}^* := \frac{(n_2 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2}{(n_1 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} (X_j^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2} \quad (2.150)$$

einer Fisherschen F-Verteilung mit $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ Freiheitsgraden.

Dabei ist

$$\bar{X}^{(1)} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{X}^{(2)} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} X_j^{(2)}.$$

Anmerkung 1: Wir haben uns hier auf die Angabe der wichtigsten Ergebnisse zu den behandelten Verteilungen beschränkt. Eine ausführlichere Darstellung dieser Problematik finden Sie z. B. in [3; 14].

Anmerkung 2: Im Anhang finden Sie graphische Darstellungen der hier aufgetretenen Dichtefunktionen. Die wichtigsten Werte der entsprechenden Verteilungsfunktionen sind im Anhang in Tafeln zusammengefaßt. In Verbindung mit Fragen der mathematischen Statistik werden wir den Gebrauch dieser Tafeln kennenlernen.

2.3.9. Charakteristische Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir ein in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gebräuchliches und wichtiges analytisches Hilfsmittel betrachten. Dabei werden komplexwertige Zufallsgrößen der Form e^{iX} untersucht, wobei i die imaginäre Einheit ist. Da die imaginäre Einheit eine Konstante ist, sind nachfolgend die Gesetzmäßigkeiten für Erwartungswerte von Funktionen von Zufallsgrößen benutzt worden (siehe Abschn. 2.3.3.3. und 2.3.7.3.)

2.3.9.1. Definition und Beispiele

Definition 2.56: Für eine Zufallsgröße X wird

$$\varphi_X(s) := E(e^{isX}) \quad (s \text{ bel. reell}) \quad (2.151)$$

als charakteristische Funktion der Zufallsgröße X bezeichnet.

Aus der Definition folgt wegen (2.79) bzw. (2.80) die Berechnungsformel für $\varphi_X(s)$ sowohl für diskrete als auch für stetige Zufallsgrößen. Es gilt:

$$\varphi_X(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{isx_k} P(X = x_k), \quad (2.152)$$

wenn X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten x_k ($k = 1, 2, \dots$) ist, bzw.

$$\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f_X(x) dx, \quad (2.153)$$

wenn X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion $f_X(x)$ ist.¹⁾

Da $|e^{isx}| \leq 1$ ist, läßt sich zeigen, daß zu jeder Zufallsgröße X eine charakteristische Funktion $\varphi_X(s)$ existiert. Auch die Umkehrung ist gültig. Im Abschnitt 2.3.9.5. werden wir näher darauf eingehen.

Wir wollen nun für spezielle Verteilungen die charakteristische Funktion berechnen.

Beispiel 2.55: Die Zufallsgröße X unterliege einer Poissonverteilung mit den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0).$$

Die zugehörige charakteristische Funktion ergibt sich nach (2.152) wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_X(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{isk} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{isk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{is})^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{is}}, \\ \varphi_X(s) &= e^{\lambda(e^{is} - 1)}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Dieses Ergebnis folgt aus der Tatsache, daß für $|x| < \infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

gilt.

Beispiel 2.56: Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit $E(X) = 0$ und $D^2(X) = 1$. Damit gilt nach (2.153) für die entsprechende charakteristische Funktion $\varphi_X(s)$:

$$\begin{aligned} \varphi_X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

¹⁾ Die Berechnungsformel (2.153) für stetige Zufallsgrößen zeigt uns, daß $\varphi_X(s)$ die aus der Analysis bekannte Fouriertransformierte der Dichtefunktion $f_X(x)$ ist. Natürlich gilt unter Verwendung des Stieltjes-Integrals für beliebige Zufallsgrößen

$$\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dF_X(x).$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-is)^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^{-\frac{(x-is)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

gilt:

$$\varphi_X(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}. \quad (2.155)$$

Beispiel 2.57: Die Zufallsgröße Y sei normalverteilt mit $E(Y) = \mu$ und $D^2(Y) = \sigma^2$. Zur Berechnung der charakteristischen Funktion $\varphi_Y(s)$ verwenden wir die zwischen der Zufallsgröße X aus Beispiel 2.56 und der Zufallsgröße Y bestehende Beziehung

$$Y = \sigma X + \mu.$$

Aus (2.151) folgt

$$\begin{aligned} \varphi_Y(s) &= E(e^{is(\sigma X + \mu)}) \\ &= E(e^{isoX} e^{isu}) \\ &= e^{isu} E(e^{isoX}) \\ &= e^{isu} \varphi_X(\sigma s) \\ &= e^{isu} e^{-\frac{(\sigma s)^2}{2}}. \end{aligned}$$

Begründen Sie die einzelnen Schritte! Verwenden Sie dazu die Eigenschaft (2.81) aus Abschnitt 2.3.3.3. und das Ergebnis von Beispiel 2.56!

Damit ergibt sich als charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsgröße Y mit den Parametern μ und σ

$$\varphi_Y(s) = e^{isu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}}. \quad (2.156)$$

2.3.9.2. Berechnung von Momenten

Mit Hilfe der charakteristischen Funktionen lassen sich die existierenden Momente einer Zufallsgröße ermitteln. Wir wollen die Formel zur Berechnung des Erwartungswertes hier lediglich für eine stetige Zufallsgröße X herleiten. Nach (2.153) gilt für die charakteristische Funktion:

$$\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f_X(x) dx.$$

Wir bilden die erste Ableitung von $\varphi_X(s)$, die dann existiert, wenn $E(X)$ existiert. Es ist

$$\varphi'_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{isx} f_X(x) dx.$$

Für $s = 0$ gilt:

$$\varphi'_X(0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

Damit erhalten wir aber für den Erwartungswert $E(X)$:

$$E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i}.$$

Zeigen Sie, daß bei entsprechendem Vorgehen für die existierenden gewöhnlichen Momente $E(X^k)$ beliebiger Zufallsgrößen X die Beziehung

$$E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.157)$$

gilt!

Anmerkung: Wegen (2.87) läßt sich die Varianz $D^2(X)$ der Zufallsgröße X mit Hilfe der Beziehung

$$D^2(X) = \frac{\varphi_X^{(2)}(0)}{i^2} - \left(\frac{\varphi'_X(0)}{i} \right)^2 = -\varphi_X^{(2)}(0) + (\varphi'_X(0))^2 \quad (2.158)$$

berechnen.

Die Anwendung des Zusammenhangs zwischen der charakteristischen Funktion $\varphi_X(s)$ und den gewöhnlichen Momenten $E(X^k)$ einer Zufallsgröße X wollen wir an zwei Beispielen verdeutlichen.

Beispiel 2.58: Die Zufallsgröße X unterliege einer Poissonverteilung mit dem Parameter λ . Die charakteristische Funktion von X errechneten wir im Beispiel 2.55

$$\varphi_X(s) = e^{\lambda(e^{is} - 1)}.$$

Daraus folgt

$$\varphi'_X(s) = \lambda i e^{is} e^{\lambda(e^{is} - 1)}$$

und

$$\varphi'_X(0) = \lambda i e^0 e^{\lambda(1 - 1)} = \lambda i.$$

Damit erhalten wir

$$E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \frac{\lambda i}{i} = \lambda \quad [\text{vgl. (2.97)}].$$

Berechnen Sie die Varianz $D^2(X)$ nach (2.158).

Beispiel 2.59: Die Zufallsgröße X unterliege einer Normalverteilung mit den Parametern μ und σ . Damit gilt nach (2.156) für die charakteristische Funktion:

$$\varphi_X(s) = \exp \left[i\mu s - \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right],$$

$$\varphi'_X(s) = (i\mu - \sigma^2 s) \exp \left[i\mu s - \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right].$$

Aus der Ableitung dieser Funktion erhalten wir für $s = 0$:

$$\varphi'_X(0) = i\mu$$

und daraus

$$E(X) = \frac{i\mu}{i} = \mu$$

(vgl. (2.111)). Mit (2.158) kann entsprechend die Varianz $D^2(X)$ berechnet werden.

2.3.9.3. Der Multiplikationssatz

Die charakteristischen Funktionen haben außer für die Berechnung der Momente von Zufallsgrößen auch für die Problematik der Faltung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (vgl. 2.3.8.) wesentliche Bedeutung.

Grundlage hierfür ist der folgende Multiplikationssatz:

Satz 2.10: Es seien X und Y zwei beliebige unabhängige Zufallsgrößen mit den charakteristischen Funktionen $\varphi_X(s)$ und $\varphi_Y(s)$. Die charakteristische Funktion $\varphi_Z(s)$ der Zufallsgröße $Z = X + Y$ ist das Produkt der charakteristischen Funktionen der Zufallsgrößen X und Y : S.2.10

$$\varphi_Z(s) = \varphi_X(s) \varphi_Y(s). \quad (2.159)$$

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß bei unabhängigen Zufallsgrößen X und Y auch deren Funktionen e^{isX} und e^{isY} unabhängig sind und damit

$$E(e^{is(X+Y)}) = E(e^{isX}) E(e^{isY})$$

gilt. Mit Hilfe dieses Multiplikationssatzes können wir also die Faltung von Verteilungen auf die Multiplikation der entsprechenden charakteristischen Funktionen transformieren. Der Satz 2.10 lässt sich auch auf die Summe endlich vieler unabhängiger Zufallsgrößen erweitern.

Beispiel 2.60: X und Y seien unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern μ_X und σ_X bzw. μ_Y und σ_Y . Wir wollen die charakteristische Funktion $\varphi_Z(s)$ der Zufallsgröße $Z = X + Y$ berechnen.

Für die charakteristischen Funktionen $\varphi_X(s)$ bzw. $\varphi_Y(s)$ von X und Y ergibt sich nach Beispiel 2.57:

$$\varphi_X(s) = \exp \left[i\mu_X s - \frac{\sigma_X^2 s^2}{2} \right]$$

und

$$\varphi_Y(s) = \exp \left[i\mu_Y s - \frac{\sigma_Y^2 s^2}{2} \right]$$

und mit Hilfe des Multiplikationssatzes für die gesuchte charakteristische Funktion:

$$\varphi_Z(s) = \exp \left[i\mu_X s + i\mu_Y s - \frac{\sigma_X^2 s^2}{2} - \frac{\sigma_Y^2 s^2}{2} \right].$$

Setzen wir $\mu_X + \mu_Y = \mu_Z$ und $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2$, so ergibt sich schließlich:

$$\varphi_Z(s) = \exp \left[i\mu_Z s - \frac{\sigma_Z^2 s^2}{2} \right].$$

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit der charakteristischen Funktion einer normalverteilten Zufallsgröße zeigt uns, daß die zu $\varphi_Z(s)$ gehörende Zufallsgröße Z ebenfalls normalverteilt ist und die Parameter $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ und $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ besitzt. Hieraus können wir die wichtige Folgerung ziehen, daß die Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen wieder eine normalverteilte Zufallsgröße ist, deren Erwartungswert die Summe der einzelnen Erwartungswerte und deren Varianz die Summe der einzelnen Varianzen ist.

2.3.9.4. Erzeugende Funktionen

Bei diskreten Zufallsgrößen mit nichtnegativen ganzzahligen Werten ist die charakteristische Funktion eine Potenzreihe in $z = e^{is}$:

$$\varphi_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{is})^k P(X=k).$$

Derartige Potenzreihen bezeichnen wir in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als *erzeugende Funktionen*.

D.2.57 Definition 2.57: Ist X eine Zufallsgröße mit nichtnegativen ganzzahligen Werten k ($k = 0, 1, 2, \dots$), so heißtt

$$g_X(z) := E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k) \quad (|z| \leq 1) \quad (2.160)$$

die **erzeugende Funktion von X** .

Durch die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ist $g_X(z)$ eindeutig bestimmt.

Beispiel 2.61: Die Zufallsgröße X sei binomialverteilt mit den Parametern n und p . Dann errechnet sich die erzeugende Funktion wie folgt:

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sum_{k=0}^n z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p + zp)^n, \\ g_X(z) &= (1 + p(z-1))^n. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Analog zu den charakteristischen Funktionen lassen sich mit Hilfe von $g_X(z)$ die existierenden Momente der Zufallsgröße X berechnen. Es gilt beispielsweise

$$E(X) = g'_X(1) \quad (2.162)$$

und

$$E(X^2) = g''_X(1) + g'_X(1). \quad (2.163)$$

Warum?

Bei gegebener erzeugender Funktion einer Zufallsgröße X lassen sich die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ durch Koeffizientenvergleich der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X=k)$$

mit der Taylorreihenentwicklung von $g_X(z)$ im Punkt $z=0$ bestimmen. Wir erhalten:

$$P(X=k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}. \quad (2.164)$$

Überprüfen Sie die Richtigkeit von (2.164)!

Beispiel 2.62: Die Zufallsgröße X sei binomialverteilt mit den Parametern n und p . Mit ihrer erzeugenden Funktion

$$g_X(z) = (1 + p(z - 1))^n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} g'_X(z) &= np(1 + p(z - 1))^{n-1}, \\ g''_X(z) &= n(n-1)p^2(1 + p(z - 1))^{n-2}, \\ &\vdots \\ g^{(k)}_X(z) &= n(n-1)\dots(n-k-1)p^k(1 + p(z - 1))^{n-k} \end{aligned}$$

und

$$g_X^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Damit gilt nach (2.164)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Anmerkung: Das Bestimmen der Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X bei gegebener erzeugender Funktion $g_X(z)$ ist nach (2.164) eindeutig möglich.

2.3.9.5. Weiterführende Betrachtungen

Wir kommen nun auf die im Anschluß an die Definition der charakteristischen Funktion gemachte Bemerkung über die Existenz und Eindeutigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung bei gegebener charakteristischer Funktion zurück. Folgender Satz ist von grundlegender Bedeutung:

Satz 2.11: Ist $\varphi_X(s)$ bzw. $F_X(t)$ die charakteristische Funktion bzw. die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X , und sind t_1 und t_2 Stetigkeitsstellen von $F_X(t)$, so gilt

$$F_X(t_2) - F_X(t_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ist_1} - e^{-ist_2}}{is} \varphi_X(s) ds. \quad (2.165)$$

Bilden wir in (2.165) den Grenzwert $t_1 \rightarrow -\infty$, wobei t_1 die Stetigkeitsstellen von $F_X(t)$ durchläuft, und setzen wir $t_2 = t$, so ergibt sich

$$F_X(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ist_1} - e^{-ist}}{is} \varphi_X(s) ds. \quad (2.166)$$

Damit gilt folgender Satz:

Satz 2.12: Durch die charakteristische Funktion ist die Verteilungsfunktion eindeutig bestimmt. S.2.12

Auf Grund der Zusammenhänge zwischen Verteilungsfunktion und Dichtefunktion bzw. Einzelwahrscheinlichkeiten ergibt sich aus (2.166)

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} \varphi_X(s) ds \quad (2.167)$$

und

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik s} \varphi_X(s) \, ds \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (2.168)$$

(2.167) gilt für stetige und (2.168) für diskrete Zufallsgrößen mit ganzzahligen Werten. Die Beziehungen (2.165), (2.166), (2.167) und (2.168) bezeichnen wir als *Umkehrformeln*, die es prinzipiell gestatten, aus der charakteristischen Funktion die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bestimmen.

Sie finden weiterführende Betrachtungen beispielsweise in [3; 4; 12].

2.3.10. Grenzwertsätze

2.3.10.1. Einleitung

Aus der Physik ist bekannt, daß die von einem Gas ausgeübte Druckkraft durch die Stöße der Gasmoleküle gegen eine begrenzende Wand hervorgerufen wird und daß bei konstanter Temperatur für ein sog. ideales Gas das Gesetz von Boyle-Mariotte $pV = \text{const}$ gilt, wobei mit p der Druck und mit V das Volumen des Gases bezeichnet wird. Weiter ist bekannt, daß die Bewegung der Gasmoleküle zufällig erfolgt. Demzufolge müßten wir annehmen, daß auch der daraus resultierende Druck einen zufälligen Wert annimmt. Die angegebene Zustandsgleichung für Gase sagt aber aus, daß bei konstanter Temperatur und bei konstantem Volumen ein bestimmter konstanter Druck herrscht. Ursache hierfür ist die sehr große Zahl der sich bewegenden Gasmoleküle.

Mit ähnlichen Problemen, d.h. mit der Untersuchung des Verhaltens einer großen Zahl von zufällig wirkenden Einflüssen, werden wir uns im folgenden beschäftigen.

Zur Behandlung dieser Fragen benötigen wir die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig verwendete **Tschebyscheffsche¹⁾ Ungleichung**. Sie lautet für eine Zufallsgröße X mit $E(X) = m_1 < \infty$ und $D^2(X) < \infty$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0 \text{ bel.}). \quad (2.169)$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung können wir also unter Verwendung der existierenden ersten beiden Momente die Wahrscheinlichkeit dafür abschätzen, daß die Zufallsgröße X Werte in gewissen Intervallen der reellen Achse annimmt, ohne die Verteilung von X zu kennen.

Wenden wir uns nun einer Anwendungsmöglichkeit der Ungleichung (2.169) zu.

Beispiel 2.63: Eine Anlage besteht aus 10 unabhängig voneinander arbeitenden Elementen. Jedes dieser 10 Elemente fällt in der Zeit T mit der Wahrscheinlichkeit 0,05 aus. Mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff soll die Wahrscheinlichkeit dafür abgeschätzt werden, daß der absolute Betrag der Differenz zwischen der zufälligen Zahl der ausgefallenen Elementen und dem Erwartungswert dieser Zufallsgröße mindestens 2 beträgt.

Mit „ $X :=$ zufällige Zahl der ausgefallenen Elemente“ definieren wir eine Zufallsgröße, die nach der Aufgabenstellung einer Binomialverteilung mit den Parametern $p = 0,05$ und $n = 10$ unterliegt. Für diese gilt

$$E(X) = np = 0,5$$

und

$$D^2(X) = np(1-p) = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475.$$

¹⁾ Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821–1894), russischer Mathematiker.

Unter Verwendung der Ungleichung (2.169) erhalten wir

$$P(|X - 0,5| \geq 2) \leq \frac{0,475}{2^2} = \frac{0,475}{4} \approx 0,12,$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses ist kleiner als 0,12.

Anmerkung: Die Tschebyscheffsche Ungleichung liefert im allgemeinen grobe Abschätzungen. So erhalten wir im Beispiel 2.63 als exakten Wert

$$P(|X - 0,5| \geq 2) = 0,01.$$

Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung die am Ende von Beispiel 2.47 für die Normalverteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten ab und vergleichen Sie mit den dort erzielten Ergebnissen!

2.3.10.2. Das Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli

In 2.2. haben wir die relative Häufigkeit eines Ereignisses als einen Näherungswert für die entsprechende Wahrscheinlichkeit kennengelernt. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit näher untersuchen. Dazu gehen wir von einer beliebigen Anzahl von Versuchen aus, die nach dem Bernoullischen Versuchsschema (siehe 2.3.5.2.) durchgeführt werden. In jedem einzelnen Versuch kann dann also entweder das zufällige Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p ($0 < p < 1$) bzw. das Ereignis \bar{A} mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eintreten.

Durch die Zuordnung $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$ wollen wir die Versuche mit Hilfe der unabhängigen Zufallsgrößen X_i ($i = 1, \dots, n$), die einer Null-Eins-Verteilung unterliegen, beschreiben. Die Zufallsgröße

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

genügt dann einer Binomialverteilung mit $E(S_n) = np$ und $D^2(S_n) = np(1-p)$ (vgl. 2.3.8.2.).

Dividieren wir S_n durch n , so ergibt sich eine Zufallsgröße, die gerade die relative Häufigkeit des zufälligen Ereignisses A bei n Versuchen charakterisiert, d. h.

$$H_n(A) = \frac{S_n}{n}. \quad (2.170)$$

Nach (2.81) und (2.83) gilt

$$E(H_n(A)) = p$$

und

$$D^2(H_n(A)) = \frac{1}{n} p(1-p).$$

Wenden wir auf (2.170) die Tschebyscheffsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$P(|H_n(A) - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0 \text{ bel.}).$$

Durch Grenzübergang ($n \rightarrow +\infty$) erhalten wir das im folgenden Satz zusammengefaßte Ergebnis:

Satz 2.13 (Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli): Ist $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ eine Folge unabhängiger S.2.13 identisch verteilter Zufallsgrößen mit

$$P(X_i = 1) = p$$

und

$$P(X_i = 0) = 1 - p \quad (0 < p < 1),$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (\varepsilon > 0 \text{ bel.}) \quad (2.171)$$

Dieser Satz sagt aus, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die relative Häufigkeit und die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A dem Betrage nach um mehr als ε voneinander abweichen, mit $n \rightarrow \infty$ gegen null strebt. Damit ist die Stabilität der relativen Häufigkeit, auf die wir schon in 2.2.1. hingewiesen haben, präzisiert worden.

Wesentlich hierbei ist, daß die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses nicht der Grenzwert der relativen Häufigkeit im Sinne der „klassischen“ Analysis ist, sondern die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\lvert H_n(A) - p \rvert \geq \varepsilon$$

konvergiert gegen null. Wir sagen, daß $H_n(A)$ in Wahrscheinlichkeit gegen p konvergiert.

Da im Satz 2.13 mit S_n/n das Verhalten einer großen Zahl von Zufallsgrößen untersucht wird

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i; \quad n \rightarrow \infty,$$

wird auch häufig gesagt, daß die Folge $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ dem **Gesetz der großen Zahlen** unterliegt (hier in der Form von Bernoulli).

Satz 2.13 läßt sich in folgender Weise verallgemeinern:

S.2.14 Satz 2.14 (Gesetz der großen Zahlen von Chintschin¹⁾): Ist $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit $E(X_i) = m_1 < \infty$, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m_1\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (\varepsilon > 0 \text{ bel.}) \quad (2.172)$$

Neben der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von Summen von Zufallsgrößen ist es notwendig, das Grenzverhalten der Folgen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu untersuchen. In 2.3.5.3. wurde ein solches Problem schon angedeutet. Wir wollen im folgenden noch einmal näher darauf eingehen.

2.3.10.3. Der Satz von Poisson

Der Satz von Poisson hat den Zusammenhang von Binomial- und Poissonverteilung zum Inhalt. Diese Fragestellung ist nicht nur von theoretischem Interesse, sondern hat auch die Verringerung des für große n bei der Binomialverteilung recht erheblichen numerischen Aufwands bei der Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten durch Grenzbetrachtungen für $n \rightarrow \infty$ zum Ziel.

Bei diesen Grenzbetrachtungen verändern wir das der Binomialverteilung zugrunde liegende Bernoullische Versuchsschema in nachstehender Weise. Bei einer gegebenen Zahl von n unabhängigen Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A in jedem einzelnen Versuch dieser Versuchsserie durch $P(A) = p_n$ gegeben. Wir

¹⁾ Alexander Jakowlewitsch Chintschin (1894–1959), sowjetischer Mathematiker.

wollen weiter annehmen, daß durch die Vergrößerung des Umfanges n der Versuchsserie p_n sehr klein wird. Für $n \rightarrow \infty$ gelte $p_n \rightarrow 0$. Außerdem sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0.$$

Die einzelnen Versuche der Versuchsserie von n unabhängigen Versuchen können wir mit Hilfe der unabhängigen Null-Eins-verteilten Zufallsgrößen

$$X_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$$

beschreiben. Es gilt

$$P(X_i^{(n)} = 1) = p_n$$

und

$$P(X_i^{(n)} = 0) = 1 - p_n.$$

Die Zufallsgröße

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} := \text{Anzahl des Eintretens von } A \text{ bei einer Versuchsserie von } n \text{ Versuchen}$$

unterliegt einer Binomialverteilung mit den Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Der folgende Satz, den wir ohne Beweis angeben, enthält eine Aussage über das Grenzverhalten von $P(S_n = k)$ für $n \rightarrow \infty$:

Satz 2.15 (Satz von Poisson): Es sei für gegebenes n

S.2.15

$$\{X_i^{(n)}\}_{i=1,2,\dots,n}$$

eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $P(X_i^{(n)} = 1) = p_n$ und $P(X_i^{(n)} = 0) = 1 - p_n$ ($i = 1, \dots, n$). Dann ist die Folge $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$ mit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)}$$

eine Folge von binomialverteilten Zufallsgrößen mit den Parametern $\{p_n\}_{n=1,2,\dots}$ und $\{n\}_{n=1,2,\dots}$. Für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

In Tabelle 2.6 sind zum Vergleich die Werte der Einzelwahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0,05$ und einer Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5$ gegenübergestellt.

Es zeigt sich, daß schon bei $n = 10$ und einem entsprechend kleinen Wert von p die Poissonverteilung eine recht gute Näherung für die Einzelwahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung liefert.

Tabelle 2.6: Gegenüberstellung der Einzelwahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 10$, $p = 0,05$ und einer Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0,5$

k	$\binom{10}{k} 0,05^k (1 - 0,05)^{10-k}$	$\frac{0,5^k}{k!} e^{-0,5}$
0	0,5987	0,6065
1	0,3151	0,3033
2	0,0746	0,0758
3	0,0105	0,0126
≥ 4	0,0011	0,0018
Σ	1,0000	1,0000

2.3.10.4. Der zentrale Grenzwertsatz

Neben dem sehr speziellen Grenzwertsatz von Poisson ist es interessant, die Konvergenz der Folgen von Verteilungen von Summen von Zufallsgrößen gegen eine Grenzverteilung zu untersuchen. Hierbei zeigt es sich, daß bei geeigneter Transformation von Summen von Zufallsgrößen die Folge ihrer Verteilungen in bestimmten Fällen gegen die Normalverteilung konvergiert. Eine Aussage hierüber liefert folgender Satz:

S.2.16 Satz 2.16 (Zentraler Grenzwertsatz): Ist $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit $E(X_i) = m_1 < \infty$ und $D^2(X_i) = d^2 < \infty$, so gilt für jedes reelle t mit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - nm_1}{\sqrt{n} d} < t\right) = \Phi(t; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.173)$$

Mit anderen Worten heißt dies, daß die Folge der Verteilungen der standardisierten Zufallsgrößen

$$\frac{S_n - nm_1}{\sqrt{n} d} \quad (2.174)$$

gegen die Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ konvergiert.

Wir nennen S_n ($n = 1, 2, \dots$) in diesem Fall auch **asymptotisch normalverteilt** mit dem Erwartungswert nm_1 und der Standardabweichung $\sqrt{n} d$ (asymptotisch $N(nm_1; \sqrt{n} d)$ -verteilt).

Den Beweis des Satzes 2.16 wollen wir hier nicht führen. Der Leser findet ihn und weitere Grenzwertsätze z. B. in [3; 4; 12].

Wir wollen nun als Spezialfall des Satzes 2.16 den Satz von Moivre-Laplace kennenlernen. Ausgangspunkt ist das Bernoullische Versuchsschema, bei dem jeder einzelne Versuch analog zu 2.3.10.2. durch die Null-Eins-verteilten Zufallsgrößen X_i ($i = 1, 2, \dots$) beschrieben wird und

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

einer Binomialverteilung mit den Parametern n und p unterliegt. Wir wenden den zentralen Grenzwertsatz an und erhalten den folgenden Satz:

Satz 2.17 (Satz von Moivre¹⁾-Laplace): Ist S_n eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p , so gilt für beliebige t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < t\right) = \Phi(t; 0, 1). \quad (2.175)$$

Das heißt, wenn bei dem der Binomialverteilung zugrunde liegenden Bernoullischen Versuchsschema die Anzahl der unabhängigen Versuche gegen unendlich strebt, dann konvergiert die Verteilungsfunktion der standardisierten binomialverteilten Zufallsgröße gegen die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit den Parametern 0 und 1.

Die Bedeutung des Satzes 2.17 wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 2.64: Mit Hilfe unabhängiger Versuche ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses näherungsweise durch die relative Häufigkeit zu bestimmen. Mit Hilfe des Satzes von Moivre-Laplace soll nun untersucht werden, wie groß die Anzahl der unabhängigen Versuche sein muß, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 das Ergebnis mit einem Fehler kleiner 0,01 behaftet ist.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Tatsache, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses A wegen

$$H_n(A) = \frac{S_n}{n}$$

mit Hilfe der binomialverteilten Zufallsgröße S_n beschrieben wird. Davon ausgehend ist die o. g. Fragestellung wie folgt zu behandeln:

Die Anzahl n der durchzuführenden unabhängigen Versuche ist dann aus der Beziehung

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - P(A)\right| < 0,01\right) \geq 0,99$$

zu bestimmen. Mit $P(A) = p$ führen wir folgende Umformungen durch:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0,01\right) &= P(|S_n - np| < 0,01 \cdot n) \\ &= P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < \frac{0,01 \cdot n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= P\left(-\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}, 0,1\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}, 0,1\right) \quad (\text{vgl. Satz 2.17}) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}, 0,1\right) - 1 \end{aligned}$$

¹⁾ Abraham de Moivre (1667–1754), französischer Mathematiker.

$$\geq 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{0,25}}; 0,1\right) - 1.$$

Da p in der Regel unbekannt ist, benutzten wir hier die Abschätzung $p(1-p) \leq 0,25$.

Wir kommen der Aufgabenstellung nach, indem wir nun

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{0,25}}; 0,1\right) - 1 \geq 0,99$$

bzw.

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{0,25}}; 0,1\right) \geq 0,995$$

fordern.

Mit Hilfe der Tafel 2 des Anhangs ergibt sich für $\Phi(t_0; 0,1) = 0,995$ der Wert $t_0 = 2,576$. Die gesuchte Anzahl der Versuche ist die kleinste natürliche Zahl n mit

$$\frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{0,25}} \geq 2,576$$

und damit

$$n \approx 16\,590.$$

Wir müssen also etwa 16 590 Versuche durchführen, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit in durchschnittlich 99 % aller derartigen Versuchsserien mit der geforderten Genauigkeit zu ermitteln.

Das gesuchte n im Beispiel 2.64 können wir auch mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff abschätzen. Als Ergebnis erhalten wir $n = 250\,000$. Ein Vergleich mit dem mit Hilfe des Satzes von Moivre-Laplace gewonnenen Ergebnis zeigt, daß die Ungleichung von Tschebyscheff ungenauere Abschätzungen liefert.

2.3.10.5. Weiterführende Bemerkungen

In 2.3.10.2. haben wir das Verhalten der Zufallsgröße $H_n(A)$ untersucht und die Beziehung (2.171) hergeleitet. Hierbei erkannten wir, daß $P(A)$ nicht der Grenzwert von $H_n(A)$ im Sinne der „klassischen“ Analysis ist. Wir erhielten nur eine Aussage über das Konvergenzverhalten der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\text{„}|H_n(A) - P(A)| \geq \varepsilon“}$$

und nannten dieses Konvergenzverhalten **Konvergenz in Wahrscheinlichkeit**. Diesen Begriff können wir allgemein wie folgt definieren:

D.2.58 Definition 2.58: Eine Folge von Zufallsgrößen $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ heißt **konvergent in Wahrscheinlichkeit gegen a** , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| \geq \varepsilon) = 0 \quad (\varepsilon > 0 \text{ bel.})$$

gilt.

Neben der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch eine andere Art des Konvergenzverhaltens behandelt.

Definition 2.59: Eine Folge von Zufallsgrößen $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ heißt konvergent mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen a , wenn

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = a\right) = 1$$

gilt.

Vergleichen wir Definition 2.58 und 2.59, so ist zu erkennen, daß in 2.59 nicht die Konvergenz der Wahrscheinlichkeit, sondern die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines Grenzwertes untersucht wird. Zwischen beiden Konvergenzarten besteht folgender Zusammenhang:

Wenn eine Folge $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Zufallsgrößen mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen eine Größe a konvergiert, so konvergiert sie auch in Wahrscheinlichkeit gegen a . Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Hieraus erkennen wir, daß die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 ein „stärkeres“ Konvergenzverhalten als die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ausdrückt. Deshalb sagen wir auch, daß eine Folge von Zufallsgrößen, deren arithmetische Mittel mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen eine Größe a konvergieren, dem **starken Gesetz der großen Zahlen** unterliegt. Entsprechend wird von einer Folge von Zufallsgrößen, deren arithmetische Mittel in Wahrscheinlichkeit gegen eine Größe a konvergieren, gesagt, daß sie dem **schwachen Gesetz der großen Zahlen** unterliegt.

Mit den Sätzen 2.13 und 2.14 haben wir also zwei Formen des schwachen Gesetzes der großen Zahlen kennengelernt. Wir wollen abschließend das starke Gesetz der großen Zahlen in der Form von Kolmogorow angeben:

Satz 2.18 (Starkes Gesetz der großen Zahlen von Kolmogorow). Eine Folge $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen unterliegt genau dann dem starken Gesetz der großen Zahlen, wenn $m_1 = E(X_i)$ existiert. Es gilt in diesem Fall:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = m_1\right) = 1.$$

In [12] finden Sie hierzu ausführliche Untersuchungen.

2.3.11. Aufgaben

2.20: Ein Arbeiter bedient drei voneinander unabhängig arbeitende Maschinen. Jede einzelne Maschine verlangt innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls T die Aufmerksamkeit des Arbeiters mit der Wahrscheinlichkeit 0,4. Es sei X die zufällige Anzahl der Maschinen, die im Zeitintervall T die Aufmerksamkeit des Arbeiters verlangen. Bestimmen Sie

- a) die Verteilungstabelle von X ,
- b) $P(X \leq 1)$,
- c) die Verteilungsfunktion $F_X(t)$,
- d) $E(X)$,
- e) $D^2(X)$.

2.21: Bestimmen Sie die Quantile Q_p ($p = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$) der binomialverteilten Zufallsgröße X_4 aus Beispiel 2.29!

2.22: Einer Lieferung von 30 Teilen, die 5 Ausschußteile enthält, werden zufällig 4 Teile entnommen und überprüft. X sei die zufällige Anzahl der dabei festgestellten Ausschußteile. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anzahl der festgestellten Ausschußteile kleiner als zwei ist.

- * 2.23: Stellen Sie in einer Tabelle die Quantile

$$Q_p \quad \text{für } p = 0,01; 0,05; 0,1; 0,2$$

der standardisierten normalverteilten Zufallsgröße Y ($E(Y) = 0$; $D^2(Y) = 1$) zusammen!
Benutzen Sie dazu die Tafel 2 des Anhangs!

Lösen Sie die gleiche Aufgabenstellung für eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu = 2$ und $\sigma = 3$.

- * 2.24: Der Durchmesser einer auf einer automatischen Anlage gefertigten Kugel kann als normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu = 20$ mm und $\sigma = 0,5$ mm angesehen werden. Eine derartige Kugel genügt den Qualitätsansprüchen, wenn ihr Durchmesser im Intervall $[19,5; 22]$ liegt.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Kugel den Qualitätsansprüchen genügt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 1000 produzierten Kugeln genau 2 zu finden sind, deren Durchmesser kleiner als 18,5 mm ist?

- * 2.25: Ein Arbeiter stellt mit Wahrscheinlichkeit 0,9 ein Erzeugnis her, für das ein Jahr Garantie übernommen werden kann. Mit der Wahrscheinlichkeit 0,09 wird ein beschädigtes Erzeugnis, das sich jedoch ausbessern läßt, und mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 ein total unbrauchbares Stück hergestellt.

Es sei $X :=$ Anzahl der Erzeugnisse, für die ein Jahr Garantie übernommen wird, und $Y :=$ Anzahl der beschädigten Stücke, wenn insgesamt 3 Erzeugnisse unabhängig voneinander produziert wurden.

- a) Bestimmen Sie die Verteilungstabelle der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) .
b) Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeiten der Randverteilung von X bzw. Y .
c) Wie lautet die Verteilungstabelle der bedingten Einzelwahrscheinlichkeiten von X unter der Bedingung $\{Y = 1\}$?

- * 2.26: Die Verteilung der stetigen zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) ist durch die Dichtefunktion

$$f_{(X, Y)}(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } t_1^2 + t_2^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob die Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind!

- * 2.27: Zeigen Sie, daß die Summe Z zweier unabhängiger Zufallsgrößen X_1 und X_2 , die jeweils einer Poissonverteilung mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 unterliegen, ebenfalls poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ ist
a) mit Hilfe der Beziehung (2.139);
b) mit Hilfe charakteristischer Funktionen.

- * 2.28: Berechnen sie mit Hilfe erzeugender Funktionen Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße mit den Parametern n und p .

- * 2.29: Die zufällige Zeit X bis zum ersten Ausfall eines Bauelementes unterliege einer Exponentialverteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie folgende Beziehung für die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Bauelement vor der Zeit $t + s$ ausfällt, wenn bei einer Inspektion zur Zeit t festgestellt wurde, daß das Element bis zu dieser Zeit ausfallfrei gearbeitet hat:

$$P(X < t + s/X \geq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s} & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

Interpretieren Sie diese Eigenschaft der Exponentialverteilung und ordnen Sie sie in die in 2.3.6.6. angegebenen Anwendungsmöglichkeiten ein!

2.30: Ein System bestehe aus zwei im Sinne der Zuverlässigkeit in Reihe geschalteten Elementen (vgl. Bsp. 2.18). Die zufälligen Zeiten X_1 bzw. X_2 bis zum ersten Ausfall der Elemente unterliegen einer Exponentialverteilung mit den Parametern λ_1 bzw. λ_2 . Zeigen Sie, daß im Fall der Unabhängigkeit beider Elemente die zufällige Zeit S bis zum ersten Systemausfall ebenfalls einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ unterliegt. Verallgemeinern Sie das Ergebnis auf Reihenschaltungen aus einer beliebigen Anzahl unabhängiger Elemente!

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die sog. Überlebenswahrscheinlichkeit $P(S \geq t)$!

3. Mathematische Statistik

Im folgenden Kapitel werden wir Methoden zur Auswertung von Meßergebnissen kennenlernen. Als wichtige Vorarbeit wird in Abschnitt 3.1. erläutert, wie diese Ergebnisse geordnet, verdichtet und dargestellt werden, um sie einerseits überschaubar zu machen und um andererseits die Voraussetzungen zur Anwendung der Methoden der mathematischen Statistik zu schaffen. Aufbauend auf den Begriffen „Grundgesamtheit“ und „Stichprobe“ (Abschnitt 3.2.) lernen wir die Grundbegriffe der Schätz- und Testtheorie (Abschnitte 3.3. und 3.4.) und der Varianzanalyse (Abschnitt 3.5.) kennen. In den Abschnitten 3.6. bzw. 3.7. wird schließlich ein kurzer Überblick zur Regressions- und Korrelationsanalyse bzw. zu verteilungsunabhängigen Verfahren gegeben.

3.1. Beschreibende Statistik

3.1.1. Beschreibende Statistik bei einem Merkmal

3.1.1.1. Urliste, Häufigkeitstabellen, Häufigkeitsverteilungen

Wir wollen mit einem Beispiel beginnen und daran einige Begriffe erklären:

Beispiel 3.1: Gewisse Charakteristika einer Betonsorte, u.a. Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, sollen ermittelt werden. Um nun z.B. Aussagen über die Druckfestigkeit [10^{-1} MPa], auf dieses Charakteristikum wollen wir uns hier beschränken, machen zu können, wird unter gleichen Bedingungen eine gewisse Anzahl von Probewürfeln gefertigt und von jedem die Druckfestigkeit festgestellt. So erbrachte z.B. die Messung der Druckfestigkeit [10^{-1} MPa] bei 20 Probewürfeln folgende Ergebnisse:

183	181	183	180	182	182	185	182	184	179
182	184	180	181	179	180	182	180	181	183.

Wie im Beispiel 3.1 gehen wir in der beschreibenden Statistik bei der Ermittlung gewisser Eigenschaften (im Beispiel: Druckfestigkeit, Zugfestigkeit) eines Untersuchungsobjektes (im Beispiel: Betonsorte) von den für diese Eigenschaften an einer Menge von Elementen (Einheiten) des betrachteten Untersuchungsobjektes (im Beispiel: 20 Betonwürfel) ermittelten Meßergebnissen aus (im Beispiel: 20 Meßergebnisse für die Druckfestigkeit).

Dabei bezeichnen wir die einzelnen Eigenschaften des Untersuchungsobjektes als *Merkmale* und kennzeichnen sie durch große lateinische Buchstaben: X , Y , ... Die Merkmale, die wir als meßbar annehmen wollen, können diskret oder stetig sein. Die für die einzelnen Merkmale ermittelten Meßergebnisse nennen wir *Merkmalswerte (Meßwerte)* und kennzeichnen sie durch indizierte kleine lateinische Buchstaben: x_i , y_k , ... Die Menge der unbearbeiteten Meßergebnisse bezeichnen wir schließlich als *Urliste (Protokoll)*.

In den weiteren Ausführungen dieses Abschnittes wollen wir uns nun auf die Betrachtung eines Merkmals X eines Untersuchungsobjektes beschränken, für das die Meßwerte x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ermittelt wurden. Die Urliste enthält diese Meßwerte ungeordnet. Es kommt jetzt darauf an, dieses Zahlenmaterial zu ordnen, gegebenenfalls zu verdichten und damit überschaubar zu machen.

Ein erster Schritt in dieser Richtung besteht darin, die Meßwerte der Urliste der Größe nach zu ordnen. Wir erhalten so die sogenannte *Variationsreihe*, deren Werte wir mit x_j^*

$(j = 1, 2, \dots, n)$ bezeichnen und bei der wir

$$x_1^* = x_{\min} \quad (\text{kleinster Wert der Urliste})$$

und

$$x_n^* = x_{\max} \quad (\text{größter Wert der Urliste})$$

setzen. Für die Variationsreihe gilt dann folglich:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*.$$

Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Meßwert wird *Spannweite* oder *Variationsbreite* (Symbol: R) genannt:

$$R := x_{\max} - x_{\min} = x_n^* - x_1^*.$$

Im Beispiel 3.1 lautet die Variationsreihe

$$\begin{array}{cccccccccc} 179 & 179 & 180 & 180 & 180 & 180 & 181 & 181 & 181 & 182 \\ 182 & 182 & 182 & 182 & 183 & 183 & 183 & 184 & 184 & 185. \end{array}$$

Sehr häufig tritt der bei dem Beispiel 3.1 vorliegende Fall ein, daß in der Urliste einzelne Meßwerte mehrmals auftreten. Für das Ordnen des Materials ist es in diesem Fall günstig, eine (*primäre*) *Häufigkeitstabelle* (*Verteilungstafel*) aufzustellen. In ihr halten wir neben den in der Urliste enthaltenen möglichen Meßwerten x_m^* , $m = 1, 2, \dots, k$, und den mit Hilfe einer Strichliste gewonnenen zugehörigen absoluten Häufigkeiten h_m meist noch die entsprechenden relativen Häufigkeiten

$$H_m = \frac{h_m}{n}$$

und die relativen Summenhäufigkeiten

$$\sum_{j=1}^m \frac{h_j}{n} = \sum_{j=1}^m H_j$$

fest, wobei sich die Summation jeweils bis zum Index des Meßwertes x_m^* , $m = 1, 2, \dots, k$, erstreckt.

Die relative Häufigkeit und die relative Summenhäufigkeit werden oft in Prozenten angegeben. Die Verteilungstafel gibt einen guten Überblick über die Häufigkeitsverteilung des betrachteten Merkmals. Für das Beispiel 3.1 ist die Verteilungstafel in Tabelle 3.1 angegeben.

Die Verteilungstafel zeigt u. a., daß der Meßwert 182 die größte Häufigkeit besitzt und daß 70% aller Meßwerte kleiner oder gleich 182 sind.

Enthält die Urliste eine große Anzahl unterschiedlicher Meßwerte, so können wir das Material weiter verdichten, indem wir die vorliegenden Meßwerte in Klassen einteilen, und eine (*sekundäre* oder *reduzierte*) *Häufigkeitstabelle* (*Verteilungstafel*) aufstellen. Dazu zerlegen wir ein Intervall der reellen Achse, in dem alle Meßwerte der Urliste liegen, in Teiliintervalle, die wir als *Klassen* bezeichnen. Diese werden durch ihre *obere* und *untere Klassengrenze*, durch ihre *Klassenbreite* und durch ihre *Klassenmitte* charakterisiert.

Für die Festlegung der Anzahl der zu bildenden Klassen – wir wollen diese Anzahl mit k bezeichnen – gibt es keine feste Vorschrift. Es sind lediglich Erfahrungswerte bekannt. So wird z. B. empfohlen, $k \leq 5 \log n$ oder auch k wenigstens 6 und höchstens 20 zu wählen. Wird k zu klein gewählt, so verwischt häufig das Typische des Merkmals, und ein großer Informationsverlust tritt ein. Auf der anderen Seite bringt ein zu großes k wenig Übersichtlichkeit.

Tabelle 3.1. Verteilungstafel zum Beispiel 3.1

x_m^*	absolute Häufigkeit		relative Häufigkeit $H_m / 100\%$	relative Summenhäufigkeit $\sum_{j=1}^m H_j / 100\%$
	Strichliste	h_m		
179	II	2	10	10
180	III	4	20	30
181	III	3	15	45
182	IV	5	25	70
183	III	3	15	85
184	II	2	10	95
185	I	1	5	100
		$n = 20$	100	

Die Festlegung der Klassenbreiten, das sind die Differenzen der jeweiligen oberen und unteren Klassengrenzen, richtet sich nach dem Umfang n der in der Urliste erfaßten Meßwerte und nach der Spannweite R . Es empfiehlt sich, die Klassenbreite d für alle Klassen konstant zu halten. Dadurch lassen sich spätere Berechnungen sehr vereinfachen.

Durch die Klassenmitten u_m , $m = 1, 2, \dots, k$, werden bei weiteren Berechnungen all die Meßwerte repräsentiert, die in die betreffende Klasse fallen. Dabei ergibt sich bei einem stetigen Merkmal die Klassenmitte als arithmetisches Mittel der zugehörigen Klassengrenzen. Demgegenüber ist bei einem diskreten Merkmal die Klassenmitte das arithmetische Mittel der möglichen Meßwerte, die in diese Klasse fallen. Nach der Klasseneinteilung stellen wir mit Hilfe einer Strichliste die Anzahl der Meßwerte fest, die in die einzelnen Klassen fallen. Meßwerte, die auf Klassengrenzen liegen, ordnen wir jeweils der „nächsthöheren“ Klasse zu. Auf diese eine Möglichkeit der Zuordnung wollen wir uns im folgenden beschränken. Die Anzahl der in der Klasse m liegenden Meßwerte bezeichnen

wir mit h_m , $m = 1, 2, \dots, k$, wobei $\sum_{m=1}^k h_m = n$ gilt. Für die relative Häufigkeit H_m erhalten

wir dann $H_m = h_m/n$, $m = 1, 2, \dots, k$, und für die relative Summenhäufigkeit $\sum_{j=1}^m H_j$, $m = 1, 2, \dots, k$.

Die Häufigkeitstabelle gibt einen guten Überblick über die Häufigkeitsverteilung des betrachteten Merkmals.

Beispiel 3.2: Bei 120 Wellen, die der laufenden Produktion eines Präzisionsdrehautomaten entnommen wurden, ist die Maßabweichung des Durchmessers vom Nennmaß ermittelt worden. Diese Abweichung ist ein stetiges Merkmal.

Die Urliste (Tabelle 3.2) enthält die Meßwerte der Abweichungen in μm . Eine Häufigkeitstabelle ist aufzustellen.

Aus der Urliste entnehmen wir die Meßwerte $x_{\max} = 28$ und $x_{\min} = -17$. Daraus folgt die Spannweite $R = x_{\max} - x_{\min} = 45$. Wählen wir die Klassenbreite $d = 6$, die Klassenanzahl $k = 8$ und -18 als untere Klassengrenze der ersten Klasse, so erhalten wir die in Tabelle 3.3 angegebene Häufigkeitstabelle.

Wählen wir bei gleicher Klassenbreite $d = 6$ und der Klassenanzahl $k = 9$ als untere Klassengrenze der ersten Klasse -20 , dann ergibt sich die in Tabelle 3.4 angegebene

Tabelle 3.2. Urliste zum Beispiel 3.2

+ 2,5	+ 16,0	+ 1,0	- 17,0	- 1,0	- 6,5
- 1,0	+ 15,0	+ 5,0	+ 11,0	+ 3,0	+ 3,0
+ 8,0	+ 6,5	+ 13,0	- 8,0	+ 8,0	+ 4,0
+ 18,5	+ 1,5	+ 12,0	+ 11,0	+ 17,0	+ 8,5
+ 3,5	+ 2,0	+ 6,0	- 2,0	+ 12,0	+ 18,0
- 4,5	+ 13,0	0,0	- 0,5	+ 5,5	+ 9,0
- 5,5	- 1,5	- 12,0	+ 14,0	+ 1,0	- 12,0
0,0	+ 0,5	- 8,5	+ 8,0	+ 0,5	- 3,0
+ 7,5	- 2,5	+ 24,0	+ 1,5	- 13,0	+ 8,5
+ 16,0	+ 4,5	+ 9,0	+ 1,0	+ 1,5	+ 11,0
+ 10,0	+ 9,5	+ 4,5	- 13,5	+ 19,0	- 16,0
- 0,5	+ 26,0	- 1,5	+ 7,5	+ 10,5	+ 13,0
- 4,0	+ 6,5	- 2,0	0,0	+ 3,0	- 7,5
+ 2,0	+ 14,0	+ 6,0	+ 4,5	- 4,0	- 15,5
+ 18,0	+ 7,0	+ 22,0	- 3,5	+ 6,5	+ 17,0
+ 28,0	+ 2,5	+ 19,0	+ 4,0	+ 14,0	+ 21,0
- 10,5	- 6,0	+ 10,0	+ 20,0	+ 16,0	+ 9,0
- 5,0	+ 2,0	+ 13,0	- 7,5	+ 8,0	- 15,0
+ 2,0	- 7,0	+ 11,0	+ 9,5	+ 3,0	- 14,5
+ 7,0	- 11,0	+ 6,0	+ 4,0	- 4,0	- 11,5

Tabelle 3.3. Häufigkeitstabelle zum Beispiel 3.2

Klassengrenzen	Klassenmitte u_m	absolute Häufigkeit h_m	relative Häufigkeit H_m 100 %	relative Summenhäufigkeit
				$\sum_{j=1}^m H_j$ 100 %
-18 bis unter -12	-15	7	5,83	5,83
-12 bis unter -6	-9	11	9,17	15,00
-6 bis unter 0	-3	18	15,00	30,00
0 bis unter 6	3	30	25,00	55,00
6 bis unter 12	9	28	23,33	78,33
12 bis unter 18	15	15	12,50	90,83
18 bis unter 24	21	8	6,67	97,50
24 bis unter 30	27	3	2,50	100,00
		120	100	

Häufigkeitstabelle. Die unterschiedliche Festlegung der unteren Klassengrenze der ersten Klasse wollen wir als unterschiedliche *Reduktionslage* der Häufigkeitstabellen bezeichnen. Die Festlegung der Reduktionslage hat auf Berechnungen, die unter Verwendung des mit Hilfe einer Häufigkeitstabelle geordneten und verdichteten Materials durchgeführt werden, kaum Einfluß.

3.1.1.2. Graphische Darstellungen von Häufigkeitsverteilungen

Zur weiteren Veranschaulichung der mit Hilfe einer Häufigkeitstabelle geordneten und verdichteten Meßwerte und damit der Häufigkeitsverteilung des betrachteten Merkmals dienen graphische Darstellungen.

Tabelle 3.4. Häufigkeitstabelle zum Beispiel 3.2 mit gegenüber der Häufigkeitstabelle in Tab. 3.3 geänderten Klassengrenzen

Klassengrenzen	Klassenmitte u_m	absolute Häufigkeit h_m	relative Häufigkeit $H_m \cdot 100\%$	relative Summenhäufigkeit $\sum_{j=1}^m H_j \cdot 100\%$
-20 bis unter -14	-17	5	4,17	4,17
-14 bis unter -8	-11	8	6,67	10,84
-8 bis unter -2	-5	15	12,50	23,34
-2 bis unter +4	1	30	25,00	48,34
+4 bis unter 10	7	29	24,17	72,51
10 bis unter 16	13	17	14,17	86,68
16 bis unter 22	19	12	10,00	96,68
22 bis unter 28	25	3	2,50	99,18
28 bis unter 34	31	1	0,83	100,01
		120	100,01	

Bei diesen verwenden wir im allgemeinen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, bei dem auf der Abszissenachse, die auch *Merkmalsachse* genannt wird, je nach der Darstellung entweder die vorliegenden Meßwerte oder die Klassengrenzen oder die Klassenmitten und auf der Ordinatenachse die zugehörigen absoluten oder relativen Häufigkeiten abgetragen werden.

Die graphische Darstellung von Häufigkeitsverteilungen stetiger Merkmale können wir durch Histogramme, Häufigkeitspolygone oder auch Summenpolygone vornehmen. Bei ihrer Erklärung wollen wir von einer (sekundären) Häufigkeitstabelle ausgehen, da eine primäre Häufigkeitstabelle als Spezialfall einer sekundären Häufigkeitstabelle (Klassenbreite 1) aufgefaßt werden kann.

Von einem *Histogramm* sprechen wir dann, wenn über jeder Klasse ein Rechteck mit einer der absoluten bzw. relativen Häufigkeit (evtl. in Prozenten) der jeweiligen Klasse entsprechenden Höhe errichtet wird. Die Rechteckflächen sind dann der absoluten bzw. relativen Häufigkeit der einzelnen Klassen proportional. Die Histogramme der in den Tabellen 3.1 und 3.3 erfaßten Häufigkeitstabellen zeigen die Bilder 3.1 und 3.2.

Fertigen Sie selbständig das Histogramm zu der in der Tabelle 3.4 erfaßten Häufigkeitstabelle an!

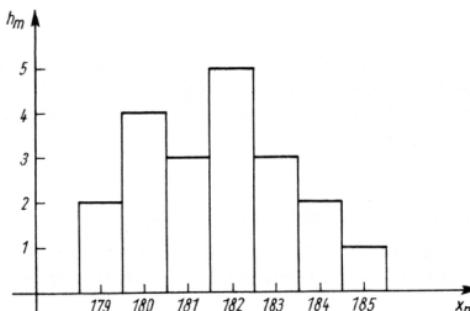


Bild 3.1. Histogramm für Beispiel 3.1 (Tabelle 3.4)

Ein **Häufigkeitspolygon** (Linienpolygon) erhalten wir, wenn über den Klassenmittnen (Abszisse) die zugehörigen absoluten bzw. relativen Häufigkeiten (evtl. in Prozenten) (Ordinate) als Punkte abgetragen und benachbarte Punkte miteinander verbunden werden. Es soll dann auf der Merkmalsachse in der Klassenmitte der den Randklassen benachbarten Klassen beginnen bzw. enden, falls das Auftreten von Meßwerten in diesen Klassen theoretisch möglich ist. In den Bildern 3.3 und 3.4 sind die zu den in den Tabellen 3.1 und 3.4 erfaßten Häufigkeitstabellen gehörenden Häufigkeitspolygone angegeben. Fertigen Sie wieder selbstständig das Häufigkeitspolygon zu der in Tabelle 3.3 erfaßten Häufigkeitstabelle an!

Durch ein **Summenpolygon** wird es nun möglich, absolute bzw. relative Summenhäufigkeiten graphisch darzustellen. Wir erhalten es, wenn über den oberen Klassengrenzen (Abszisse) die zugehörigen absoluten bzw. relativen Summenhäufigkeiten (evtl. in Prozenten) (Ordinate) als Punkte abgetragen und benachbarte Punkte miteinander verbunden werden. Die Bilder 3.5 und 3.6 zeigen die zu den in den Tabellen 3.1 und 3.3 erfaßten Häufigkeitstabellen gehörenden Summenpolygone.

Fertigen Sie selbstständig das Summenpolygon zu der in Tabelle 3.4 erfaßten Häufigkeitstabelle an!

Bei diskreten Merkmalen werden zur graphischen Darstellung von Häufigkeitsverteilungen Streckendiagramme und Treppenpolygone angewandt. Wir wollen hier nur den Weg zur Herstellung solcher Diagramme bzw. Polygone angeben und aus demselben Grund wie oben von einer (sekundären) Häufigkeitstabelle ausgehen.

Ein **Streckendiagramm** erhalten wir, wenn in den Klassenmittten Senkrechte errichtet werden, deren Längen den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten der jeweiligen Klassen entsprechen. Endpunkte benachbarter Senkrechter werden nicht verbunden.

Von einem **Treppenpolygon** sprechen wir dann, wenn in den oberen Klassengrenzen

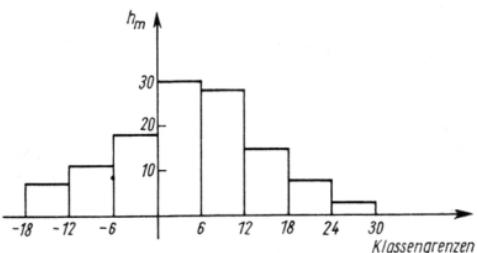


Bild 3.2. Histogramm für Beispiel 3.2 (Tabelle 3.3)

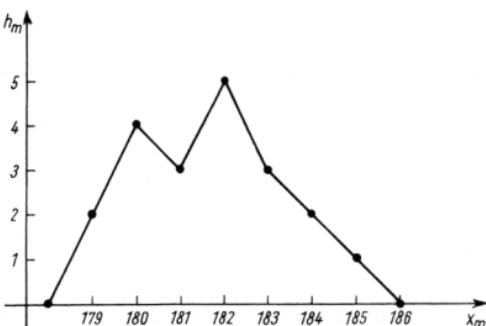
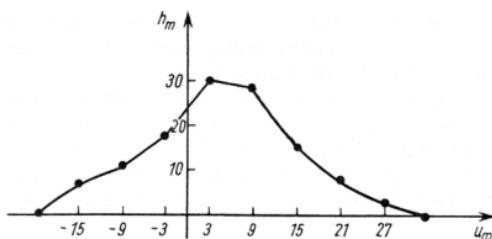
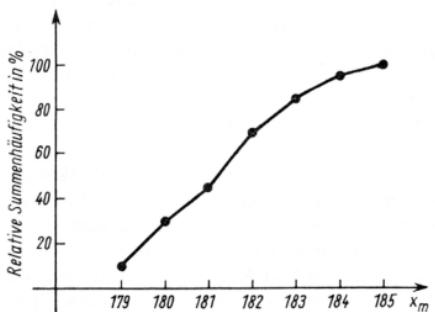
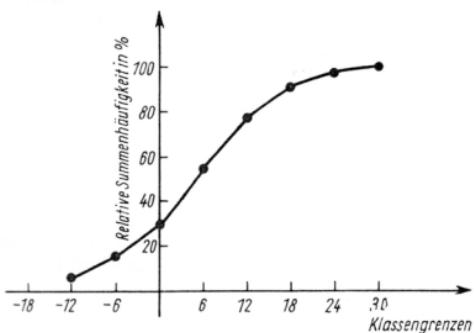


Bild 3.3. Häufigkeitspolygon für Beispiel 3.1 (Tabelle 3.1)

Bild 3.4. Häufigkeitspolygon
für Beispiel 3.2 (Tabelle 3.4)Bild 3.5. Summenpolygon
für Beispiel 3.1 (Tabelle 3.1)Bild 3.6. Summenpolygon
für Beispiel 3.2 (Tabelle 3.3)

Senkrechte mit einer der absoluten bzw. relativen Summenhäufigkeit (evtl. in Prozenten) der jeweiligen Klasse entsprechenden Höhe errichtet werden und von den einzelnen Endpunkten ausgehend in positiver Richtung Parallele zur Merkmalsachse bis zur nächsten Senkrechten gezogen werden.

Nähere Ausführungen zur graphischen Darstellung von Häufigkeitsverteilungen finden Sie z. B. in [5].

3.1.1.3. Statistische Maßzahlen

Im folgenden werden wir uns mit Möglichkeiten beschäftigen, eine Menge von Meßwerten eines meßbaren Merkmals durch gewisse Kennwerte, die *statistische Maßzahlen* ge-

nannt werden, zu charakterisieren.¹⁾ Sie sind vorteilhaft zur Beschreibung von Häufigkeitsverteilungen. Aus der Vielzahl von statistischen Maßzahlen beschränken wir uns auf solche zur Erfassung des *Mittelwertes* und der *Streuung*.

Mittelwertmaße

Durch den Mittelwert einer Menge von Meßwerten erhalten wir Aufschluß über die Lage des Zentrums dieser Meßwerte. Für ihn sind folgende statistische Maßzahlen gebräuchlich: das *arithmetische Mittel*, der *Median* oder *Zentralwert*, der *Modalwert* oder das *Dichtemittel* und das *geometrische Mittel*.

Das arithmetische Mittel \bar{x} : Das arithmetische Mittel \bar{x} ist eine häufig in vielen Gebieten von Forschung und Praxis angewandte statistische Maßzahl. Es ist für eine Menge von Meßwerten x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, wie folgt erklärt:

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

Treten k mögliche Meßwerte x_m , $m = 1, 2, \dots, k$, mit den Häufigkeiten h_m $\left(\sum_{m=1}^k h_m = n \right)$ auf, so geht (3.1) über in:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k x_m h_m. \quad (3.2)$$

Für das Beispiel 3.1 ergibt sich:

$$\bar{x} = \frac{1}{20} [179 \cdot 2 + 180 \cdot 4 + \dots + 185 \cdot 1] = \frac{1}{20} \cdot 3633 = 181,7.$$

Liegt eine Klasseneinteilung vor, so berechnen wir das arithmetische Mittel nach der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^k u_m h_m, \quad (3.3)$$

wobei k die Anzahl der Klassen, u_m , $m = 1, 2, \dots, k$, die Klassenmitte und h_m die Anzahl der Meßwerte der Klasse m bezeichnen. Da die Meßwerte einer Klasse also durch Klassenmitteln repräsentiert werden, können sich Unterschiede zwischen den nach (3.1) und (3.3) errechneten numerischen Werten von maximal $d/2$ ergeben.

Am Ende des Abschnittes wird in Verbindung mit anderen statistischen Maßzahlen für das Beispiel 3.2 das arithmetische Mittel angegeben.

Der Median \tilde{x} : Bei stark asymmetrischen Häufigkeitsverteilungen und bei nur wenigen Meßwerten wird oft der Median als Mittelwertsmaß angewandt. Für eine Menge von Meßwerten x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ist der Median bei ungeradzahligem n gleich dem mittleren Wert und bei geradzahligem n gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden in der Mitte liegenden Werten der zugehörigen Variationsreihe x_j^* , $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{k+1}^*, & \text{falls } n = 2k + 1, \\ \frac{x_k^* + x_{k+1}^*}{2}, & \text{falls } n = 2k. \end{cases} \quad (3.4)$$

Für Beispiel 3.1 ist $\tilde{x} = \frac{1}{2}(x_{10}^* + x_{11}^*) = \frac{1}{2}(182 + 182) = 182$.

¹⁾ Im Unterschied zu den Kennwerten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gemäß Abschnitt 2.3.3. sprechen wir auch von *empirischen* Kennwerten.

Ist die Anzahl der Meßwerte groß, können wir den Median näherungsweise aus der Häufigkeitstabelle ablesen. Dazu summieren wir die Häufigkeiten der Meßwerte in den einzelnen Klassen schrittweise auf, bis zu der Klasse, für die diese Summe gleich $n/2$ oder „wenig“ kleiner als $n/2$ ist. Als Näherungswert für den Median wird dann die Mitte der folgenden Klasse gewählt. Die genaue Berechnung des Medians können Sie in [18] nachlesen.

Der Modalwert D : Bei Häufigkeitsverteilungen wird oft der Modalwert (das Dichtemittel) als Mittelwertmaß herangezogen. Er ist der Meßwert, der in einer Menge von Meßwerten am häufigsten auftritt.

Der Modalwert kann sofort aus der primären Verteilungstafel abgelesen werden. Im Beispiel 3.1 ist $D = 182$. Beim Vorliegen einer sekundären Häufigkeitstabelle können wir näherungsweise nur die Klasse angeben, in der der Modalwert zu suchen ist. Die Klassenmitte der Klasse mit der größten absoluten Häufigkeit ist dann ein Näherungswert für D . Zur genauen Berechnung von D sei wieder auf [18] verwiesen.

Anmerkung: Bei symmetrischen Häufigkeitsverteilungen fallen die Werte des arithmetischen Mittels, des Medians und des Modalwertes zusammen:

$$\bar{x} = \tilde{x} = D.$$

Das geometrische Mittel G : Bei Untersuchungen in der Ökonomie, z. B. bei der Berechnung von Wachstumsraten, wird als Mittelwertmaß häufig das geometrische Mittel angewandt. Liegt eine Menge von positiven Meßwerten $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, vor, dann können wir es wie folgt bestimmen:

$$G := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}. \quad (3.5)$$

Seine Berechnung erfolgt zweckmäßig auf logarithmischem Wege:

$$\log G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Streuungsmaße

Zur Beschreibung einer Häufigkeitsverteilung ist die Angabe des Mittelwertes noch nicht ausreichend. Es ist weiterhin erforderlich, zu bestimmen, in welchem Maße die Meßwerte streuen. So haben z.B. die beiden Reihen von Meßwerten: 2,1; 3,2; 5,4; 6,1 und 3,9; 4,1; 4,5; 4,3 das gleiche arithmetische Mittel $\bar{x} = 4,2$, unterscheiden sich aber wesentlich voneinander. Die Werte der ersten Reihe streuen insgesamt, aber auch um das arithmetische Mittel stärker als die der zweiten Reihe.

Für die Charakterisierung der Streuung einer Menge von Meßwerten sind folgende statistische Maßzahlen gebräuchlich: die *mittlere quadratische Abweichung*, die *Variationsbreite* und der *empirische Variationskoeffizient*.

Die mittlere quadratische Abweichung (empirische Varianz) s^2 : Die mittlere quadratische Abweichung s^2 ist eine statistische Maßzahl, die auf den Abweichungen der einzelnen Meßwerte $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, einer Menge von Meßwerten vom arithmetischen Mittel \bar{x} dieser Meßwerte aufbaut. Sie ist wie folgt erklärt:

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.6)$$

Die positive Quadratwurzel von s^2 nennen wir *empirische Standardabweichung*.

Anmerkung: Im Abschnitt 3.3. werden wir begründen, warum in Formel (3.6) die Division durch $(n - 1)$ und nicht durch n erfolgt, wie es auf Grund der Erklärung des arithmetischen Mittels zu erwarten wäre.

Begründen Sie, warum es nicht sinnvoll ist, in der Formel (3.6) die Summe der Abweichungsquadrate durch die Summe der Abweichungen zu ersetzen!

Für Berechnungen wird die Formel (3.6) meist in folgender Form angewandt:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Führen Sie diese Umrechnung selbst durch und bedenken Sie dabei, daß $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$ ist!

Treten k mögliche Meßwerte x_m , $m = 1, 2, \dots, k$, mit den Häufigkeiten h_m $\left(\sum_{m=1}^k h_m = n \right)$ auf, so gehen (3.6) und (3.7) in die Ausdrücke

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (x_m - \bar{x})^2 h_m \quad (3.8)$$

und

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{m=1}^k x_m^2 h_m - \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^k x_m h_m \right)^2 \right] \quad (3.9)$$

über.

Für das Beispiel 3.1 ist das Rechenschema zur Berechnung von s^2 mit $\bar{x} = 181,7$ nach (3.8) in Tabelle 3.5 und nach (3.9) in Tabelle 3.6 angegeben.

Tabelle 3.5. Schema zur Berechnung von s^2 nach (3.8)

x_m	h_m	$x_m - \bar{x}$	$(x_m - \bar{x})^2$	$(x_m - \bar{x})^2 h_m$
179	2	-2,7	7,29	14,58
180	4	-1,7	2,89	11,56
181	3	-0,7	0,49	1,47
182	5	0,3	0,09	0,45
183	3	1,3	1,69	5,07
184	2	2,3	5,29	10,58
185	1	3,3	10,89	10,89
	20			54,60

Wir erhalten:

$$s^2 = \frac{1}{19} \cdot 54,60 = 2,87,$$

$$s = 1,7.$$

Nach Tab. 3.6 (S. 120) erhalten wir:

$$s^2 = \frac{1}{19} \left[659\,989 - \frac{1}{20} \cdot 3\,633^2 \right] = \frac{1}{19} \cdot 54,55 = 2,87,$$

$$s = 1,7.$$

Tabelle 3.6. Schema zur Berechnung von s^2
nach (3.9)

x_m	h_m	$x_m h_m$	$x_m^2 h_m$
179	2	358	64 082
180	4	720	129 600
181	3	543	98 283
182	5	910	165 620
183	3	549	100 467
184	2	368	67 712
185	1	185	34 225
	20	3 633	659 989

Sind die Meßwerte in Klassen eingeteilt, so berechnen wir die empirische Varianz wie folgt:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^k (u_m - \bar{x})^2 h_m, \quad (3.10)$$

wobei k die Anzahl der Klassen, u_m , $m = 1, 2, \dots, k$, die Klassenmitte und h_m die Anzahl der Meßwerte der Klasse m bezeichnen. Durch einfaches Umrechnen geht (3.10) über in

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{m=1}^k u_m^2 h_m - \frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^k u_m h_m \right)^2 \right]. \quad (3.11)$$

Aus dem schon bei der Erklärung des arithmetischen Mittels genannten Grund können sich zwischen den mit Formel (3.6) und den mit Formel (3.10) ermittelten numerischen Werten gewisse Unterschiede ergeben.

Zur rechentechnischen Bearbeitung bieten sich die Formeln (3.9) bzw. (3.11) an.

Für das Beispiel 3.2 wird am Ende dieses Abschnittes die Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung angegeben.

Die Variationsbreite (Spannweite) R : Ein einfaches Streuungsmaß, das sich besonders beim Vorliegen von nur wenigen Meßwerten bewährt hat, ist die schon in Abschnitt 3.1.1.1. eingeführte Variationsbreite R .

Für eine Menge von Meßwerten x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ist sie die Differenz aus dem größten (x_{\max}) und dem kleinsten (x_{\min}) Meßwert bzw. des letzten (x_n^*) und des ersten (x_1^* Wertes der zugehörigen Variationsreihe:

$$R := x_{\max} - x_{\min} = x_n^* - x_1^*. \quad (3.12)$$

Im Beispiel 3.1 beträgt die Spannweite

$$R = 185 - 179 = 6.$$

Der empirische Variationskoeffizient v : Bei praktischen Untersuchungen wird in zunehmendem Umfang beim Vergleich der Streuungen zweier Häufigkeitsverteilungen der empirische Variationskoeffizient herangezogen. Sein Vorteil liegt darin, daß er die Größe s in Prozenten des arithmetischen Mittels ausdrückt:

$$v := \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (3.13)$$

Für das Beispiel 3.1 erhalten wir folgenden empirischen Variationskoeffizient:

$$v = \frac{1,7}{181,7} \cdot 100\% = 0,94\%.$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir für das Beispiel 3.2 bis auf das geometrische Mittel die oben erläuterten Maßzahlen berechnen.

In Tabelle 3.7 ist das Rechenschema zur Bestimmung von \bar{x} und s^2 angegeben.

Tabelle 3.7. Schema zur Berechnung von \bar{x} nach (3.3) und s^2 nach (3.11)

Klassengrenzen	u_m	h_m	$u_m h_m$	$u_m^2 h_m$
-18 bis unter -12	-15	7	-105	1575
-12 bis unter -6	-9	11	-99	891
-6 bis unter 0	-3	18	-54	162
0 bis unter 6	3	30	90	270
6 bis unter 12	9	28	252	2268
12 bis unter 18	15	15	225	3375
18 bis unter 24	21	8	168	3528
24 bis unter 30	27	3	81	2187
		120	558	14256

Mit den in Tabelle 3.7 erfaßten Ergebnissen ergibt sich unter Verwendung der Formeln (3.3) und (3.11):

$$\bar{x} = \frac{1}{120} \cdot 558 = 4,65,$$

$$s^2 = \frac{1}{119} \left(14256 - \frac{1}{120} \cdot 558^2 \right) = \frac{1}{119} \cdot 11661 = 98,$$

$$s = 9,9.$$

Schließlich sind in Tabelle 3.8 die für das Beispiel 3.2 ermittelten statistischen Maßzahlen zusammengestellt.

Tabelle 3.8. Zusammenstellung statistischer Maßzahlen für Beispiel 3.2

Mittelwertmaße	Streuungsmaße
$\bar{x} = 4,65$	$s^2 = 98, s = 9,9$
$\hat{x} = 4$	$R = 45$
$D \approx 3$	$v = 213\%$

3.1.2. Beschreibende Statistik bei zwei Merkmalen

3.1.2.1. Urliste, Korrelationstabelle, Häufigkeitsverteilung

Wir wollen jetzt die Ausführungen in Abschnitt 3.1.1. dahingehend erweitern, daß bei einem Untersuchungsobjekt gleichzeitig zwei meßbare Merkmale X und Y betrachtet wer-

den. Bei diesem Herangehen interessiert uns weniger die Beschreibung eines dieser Merkmale isoliert vom anderen, als vielmehr die der Abhängigkeit zwischen diesen Merkmalen.

Die für die beiden Merkmale X und Y ermittelten Meßwerte fassen wir für jedes Element des Untersuchungsobjekts zu einem Meßwertpaar $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, zusammen. Diese werden wiederum in einer Urliste festgehalten.

Beispiel 3.3: In einem Stahlwerk wird bei einer Stahlsorte der Siliziumgehalt [%] (Merkmal X) und die Druckfestigkeit [10 MPa] (Merkmal Y) untersucht. Die Urliste

Tabelle 3.9. Urliste zum Beispiel 3.3

$(x_i; y_i)$	$(x_i; y_i)$	$(x_i; y_i)$
0,34 66,0	0,30 63,3	0,27 63,7
0,27 59,3	0,32 62,9	0,32 68,0
0,26 59,3	0,21 55,3	0,22 52,2
0,31 61,9	0,24 64,2	0,23 58,9
0,29 60,2	0,24 60,2	0,23 62,0

mit den Wertepaaren (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 15$, ist in Tabelle 3.9 angegeben. Besteht zwischen den beiden Merkmalen eine Abhängigkeit?

Das Ordnen der Meßwertpaare der Urliste geschieht dann, wenn bei keinem der beiden Merkmale eine Klasseneinteilung erforderlich ist, durch Eintragen dieser Meßwertpaare in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die so entstehende Punktwolke vermittelt nur einen ersten Eindruck von dem vorliegenden Zahlenmaterial. Bild 3.7 zeigt die von den Meßwertpaaren des Beispiels 3.3 erzeugte Punktwolke.

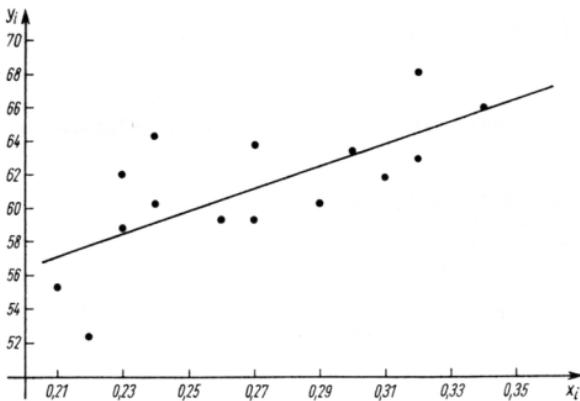


Bild 3.7. Punktwolke für Beispiel 3.3

Aus ihr ersehen wir, daß für größere Werte des Merkmals X größere Werte des Merkmals Y zu erwarten sind, also eine Abhängigkeit zwischen beiden Merkmalen besteht, und daß andererseits diese Abhängigkeit nicht durch eine Funktionsgleichung erfaßt werden kann.

Erweist es sich für wenigstens eines der beiden Merkmale als günstig, die Meßwerte in Klassen einzuteilen, dann besteht der erste Schritt beim Ordnen des Zahlenmaterials darin, die Meßwertpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, ebenfalls durch eine Punktwolke zu veranschaulichen. Läßt die Gestalt der Punktwolke eine Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen erwarten, dann wird zusätzlich zu der graphischen Darstellung der Meßwertpaare meist noch eine Häufigkeitstabelle angefertigt. Sie wird in diesem Zusammenhang als *Korrelationstabelle* bezeichnet und ist die Grundlage für die Berechnung statistischer Maßzahlen.

Bei einer Korrelationstabelle unterteilen wir die vorliegenden Meßwerte des Merkmals X bzw. Y in k bzw. l Klassen der Breite d_X bzw. d_Y mit den Klassenmittnen u_i , $i = 1, 2, \dots, k$, bzw. v_j , $j = 1, 2, \dots, l$, und ordnen die Meßwertpaare in das so entstehende Raster ein, wodurch wir die absoluten Häufigkeiten h_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$, erhalten. Wir erfassen weiterhin die Randsummen $h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^l h_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, k$, und $h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^k h_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, l$, und die Gesamtsumme $n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h_{ij}$.

Durch eine Korrelationstabelle wird eine zweidimensionale Häufigkeitsverteilung veranschaulicht.

Wir wollen das Vorgehen an einem Beispiel erläutern:

Beispiel 3.4: Von 86 Chargen einer Stahlsorte wurden der Kohlenstoffgehalt C [%] (Merkmal X) und die Zugfestigkeit σ_b [10 MPa] (Merkmal Y) in der Urliste (Tabelle 3.10) festgehalten.

Die Punktwolke, die die Meßwertpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 86$, veranschaulicht, läßt eine Abhängigkeit zwischen den beiden Merkmalen erkennen (Bild 3.8).

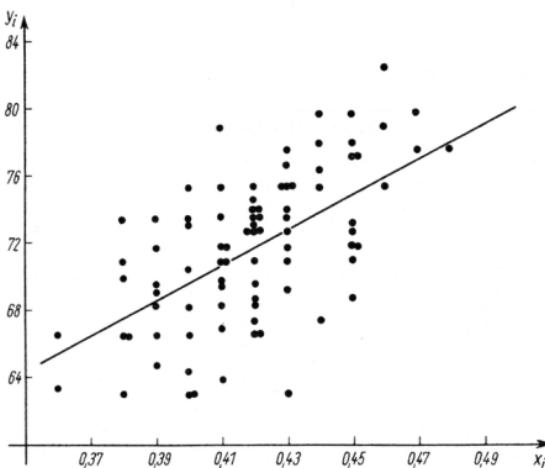


Bild 3.8. Punktwolke für Beispiel 3.4

Tabelle 3.10. Urliste für Beispiel 3.4

$(x_i; y_i)$	$(x_i; y_i)$	$(x_i; y_i)$
0,42 68,6	0,41 69,6	0,42 72,5
0,42 72,5	0,39 68,1	0,41 71,7
0,46 75,2	0,42 70,8	0,40 70,3
0,46 82,3	0,45 73,0	0,38 62,9
0,41 69,4	0,40 68,1	0,44 75,2
0,45 71,7	0,42 73,4	0,40 73,4
0,43 73,4	0,39 71,7	0,38 66,4
0,45 68,6	0,41 75,2	0,40 66,4
0,43 75,2	0,39 66,4	0,42 75,2
0,45 79,6	0,42 66,4	0,39 69,0
0,42 73,9	0,43 62,9	0,44 79,6
0,40 62,9	0,41 63,7	0,44 77,9
0,40 62,9	0,36 63,3	0,43 75,2
0,42 74,4	0,39 69,4	0,42 66,4
0,42 67,2	0,40 64,2	0,41 66,8
0,41 73,4	0,38 66,4	0,42 69,4
0,42 68,1	0,39 64,6	0,38 69,9
0,45 72,5	0,36 66,4	0,44 67,2
0,43 72,5	0,43 69,0	0,41 68,1
0,40 75,2	0,43 70,8	0,41 78,7
0,42 72,5	0,45 71,7	0,42 73,4
0,47 79,6	0,42 73,0	0,43 73,9
0,42 73,9	0,41 71,7	0,45 70,8
0,43 75,2	0,47 77,4	0,48 77,4
0,43 76,5	0,41 70,8	0,44 76,1
0,38 70,8	0,45 77,0	0,41 70,8
0,43 71,7	0,38 73,4	0,40 73,0
0,45 77,9	0,46 78,7	0,45 77,0
0,43 77,4	0,39 69,0	

Tabelle 3.11. Korrelationstabelle für Beispiel 3.4

Kohlenstoffgehalt (Merkmal X)	Zugfestigkeit (Merkmal Y)							h_i	
	60...64		64...68		68...72		72...76		
	v_j	u_i	62	66	70	74	78	82	
0,35...0,37	0,36		1	1					2
0,37...0,39	0,38		1	3	2	1			7
0,39...0,41	0,40		2	3	7	3			15
0,41...0,43	0,42		1	4	11	12	1		29
0,43...0,45	0,44		1	1	3	7	5		17
0,45...0,47	0,46				4	3	5	1	13
0,47...0,49	0,48						3		3
		h_{ij}	6	12	27	26	14	1	86

Wir werden nun eine Korrelationstabelle anfertigen. Dazu teilen wir die Meßwerte des Merkmals X bzw. Y in $k = 7$ bzw. $l = 6$ Klassen der Breite $d_X = 0,02$ bzw. $d_Y = 4$ ein und verfahren weiter wie oben beschrieben. Tabelle 3.11 zeigt die Korrelationstabelle.

Abschließend wollen wir bemerken, daß die graphische Darstellung einer zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung bei stetigen Merkmalen durch Häufigkeitsgebirge bzw. Häufigkeitsflächen und bei diskreten Merkmalen durch Streckendiagramme erfolgt. Da in diesem Rahmen nicht näher darauf eingegangen werden kann, verweisen wir auf [5; 15].

3.1.2.2. Statistische Maßzahlen

Möglichkeiten zur quantitativen Erfassung der für die Merkmale X und Y vorliegenden Meßwertpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, durch statistische Maßzahlen wollen wir in diesem Abschnitt kennenlernen.

Betrachten wir die beiden Merkmale getrennt, dann kann dies durch die in Abschnitt 3.1.1.3. angegebenen statistischen Maßzahlen erfolgen, von denen in diesem Zusammenhang besonders das arithmetische Mittel und die empirische Varianz bevorzugt werden.

Durch die Angabe des arithmetischen Mittels \bar{x} bzw. \bar{y} [Formel (3.1)] und der empirischen Varianz s_x^2 bzw. s_y^2 [Formel (3.6)] für das Merkmal X bzw. Y erfassen wir noch nicht den Grad der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen. Dies gelingt mit der *empirischen Kovarianz* s_{XY} :

$$s_{XY} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (3.14)$$

$$s_{XY} := \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} \right]. \quad (3.15)$$

Sie ist positiv oder negativ, je nachdem, ob mit wachsendem x_i auch die y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) wachsen (direkter Zusammenhang) oder fallen (indirekter Zusammenhang).

Liegt für die beiden Merkmale eine Klasseneinteilung vor, dann ergeben sich für s_{XY} die Formeln:

$$s_{XY} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h_{ij} (u_i - \bar{x})(v_j - \bar{y}), \quad (3.16)$$

$$s_{XY} := \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l h_{ij} u_i v_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k h_{i \cdot} u_i \sum_{j=1}^l h_{\cdot j} v_j \right]. \quad (3.17)$$

Dabei wurden die in 3.1.2.1. erklärten Symbole verwandt.

Für die rechentechnischen Belange sind die Formeln (3.15) bzw. (3.17) heranzuziehen.

Durch Normierung der empirischen Kovarianz s_{XY} erhalten wir den *empirischen Korrelationskoeffizienten*:

$$r_{XY} := \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}. \quad (3.18)$$

Er ist ein Maß für den linearen algebraischen Zusammenhang zwischen den Merkmalen X und Y . Dabei sind s_X bzw. s_Y die empirischen Standardabweichungen der Merkmale X bzw. Y (vgl. S. 118).

Tabelle 3.12. Schema zur Berechnung der Maßzahlen für Beispiel 3.3

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_{iyi}
0,34	66,0	0,1156	4356	22,44
0,27	59,3	0,0729	3516	16,01
0,26	59,3	0,0676	3516	15,42
0,31	61,9	0,0961	3832	19,19
0,29	60,2	0,0841	3624	17,46
0,30	63,3	0,0900	4007	18,99
0,32	62,9	0,1024	3956	20,13
0,21	55,3	0,0441	3058	11,61
0,24	64,2	0,0576	4122	15,41
0,24	60,2	0,0576	3624	14,45
0,27	63,7	0,0729	4058	17,20
0,32	68,0	0,1024	4624	21,76
0,22	52,2	0,0484	2725	11,48
0,23	58,9	0,0529	3469	13,55
0,23	62,0	0,0529	3844	14,26
4,05	917,4	1,1175	56331	249,36

Tabelle 3.13. Schema zur Berechnung von statistischen Maßzahlen bei Vorliegen einer Korrelations-tabelle

u_i	v_j	v_1	v_2	...	v_l	$\sum_{j=1}^l u_i v_j h_{ij}$	$h_{i \cdot}$	$h_{i \cdot} u_i$	$h_{i \cdot} u_i^2$
u_1	$u_1 v_1 h_{11}$	$u_1 v_2 h_{12}$...	$u_1 v_l h_{1l}$	$\sum_{j=1}^l u_1 v_j h_{1j}$	$h_{1 \cdot}$	$h_{1 \cdot} u_1$	$h_{1 \cdot} u_1^2$	
u_2	$u_2 v_1 h_{21}$	$u_2 v_2 h_{22}$...	$u_2 v_l h_{2l}$	$\sum_{j=1}^l u_2 v_j h_{2j}$	$h_{2 \cdot}$	$h_{2 \cdot} u_2$	$h_{2 \cdot} u_2^2$	
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
u_k	$u_k v_1 h_{k1}$	$u_k v_2 h_{k2}$...	$u_k v_l h_{kl}$	$\sum_{j=1}^l u_k v_j h_{kj}$	$h_{k \cdot}$	$h_{k \cdot} u_k$	$h_{k \cdot} u_k^2$	
$\sum_{i=1}^k u_i v_j h_{ij}$	$\sum_{i=1}^k u_i v_1 h_{i1}$	$\sum_{i=1}^k u_i v_2 h_{i2}$...	$\sum_{i=1}^k u_i v_l h_{il}$	$\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k u_i v_j h_{ij}$	$\sum_{i=1}^k h_{i \cdot} = n$	$\sum_{i=1}^k h_{i \cdot} u_i$	$\sum_{i=1}^k h_{i \cdot} u_i^2$	
$h_{\cdot j}$	$h_{\cdot 1}$	$h_{\cdot 2}$...	$h_{\cdot l}$	$\sum_{j=1}^l h_{\cdot j} = n$				
$h_{\cdot j} v_j$	$h_{\cdot 1} v_1$	$h_{\cdot 2} v_2$...	$h_{\cdot l} v_l$	$\sum_{j=1}^l h_{\cdot j} v_j$				
$h_{\cdot j} v^2$	$h_{\cdot 1} v_1^2$	$h_{\cdot 2} v_2^2$...	$h_{\cdot l} v_l^2$	$\sum_{j=1}^l h_{\cdot j} v_j^2$				

Tabelle 3.14. Schema zur Berechnung von statistischen Maßzahlen für das Beispiel 3.4

u_i	v_j	62	66	70	74	78	82	$\sum_{j=1}^6 u_i v_j h_{ij}$	h_r	h_i, u_i	h_i, u_i^2
0,36		22,32	23,76	53,20	28,12			46,08	2	0,72	0,26
0,38		23,56	75,24	196,00	88,80			180,12	7	2,66	1,01
0,40		49,60	79,20	323,40	372,96	32,76		413,60	15	6,00	2,40
0,42		26,04	110,88	92,40	227,92	171,60		866,04	29	12,18	5,12
0,44		27,28	29,04	128,80	102,12	179,40	37,72	548,24	17	7,48	3,29
0,46						112,32		448,04	13	5,98	2,75
0,48								112,32	3	1,44	0,69
$\sum_{i=1}^7 u_i v_j h_{ij}$		148,80	318,12	793,80	819,92	496,98	37,72	2614,44	86 = n	36,46	15,52
h_{ij}		6	12	27	26	14	1				
$h_j v_j$		372	792	1890	1924	1092	82				
$h_j v_j^2$		23 064	52 272	132 300	142 376	85 176	6 724				
								441 912			

Für ihn gilt:

$$-1 \leq r_{XY} \leq 1. \quad (3.19)$$

Für die Beispiele 3.3 und 3.4 soll abschließend der empirische Korrelationskoeffizient bestimmt werden. Tabelle 3.12 zeigt uns ein Schema, mit dessen Hilfe für das Beispiel 3.3 der empirische Korrelationskoeffizient berechnet wird.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}s_x^2 &= 0,0017, & s_x &= 0,041, \\s_y^2 &= 15,92, & s_y &= 3,99, \\s_{XY} &= 0,119 & r_{XY} &= 0,726.\end{aligned}$$

Schließlich ist in Tabelle 3.13 ein Schema enthalten, mit dessen Hilfe die Errechnung von statistischen Maßzahlen beim Vorliegen einer Korrelationstabelle erleichtert werden kann.

In Tabelle 3.14 ist dieses Rechenschema für das Beispiel 3.4 verdeutlicht.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}s_x^2 &= 0,00073, & s_x &= 0,027, \\s_y^2 &= 21,52, & s_y &= 4,64, \\s_{XY} &= 0,074, & r_{XY} &= 0,59.\end{aligned}$$

3.2. Grundgesamtheit und Stichprobe

Im Abschnitt 3.1. gingen wir an die Betrachtung der für die Merkmale eines Untersuchungsobjektes ermittelten Meßwerte ohne Berücksichtigung unserer in Kapitel 2. erworbenen Kenntnisse auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung heran. Das ist nicht mehr möglich, sobald die statistischen Untersuchungen über den Rahmen dieses Abschnitts hinausgehen. Da die einzelnen Meßwerte außer durch die auf Grund gleichbleibender Versuchsbedingungen erfassbaren durch eine Vielzahl zufälliger, nicht erfassbarer Einflüsse bestimmt werden, können die Merkmale als Zufallsgrößen und die Meßwerte als mögliche Werte dieser Zufallsgrößen aufgefaßt werden. So ist es möglich, daß im Beispiel 3.2 auf die Meßwerte für die Maßabweichung (Merkmal X) u. a. folgende zufälligen Einflüsse wirken: Ablesefehler, Temperaturschwankungen, Erschütterungen der Werkbank, Schwankungen in der Qualität der Werkstoffe.

Wir wollen zur Erfassung dieses Sachverhaltes die Begriffe Grundgesamtheit und Stichprobe im Sinne der mathematischen Statistik einführen.

D.3.1 Definition 3.1: Eine Zufallsgröße X mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnen wir als Grundgesamtheit.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehen wir von der vollständigen Information über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der betrachteten Zufallsgröße aus. Für diese liegt bei den jetzt zu betrachtenden Fragestellungen keine oder nur unvollständige Information vor. Wir wollen deshalb durch sich gegenseitig nicht beeinflussende Wiederholungen des der Zufallsgröße zugrunde liegenden zufälligen Versuches Aufschluß über Kennwerte und Verteilungsfunktion der Zufallsgröße gewinnen. Dabei liefert jede einzelne Wiederholung einen der möglichen Werte der Zufallsgröße. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer Realisierung der Zufallsgröße.

Definition 3.2: Eine Menge von n Realisierungen $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ¹⁾ einer Grundgesamtheit X D.3.2 bezeichnen wir als konkrete Stichprobe vom Umfang n . Jede einzelne Realisierung nennen wir Element der Stichprobe.

Mit den beiden Definitionen werden nun die häufig benutzten Sprechweisen: „Die Grundgesamtheit unterliegt einer Normalverteilung“; „Aus einer normalverteilten Grundgesamtheit wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen.“ verständlich.

Die in den Tabellen 3.1, 3.3 und 3.11 erfaßten Urlisten der Beispiele 3.1, 3.2 und 3.3 stellen konkrete Stichproben dar. Charakterisieren Sie nochmals die entsprechenden Grundgesamtheiten! Geben Sie weitere Beispiele von Grundgesamtheiten und Stichproben an!

Kommen wir nun zur Kennzeichnung der Gesamtheit aller konkreten Stichproben vom Umfang n . Dazu beschreiben wir die i -te Wiederholung des zugrunde liegenden Versuches durch eine Zufallsgröße X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, die derselben Verteilung wie die Grundgesamtheit unterliegt. Das Element x_i der konkreten Stichprobe ist dann eine Realisierung von X_i .

Definition 3.3: Als mathematische Stichprobe bezeichnen wir die n -dimensionale ZufallsgröÙe (X_1, X_2, \dots, X_n) mit den untereinander unabhängigen und identisch entsprechend der Grundgesamtheit X verteilten Komponenten X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. D.3.3

Die konkrete Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n ist dann eine Realisierung dieser n -dimensionalen Zufallsgröße.

Wichtigste Aufgabe der mathematischen Statistik ist es, aus der in einer Stichprobe enthaltenen Information Aussagen über die Grundgesamtheit zu gewinnen. Es treten dabei folgende wesentlichen Probleme auf:

1. Schätzen der Parameter der Grundgesamtheit: Ist nur der Verteilungstyp der Grundgesamtheit bekannt, dann sind die unbekannten Kennwerte (Parameter) dieser Verteilung zu schätzen. So sind z. B. aus der aus einer normalverteilten Grundgesamtheit gezogenen konkreten Stichprobe im Beispiel 3.2 – Maßabweichungen können als normalverteilt angesehen werden – Schätzwerte für den Erwartungswert und die Varianz der Grundgesamtheit zu gewinnen.

2. Prüfen von Hypothesen: Nicht selten werden Annahmen über die Grundgesamtheit gemacht, z. B. über den Typ oder die Kennwerte (Parameter) der Verteilung. Diese Annahmen (Hypothesen) sind mit der der Stichprobe entnommenen Information derart in Beziehung zu bringen, daß entschieden werden kann, ob sie mit dieser Information ver einbar sind.

Im Beispiel 3.1 ermittelten wir für eine bestimmte Betonsorte aus der konkreten Stichprobe (Urliste) das arithmetische Mittel der Druckfestigkeit (Merkmal X) in 10^{-1} MPa $\bar{x} = 181,7$. An einer anderen konkreten Stichprobe wurde für dieselbe Betonsorte das arithmetische Mittel der Druckfestigkeit $\bar{x} = 183,2$ festgestellt. Es ist die Hypothese, daß die Erwartungswerte der entsprechenden Grundgesamtheiten gleich sind, zu prüfen.

Ausgangspunkt aller Auswertungen mit Methoden der mathematischen Statistik ist eine konkrete Stichprobe, ist das mit Hilfe der beschreibenden Statistik aufbereitete Zahlenmaterial.

Die Art und Weise der Entnahme einer konkreten Stichprobe aus der Grundgesamtheit ist vom Ziel der Untersuchung ausgehend festzulegen. In diesem Zusammenhang sei auf die wichtige Problematik der Versuchsplanung, die im Band 19/2 dieser Reihe behandelt wird, hingewiesen.

¹⁾ Im allgemeinen wird für die konkrete Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n geschrieben.

Wir wollen hier lediglich folgendes festhalten: Da aus der in einer konkreten Stichprobe enthaltenen Information Schlußes hinsichtlich der Grundgesamtheit gezogen werden sollen, müssen wir sichern, daß diese repräsentativ für die Grundgesamtheit ist. Wir haben uns also zu überlegen, wie die Einheiten des Untersuchungsobjektes auszuwählen sind, daß diese eine „Zufallsstichprobe“ bilden. Das ist dann der Fall, wenn jede Einheit des Untersuchungsobjektes die gleiche Chance hat, ausgewählt zu werden und die Auswahl der nachfolgenden Einheit nicht von den vorangehenden beeinflußt wird. Die an diesen Einheiten für das betrachtete Merkmal X ermittelten Meßwerte bilden eine konkrete Stichprobe aus der Grundgesamtheit. So sind im Beispiel 3.1 die Betonwürfel Einheiten des Untersuchungsobjektes „Betonsorte“ und die an den Probewürfeln für das Merkmal Druckfestigkeit festgestellten Werte Elemente der entsprechenden konkreten Stichprobe. Zur Veranschaulichung der „chancengleichen“ Auswahl von Einheiten eines Untersuchungsobjektes, bei dem nur endlich viele Einheiten möglich sind, wollen wir verschiedene Vorgehensweisen darstellen.

Eine besteht darin, wie in einer Lotterie alle Einheiten des Untersuchungsobjektes gut durchzumischen und unter Wahrung des Zufalls die einzelnen Einheiten der Stichprobe zu ziehen. Falls dieses Vorgehen nicht möglich ist, z.B. bei gestapeltem Material, kann jeder Einheit eine natürliche Zahl zugeordnet werden. Aus diesen werden diejenigen ausgewählt, deren entsprechende Einheiten in die Stichprobe aufgenommen werden. Da aber oft unbewußt gewisse Zahlen und deren Vielfaches bevorzugt werden (z. B. 9, 7, 13, 25, 39), sollten wir diese Zahlen durch Auslosen oder mit Hilfe von Tafeln von Zufallszahlen ermitteln. Einen Auszug aus einer Tafel mit vierstelligen Zufallszahlen gibt Tafel 7 im Anhang wieder. Das Verfahren, nach dem solche Tafeln aufgestellt werden, sichert, daß die Ziffern 0, 1, ..., 9 an jeder Stelle der vierstelligen Zahlen gleichwahrscheinlich sind. Den Gebrauch der Tafel wollen wir an einem Beispiel erläutern.

Beispiel 3.5: Von $N = 480$ Einheiten eines Untersuchungsobjektes sollen $n = 18$ zufällig entnommen werden. Dazu werden die Einheiten von 000 bis 479 durchnumeriert. Nun wählen wir in der vorliegenden Tafel von vierstelligen Zufallszahlen (für unser Beispiel ist eine Tafel mit dreistelligen Zufallszahlen ausreichend) willkürlich in irgendeiner Spalte eine Zahl und legen eine Vorschrift fest, nach der wir die übrigen Zufallszahlen ermitteln wollen (z. B. horizontales, vertikales oder diagonales Fortschreiten). Von den Zufallszahlen beachten wir nur die drei ersten Ziffern und notieren die, die kleiner als 479 sind. Gehen wir z.B. in der Tafel von der zweiten Zahl in der siebenten Spalte aus und gehen vertikal weiter, so erhalten wir für unsere Stichprobe die Elemente mit den Nummern:

227	477	033	459	115	202
188	227	015	394	361	216
164	019	384	008	282	327

Durch die Verwendung von Zufallszahlen ist die zufällige Auswahl gesichert.

Wie wir oben darstellten, ist die Grundgesamtheit eines Merkmals X eine Zufallsgröße. Diese wird durch ihre Verteilungsfunktion $F_X(t) = F(t)$, $-\infty < t < +\infty$, die wir in diesem Zusammenhang auch als *theoretische Verteilungsfunktion* bezeichnen werden, vollständig charakterisiert. Sie ist allerdings im allgemeinen unbekannt. Wir werden deshalb versuchen, über sie mit Hilfe einer aus dieser Grundgesamtheit gezogenen konkreten Stichprobe gewisse Informationen zu erhalten. Dazu erklären wir die von der Variationsreihe $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$ einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n vom Umfang n ausgehende *konkrete empirische Verteilungsfunktion*

$$\hat{F}_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq x_1^*, \\ \frac{m}{n} & \text{für } x_m^* < t \leq x_{m+1}^*, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 & \text{für } t > x_n^*, \end{cases} \quad (3.20)$$

mit $-\infty < t < +\infty$.

Die konkrete empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(t)$ ist einer bestimmten konkreten Stichprobe vom Umfang n zugeordnet.

Wir betrachten nun die zugehörige mathematische Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) . Jeder Komponente X_i ($i = 1, \dots, n$) ordnen wir durch die Vorschrift

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{falls das Ereignis } \{X_i < t\} \text{ eintritt,} \\ 0, & \text{falls das Ereignis } \{X_i \geq t\} \text{ eintritt,} \end{cases}$$

wobei t eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl ist, die Zufallsgröße Y_i ($i = 1, \dots, n$)

zu. Dann ist auch $F_n(t) := \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ für jedes beliebige feste t eine Zufallsgröße. Wir bezeichnen die Funktion $F_n(t)$ ($-\infty < t < \infty$) als *empirische Verteilungsfunktion*. Jede konkrete empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(t)$ derselben Grundgesamtheit ist demzufolge eine Realisierung von $F_n(t)$.

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen der empirischen Verteilungsfunktion $F_n(t)$ und der theoretischen Verteilungsfunktion $F_X(t)$ der Grundgesamtheit X gibt der Satz von Gliwenko, der häufig auch **Hauptsatz der mathematischen Statistik** genannt wird. Er lautet:

Satz 3.1 (Satz von Gliwenko¹⁾: Ist $F_n(t)$ die empirische Verteilungsfunktion der mathematischen Stichprobe (X_1, \dots, X_n) vom Umfang n und $F_X(t)$ die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit X , dann konvergiert $F_n(t)$ für $n \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gleichmäßig in t gegen die Verteilungsfunktion $F_X(t)$.

Mit anderen Worten: Mit wachsendem Stichprobenumfang kommt $F_n(t)$ der unbekannten Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit $F_X(t)$ beliebig nahe (mit Wahrscheinlichkeit 1).

Den Beweis dieses Satzes finden Sie in [3; 12].

Aus den bisherigen Ausführungen ist offensichtlich, daß die in 3.1. eingeführten statistischen Maßzahlen ebenfalls als Realisierungen von Zufallsgrößen aufzufassen sind und außerdem von den Elementen der konkreten Stichprobe abhängig sind. Durch die mathematische Stichprobe werden die entsprechenden Zufallsgrößen erklärt, die Funktionen der Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n sind und als *Stichprobenfunktionen* bezeichnet werden. Ist z. B. $T' = T'(X_1, \dots, X_n)$ eine Stichprobenfunktion der mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) , so bezeichnen wir mit $t' = t'(x_1, \dots, x_n)$ die Realisierung dieser Zufallsgröße für die konkrete Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n .

Wichtige Beispiele von Stichprobenfunktionen sind

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{das arithmetische Mittel;} \quad (3.21)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \text{die empirische Varianz.} \quad (3.22)$$

¹⁾ Waleri Iwanowitsch Gliwenko (1897–1940), sowjetischer Mathematiker.

In 2.3.8.3. wurden weitere wichtige Stichprobenfunktionen angegeben. Unter der Voraussetzung, daß die Elemente X_i der mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilt sind, gilt:

$$Y_{n-1}^* = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.23)$$

unterliegt einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden (vgl. Satz 2.7);

$$Z_{n-1}^* = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} \quad (3.24)$$

unterliegt einer Student-Verteilung mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden (vgl. Satz 2.8). Wird vorausgesetzt, daß die Elemente $X_i^{(k)}$ der mathematischen Stichproben $(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$, $k = 1, 2, N(\mu_k; \sigma_k)$ -verteilt sind, so unterliegt

$$W_{n_1-1, n_2-1}^* = \frac{(n_2 - 1) \sum_{i=1}^{n_1} (X_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)})^2}{(n_1 - 1) \sum_{j=1}^{n_2} (X_j^{(2)} - \bar{X}^{(2)})^2} \quad (3.25)$$

einer F-Verteilung mit $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ Freiheitsgraden (vgl. Satz 2.9).

In der mathematischen Statistik wird für die Stichprobenfunktion

- Y_{n-1}^* auch das Symbol χ_{n-1}^2 ,
- Z_{n-1}^* auch das Symbol t_{n-1} ,
- W_{n_1-1, n_2-1}^* auch das Symbol F_{n_1-1, n_2-1}

verwandt.

Die zu diesen Verteilungen gehörenden Tafeln sind im Anhang zusammengestellt.

3.3. Statistische Schätzverfahren

3.3.1. Einleitung

In diesem Abschnitt werden wir uns mit statistischen Schätzfragen beschäftigen. Die ihnen zugrunde liegende Fragestellung wollen wir mit Hilfe von zwei Beispielen erläutern.

Beispiel 3.6: Bei der Produktion eines Maschinenteiles sind für ein Abmaß gewisse Toleranzen zugelassen. Vor Aufnahme der Fertigung soll geprüft werden, ob von der Maschine, auf der die Herstellung erfolgen soll, diese Toleranzen annähernd eingehalten werden können. Dazu fassen wir die Maßabweichung vom Nennmaß als Zufallsgröße X auf, die wir auf Grund früherer Betrachtungen als $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilt annehmen können. Die Grundgesamtheit X ist durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = P(X < t) = \Phi(t; \mu, \sigma)$$

vollständig beschrieben.

Bezeichnen wir mit t_o bzw. t_u die obere bzw. untere zulässige Maßabweichung, so ergibt sich unter der Voraussetzung, daß die Maschineneinstellung dem Nennmaß entspricht, d.h. unter der Voraussetzung $\mu = 0$, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unzulässige Maßabweichungen auftreten, zu:

$$P(X < t_u) + P(X \geq t_o) = 1 - P(t_u \leq X < t_o) = 1 - [\Phi(t_o; 0, \sigma) - \Phi(t_u; 0, \sigma)].$$

Auf Grund der ermittelten Wahrscheinlichkeit ist eine Aussage über den auftretenden Ausschußanteil möglich, und somit ist über die Aufnahme der Produktion auf der betrachteten Maschine zu entscheiden.

Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit benötigen wir den Kennwert (Parameter) σ . Da er uns unbekannt ist, müssen wir ihn aus den Meßwerten, die wir auf der Grundlage von n auf der Maschine gefertigten Probestücken gewonnen haben, d. h. auf der Basis einer konkreten Stichprobe vom Umfang n , schätzen.

Beispiel 3.7: Die Grundgesamtheit des Merkmals „Anzahl der Atome, die in einer bestimmten Zeiteinheit zerfallen“, wird durch eine poissonverteilte Zufallsgröße X charakterisiert. Diese ist durch ihre Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

vollständig beschrieben.

Wie im Beispiel 3.6 ist der unbekannte Kennwert (Parameter) λ auf der Grundlage einer konkreten Stichprobe zu schätzen.

Beide Beispiele haben gemeinsam, daß von der Zufallsgröße X , die die Grundgesamtheit beschreibt,

- der Verteilungstyp als bekannt vorausgesetzt wird,
- wenigstens ein Kennwert (Parameter)¹⁾ dieser Verteilung aber unbekannt ist.

Wir charakterisieren den Verteilungstyp einer stetigen bzw. diskreten Zufallsgröße X durch ihre Dichtefunktion $f(t; \Theta_1, \dots, \Theta_m)$, $-\infty < t < +\infty$, bzw. ihre Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i; \Theta_1, \dots, \Theta_m) = p(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$, bzw. $i = 1, 2, \dots$, mit den Parametern $\Theta_1, \dots, \Theta_m$. Die statistischen Schätzverfahren dienen dazu, die Parameter $\Theta_1, \dots, \Theta_m$, von denen wir annehmen, daß sie unbekannt sind, auf der Basis einer aus der Grundgesamtheit gezogenen Stichprobe zu schätzen. Diese Schätzungen, die Stichprobenfunktionen und dementsprechend Zufallsgrößen sind, werden *Schätzfunktionen* genannt. Diese bezeichnen wir für eine mathematische Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n mit $\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Ihre Realisierungen, die auf Grund einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n – einer Realisierung von (X_1, X_2, \dots, X_n) – gewonnen werden und Schätzwerte heißen, kennzeichnen wir mit $\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Im folgenden wollen wir zwei Arten von Schätzungen betrachten. Dies ist einmal die Punkt- und zum anderen die Konfidenzschätzung.

3.3.2. Punktschätzungen

3.3.2.1. Begriff der Punktschätzung

Von einer Punktschätzung eines unbekannten Parameters Θ sprechen wir dann, wenn ein einziger aus einer Stichprobe gewonnener Wert mit dem unbekannten Parameter Θ identifiziert wird. In diesem Zusammenhang werden $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *Punktschätzfunktion* und ihre Realisierungen $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *Punktschätzwerte* genannt. So sind z. B. die Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}$$

¹⁾ In Verbindung mit statistischen Schätzverfahren wird im allg. von Parametern und seltener von Kennwerten gesprochen. So soll es auch hier geschehen.

und

$$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}$$

Punktschätzfunktionen des Parameters $\Theta = E(X)$ einer Grundgesamtheit X . Entsprechend stellen die Realisierungen dieser Zufallsgrößen

$$\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$$

und

$$\hat{\theta}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$$

Punktschätzwerte des Parameters $\Theta = E(X)$ dieser Grundgesamtheit dar (vgl. 3.1.1.3.).

Wie wir gerade sahen, können zur Schätzung eines Parameters einer Grundgesamtheit mehrere Punktschätzfunktionen herangezogen werden. Es erhebt sich die Frage, welche dieser Schätzfunktionen uns die beste Information über den unbekannten Parameter liefern, mit anderen Worten, welche dieser Schätzfunktionen wir wählen.

Zur Beantwortung dieser Frage stellte R.A. Fisher 1930 Kriterien für die Auswahl einer Punktschätzfunktion auf. Er fordert, daß eine „gute Schätzung“ *erwartungstreu, konsistent und effizient* sein soll. Wir wollen diese Kriterien erklären und durch entsprechende Beispiele veranschaulichen, ohne in jedem Fall auf den Nachweis einzugehen.

D.3.4 Definition 3.4.: Eine Punktschätzfunktion $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ eines Parameters Θ nennen wir **erwartungstreu (unverzerrt)**, wenn der Erwartungswert von $\hat{\theta}$ gleich dem Parameter Θ ist, d. h., wenn gilt: $E(\hat{\theta}) = \Theta$. Eine Punktschätzfunktion $\hat{\theta}$ eines Parameters Θ bezeichnen wir als **asymptotisch erwartungstreu**, falls für wachsenden Stichprobenumfang der Grenzwert des Erwartungswertes von $\hat{\theta}$ gleich dem Parameter Θ ist, d. h., wenn gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = \Theta$.

So sind beispielsweise

- die relative Häufigkeit $\hat{\theta} = H_n(A)$ eine erwartungstreue Punktschätzfunktion der Wahrscheinlichkeit $\Theta = p$ für das Eintreten des Ereignisses A im Ergebnis eines zufälligen Versuchs;
- die empirische Verteilungsfunktion $F_n(t)$ für jedes feste t ($-\infty < t < +\infty$) eine erwartungstreue Punktschätzfunktion für die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ der Grundgesamtheit X ;
- das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine erwartungstreue Punktschätzfunktion für den Erwartungswert $\Theta = E(X)$ der Grundgesamtheit X ;
- der Median $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine asymptotisch erwartungstreue Punktschätzfunktion für den Erwartungswert $\Theta = E(X)$ der normalverteilten Grundgesamtheit X ;
- die empirische Varianz $\hat{\theta}_1 = S^2$ eine erwartungstreue, die Größe $\hat{\theta}_2 = S_1^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ eine asymptotisch erwartungstreue¹⁾ und die Spannweite $\hat{\theta}_3 = R$ nicht einmal eine asymptotisch erwartungstreue Punktschätzfunktion für die Varianz $\Theta = D^2(X)$ der Grundgesamtheit X ;
- das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine erwartungstreue Punktschätzfunktion für den Parameter $\Theta = \lambda$ einer poissonverteilten Grundgesamtheit X .

Für das arithmetische Mittel \bar{X} und die Größe S_1^2 wollen wir diese Aussage nachweisen:

1. Mit $\hat{\theta} = \bar{X}$ und $\Theta = E(X)$ ergibt sich $E(\bar{X}) = E(X)$ wie folgt:

$$E(\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n E(X) = E(X).$$

¹⁾ Das ist auch die Begründung für die Erklärung der empirischen Varianz in 3.1.1.3.

2. Mit

$$\hat{\theta} = S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

und $\theta = D^2(X)$ ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_1^2) = D^2(X)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} E(S_1^2) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right] = E(X^2) - E(\bar{X}^2); \\ E(\bar{X}^2) &= E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{\substack{i,j; \\ i \neq j}} X_i X_j\right] = \frac{1}{n} E(X^2) + \frac{n-1}{n} E(X)^2; \\ E(S_1^2) &= E(X^2) - \frac{1}{n} E(X^2) - \frac{n-1}{n} E(X)^2 \\ &= \frac{n-1}{n} E(X^2) - \frac{n-1}{n} E(X)^2 = \frac{n-1}{n} [E(X^2) - E(X)^2] = \frac{n-1}{n} D^2(X); \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(S_1^2) = D^2(X).$$

Definition 3.5: Eine Punktschätzfunktion $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ eines Parameters θ bezeichnen wir als **D.3.5 (schwach) konsistent (passend)**, wenn $\hat{\theta}$ mit wachsendem n in Wahrscheinlichkeit gegen θ konvergiert, d. h., wenn für jedes beliebige $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta| < \epsilon) = 1.$$

Mit anderen Worten: Mit wachsendem Stichprobenumfang strebt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „ $|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon$ “ gegen 1. So sind z. B.

- die relative Häufigkeit $\hat{\theta} = H_n(A)$ eine konsistente Punktschätzfunktion der Wahrscheinlichkeit $\theta = p$ für das Eintreten des Ereignisses A im Ergebnis eines zufälligen Versuchs (vgl. Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli; Satz 2.13);
- die empirische Verteilungsfunktion $F_n(t)$ für jedes feste t ($-\infty < t < +\infty$) eine konsistente Punktschätzfunktion für die Verteilungsfunktion $F_X(t)$ der Grundgesamtheit X (vgl. Aussage des Satzes von Gliwenko);
- das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine konsistente Punktschätzfunktion für den Erwartungswert der Grundgesamtheit X ;
- der Median $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine konsistente Punktschätzfunktion für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit;
- die empirische Varianz $\hat{\theta} = S^2$ eine konsistente Punktschätzfunktion für die Varianz $\theta = D^2(X)$ der Grundgesamtheit X ;
- das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$ eine konsistente Punktschätzfunktion des Parameters $\theta = \lambda$ einer poissonverteilten Grundgesamtheit X .

Die in Definition 3.5 für das Vorliegen der (schwachen) Konsistenz angegebene Forderung ist im allgemeinen nicht einfach nachweisbar. Bei Kenntnis der Erwartungstreue einer Punktschätzfunktion ist ihre (schwache) Konsistenz mit Hilfe des folgenden Satzes oft einfacher zu untersuchen:

Satz 3.2: Ist eine Punktschätzfunktion $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ eines Parameters θ asymptotisch **S.3.2 erwartungstreu**, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$, so ist die Erfüllung von $\lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\hat{\theta}) = 0$ eine hinreichende Bedingung für ihre (schwache) Konsistenz.

Der Beweis des Satzes ergibt sich aus Formel (2.69).

Für das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$, das eine erwartungstreue Punktschätzfunktion des Erwartungswertes $\theta = E(X)$ einer Grundgesamtheit X ist, ergibt sich die (schwache) Konsistenz mit Hilfe dieses Satzes, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^2(X)}{n} = 0$$

gilt.

D.3.6 Definition 3.6: Die erwartungstreue Punktschätzfunktion $\hat{\theta}_1$ des Parameters θ einer Grundgesamtheit nennen wir **effizienter (wirksamer)** als eine erwartungstreue Punktschätzfunktion $\hat{\theta}_2$ desselben Parameters, wenn für ihre Varianzen $D^2(\hat{\theta}_1) = E((\hat{\theta}_1 - \theta)^2)$ und $D^2(\hat{\theta}_2) = E((\hat{\theta}_2 - \theta)^2)$ gilt:

$$D^2(\hat{\theta}_1) < D^2(\hat{\theta}_2).$$

Das Verhältnis

$$\eta := \frac{D^2(\hat{\theta}_1)}{D^2(\hat{\theta}_2)}$$

bezeichnen wir als **relative Wirksamkeit (Wirkungsgrad)** von $\hat{\theta}_2$ in bezug auf $\hat{\theta}_1$ und die für einen Parameter der Grundgesamtheit vorliegende Punktschätzfunktion mit der kleinsten Varianz als die **effektive (wirksamste) Schätzung**.

Eine Aussage über eine untere Schranke der Varianz von Punktschätzfunktionen $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ eines Parameters θ der Grundgesamtheit X liefert der Satz von Rao-Cramér: Wird eine Grundgesamtheit X durch eine Dichte $f(t; \theta)$ charakterisiert, die von einem Parameter θ abhängt, ist $f(t, \theta)$ für jedes t zweimal nach θ differenzierbar und gelten weitere Regularitätsvoraussetzungen, dann ist für jede Punktschätzfunktion $\hat{\theta}$ des Parameters θ die Ungleichung

$$D^2(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

erfüllt, wobei $I_n(\theta) = n D^2 \left[\frac{d \ln f(X; \theta)}{d \theta} \right]$ ist.

$I_n(\theta)$ wird als Fishersche Information bezeichnet. Sie hängt im allgemeinen von θ und dem Stichprobenumfang n ab. Als Maßzahl macht sie eine Aussage über die in der Stichprobe enthaltene Information hinsichtlich des zu schätzenden Parameters θ .

Beispiel 3.8: In einer $N(\mu, \sigma_0)$ -verteilten Grundgesamtheit sei der Parameter σ_0 bekannt. Der unbekannte Parameter $\theta = \mu$ soll geschätzt werden. Die Dichte

$$f(t; \theta, \sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} \exp \left[-\frac{(t - \theta)^2}{2\sigma_0^2} \right], \quad (-\infty < t < +\infty),$$

der Zufallsgröße X erfüllt die o. g. Voraussetzungen. Dann ergibt sich für $I_n(\theta)$:

$$\begin{aligned} I_n(\theta) &= n D^2 \left[\frac{d \ln f(X; \theta)}{d \theta} \right] = n D^2 \left[\frac{d}{d \theta} \left(-\ln \sqrt{2\pi} \sigma_0 - \frac{(X - \theta)^2}{2\sigma_0^2} \right) \right] \\ &= n D^2 \left[\frac{X - \theta}{\sigma_0^2} \right] = n \frac{1}{\sigma_0^4} D^2(X) = n \frac{1}{\sigma_0^4} \sigma_0^2 = \frac{n}{\sigma_0^2}. \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X}$ ist also die effektive Punktschätzfunktion des Parameters $\Theta = \mu$ der normalverteilten Grundgesamtheit X ; denn sie ist erwartungstreu, und es gilt:

$$D^2(\hat{\theta}) = D^2(\bar{X}) = \frac{\sigma_0^2}{n}.$$

3.3.2.2. Maximum-Likelihood-Methode

Zur Beurteilung, ob eine Punktschätzfunktion eine „gute Schätzung“ ist, werden die o. g. Kriterien herangezogen. Es ist häufig nicht einfach, nachzuprüfen, ob eine Punktschätzfunktion den einzelnen Kriterien gerecht wird. Es erhebt sich deshalb die Frage nach praktikablen Methoden, mit deren Hilfe Punktschätzfunktionen gesucht werden, die möglichst viele dieser Kriterien erfüllen.

Eine dieser Methoden ist die Maximum-Likelihood-Methode (MLM). Sie wurde von R. A. Fisher entwickelt, nachdem sie C. F. Gauß schon vorher in Spezialfällen angewandt hatte. Bei ihr gehen wir von einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n vom Umfang n aus einer Grundgesamtheit X aus. Der Verteilungstyp der Grundgesamtheit X sei bekannt. Die Parameter $\theta_i, i = 1, 2, \dots, m$, dieser Verteilung seien unbekannt und sollen unter Verwendung der in der konkreten Stichprobe über die Grundgesamtheit enthaltenen Information geschätzt werden. Dazu erklären wir die Likelihood-Funktion $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$. Wir wollen uns im folgenden auf den Fall eines Parameters θ beschränken.

Definition 3.7: Ist x_1, x_2, \dots, x_n eine aus einer Grundgesamtheit X gezogene konkrete Stichprobe vom Umfang n und ist X eine diskrete bzw. stetige Zufallsgröße mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i; \theta), i = 1, 2, \dots$, bzw. der Dichte $f_X(t; \theta)$, wobei der Parameter θ unbekannt ist, dann wird die Funktion

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i; \theta) \quad (3.26)$$

bzw.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) \quad (3.27)$$

als Likelihood-Funktion bezeichnet.

Die Likelihood-Funktion $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ ist für jede konkrete Stichprobe eine Funktion des unbekannten Parameters θ . Das Prinzip der MLM besteht nun darin, als Punktschätzwert $\hat{\theta}$ für den unbekannten Parameter θ denjenigen zu ermitteln, für den die Likelihood-Funktion ein Maximum annimmt. Im diskreten Fall heißt das z. B., unter den möglichen Punktschätzwerten für θ denjenigen auszuwählen, für den das Ereignis $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$ die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Likelihood-Funktion nehmen wir die Auswahl der gesuchten Punktschätzfunktion mit Hilfe der notwendigen Bedingung für ein relatives Maximum vor:

$$\frac{dL}{d\theta} = 0. \quad (3.28)$$

Oft ist es günstiger, den natürlichen Logarithmus der Likelihood-Funktion zu bilden und von der Gleichung

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0 \quad (3.29)$$

an Stelle von (3.28) auszugehen. Begründen Sie diesen Schritt! Eine Lösung dieser Gleichung, die wir mit $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bezeichnen, ist eine Realisierung, ein Punktschätzwert, der entsprechenden Punktschätzfunktionen $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. $\hat{\Theta}$ wird als **Maximum-Likelihood-Schätzung** für Θ bezeichnet.

Übertragen Sie die eben angestellten Betrachtungen auf den Fall, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Grundgesamtheit von zwei unbekannten Parametern Θ_1 und Θ_2 abhängt!

Die Maximum-Likelihood-Schätzungen sind unter bestimmten Bedingungen konsistent, wenigstens asymptotisch erwartungstreu und asymptotisch normalverteilt.

Beispiel 3.9: Die Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$ eines Ereignisses A soll auf der Grundlage von 120 unabhängigen Versuchen, in deren Ergebnis 96mal das Ereignis A eintrat, geschätzt werden.

Dazu führen wir eine Null-Eins-verteilte Zufallsgröße X ein, wobei dem Ereignis A der Wert 1 und dem Ereignis \bar{A} der Wert 0 zugeordnet wird:

$$P(X = 1) = p; \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Der Parameter $\Theta = p$ dieser Verteilung ist zu schätzen. Der Serie von 120 Versuchen entspricht dann eine konkrete Stichprobe vom Umfang 120, in der 96mal der Wert 1 und 24mal der Wert 0 auftritt. Die Likelihood-Funktion hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_{120}; p) &= \prod_{i=1}^{120} P(X = x_i; p) \\ &= [P(X = 1)]^{96} [P(X = 0)]^{120 - 96} \\ &= p^{96}(1 - p)^{24}, \end{aligned}$$

wobei von den x_i , $i = 1, 2, \dots, 120$, 96 den Wert 1 und 24 den Wert 0 haben. Um Formel (3.29) anwenden zu können, bilden wir $\ln L = 96 \ln p + 24 \ln(1 - p)$ und erhalten damit:

$$\frac{d \ln L}{dp} = \frac{96}{p} - \frac{24}{1 - p} = 0.$$

Die Lösung dieser Maximum-Likelihood-Gleichung ist eine Realisierung der Punktschätzfunktion $\hat{\Theta} = \hat{p}$, die wir mit $\hat{\theta} = \hat{p}_R$ bezeichnen wollen. Für sie ergibt sich

$$\hat{\theta} = \hat{p}_R = \frac{96}{120} = 0,8.$$

Allgemein erhalten wir: $\hat{\Theta} = \hat{p} = k/n$, wobei wir mit k die Anzahl des Eintretens des Ereignisses A und mit n die Anzahl der Versuche kennzeichnen. Wir sehen also, daß die relative Häufigkeit $\hat{\Theta} = H_n(A)$ die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Parameter $\Theta = p$ ist.

Beispiel 3.10: Von einer $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit X sind die Parameter $\Theta_1 = \mu$ und $\Theta_2 = \sigma^2$ unbekannt. Mit Hilfe der in einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n vom Umfang n enthaltenen Information sollen diese beiden Parameter geschätzt werden. Dazu bilden wir die Likelihood-Funktion der Stichprobe:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]$$

und den natürlichen Logarithmus dieser Funktion:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Durch Bildung der partiellen Ableitungen nach den Parametern $\Theta_1 = \mu$ bzw. $\Theta_2 = \sigma^2$ erhalten wir das Likelihood-Gleichungssystem:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0,$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung errechnet sich

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0$$

und damit der Punktschätzwert

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}. \quad (3.30)$$

$\hat{\theta}_1$ setzen wir für μ in die zweite Gleichung ein und erhalten durch Umformung:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 n,$$

woraus sich weiter der zweite Punktschätzwert ergibt:

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.31)$$

Die entsprechenden Punktschätzfunktionen für die Formeln (3.30) und (3.31) lauten dann:

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

und

$$\hat{\theta}_2 = S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

3.3.2.3. Momentenmethode

Neben der Maximum-Likelihood-Methode sind die *Momentenmethode*, die *Methode der kleinsten Quadrate* und die *Minimum-Chi-Quadrat-Methode* weitere Methoden zur Konstruktion von Punktschätzungen. Im folgenden wollen wir auf die Momentenmethode eingehen. Hinsichtlich der beiden anderen Methoden wird der Leser auf [14; 15] verwiesen.

Bei der Momentenmethode wird von einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) ausgegangen, die aus einer Grundgesamtheit X gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X soll von den Parametern Θ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, abhängen, für die eine Punktschätzfunktion gesucht wird. Weiterhin sollen die im allgemeinen von den Parametern Θ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, abhängenden Momente m_r von X mindestens bis zur k -ten Ordnung, $k = 1$, existieren:

$$m_r = E(X^r) = g_r(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad r = 1, 2, \dots, k.$$

Zur Schätzung der unbekannten Parameter θ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, wird das Moment m_i durch die Stichprobenfunktion

$$\hat{m}_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^r$$

ersetzt.

Die Lösungen $\hat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, des Gleichungssystems

$$\hat{m}_r = g_r(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k), \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad (3.33)$$

werden als Punktschätzfunktionen nach der Momentenmethode bezeichnet.

Beispiel 3.11: Die Parameter $\theta_1 = E(X) = \mu$ und $\theta_2 = D^2(X) = \sigma^2$ einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X sind zu schätzen. Unter Verwendung der Beziehung $D^2(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ ergibt sich nach (3.33) folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = E(X) = \mu,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sigma^2 + [E(X)]^2.$$

Mit $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ergeben sich als Lösungen:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\mu} = \bar{X}; \quad \hat{\theta}_2 = \hat{\sigma}^2 = S_1^2.$$

Auf Grund ihrer Einfachheit wird die Momentenmethode in zunehmendem Maß angewandt. Allerdings sind die Eigenschaften der mit dieser Methode ermittelten Punktschätzfunktionen noch nicht umfassend untersucht.

3.3.3. Konfidenzschätzungen

3.3.3.1. Begriff der Konfidenzschätzung

Mit einer Punktschätzung, bei der wir einen unbekannten Parameter θ durch einen einzigen aus einer Stichprobe ermittelten Wert schätzen, gewinnen wir keine Aussage über die Genauigkeit einer solchen Schätzung. Die Abweichungen einzelner Punktschätzwerte vom Wert des Parameters θ können erheblich sein. Das ist besonders dann der Fall, wenn der Stichprobenumfang klein ist. Um uns eine Vorstellung über die Genauigkeit einer Schätzung verschaffen zu können, wollen wir uns mit der Konfidenzschätzung, einer speziellen Form der Bereichsschätzung, beschäftigen.

Bei ihr wird für einen unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit mit Hilfe einer Stichprobe ein Intervall mit den Grenzen G_1 und G_2 ($G_1 \leq G_2$) gesucht, das θ mit einer vorgegebenen großen Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ überdeckt:

$$P(G_1 < \theta < G_2) = 1 - \alpha. \quad (3.34)$$

Wir bezeichnen G_1 und G_2 als **Konfidenzgrenzen** (*Vertrauensgrenzen*), (G_1, G_2) als **Konfidenzintervall** (*Vertrauensintervall*), $1 - \alpha$ als **Konfidenzniveau** (*Vertrauensniveau*) und α als **Irrtumswahrscheinlichkeit**.

Die Konfidenzgrenzen sind Stichprobenfunktionen der mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n :

$$G_1 = G_1(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad G_2 = G_2(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Sie sind also Zufallsgrößen. Dementsprechend stellt das Konfidenzintervall (G_1, G_2) ein Zufallsintervall dar. Für eine konkrete Stichprobe (x_1, x_2, \dots, x_n) , eine Realisierung von (X_1, X_2, \dots, X_n) , erhalten wir dann mit den Realisierungen g_1 und g_2 der Konfidenzgrenzen G_1 und G_2 eine Realisierung (g_1, g_2) des Konfidenzintervalls, die wir als *konkrete Konfidenzschätzung* bezeichnen.

In einfachen Spezialfällen führt die Ermittlung des Konfidenzintervalls (G_1, G_2) für den Parameter Θ unter Verwendung einer Punktschätzfunktion $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$ dieses Parameters auf Konfidenzgrenzen der Form $G_1 = \hat{\Theta} - \delta_1$ und $G_2 = \hat{\Theta} + \delta_2$ bzw. $G_1 = \hat{\Theta} \cdot \delta_1$ und $G_2 = \hat{\Theta} \cdot \delta_2$. (3.34) geht dann über in

$$P(\hat{\Theta} - \delta_1 < \Theta < \hat{\Theta} + \delta_2) = 1 - \alpha \quad (3.35)$$

bzw.

$$P(\hat{\Theta} \cdot \delta_1 < \Theta < \hat{\Theta} \cdot \delta_2) = 1 - \alpha. \quad (3.36)$$

Die Größen δ_1 und δ_2 werden wir für einige Spezialfälle in 3.3.3.2. bis 3.3.3.5. berechnen.

Wir wollen nochmals bemerken: Das Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Zufallsintervall (G_1, G_2) den unbekannten Parameter Θ überdeckt. Anders ausgedrückt: Die ermittelten konkreten Konfidenzintervalle werden durchschnittlich in $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ der Fälle Θ überdecken und in $\alpha \cdot 100\%$ der Fälle Θ nicht überdecken. Deshalb wird α als Irrtumswahrscheinlichkeit bezeichnet; α ist ein Ausdruck des Risikos, das bei dieser Schätzung eingegangen wird. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist also vom Bearbeiter vor Beginn der Schätzung entsprechend der Problemstellung festzulegen. In der Praxis wird für α im allgemeinen 0,05 bzw. 0,01 bzw. 0,001 gewählt.

3.3.3.2. Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz

Von einer Grundgesamtheit X sei bekannt, daß sie $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilt ist. Einer der beiden Parameter dieser Verteilung – Varianz σ^2 – soll uns bekannt sein. Der andere – der Erwartungswert μ – ist uns unbekannt. Für ihn suchen wir eine Konfidenzschätzung, d.h. ein Intervall, das μ mit einer großen Wahrscheinlichkeit überdeckt.

Dazu gehen wir von einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus und wählen als Punktschätzfunktion für den unbekannten Parameter $\Theta = \mu$ das arithmetische Mittel $\hat{\Theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Wie wir im Abschnitt 2.3.8.3. sahen, ist die Zufallsgröße $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ -verteilt. In (3.35) setzen wir $\hat{\Theta} = \bar{X}$ und $\Theta = \mu$ und wegen der Symmetrie der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Damit erhalten wir:

$$P(\bar{X} - \delta < \mu < \bar{X} + \delta) = P(|\bar{X} - \mu| < \delta) = 1 - \alpha, \quad (3.37)$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betrag des Schätzfehlers kleiner als die Schranke δ ist, wird mit $1 - \alpha$ vorgegeben.

Zur Bestimmung der Größe δ standardisieren wir die Zufallsgröße \bar{X} :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}. \quad (3.38)$$

Die Zufallsgröße Z ist $N(0; 1)$ -verteilt. (3.37) geht damit über in

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \alpha \quad (3.39)$$

oder anders geschrieben in:

$$P(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad \text{mit} \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}; \quad (3.40)$$

(3.40) wird in Bild 3.9 veranschaulicht.

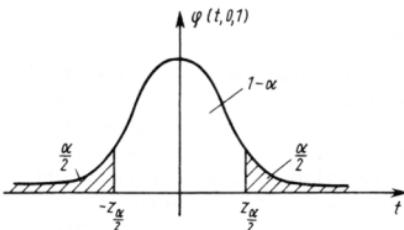


Bild 3.9. Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit im Fall der Relation (3.40)

Aus Tafel 4 des Anhangs können wir nun zu vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α das zugehörige $z_{\frac{\alpha}{2}}$ entnehmen. Setzen wir (3.38) in die Ungleichung

$$|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

ein, so ergibt sich:

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.41)$$

und durch entsprechende Umformung die für den Parameter $\Theta = \mu$ gesuchte Konfidenzschätzung

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.42)$$

Das Zufallsintervall $\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ überdeckt den Parameter $\Theta = \mu$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$. Jede konkrete Stichprobe aus der o. g. Grundgesamtheit liefert uns eine Realisierung der Zufallsgröße \bar{X} und damit eine Realisierung dieses Zufallsintervalls. Das Intervall

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.43)$$

ist dann eine konkrete Konfidenzschätzung oder ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter $\Theta = \mu$.

Die Länge des Konfidenzintervalls

$$2\delta = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.44)$$

ist von α und n abhängig. Sie ist also bei festem α und n konstant. Die Lage des konkreten Konfidenzintervalls wird durch die konkrete Stichprobe bestimmt. In Bild 3.10 wird diese Aussage veranschaulicht.

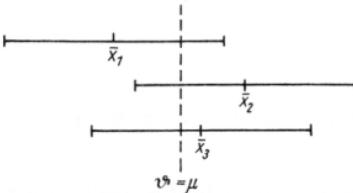


Bild 3.10. Konkrete Konfidenzintervalle für den Parameter $\Theta = \mu$ bei verschiedenen konkreten Stichproben aus einer Grundgesamtheit

Bei festem n wird das Konfidenzintervall kleiner, falls die Irrtumswahrscheinlichkeit größer wird. Die Länge des Konfidenzintervalls ist ein Maß für die Genauigkeit der Angabe von μ und die Irrtumswahrscheinlichkeit ein Maß für das Risiko. Die Genauigkeit können wir durch eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs erhöhen.

Beispiel 3.12: An Erzeugnissen, die auf einem Drehautomaten hergestellt werden, werden hinsichtlich eines Abmaßes Untersuchungen angestellt. Die dabei ermittelten Abweichungen vom Nennmaß (μ mm) können als Realisierungen einer normalverteilten Zufallsgröße X aufgefaßt werden.

Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist von der jeweiligen Einstellung des Automaten abhängig. Er ist uns deshalb nicht bekannt. Ihre Varianz $\sigma^2 = 400$ kennen wir aus vorangegangenen Funktionsgenauigkeitsprüfungen des Automaten. Für den Erwartungswert μ suchen wir eine konkrete Konfidenzschätzung zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$.

Wir wollen annehmen, daß wir aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang 16, d. h. aus 16 festgestellten Maßabweichungen, das arithmetische Mittel $\bar{x} = 55$ ermitteln konnten. Wir lesen nun für die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ in Tafel 4 des Anhangs den Wert $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96$ ab. Durch Einsetzen dieser Werte in (3.43) erhalten wir ein konkretes Konfidenzintervall für μ :

$$55 - 1,96 \frac{20}{\sqrt{16}} < \mu < 55 + 1,96 \frac{20}{\sqrt{16}}$$

und daraus

$$45,2 < \mu < 64,8.$$

Wählen wir einen kleineren Wert für α , so wird das Konfidenzintervall größer. So lesen wir z. B. für $\alpha = 0,01$ in Tafel 4 des Anhangs $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,58$ ab. Es ergibt sich als Konfidenzintervall

$$42,1 < \mu < 67,9.$$

Die höhere Sicherheit geht also zu Lasten der Genauigkeit der Schätzung.

Abschließend zu diesem Beispiel wollen wir zeigen, wie der für eine gewünschte Genauigkeit erforderliche Stichprobenumfang n ermittelt werden kann. Dazu haben wir die

in (3.44) für die Länge des Konfidenzintervalls angegebene Relation nach n aufzulösen:

$$n = \left(\frac{\frac{z_{\alpha}}{2} \sigma}{\delta} \right)^2.$$

Für ein vorgegebenes Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,95$ und ein gewünschtes Konfidenzintervall von der Länge $10 \mu\text{m}$ erhalten wir mit

$$\frac{z_{\alpha}}{2} = z_{0,025} = 1,96 \quad \text{und} \quad \delta = 5$$

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 20}{5} \right)^2 \approx 62.$$

Um die geforderte Genauigkeit zu erhalten, ist ein Stichprobenumfang von mindestens $n = 62$ notwendig.

3.3.3.3. Konfidenzschatzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz

Wir betrachten den Fall, daß beide Parameter einer $N(\mu; \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X unbekannt sind. Wie im vorangehenden Abschnitt suchen wir für einen der beiden Parameter – den Erwartungswert μ – eine Konfidenzschatzung.

Wiederum gehen wir von einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus und wählen ebenfalls als Punktschatzfunktion für den unbekannten Parameter $\theta = \mu$ das arithmetische Mittel $\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ und als Punktschatzfunktion für die Varianz σ^2 , die ebenfalls unbekannt ist, die empirische Varianz $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Wir verwenden jetzt zur Berechnung der Größen δ_1 und δ_2 die Stichprobenfunktion

$$Z_{n-1}^* = t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}, \quad (3.45)$$

die einer Student-Verteilung mit $m = n - 1$ Freiheitsgraden genügt. Auf Grund der Symmetrie der Dichtefunktion der Zufallsgröße Z_m^* können wir $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ setzen.

Aus der Tafel der Student-Verteilung (Tafel 4 des Anhangs) lesen wir zu vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α und für den Freiheitsgrad m den Wert $t_{\frac{\alpha}{2}; m}$ ab, für den die Gleichung

$$P \left(|Z_m^*| < t_{\frac{\alpha}{2}; m} \right) = 1 - \alpha \quad (3.46)$$

erfüllt ist. (3.46) wird in Bild 3.11 veranschaulicht.

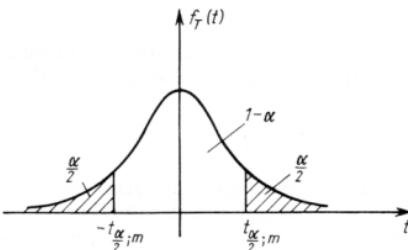


Bild 3.11. Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit im Fall der Relation (3.46) für $m = 4$

Durch Einsetzen von (3.45) in (3.46) erhalten wir

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}; m}\right) = 1 - \alpha$$

oder anders geschrieben

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}; m} < \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n} < t_{\frac{\alpha}{2}; m}\right) = 1 - \alpha.$$

Durch einfache Umrechnung bekommen wir die gesuchte Konfidenzschätzung für den Parameter $\Theta = \mu$:

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Das Zufallsintervall $\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ überdeckt den Parameter $\Theta = \mu$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$. Jede konkrete Stichprobe aus der o. g. Grundgesamtheit liefert je eine Realisierung der Zufallsgrößen \bar{X} und S und damit eine Realisierung des Zufallsintervalls. Das Intervall

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.47)$$

ist dann eine konkrete Konfidenzschätzung für den Parameter $\Theta = \mu$.

Für gleichen Stichprobenumfang n und gleiche Irrtumswahrscheinlichkeit ist das Konfidenzintervall (3.47) im allgemeinen größer als das Konfidenzintervall (3.43). Da die Student-Verteilung für $n \rightarrow \infty$ gegen die Normalverteilung strebt, wird der Unterschied in der Länge der beiden Intervalle bei genügend großem n sehr klein werden.

Wir verwenden deshalb für hinreichend große $m = n - 1$ die Näherung

$$t_{\frac{\alpha}{2}; m} \approx t_{\frac{\alpha}{2}; \infty} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

die erfahrungsgemäß schon für $m > 120$ eine in vielen Fällen zufriedenstellende Näherung liefert.

Beispiel 3.13: 12 Versuchsflächen wurden mit einer neuen Weizensorte bestellt. Diese Versuchsflächen brachten folgende Hektarerträge [dt]: 35,6; 33,7; 37,8; 31,2; 37,2; 34,1; 35,8; 36,6; 37,1; 34,9; 35,6; 34,0.

Erfahrungen zeigen, daß die Grundgesamtheit „zufälliger Hektarertrag“ gewöhnlich als normalverteilt angesehen werden kann. Für den Erwartungswert μ des Hektarertrags wollen wir mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ ein Konfidenzintervall ermitteln. Da die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ebenfalls unbekannt ist, werden wir von der o. g. konkreten Stichprobe ausgehend für die beiden Parameter $\Theta_1 = \mu$ und $\Theta_2 = \sigma^2$ die Punktschätzwerte \bar{x} und s^2 und mit ihnen unter Verwendung von (3.47) ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter $\Theta_1 = \mu$ ermitteln. Mit den errechneten $\bar{x} = 35,3$ und $s = 1,86$ und dem aus Tafel 4 für $m = 11$ Freiheitsgrade und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ abgelesenen Wert $t_{\frac{\alpha}{2}; m} = t_{0,025; 11} = 2,20$ lautet das konkrete Konfidenzintervall:

$$35,3 - 2,20 \frac{1,86}{\sqrt{12}} < \mu < 35,3 + 2,20 \frac{1,86}{\sqrt{12}}$$

oder umgerechnet

$$34,12 < \mu < 36,48.$$

3.3.3.4. Konfidenzschätzung für die Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit

Zur Ermittlung eines Konfidenzintervalls für die Varianz σ^2 einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X gehen wir von einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus und wählen als Punktschätzfunktion für den unbekannten Parameter $\Theta = \sigma^2$ die empirische Varianz $\hat{\Theta} = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Als Grundlage für die Bestimmung des gesuchten Konfidenzintervalls benutzen wir die Stichprobenfunktion

$$Y_{n-1}^* = \chi_{n-1}^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (3.48)$$

die einer χ^2 -Verteilung mit $m = n - 1$ Freiheitsgraden genügt. Bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α lassen sich aus der Tabelle der χ^2 -Verteilung für m Freiheitsgrade zwei solche Werte c_1 und c_2 ($c_1 < c_2$) ablesen, für die die Relationen

$$P(Y_m^* \geq c_1) = \int_{c_1}^{\infty} f_{\chi^2}(x) dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (3.49)$$

und

$$P(Y_m^* \geq c_2) = \int_{c_2}^{\infty} f_{\chi^2}(x) dx = \frac{\alpha}{2} \quad (3.50)$$

gelten. Beide fassen wir zusammen zu

$$P(c_1 < Y_m^* < c_2) = \int_{c_1}^{c_2} f_{\chi^2}(x) dx = 1 - \alpha. \quad (3.51)$$

Bild 3.12 veranschaulicht diese Beziehung für die χ^2 -Verteilung mit $m = 6$ Freiheitsgraden.

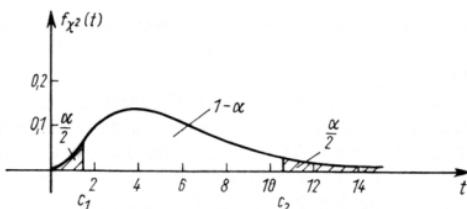


Bild 3.12. Konfidenzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit im Fall der Relation (3.51)

Für die Größen c_1 und c_2 als von der Irrtumswahrscheinlichkeit α abhängige Realisierungen einer χ^2 -verteilten Zufallsgröße mit m Freiheitsgraden setzen wir:

$$c_1 = \chi_{1 - \frac{\alpha}{2}; m}^2 \quad \text{und} \quad c_2 = \chi_{\frac{\alpha}{2}; m}^2. \quad (3.52)$$

Mit (3.48) und (3.52) erhalten wir aus (3.51)

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; m} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}; m}\right) = 1 - \alpha. \quad (3.53)$$

Durch Umformung ergibt sich die gesuchte Konfidenzschätzung für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$

$$\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; m}} S^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; m}} S^2. \quad (3.54)$$

Jede konkrete Stichprobe aus der o. g. Grundgesamtheit liefert uns eine Realisierung s^2 der Zufallsgröße S^2 und damit eine Realisierung des Zufallsintervalls, d. h., das Intervall

$$\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; m}} s^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; m}} s^2 \quad (3.55)$$

ist eine konkrete Konfidenzschätzung für den Parameter $\Theta = \sigma^2$.

Beispiel 3.14: Auf einer Maschine wird ein bestimmtes Einzelteil eines Erzeugnisses hergestellt. Der Durchmesser [mm] dieses Einzelteils kann als normalverteilte Zufallsgröße X angesehen werden. Um eine Aussage über die Fertigungsgenauigkeit der Maschine hinsichtlich dieses Durchmessers zu erhalten, soll eine Konfidenzschätzung der unbekannten Varianz $\Theta = \sigma^2$ der Grundgesamtheit zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0,98$ vorgenommen werden. Dazu ziehen wir aus der Grundgesamtheit X eine konkrete Stichprobe, die im vorliegenden Fall vom Umfang 25 sein soll. Aus dieser berechnen wir $s^2 = 0,1764$.

Nun lesen wir in Tafel 3 des Anhangs für $\frac{\alpha}{2} = 0,01$ bzw. $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$ und $m = n - 1 = 24$

Freiheitsgrade die Größen $c_1 = \chi^2_{0,99; 24} = 10,9$ und $c_2 = \chi^2_{0,01; 24} = 43$ ab. Die konkreten Konfidenzgrenzen sind dann nach (3.55)

$$g_1 = \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}; m}} s^2 = \frac{24}{43} \cdot 0,1764 = 0,0984$$

und

$$g_2 = \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; m}} s^2 = \frac{24}{10,9} \cdot 0,1764 = 0,3884.$$

Ein konkretes Konfidenzintervall für σ^2 zum Konfidenzniveau 0,98 ist somit

$$0,0984 < \sigma^2 < 0,3884.$$

Daraus ergibt sich zum gleichen Niveau ein Konfidenzintervall für σ :

$$0,3137 < \sigma < 0,6232.$$

3.3.3.5. Konfidenzschätzung für den Parameter p einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit

Wir wollen eine Null-Eins-verteilte Grundgesamtheit X betrachten, die die Werte 1 und 0 mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p = q$ besitzt.

Für den Parameter $\Theta = p$ dieser Grundgesamtheit, der im allgemeinen unbekannt ist, soll auf der Grundlage einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n eine Konfidenzschätzung mit dem Niveau $(1 - \alpha)$ ermittelt werden. Wir benutzen

$$\hat{\Theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.56)$$

als Punktschätzfunktion für den Parameter $\Theta = p$.

Die Zufallsgröße $n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ unterliegt einer Binomialverteilung mit den Parametern n und p (vgl. Abschnitt 2.3.10.2).

Für kleinen Stichprobenumfang n lässt sich deshalb ein Konfidenzintervall für p mit Hilfe der Binomialverteilung konstruieren. Wir verweisen auf [18].

Für hinreichend großen Stichprobenumfang ist die Zufallsgröße \bar{X} annähernd $N\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$ -verteilt. Geben Sie eine Begründung dafür!

Dementsprechend ist die Zufallsgröße

$$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

annähernd $N(0; 1)$ -verteilt.

Zur Konstruktion des Konfidenzintervalls für hinreichend großen Stichprobenumfang setzen wir in (3.35) $\Theta = p$, $\hat{\Theta} = \bar{X}$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ und erhalten

$$P(|\bar{X} - p| < \delta) = 1 - \alpha. \quad (3.57)$$

Durch Umformung von (3.57) ergibt sich

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| < \frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.58)$$

und daraus

$$P\left(|Z| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.59)$$

mit

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\delta \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}.$$

Wenn wir nun zu der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α in der Tafel 4 des Anhangs $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ablesen, erhalten wir aus

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| \sqrt{n} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.60)$$

ein Konfidenzintervall für den Parameter $\Theta = p$ mit einem Konfidenzniveau von annähernd $1 - \alpha$

$$\begin{aligned} & \frac{n}{n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2} \left(\bar{X} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2} \right) < p \\ & < \frac{n}{n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2} \left(\bar{X} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{2n} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n} + \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Beispiel 3.15: Der Ausschußprozentsatz $p \cdot 100\%$ eines großen Lieferpostens von Schrauben soll auf der Grundlage einer Stichprobe vom Umfang $n = 200$, in der 8 fehlerhafte Schrauben festgestellt wurden, ermittelt werden. Mit anderen Worten: Der Parameter $\theta = p$ einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit X soll mit Hilfe einer konkreten Stichprobe vom Umfang $n = 200$ geschätzt werden.

Ordnen wir dem Ereignis „Ziehen einer fehlerhaften Schraube“ den Wert $x_1 = 1$ bzw. dem Ereignis „Ziehen einer fehlerfreien Schraube“ den Wert $x_2 = 0$ der Zufallsgröße mit $P(X=1)=p$ bzw. $P(X=0)=1-p=q$ zu, dann enthält die konkrete Stichprobe 8mal die Realisierung $x_1=1$ und 192mal die Realisierung $x_2=0$. Für die Zufallsgröße $\hat{\theta}=\bar{X}$ erhalten wir damit eine Realisierung

$$\hat{\theta} = \bar{x} = \frac{8}{200} = 0,04.$$

Wir fragen nun nach konkreten Konfidenzgrenzen für den Ausschußprozentsatz des Lieferpostens bei einem Konfidenzniveau von 0,99. Da der Stichprobenumfang hinreichend groß ist, können wir für die Angabe der konkreten Konfidenzgrenzen von (3.61) ausgehen. Mit $\frac{\alpha}{2}=0,005$ ermitteln wir $z_{\frac{\alpha}{2}}=2,58$ und erhalten durch Einsetzen

$$g_{1,2} = \frac{200}{200+2,58^2} \left(0,04 + \frac{2,58^2}{400} \mp 2,58 \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{200} + \left(\frac{2,58}{400}\right)^2} \right).$$

Daraus errechnen wir:

$$g_1 = 0,017 \quad \text{und} \quad g_2 = 0,093.$$

Das konkrete Konfidenzintervall ist dann

$$0,017 < p < 0,093$$

bzw. in der gesuchten Form

$$1,7\% < p \cdot 100\% < 9,3\%.$$

3.3.3.6. Weiterführende Betrachtungen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir stets die Verteilung der Grundgesamtheit als bekannt vorausgesetzt und hatten dadurch die Möglichkeit, Konfidenzschätzungen für unbekannte Parameter der Grundgesamtheit anzugeben. Es erhebt sich nun die Frage nach Möglichkeiten von Konfidenzschätzungen von unbekannten Parametern der Grundgesamtheit, wenn deren Verteilung unbekannt ist. Da wir in diesem Rahmen nicht ausführlich darauf eingehen können, wollen wir lediglich am Beispiel eine Möglichkeit des Vorgehens andeuten.

Für den Erwartungswert $\Theta = E(X)$ einer beliebig verteilten Grundgesamtheit wollen wir eine Konfidenzschätzung näherungsweise angeben. Dazu ziehen wir aus dieser Grundgesamtheit eine mathematische Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n und wählen als

Punktschätzfunktion für $\Theta = E(X)$ das arithmetische Mittel $\hat{\Theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Diese Zufallsgröße ist für hinreichend großes n annähernd $N\left(\Theta; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ -verteilt, wobei $\sigma^2 = D^2(X)$

die Varianz der Grundgesamtheit ist. Daher können wir bei bekanntem σ^2 und hinreichend großem n für das Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ nach (3.42) das Zufallsintervall

$$(G_1, G_2) = \left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

näherungsweise als Konfidenzschätzung für $\Theta = E(X)$ verwenden. Ist dagegen σ^2 unbekannt, dann können wir bei hinreichend großem n für das Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ nach Abschnitt 3.3.3. das Zufallsintervall

$$(G_1, G_2) = \left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}; n} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}; n} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

als Konfidenzschätzung für $\Theta = E(X)$ verwenden. In beiden Fällen wächst mit zunehmendem Stichprobenumfang die Qualität der Schätzung.

Für weitergehende Betrachtungen wird auf [14, 18] verwiesen.

3.4. Statistische Prüfverfahren

3.4.1. Problemstellung und Grundbegriffe

Eine aus einer Grundgesamtheit gezogene Stichprobe enthält Informationen über die Verteilung der Grundgesamtheit und über ihre Kennwerte. Diese Informationen sind in der Regel nicht vollständig. Sie können aber genutzt werden, um Entscheidungen über statistische Hypothesen, kurz Hypothesen, zu fällen. Dabei verstehen wir unter statistischen Hypothesen Annahmen über interessierende unbekannte Charakteristika der Grundgesamtheit, z. B. über deren Kennwerte.

Wir wollen diesen Begriff durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel 3.16: Es ist bekannt, daß ein gewisses Abmaß eines in großer Stückzahl gefertigten Erzeugnisses durch eine normalverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden kann. Nun soll ermittelt werden, ob der unbekannte Erwartungswert dieser Zufallsgröße $E(X) = \mu$ mit dem Nennmaß μ_0 übereinstimmt, d. h. also, die Hypothese $H: E(X) = \mu_0$ ist zu prüfen.

Beispiel 3.17: Ein Betrieb hat einen großen Lieferposten vom Umfang N erhalten, in dem sich nach Angaben des Herstellers höchstens $p \cdot 100\% = 3\%$ Ausschuß befinden sollen. Mit Hilfe einer Stichprobe soll ermittelt werden, ob diese Vereinbarung eingehalten worden ist. Es ist also folgende Hypothese zu prüfen:

$$H: p = 0,03.$$

Beispiel 3.18: Ein bestimmter Gerätetyp wird in 2 Werken gefertigt. Es soll festgestellt werden, ob die mittlere Lebensdauer der in beiden Werken gefertigten Geräte als gleich zu

beurteilen ist. Wird die Lebensdauer der Geräte aus Werk I bzw. II durch die Zufallsgröße X bzw. Y beschrieben, dann ist die Hypothese:

$$H: E(X) = E(Y)$$

zu prüfen.

Beispiel 3.19: Zur Prüfung der Frage, ob die Zugfestigkeit einer bestimmten Drahtsorte durch eine normalverteilte Zufallsgröße X charakterisiert werden kann, wird folgende Hypothese aufgestellt:

$$H: F_X(t) = \Phi(t; \mu, \sigma), \quad -\infty < t < \infty.$$

Beispiel 3.20: Zur Bestimmung einer physikalischen Größe stehen zwei unterschiedliche Meßverfahren zur Auswahl. Auf der Grundlage zweier Probemebreihen soll entschieden werden, welche der beiden Methoden genauere Angaben liefert, wobei als Kriterium der Genaugkeit die Streuung der Meßwerte in den Probereihen gewählt wird. Da die Meßwerte als Realisierungen zweier normalverteilter Zufallsgrößen X und Y aufgefaßt werden können, ist also folgende Hypothese H zu prüfen:

$$H: D^2(X) = D^2(Y).$$

Die Prüfung einer Hypothese H erfolgt mit *statistischen Prüfverfahren*, die auch *statistische Tests*, kurz *Tests*, genannt werden. Die Aufgabe besteht hierbei darin, auf der Grundlage einer konkreten Stichprobe, die aus der betrachteten Grundgesamtheit gezogen wird, zu einer Entscheidung über die Hypothese H zu gelangen. Die Hypothese H wird als *Nullhypothese* H_0 bezeichnet, wenn neben ihr noch weitere Hypothesen aufgestellt werden können, die dann *Alternativhypothesen* genannt werden.

Die Arbeitsweise eines statistischen Prüfverfahrens wollen wir mit Hilfe eines Beispiels erläutern.

Beispiel 3.21: Bei der Fertigung von Wellen ist für diese ein Nennmaß von 4 mm vorgeschrieben. Am Anfang der Schicht ist die Maschine, von der bekannt ist, daß sie mit einer Standardabweichung von $\sigma = 0,003$ mm arbeitet, auf diesen Wert eingerichtet worden. Nach einer gewissen Zeit soll auf der Grundlage einer Stichprobe vom Umfang $n = 25$ aus der laufenden Produktion die Einstellung der Maschine überprüft werden. Aus den 25 Meßwerten ergibt sich für den Durchmesser der Wellen ein arithmetisches Mittel $\bar{x} = 4,0012$ mm. Es erhebt sich die Frage, wie diese Abweichung des Stichprobenmittelwertes vom Nennmaß zu beurteilen ist.¹⁾

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir davon aus, daß die der Produktion entsprechende Grundgesamtheit $X \sim N(4; 3 \cdot 10^{-3})$ -verteilt ist (geben Sie eine Begründung dafür an!) und daß die Nullhypothese

$$H_0: E(X) = \mu_0 = 4$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1: E(X) = \mu \quad (\mu \neq 4)$$

zu prüfen ist. Mit anderen Worten: Es ist zu testen, ob die obengenannte konkrete Stichprobe aus der $N(4; 3 \cdot 10^{-3})$ -verteilten Grundgesamtheit stammen kann oder nicht. Dabei gibt es für einen Entscheid zwei Möglichkeiten:

Ist die Abweichung des Stichprobenmittelwerts vom Nennmaß gering, so wird die Nullhypothese nicht abgelehnt. Die Abweichung wird dann als zufällig bezeichnet.

¹⁾ Bei den weiteren Betrachtungen dieses Abschnittes lassen wir die Angabe der Maßeinheit weg.

Ist andererseits die Abweichung des Stichprobenmittelwerts vom Nennmaß so groß, daß die konkrete Stichprobe nicht aus der Grundgesamtheit X gezogen scheint, so wird die Nullhypothese abgelehnt. Die aufgetretene Abweichung wird dann *signifikant* oder *statistisch gesichert* genannt. Das bedeutet, daß die Maschine bei der Fertigung das Nennmaß nicht einzuhalten scheint und ein neues Einrichten erforderlich ist, um Ausschuß zu verhindern.

Um die Frage nach der Schranke c zwischen kleinen (zufälligen) und größeren (signifikanten) Abweichungen beantworten zu können, stellen wir folgende Überlegung an: Das arithmetische Mittel \bar{X} der konkreten Stichprobe ist eine Realisierung der Punktschätzfunktion \bar{X} .

Da wir vorausgesetzt haben, daß die Grundgesamtheit $X \sim N(4; 3 \cdot 10^{-3})$ -verteilt ist, ist die Zufallsgröße $\bar{X} \sim N\left(4; \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5}\right)$ -verteilt.

Bild 3.13 zeigt die Dichtefunktion $\varphi\left(t; 4, \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5}\right)$ der Zufallsgröße \bar{X} . An ihr veran-

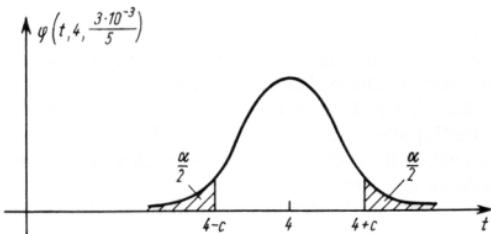


Bild 3.13. Dichtefunktion
 $\varphi(t; 4, 6 \cdot 10^{-4})$
der Zufallsgröße X

schaulichen wir uns die folgende Vorgehensweise:

- Wir wählen einen Wert α ($0 < \alpha < 1$);
- Wir bestimmen einen Wert c so, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Abweichen der Zufallsgröße \bar{X} vom Nennmaß 4,00 dem Betrage nach um mindestens c gleich α beträgt, wenn H_0 als richtig vorausgesetzt wird:

$$P(|\bar{X} - 4| \geq c/H_0) = \alpha. \quad (3.62)$$

Die Wahrscheinlichkeit α wird als *Irrtumswahrscheinlichkeit* und $1 - \alpha$ als *Signifikanzniveau* bezeichnet. Sie hängt von der Problemstellung ab; sie kann nicht errechnet werden, sondern wird vorgegeben. In der Regel wird 0,05 oder 0,01 oder 0,001 gewählt, wobei erfahrungsgemäß bei Routineuntersuchungen $\alpha = 0,05$ und bei wesentlichen Entscheidungen höchstens $\alpha = 0,01$ gewählt wird. Durch die Irrtumswahrscheinlichkeit wird die Schranke c bestimmt und damit der *Ablehnungsbereich (kritischer Bereich) K* für die Nullhypothese H_0 festgelegt. Der kritische Bereich wird also so bestimmt, daß er Werte, die vom Erwartungswert $E(X) = 4$ stark abweichen, überdeckt.

Ehe wir uns der Betrachtung gewisser Fehler zuwenden, die bei der Prüfung einer Hypothese gemacht werden können, wollen wir für das Beispiel 3.21 den kritischen Bereich K bestimmen. Aus (3.62) ergibt sich durch Standardisierung der Zufallsgröße \bar{X} :

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - 4}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5}\right| \geq \frac{c}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5/H_0}\right) = \alpha. \quad (3.63)$$

Die Zufallsgröße $Z = \frac{\bar{X} - 4}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5}$ ist $N(0; 1)$ -verteilt. Sie wird zur Entscheidung über die

Nullhypothese angewandt und deshalb als *Prüfgröße (Testgröße)* bezeichnet.¹⁾ In Tafel 4 des Anhangs kann für die Prüfgröße Z der kritische Wert $z_{\alpha} = \frac{c}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 5$ abgelesen werden. Der kritische Bereich K für \bar{X} ergibt sich dann aus der Ungleichung

$$\left| \frac{\bar{X} - 4}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 5 \right| \geq z_{\alpha}. \quad (3.64)$$

Demzufolge wird die Nullhypothese H_0 abgelehnt, wenn

$$\bar{X} \geq 4 + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5} z_{\alpha} \quad \text{oder} \quad \bar{X} \leq 4 - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5} z_{\alpha}. \quad (3.65)$$

Für die gesuchte Schranke c gilt somit:

$$c = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5} z_{\alpha}.$$

Geben wir im Beispiel $\alpha = 0,01$ vor, so lesen wir in Tafel 4 des Anhangs $z_{\alpha} = 2,58$ ab. Da-

mit errechnen wir $c = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5} \cdot 2,58 = 155 \cdot 10^{-5}$ und erhalten als kritischen Bereich $\bar{X} \leq 3,99845$, $\bar{X} \geq 4,00155$.

Das aus der konkreten Stichprobe ermittelte arithmetische Mittel $\bar{x} = 4,0012$ liegt nicht in diesem Bereich, d. h., die aus der Grundgesamtheit gezogene Stichprobe steht nicht im Widerspruch zu H_0 . Es besteht kein Grund dafür, die Nullhypothese zu verwerten, die Abweichung $\bar{x} - 4$ ist als zufällig anzusehen.

Betrachten wir nun mögliche Fehlentscheidungen, die bei der Anwendung statistischer Prüfverfahren auftreten können. Auf Grund der Tatsache, daß die Entscheidung auf der in einer konkreten Stichprobe enthaltenen Information beruht, ist damit immer ein gewisses Irrtumrisiko verbunden; denn es können zwei Arten von Fehlentscheidungen auftreten:

Wir machen einen Fehler

- 1. Art, wenn wir die Nullhypothese ablehnen, obwohl sie richtig ist;
- 2. Art, wenn wir die Nullhypothese nicht ablehnen, obwohl sie falsch ist.

Einen Fehler 1. Art begehen wir also dann, wenn wir aus der Grundgesamtheit, für die die Nullhypothese H_0 richtig ist, eine konkrete Stichprobe ziehen, aus der sich eine Realisierung u der Prüfgröße U errechnet, die im kritischen Bereich K liegt. Auf Grund der Festlegung von K gilt:

$$P(U \in K | H_0) = \alpha,$$

d. h., die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen, beträgt α . Damit wird auch die Bezeichnung „Irrtumswahrscheinlichkeit“ verständlich. Wird ein Test mehrmals durchgeführt, so wird also im Mittel bei $100 \cdot \alpha\%$ der Entscheidungen ein Fehler 1. Art gemacht werden.

Wie wir oben ausführten, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α der Problemstellung entsprechend vorzugeben. Wählen wir α möglichst klein, so bedeutet dies, daß die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 abzulehnen, obwohl sie richtig ist, klein ist. Aber je

¹⁾ Allgemein werden wir U als Symbol für Prüfgrößen verwenden.

kleiner α ist, um so schwieriger wird es, die „Falschheit“ einer falschen Hypothese zu zei- gen; denn der kritische Bereich für die Testgröße U wird kleiner. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art recht groß werden. Das Vorgehen der allgemeinen Testtheorie (vgl. [10]) wollen wir am Beispiel 3.19 veranschaulichen. Der Nullhypothese $H_0: E(X) = \mu_0 = 4$ können wir jede Alternativhypothese $H_1: E(X) = \mu (\mu \neq 4)$ gegenüberstellen. Davon ausgehend wird versucht, den kritischen Bereich K so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung einer „falschen“ Nullhypothese H_0 , d. h. für Nichtablehnung der Alternativhypothese H_1 unter der Bedingung, daß H_1 richtig ist, möglichst groß ist:

$$P(U \in K/H_1) = 1 - \beta. \quad (3.66)$$

Dabei ist β die Wahrscheinlichkeit für das Begehen eines Fehlers 2. Art. (3.66) nennen wir *Güte* oder auch *Trennschärfe* des statistischen Prüfverfahrens. Den kritischen Bereich K sollten wir demzufolge so wählen, daß die Irrtumswahrscheinlichkeit α möglichst klein und die Trennschärfe $(1 - \beta)$ möglichst groß ist.

In Tabelle 3.15 sind zur Veranschaulichung die vier möglichen Entscheidungen, die in Verbindung mit einem statistischen Test gefällt werden können, nochmals mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten p_i , $i = 1, 2, \dots, 4$, zusammengestellt.

Tabelle 3.15. Fehler 1. und 2. Art

	nicht abgelehnt	abgelehnt
H_0 ist richtig	richtige Entscheidung $p_1 = 1 - \alpha$	Fehlentscheidung Fehler 1. Art $p_2 = \alpha$
H_0 ist falsch	Fehlentscheidung Fehler 2. Art $p_3 = \beta$	richtige Entscheidung $p_4 = 1 - \beta$

Wird lediglich die Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben und auf eine direkte Berücksichtigung des Fehlers 2. Art und der Alternativhypothese H_1 verzichtet, so sprechen wir von *Signifikanztests*. Wir sollten uns aber immer bewußt sein, daß ein Fehler 2. Art trotzdem bei jeder Entscheidung auftreten kann.

Nach dem zuletzt Gesagten gibt es sehr viele Möglichkeiten zur Festlegung des kritischen Bereiches K bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α . Von praktischem Interesse sind davon nur zwei. Das ist einmal die zweiseitige und zum anderen die einseitige Fragestellung.

Von einer zweiseitigen symmetrischen Fragestellung¹⁾ sprechen wir dann, wenn für die Prüfgröße U zur Irrtumswahrscheinlichkeit α das Ereignis „ $|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$ “ unter der Bedingung H_0 betrachtet wird. Bild 3.14 veranschaulicht dies für eine $N(0; 1)$ -verteilte Testgröße U , wobei außerdem der kritische Bereich K angegeben ist. Im Beispiel 3.21 liegt eine zweiseitige symmetrische Fragestellung vor.

¹⁾ Häufig treten unsymmetrische zweiseitige Fragestellungen auf (vgl. z. B. 3.4.4.).

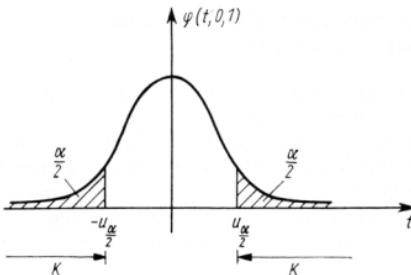


Bild 3.14. Darstellung des kritischen Bereiches K bei zweiseitiger Fragestellung

Bei einer einseitigen Fragestellung betrachten wir für eine symmetrisch verteilte Testgröße U entweder das Ereignis „ $U \geq u_\alpha$ “ unter der Bedingung H_0 oder das Ereignis „ $U \leq -u_\alpha$ “ unter der Bedingung H_0 für die Testgröße U bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit α . Dieser Fall ist für eine $N(0; 1)$ -verteilte Testgröße U in Bild 3.15 zusammen mit dem kritischen Bereich K dargestellt.

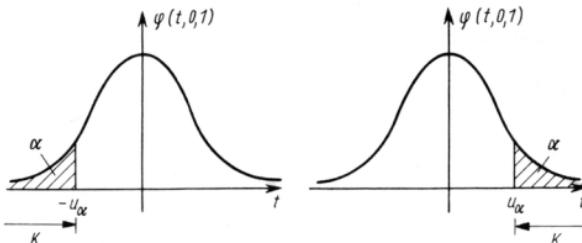


Bild 3.15. Darstellung des kritischen Bereiches K bei einseitiger Fragestellung

Überlegen Sie sich Beispiele für Prüfungen, bei denen einseitige bzw. zweiseitige Fragestellungen auftreten!

Abschließend zu diesem Abschnitt wollen wir das Vorgehen bei der Anwendung eines Signifikanztests folgendermaßen schematisieren:

1. Aufstellen der Nullhypothese H_0 .
2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .
3. Wahl einer geeigneten Prüfgröße $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Sie ist eine Stichprobenfunktion einer zur betrachteten Grundgesamtheit gehörenden mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) . Ihre Verteilungsfunktion sei bekannt.
4. Ermittlung eines kritischen Bereichs K aus der Beziehung $P(U \in K | H_0) = \alpha$.
5. Berechnung einer Realisierung u der Prüfgröße U mit Hilfe einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n vom Umfang n .
6. Der Entscheid über die Nullhypothese H_0 wird wie folgt vorgenommen:
Falls $u \in K$, so wird H_0 abgelehnt;
falls $u \notin K$, so wird H_0 nicht abgelehnt.

Die Darstellung der in den Abschnitten 3.4.2., 3.4.3. und 3.4.9. angegebenen Prüfverfahren wird nach diesem Schema erfolgen. In den nachfolgenden Abschnitten 3.4.4. bis 3.4.7. sind dann nur noch die Schritte 1. bis 4. angegeben.

3.4.2. Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz

In Verbindung mit Beispiel 3.21 haben wir ein statistisches Prüfverfahren angegeben, das auf folgende Fragestellung angewandt werden kann:

Es soll geprüft werden, ob der unbekannte Erwartungswert $E(X) = \mu$ einer $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit X mit bekannter Varianz $D^2(X) = \sigma^2$ einen bestimmten Wert μ_0 besitzt. Beispielsweise kann über die Größe des Wertes μ_0 bereits eine Vermutung vorliegen – μ_0 ist häufig der Sollwert des Merkmals X . Probleme dieser Art treten in der statistischen Qualitätskontrolle auf. Wir wollen den für diese Fragestellung in Abschnitt 3.4.1 entwickelten Test zusammenstellen.

1. $H_0: E(X) = \mu_0$.
2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .
3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus der $N(\mu; \sigma^2)$ -verteilten Grundgesamtheit X wird die $N(0; 1)$ -verteilte Prüfgröße

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad (3.67)$$

gewählt.

- 4. Der kritische Bereich K wird ermittelt bei
- zweiseitiger Fragestellung aus:

$$P\left(|U| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}/H_0\right) = \alpha$$

zu

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{und} \quad \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \quad (3.68)$$

- einseitiger Fragestellung aus:

$$P(U \geq z_{\alpha}/H_0) = \alpha \quad \text{bzw.} \quad P(U \leq -z_{\alpha}/H_0) = \alpha$$

zu

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}. \quad (3.69)$$

- 5. Aus einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der Grundgesamtheit wird das arithmetische Mittel und mit diesem eine Realisierung der Testgröße U errechnet:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}. \quad (3.70)$$

6. Der Entscheid erfolgt bei
 - zweiseitiger Fragestellung in folgender Art:
Falls $|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, so wird H_0 abgelehnt;
falls $|u| < z_{\frac{\alpha}{2}}$, so wird H_0 nicht abgelehnt;
 - einseitiger Fragestellung in folgender Art:
Falls $u \geq z_{\alpha}$ bzw. $u \leq -z_{\alpha}$, so wird H_0 abgelehnt;
falls $u < z_{\alpha}$ bzw. $u > -z_{\alpha}$, so wird H_0 nicht abgelehnt.
- Nachdem wir in Beispiel 3.21 die zweiseitige Fragestellung betrachtet haben, wollen wir noch ein Beispiel zur einseitigen Fragestellung bringen.

Beispiel 3.22: Die Druckfestigkeit [MPa] X einer Betonsorte sei normalverteilt. Aus der Erfahrung kennen wir die Standardabweichung der Grundgesamtheit ($\sigma = 2,6$). Aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang $n = 10$ ermitteln wir für die Druckfestigkeit das arithmetische Mittel $\bar{x} = 26,23$. Wir wollen untersuchen, ob diese Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit $\mu_0 = 28$ (Sollwert) stammt. Im vorliegenden Fall ist eine Unterschreitung des Sollwerts kritisch. Deshalb prüfen wir die Hypothese $H_0: E(X) = 28$ für den Fall einer einseitigen Fragestellung, wobei wir $\alpha = 0,05$ wählen wollen. Für die Realisierung u der Testgröße U errechnen wir:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{26,23 - 28}{2,6} \sqrt{10} = -2,15.$$

Aus Tafel 4 entnehmen wir bei dieser einseitigen Fragestellung $-z_\alpha = -1,64$ und erhalten für den kritischen Bereich K das Intervall $(-\infty, -1,645)$. Da $u < -z_\alpha$ ist, lehnen wir die Nullhypothese H_0 ab, d. h., die Abweichung der Druckfestigkeit vom Sollwert ist signifikant.

3.4.3. Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz

Wir wollen prüfen, ob der unbekannte Erwartungswert $E(X) = \mu$ einer $N(\mu; \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X mit unbekannter Varianz $D^2(X) = \sigma^2$ einen bestimmten Wert μ_0 besitzt. Der Unterschied gegenüber dem im letzten Abschnitt dargestellten statistischen Prüfverfahren besteht also darin, daß außer dem Erwartungswert $E(X)$ jetzt auch die Varianz $D^2(X)$ der Grundgesamtheit unbekannt ist. Wir werden diese ebenfalls mit Hilfe einer Stichprobe zu schätzen haben. Dadurch erhalten wir aber eine andere Prüfgröße als im Abschnitt 3.4.2.

Betrachten wir das Schema dieses Prüfverfahrens:

1. $H_0: E(X) = \mu_0$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus der $N(\mu; \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X wird die einer Student-Verteilung mit $m = n - 1$ Freiheitsgraden genügende Prüfgröße

$$U = t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \quad (3.71)$$

gewählt, wobei S^2 die aus der mathematischen Stichprobe ermittelte empirische Varianz darstellt.

4. Der kritische Bereich K wird mit Hilfe der Tafel 4 ermittelt bei
– zweiseitiger Fragestellung aus:

$$P\left(|U| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} / H_0\right) = \alpha$$

zu

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}; \quad \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \quad (3.72)$$

(vgl. Bild 3.16);

– einseitiger Fragestellung aus:

$$P(U \geq t_{\alpha; n-1} / H_0) = \alpha \quad \text{bzw.} \quad P(U \leq -t_{\alpha; n-1} / H_0) = \alpha$$

zu

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha; n-1} \quad \text{bzw.} \quad \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha; n-1} \quad (3.73)$$

(vgl. Bild 3.17).

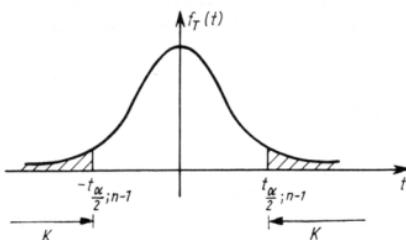


Bild 3.16. Darstellung des kritischen Bereiches K bei zweiseitiger Fragestellung und Verwendung der Prüfgröße $U = t_{n-1}$

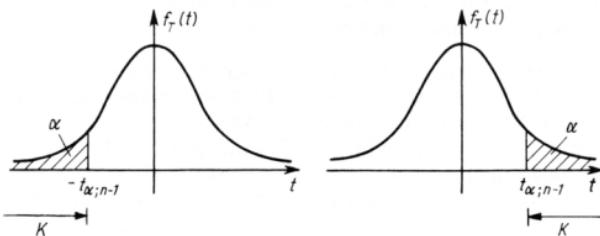


Bild 3.17. Darstellung des kritischen Bereiches K bei einseitiger Fragestellung und Verwendung der Prüfgröße $U = t_{n-1}$

5. Aus einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n der Grundgesamtheit werden das arithmetische Mittel \bar{x} und die Standardabweichung s und mit diesen eine Realisierung u der Testgröße U errechnet:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} . \quad (3.74)$$

6. Der Entscheid erfolgt bei

- zweiseitiger Fragestellung in folgender Weise:

Falls $|u| \geq t_{\alpha/2; n-1}$, so wird H_0 abgelehnt;

falls $|u| < t_{\alpha/2; n-1}$, so wird H_0 nicht abgelehnt.

- einseitiger Fragestellung in folgender Weise:

Falls $u \geq t_{\alpha; n-1}$ bzw. $u \leq -t_{\alpha; n-1}$, so wird H_0 abgelehnt;

falls $u < t_{\alpha; n-1}$ bzw. $u > -t_{\alpha; n-1}$, so wird H_0 nicht abgelehnt.

Anmerkung: Bei hinreichend großem Stichprobenumfang kann die Prüfgröße $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ des Abschnittes 3.4.2. angewandt werden, wobei für σ der Schätzwert s eingesetzt wird. Geben Sie eine Begründung für dieses Vorgehen an!

Beispiel 3.23: Der Fertigungsprozeß von Stahlringen, für deren äußeren Durchmesser ein Nennmaß von 18,6 mm vorgegeben ist, soll hinsichtlich der Einhaltung dieses Nennmaßes überprüft werden. Der Durchmesser kann dabei als $N(\mu; \sigma)$ -verteilte Zufallsgröße X aufgefaßt werden. Aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang $n = 9$ ergibt sich das arithmetische Mittel $\bar{x} = 18,3$ und die empirische Standardabweichung $s = 0,2$. Mit Hilfe dieser Stichprobe testen wir die Nullhypothese $H_0: E(X) = 18,6$ für eine vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$. Wir entscheiden uns für eine zweiseitige Fragestellung. Entsprechend dem Punkt 5 des Schemas errechnen wir eine Realisierung der Prüfgröße

$$u = \frac{18,3 - 18,6}{0,2} \cdot 3 = -4,5.$$

Für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ und $m = 8$ Freiheitsgrade lesen wir in Tafel 4 den kritischen Wert $t_{0,025; 8} = 2,31$ ab. Da nun $|u| > 2,31$ ist, lehnen wir die Nullhypothese H_0 ab, d. h., der Unterschied zwischen dem Nennmaß und dem aus der Stichprobe ermittelten arithmetischen Mittel \bar{x} ist signifikant. Es liegt also Veranlassung vor, in den Produktionsprozeß einzugreifen.

3.4.4. Prüfung der Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit

Als Maß für die Genauigkeit und Gleichmäßigkeit z. B. eines Produktionsprozesses oder eines Meßgerätes kann die Varianz $D^2(X)$ der entsprechenden Grundgesamtheit X betrachtet werden. Wir wollen in diesem Abschnitt deshalb ein Prüfverfahren für die Varianz kennenlernen. Es soll geprüft werden, ob die unbekannte Varianz $D^2(X) = \sigma^2$ einer $N(\mu; \sigma)$ -verteilten Grundgesamtheit X einen bestimmten Wert σ_0^2 besitzt.

Schematisch stellt sich das entsprechende Prüfverfahren wie folgt dar:

1. $H_0: D^2(X) = \sigma_0^2$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus der $N(\mu; \sigma_0)$ -verteilten Grundgesamtheit X wird die einer χ^2 -Verteilung mit $m = n - 1$ Freiheitsgraden genügende Prüfgröße

$$U = \chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad (3.75)$$

gewählt, wobei S^2 die aus der mathematischen Stichprobe ermittelte empirische Varianz ist.

4. Der kritische Bereich K wird mit Hilfe der Tafel 3 bei
- zweiseitiger Fragestellung aus den Relationen

$$P\left(U \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1} / H_0\right) = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$P\left(U \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} / H_0\right) = \frac{\alpha}{2}$$

oder

$$P\left(U > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} / H_0\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

ermittelt zu

$$U \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \quad \text{und} \quad U \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \quad (3.76)$$

- (vgl. Bild 3.18);
- einseitiger Fragestellung aus

$$P(U \geq \chi^2_{\alpha; n-1} / H_0) = \alpha$$

ermittelt zu

$$U \geq \chi^2_{\alpha; n-1} \quad (3.77)$$

(vgl. Bild 3.19).

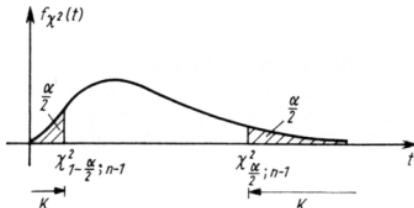


Bild 3.18. Darstellung des kritischen Bereiches K bei zweiseitiger Fragestellung und Verwendung der Prüfgröße $U = \chi^2_{n-1}$

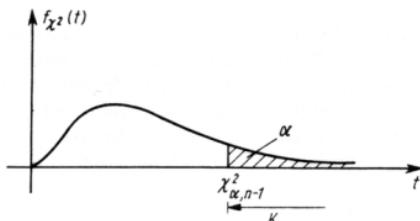


Bild 3.19. Darstellung des kritischen Bereiches K bei einseitiger Fragestellung und Verwendung der Prüfgröße $U = \chi^2_{n-1}$

Beispiel 3.24: Ein Betrieb produziert Serien von Massenartikeln. Ein Merkmal X dieser Erzeugnisse ist $N(\mu; \sigma)$ -verteilt. Treten keine wesentlichen Störungen in diesem Fertigungsprozeß auf, so behält die Varianz $D^2(X) = \sigma^2$ ihren Wert. Ist nun als Erfahrungswert $\sigma_0 = 6$ bekannt, und liefert eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 25$ eine empirische Standardabweichung $s = 6,9$, so erhebt sich die Frage, ob die aufgetretenen Abweichungen vom hypothetischen Wert durch zufällige Schwankungen zu erklären sind.

Wir haben also die Nullhypothese $H_0: D^2(X) = 36$ zu prüfen und geben uns dazu eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ vor. Da in diesem Fall nur Abweichungen „nach oben“ von Interesse sind, wird die einseitige Fragestellung herangezogen. Die konkrete Stichprobe ergibt

$$u = \frac{24 \cdot 6,9^2}{36} = 31,74.$$

Für den kritischen Wert $\chi^2_{\alpha; n-1}$ lesen wir aus Tafel 3 für $\alpha = 0,01$ und $m = 24$ Freiheitsgrade

$$\chi^2_{0,01; 24} = 43$$

ab. Da

$$u < \chi^2_{0,01; 24}$$

ist, besteht kein Grund zur Ablehnung der Nullhypothese. Die Abweichungen zwischen $D^2(X) = 36$ und $s^2 = 6,9^2 = 47,61$ sind als zufällig anzusehen.

Ist der Stichprobenumfang größer als 30, dann kann zum Testen von $H_0: D^2(X) = \sigma_0^2$ die $N(0; 1)$ -verteilte Prüfgröße

$$U = Z = \left[\frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S^2 - (n-1) \right] \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \quad (3.78)$$

herangezogen werden, wobei S^2 die empirische Varianz ist. Der kritische Bereich wird bei ihr entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 3.4.2. bestimmt.

3.4.5. Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten

Im Beispiel 3.18 wurde für zwei Zufallsgrößen X und Y die Hypothese $H: E(X) = E(Y)$ aufgestellt. Diese Problematik tritt sehr häufig bei Fragestellungen der Praxis auf, z. B. beim Vergleich zweier Produktionsverfahren für ein bestimmtes Erzeugnis oder beim Vergleich verschiedener Meßverfahren. Wir wollen jetzt ein entsprechendes Prüfverfahren kennenlernen:

Es soll geprüft werden, ob der Erwartungswert $E(X) = \mu_X$ einer $N(\mu_X; \sigma_X^2)$ -verteilten Grundgesamtheit X dem Erwartungswert $E(Y) = \mu_Y$ einer $N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ -verteilten Grundgesamtheit Y gleich ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die beiden Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind und für die Varianzen $D^2(X) = D^2(Y) = \sigma^2$ gilt, wobei σ^2 nicht bekannt sein muß.

Der Test soll wieder in schematischer Darstellung gebracht werden:

1. $H_0: E(X) = E(Y)$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ vom Umfang n_1 aus der Grundgesamtheit X und einer mathematischen Stichprobe $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ vom Umfang n_2 aus der Grundgesamtheit Y wird die einer Studentverteilung mit $m = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden genügende Testgröße

$$U = t_m = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}} \quad \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad (3.79)$$

gewählt, wobei \bar{X} bzw. \bar{Y} das arithmetische Mittel und S_X^2 bzw. S_Y^2 die empirische Varianz der Zufallsgröße X bzw. Y sind.

4. Der kritische Bereich K wird mit Hilfe der Tafel 4 bei zweiseitiger Fragestellung aus der Relation

$$P(|U| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m} / H_0) = \alpha$$

ermittelt zu

$$|\bar{X} - \bar{Y}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m} \sqrt{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2} \quad \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}}. \quad (3.80)$$

Auf die Darstellung des kritischen Bereiches bei einseitiger Fragestellung wollen wir hier nicht eingehen.

Wie vereinfacht sich die Testgröße bei gleichem Stichprobenumfang?

Haben die Varianzen der beiden Grundgesamtheiten $D^2(X)$ und $D^2(Y)$ nicht denselben Wert, so läßt sich der Test nicht in der obigen Form anwenden. Wir verweisen den Leser auf [18].

Beispiel 3.25: An zwei Fertigungsstraßen werden Widerstände hergestellt. Wir wollen prüfen, ob die an jeder der Fertigungsstraßen produzierten Widerstände im Mittel den gleichen Widerstandswert [Ω] besitzen.

Die Widerstandswerte der an der Fertigungsstraße I bzw. II erzeugten Widerstände beschreiben wir durch die Grundgesamtheit $X [\Omega]$ bzw. $Y [\Omega]$. Zur Prüfung entnehmen wir den Grundgesamtheiten die konkreten Stichproben x_1, x_2, \dots, x_{15} bzw. y_1, y_2, \dots, y_{12} vom Umfang $n_1 = 15$ bzw. $n_2 = 12$.

Die Nullhypothese $H_0: E(X) = E(Y)$ wollen wir für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ und zweiseitige Fragestellung prüfen. Aus den beiden Stichproben werden die empirischen arithmetischen Mittel $\bar{x} = 152,5$ und $\bar{y} = 159,9$ und die empirischen Standardabweichungen $s_x = 1,6$ und $s_y = 1,2$ und damit eine Realisierung der Prüfgröße errechnet:

$$u = \frac{152,5 - 150,9}{\sqrt{14 \cdot 2,56 + 11 \cdot 1,44}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 12 \cdot 25}{27}} = 2,87.$$

Bei zweiseitiger Fragestellung lesen wir in Tafel 4 für $\alpha = 0,05$ und $m = n_1 + n_2 - 2 = 25$ den kritischen Wert $t_{0,025; 25} = 2,06$ ab.

Da $u = 2,87 > 2,06 = t_{0,025; 25}$ ist, lehnen wir H_0 ab.

3.4.6. Prüfung der Gleichheit der Varianzen zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten

Wie wir oben feststellten, kann die Varianz als ein Maß für die Genauigkeit und Gleichmäßigkeit z. B. eines Produktionsprozesses, der Arbeit von Maschinen oder Meßgeräten angesehen werden. Sehr häufig tritt dabei auch die Frage nach dem Vergleich der Genauigkeit zweier Prozesse, Maschinen oder Meßgeräte auf.

In diesem Abschnitt wollen wir ein entsprechendes Prüfverfahren darstellen. Es dient außerdem dazu, die Voraussetzung ($D^2(X) = D^2(Y)$) für das in Abschnitt 3.4.5. angegebene Prüfverfahren zu testen.

Es soll geprüft werden, ob die Varianz $D^2(X) = \sigma_x^2$ einer $N(\mu_X; \sigma_x)$ -verteilten Grundgesamtheit X der Varianz $D^2(Y) = \sigma_y^2$ einer $N(\mu_Y; \sigma_y)$ -verteilten Grundgesamtheit Y gleich ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die beiden Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind.

Es ist nicht erforderlich, daß die beiden Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ bekannt sind.

Wir wenden folgenden Test an:

1. $H_0: D^2(X) = D^2(Y)$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ vom Umfang n_1 aus einer $N(\mu_X; \sigma_x)$ -verteilten Grundgesamtheit X und einer mathematischen Stichprobe $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ vom Umfang n_2 aus einer $N(\mu_Y; \sigma_y)$ -verteilten Grundgesamtheit Y wird die einer F -Verteilung mit $m_1 = n_1 - 1$ und $m_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgraden genügende Testgröße

$$U = F_{m_1, m_2} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \quad (3.81)$$

gewählt, wobei S_x^2 bzw. S_y^2 die empirische Varianz der Zufallsgröße X bzw. Y ist. Wird die größere der beiden empirischen Varianzen in den Zähler der Prüfgröße U geschrieben, so sind die Realisierungen von U größer als 1. In diesem Fall ist nur die einseitige Fragestellung von Interesse.¹⁾

1) Die Zufallsgröße $F_{m_2, m_1} = \frac{1}{F_{m_1, m_2}} = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ genügt einer F -Verteilung mit den Freiheitsgraden (m_2, m_1) .

4. Der kritische Bereich K wird mit Hilfe der Tafel 5 bei einseitiger Fragestellung aus der Relation

$$P(U \geq f_{\alpha; m_1, m_2} / H_0) = \alpha$$

(vgl. Bild 3.20) ermittelt.

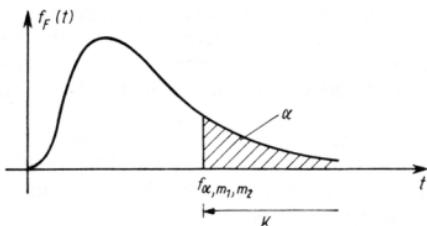


Bild 3.20. Darstellung des kritischen Bereiches K bei einseitiger Fragestellung und Verwendung der Prüfgröße $U = F_{m_1, m_2}$

Beispiel 3.26: Zur Prüfung der Genauigkeit zweier Drehautomaten, die gleichartige Werkstücke fertigen, wird der laufenden Produktion des ersten bzw. zweiten Automaten eine Stichprobe vom Umfang $n_1 = 13$ bzw. $n_2 = 20$ Stück entnommen. Der Durchmesser der Werkstücke, das zu prüfende Merkmal, kann als $N(\mu_x; \sigma_x)$ -verteilte bzw. $N(\mu_y; \sigma_y)$ -verteilte Zufallsgröße X bzw. Y aufgefaßt werden. Aus den konkreten Stichproben der Grundgesamtheiten X und Y werden die konkreten empirischen Varianzen $s_x^2 = 10,2 \mu\text{m}^2$ und $s_y^2 = 6,2 \mu\text{m}^2$ errechnet. Zur Beantwortung der Fragestellung ist die Nullhypothese $H_0: D^2(X) = D^2(Y)$ zu prüfen, wobei die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ betragen soll. In Tafel 5 lesen wir für $\alpha = 0,05$ und $m_1 = n_1 - 1 = 12$; $m_2 = n_2 - 1 = 19$ den Wert $f_{0,05; 12, 19} = 2,31$ ab. Aus den konkreten Stichproben errechnen wir weiter die Realisierung

$$u = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{10,2}{6,2} = 1,65.$$

Da $u < 2,31$ ist, wird H_0 nicht abgelehnt, d. h., die Abweichungen in den Genauigkeiten beider Automaten werden als zufällig angesehen.

3.4.7. Prüfung des Parameters p einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit

Bei einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit X sind im allgemeinen die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1) = p$ und $P(X = 0) = 1 - p = q$ unbekannt. Dementsprechend wird eine Annahme über den Wert dieser Wahrscheinlichkeit gemacht. Es kommt nun darauf an, diese Annahme zu prüfen, eine Fragestellung, die häufig, z. B. in der statistischen Qualitätskontrolle, auftritt.

Es soll also geprüft werden, ob der Erwartungswert $E(X) = p$ einer Null-Eins-verteilten Zufallsgröße X dem Wert p_0 gleich ist.

Das Prüfverfahren lautet im Schema folgendermaßen:

1. $H_0: E(X) = p_0$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Bei großem Stichprobenumfang n wird zur mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) aus der Grundgesamtheit X die auf Grund des Satzes von Moivre-Laplace annähernd $N(0, 1)$ -verteilte Prüfgröße

$$U = Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} \quad (3.82)$$

gewählt.

Auf die Angabe einer Testgröße bei kleinem Stichprobenumfang können wir in diesem Rahmen nicht eingehen. Wir verweisen den Leser auf [18].

4. Der kritische Bereich K wird wie in Abschnitt 3.4.2. angegeben errechnet.

Beispiel 3.27: Bei der Gütekontrolle eines Erzeugnisses wurde über einen längeren Zeitraum festgestellt, daß die Lieferungen im Mittel 5% Ausschuß enthalten. Wir wollen prüfen, ob der Ausschußprozentsatz in einem weiteren Lieferposten wesentlich von diesem Erfahrungswert abweicht, nachdem wir in einer Stichprobe vom Umfang $n = 400$ aus einer Lieferung 28 fehlerbehaftete Teile festgestellt haben (die Stichprobe enthält also 7% fehlerhafte Teile).

Wir gehen von einem $p_0 = 0,05$ aus und prüfen für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ die Nullhypothese $H_0: E(X) = 0,05$, wobei X eine Null-Eins-verteilte Grundgesamtheit ist. Da eine große Stichprobe vorliegt, wählen wir (3.82) als Prüfgröße. Dementsprechend erhalten wir als Realisierung der Testgröße

$$u = \frac{28 - 400 \cdot 0,05}{\sqrt{400 \cdot 0,05 \cdot 0,95}} = 1,835.$$

Da lediglich Abweichungen „nach oben“ von $p_0 = 0,05$ interessieren, fällen wir die Entscheidung für eine einseitige Fragestellung. Wir entnehmen aus Tafel 4 $z_{0,01} = 2,33$. Da die Realisierung $u = 1,835$ kleiner als der Tafelwert $z_{0,01} = 2,33$ ist, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt. Die Abweichung des Ausschußanteils wird als zufällig angesehen.

3.4.8. Prüfung, ob eine Grundgesamtheit einer Normalverteilung unterliegt (mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes)

Bisher haben wir meist vorausgesetzt, daß die zur Beschreibung eines Merkmals herangezogene Grundgesamtheit normalverteilt ist. Da es sich bei den betrachteten Merkmalen vielfach um Maßabweichungen, Beobachtungs- oder Meßfehler handelt, die jeweils von einer Vielzahl von zufälligen Einflüssen verursacht werden, konnte der zentrale Grenzwertsatz zur Rechtfertigung der Annahme einer Normalverteilung herangezogen werden.

Häufig besteht aber keine Klarheit darüber, ob eine Grundgesamtheit einer Normalverteilung unterliegt oder nicht. Es sind deshalb entsprechende Prüfverfahren erforderlich. Wir werden in diesem Abschnitt ein graphisches Verfahren kennenlernen, das kein statistischer Test im üblichen Sinne ist. Ein rechnerisches statistisches Prüfverfahren bringen wir im nächsten Abschnitt. Seine Anwendbarkeit beschränkt sich nicht nur auf normalverteilte Grundgesamtheiten.

Bei dem graphischen Verfahren zur Prüfung, ob eine Grundgesamtheit X einer Normalverteilung unterliegt, verwenden wir ein *Wahrscheinlichkeitsnetz*.¹⁾ Das ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem, bei dem die Abszisse linear und die Ordinate so unterteilt ist, daß der Graph der Verteilungsfunktion der Normalverteilung zu einer Geraden gestreckt wird. Bild 3.21 zeigt die Verteilungsfunktion der Normalverteilung unverzerrt und Bild 3.22 dieselbe Verteilungsfunktion im Wahrscheinlichkeitsnetz.

In diesem Rahmen wollen wir nicht auf die Herleitung des Wahrscheinlichkeitsnetzes eingehen – vgl. dazu [18] –, sondern seine Anwendung darstellen.

Wollen wir also prüfen, ob eine Grundgesamtheit X durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann, so ziehen wir aus dieser eine hinreichend große konkrete Stichprobe. Die Elemente der Stichprobe werden in Klassen eingeteilt, und für jede Klasse wer-

¹⁾ Verlag Schäfer's Feinpapier, Plauen/Vogtland.

den die relative Häufigkeit und die relative Summenhäufigkeit [%] berechnet. Nun werden auf der Abszissenachse des Wahrscheinlichkeitsnetzes die Klassengrenzen einge-tragen und den oberen Klassengrenzen die entsprechenden relativen Summenhäufigkeiten zugeordnet. Die so erhaltenen Punkte liegen annähernd auf einer Geraden, falls die

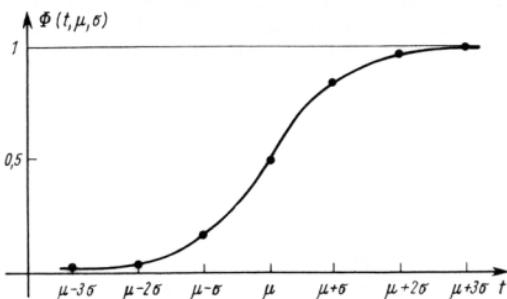


Bild 3.21. Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$

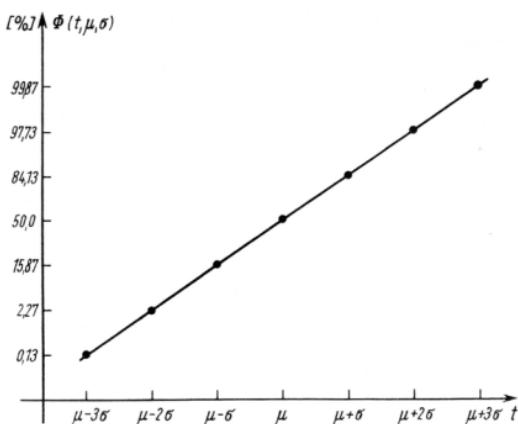


Bild 3.22. Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$ im Wahrscheinlichkeitsnetz

Grundgesamtheit X durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann. Für kleine bzw. große Ordinatenwerte ist das Wahrscheinlichkeitsnetz stark verzerrt. Deshalb ist es empfehlenswert, zur Beurteilung die Ordinatenwerte zwischen 10% und 90% heranzuziehen.

Für viele praktische Untersuchungen ist dieses schnelle, aber auch „grobe“ Verfahren oft ausreichend. Ist das nicht der Fall, so ist zusätzlich ein rechnerisches Verfahren heranzuziehen, z. B. das in Abschnitt 3.4.9. angegebene. Das ist dann nicht nötig, wenn die Punkte im Wahrscheinlichkeitsnetz nicht annähernd auf einer Geraden liegen, sondern stark streuen.

Können wir annehmen, daß die betrachtete Grundgesamtheit durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann, so ist es möglich, aus dem Wahrscheinlichkeitsnetz Nä-

herungswerte für das konkrete arithmetische Mittel \bar{x} und die konkrete empirische Standardabweichung s der konkreten Stichprobe abzulesen. Die durch die Punkte „bestmöglich“ gelegte Gerade wird mit der zur Abszissenachse parallelen durch die Ordinate „50%“ gehenden Geraden – kurz 50%-Linie – zum Schnitt gebracht.

Die Abszisse des Schnittpunktes ist ein Näherungswert für das konkrete arithmetische Mittel \bar{x} . Die eingezeichnete Gerade wird weiter mit der 15,87%-Linie bzw. 84,13%-Linie zum Schnitt gebracht. Die Abszissen der Schnittpunkte seien x_1 und x_2 . Dann gilt:

$$x_1 \approx \bar{x} - s \quad \text{und} \quad x_2 \approx \bar{x} + s,$$

woraus folgt:

$$s \approx \frac{1}{2} (x_2 - x_1).$$

Beispiel 3.28: Mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes wollen wir prüfen, ob die 120 Meßwerte in Beispiel 3.2, die eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 120$ darstellen, aus einer normalverteilten Grundgesamtheit X (X ist die Maßabweichung des Durchmessers vom Nennmaß) gezogen sein können. Die aus Tabelle 3.3 entnommenen relativen Summenhäufigkeiten (%) wurden in Bild 3.23 als Ordinaten bei den jeweiligen oberen Klassengrenzen eingetragen. Durch die so erhaltenen Punkte können wir näherungsweise eine Gerade legen, d.h., die Grundgesamtheit, aus der diese Stichprobe stammt, kann als normalverteilt angesehen werden. Aus Bild 3.23 können wir weiterhin das konkrete arithmetische Mittel $\bar{x} \approx 4,6$ und die konkrete Standardabweichung $s \approx 10$ ablesen.

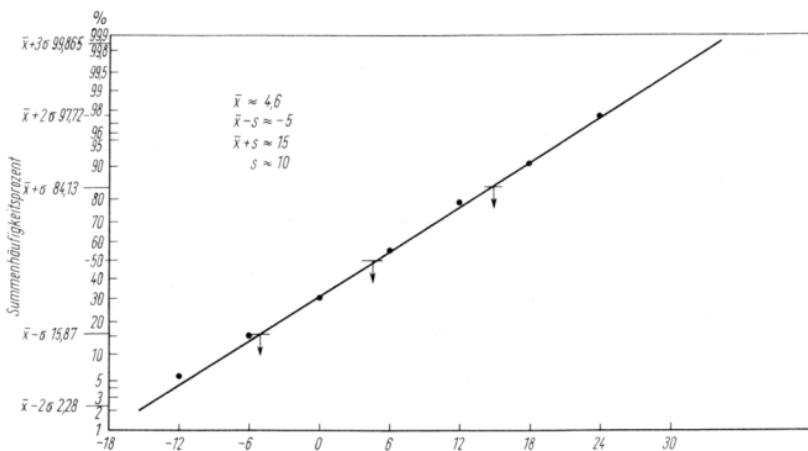


Bild 3.23. Wahrscheinlichkeitsnetz, Auswertung von Beispiel 3.2

3.4.9. Prüfung der Verteilungsfunktion einer Grundgesamtheit (Anpassungstest)

Bei den bisher betrachteten Prüfverfahren wurde immer von einer normalverteilten Grundgesamtheit ausgegangen. Mit dem jetzt zu betrachtenden Test werden wir eine Methode kennenlernen, bei der diese Voraussetzung nicht gemacht wird. Wir sprechen in

einem solchen Fall von einem verteilungsunabhängigen Prüfverfahren. Mit dem folgenden soll geprüft werden, ob die durch eine konkrete Stichprobe über die Verteilungsfunktion einer Grundgesamtheit X gewonnene Information mit der für diese Grundgesamtheit angenommenen Verteilungsfunktion verträglich ist. Wir versuchen also, einer Grundgesamtheit mit unbekannter Verteilungsfunktion eine bekannte Verteilungsfunktion anzupassen. Das folgende Prüfverfahren wird deshalb auch *Anpassungstest* genannt.

Es soll geprüft werden, ob die unbekannte Verteilungsfunktion $F_X(t)$, $-\infty < t < +\infty$, einer Grundgesamtheit X die Form $F_0(t)$, $-\infty < t < +\infty$, besitzt. Wir wollen den Test wieder in schematisierter Form angeben:

1. $H_0: F_X(t) \equiv F_0(t)$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_1, X_2, \dots, X_n) vom Umfang n aus der Grundgesamtheit X wird die einer χ^2 -Verteilung mit $(k - r - 1)$ Freiheitsgraden genügende Prüfgröße

$$U = \chi^2_{k-r-1} = \sum_{m=1}^k \frac{(H_m - np_m)^2}{np_m} \quad (3.83)$$

gewählt, wobei

- die Elemente der Stichprobe in k Klassen eingeteilt wurden;
- die Zufallsgröße H_m die absolute Häufigkeit, die hier auch empirische Häufigkeit genannt wird, von Elementen der mathematischen Stichprobe in der m -ten Klasse ($m = 1, 2, \dots, k$) charakterisiert;
- p_m die mit Hilfe der angenommenen Verteilungsfunktion $F_0(t)$ errechnete Wahrscheinlichkeit dafür darstellt, daß ein Wert der Grundgesamtheit X in der m -ten Klasse ($m = 1, 2, \dots, k$) liegt;
- np_m die entsprechende absolute Häufigkeit, die hier auch theoretische Häufigkeit genannt wird, von n Elementen in der m -ten Klasse ($m = 1, 2, \dots, k$) angibt und
- r die Anzahl der in der angenommenen Verteilungsfunktion $F_0(t)$ geschätzten Parameter ist.

Die theoretischen Häufigkeiten dürfen nicht zu klein sein. Im allgemeinen wird $np_m \geq 5$, $m = 1, 2, \dots, k$, gefordert. Kann diese Bedingung nicht erfüllt werden, so sind einige Klassen zusammenzulegen.

4. Der kritische Bereich K , der bei diesem Prüfverfahren nur für die einseitige Fragestellung von Interesse ist, ergibt sich aus der Relation

$$P(U \geq \chi^2_{\alpha; k-r-1} / H_0) = \alpha.$$

In Bild 3.24 ist dieser Bereich veranschaulicht.

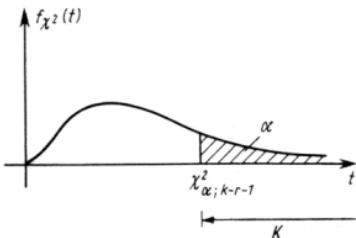


Bild 3.24. Darstellung des kritischen Bereiches K beim Anpassungstest

5. Aus einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n vom Umfang n aus der Grundgesamtheit X errechnen wir eine Realisierung u der Prüfgröße U :

$$u = \sum_{m=1}^k \frac{(h_m - np_m)^2}{np_m} \quad (3.84)$$

wobei h_m eine Realisierung der Zufallsgröße H_m ($m = 1, 2, \dots, k$) darstellt.

6. Der Entscheid erfolgt in folgender Weise:

Ist

$$u \geq \chi^2_{\alpha; k-r-1},$$

so wird H_0 abgelehnt; ist

$$u < \chi^2_{\alpha; k-r-1},$$

so wird H_0 nicht abgelehnt.

Anmerkung: Die Prüfgröße (3.83) lässt sich in der Form

$$U = \sum_{m=1}^k \frac{H_m^2}{np} - n \quad (3.85)$$

angeben. Diese Darstellung bringt rechentechnische Vorteile.

Beispiel 3.29: Rutherford und Geiger veröffentlichten 1910 das folgende Versuchsergebnis: In 2 608 Zeitintervallen von je 7,5 s Länge wurden die emittierten α -Teilchen einer radioaktiven Substanz gezählt. In Tabelle 3.16 sind die Anzahlen h_m der Zeitintervalle erfasst, in denen m Teilchen gezählt wurden.

Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ soll geprüft werden, ob die entsprechende Grundgesamtheit X (X ist die Anzahl der innerhalb von 7,5 s emittierten α -Teilchen) durch eine Poissonverteilung beschrieben werden kann. Die Nullhypothese H_0 lautet also:

$$H_0: P(X = m) = \frac{\lambda_0^m}{m!} e^{-\lambda_0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Tabelle 3.16. Anzahlen h_m der Zeitintervalle, in denen m α -Teilchen im Versuch von Rutherford und Geiger emittiert wurden

m	h_m	m	h_m
0	57	Übertrag	2 108
1	203	6	273
2	383	7	139
3	525	8	45
4	532	9	27
5	408	10 und mehr	16
	2 108		2 608

Anmerkung: Bei Merkmalen, die durch eine diskrete Zufallsgröße beschrieben werden, ist es zweckmäßig, die Nullhypothese nicht für die Verteilungsfunktion, sondern für die Einzelwahrscheinlichkeiten aufzustellen.

Um die Nullhypothese prüfen zu können, benötigen wir die entsprechenden konkreten empirischen Häufigkeiten h_m und die zugehörigen theoretischen Häufigkeiten np_m . Erstere gewinnen wir aus den Versuchsergebnissen, letztere errechnen wir mit den Einzelwahrscheinlichkeiten der Poissonverteilung. Bei dieser ist der Parameter λ_0 aus der Stich-

probe zu schätzen, wobei das arithmetische Mittel \bar{X} eine Maximum-Likelihood-Schätzung für λ_0 darstellt. Im vorliegenden Fall erhalten wir als Realisierung dieser Punktschätzfunktion

$$\bar{x} = 3,87.$$

Damit ergibt sich für die theoretischen Häufigkeiten

$$np_m = nP(X = m) = 2608 \cdot \frac{3,87^m}{m!} e^{-3,87}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Die χ^2 -verteilte Prüfgröße hat hier $k - r - 1 = 11 - 1 - 1 = 9$ Freiheitsgrade, da zur Berechnung der theoretischen Häufigkeiten bei einer Poissonverteilung der Parameter λ_0 aus der konkreten Stichprobe geschätzt wurde. In Tabelle 3.17 ist ein Schema zur Berechnung der Realisierung (3.84) der Prüfgröße (3.83) aus den Werten der konkreten Stichprobe (Tabelle 3.16) angegeben.

Tabelle 3.17. Schema zur Berechnung der Realisierung (3.84) der Prüfgröße (3.83) aus Tabelle 3.16

m	h_m	p_m	np_m	$ h_m - np_m $	$(h_m - np_m)^2$	$\frac{(h_m - np_m)^2}{np_m}$
0	57	0,021	54,8	2,2	4,84	0,088
1	203	0,081	211,2	8,2	67,24	0,318
2	383	0,156	406,8	23,8	566,44	1,392
3	525	0,201	524,2	0,8	0,64	0,001
4	532	0,195	508,6	23,4	547,56	1,007
5	408	0,151	393,8	14,2	201,64	0,512
6	273	0,097	253,0	20,0	400,00	1,581
7	139	0,054	140,8	1,8	3,24	0,023
8	45	0,026	67,8	22,8	519,84	7,667
9	27	0,011	28,7	1,7	2,89	0,101
≥ 10	16	0,007	18,3	2,3	5,29	0,289
	2608	1,000				$u = 13,049$

Für $\alpha = 0,05$ lesen wir in Tafel 3 einen kritischen Wert $\chi^2_{0,05;9} = 16,9$ ab und erhalten für den kritischen Bereich K das Intervall $(16,9; \infty)$.

Da $u = 13,05 < 16,9 = \chi^2_{0,05;9}$ ist, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Beispiel 3.30: Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ wollen wir prüfen, ob die im Beispiel 3.2 angegebene Urliste eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 120$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit X (X ist die Maßabweichung des Durchmessers vom Nennmaß), die das betrachtete Merkmal beschreibt, sein kann. Wir stellen folgende Nullhypothese auf:

$$H_0: F_X(t) \equiv \Phi(t; \mu_0, \sigma_0).$$

Die Kennwerte $E(X) = \mu_0$ und $D^2(X) = \sigma_0^2$ der Normalverteilung sind unbekannt. Für sie wählen wir als geeignete Punktschätzfunktionen das arithmetische Mittel \bar{X} und die empirische Varianz S^2 . Als konkrete Schätzungen erhalten wir aus der konkreten Stichprobe

$$\bar{x} = 4,65 \quad \text{und} \quad s^2 = 98.$$

Um zu einer Entscheidung über H_0 zu kommen, werden die theoretischen Häufigkeiten benötigt. In Beispiel 3.2 hatten wir die Meßwerte in $k = 8$ Klassen eingeteilt (vgl. Tabelle 3.3) und erhielten so die konkreten empirischen Häufigkeiten h_m , $m = 1, 2, \dots, 8$. Die entsprechenden theoretischen Häufigkeiten np_m , $m = 1, 2, \dots, 8$, ergeben sich in folgender Weise:

– für $m = 2, \dots, 7$:

$$120 p_m = 120 P(a_{m-1} \leq X < a_m) = 120 P\left(\frac{a_{m-1} - 4,65}{9,9} \leq Z < \frac{a_m - 4,65}{9,9}\right)$$

$$= 120 P(z_{m-1} \leq Z < z_m) = 120 [\Phi(z_m; 0, 1) - \Phi(z_{m-1}; 0, 1)],$$

wobei a_m , $m = 2, 3, \dots, 7$, die obere Klassengrenze der m -ten Klasse darstellt und die Zufallsgröße $Z = \frac{X - 4,65}{9,9}$ $N(0; 1)$ -verteilt ist;

– für $m = 1$:

$$120 p_1 = 120 P(X < -12) = 120 P\left(\frac{X - 4,65}{9,9} < \frac{-12 - 4,65}{9,9}\right)$$

$$= 120 P(Z < -1,68) = 120 \Phi(-1,68; 0, 1)$$

$$= 120 \cdot 0,0465 = 5,58;$$

– für $m = 8$:

$$120 p_8 = 120 P(X \geq 24) = 120 P\left(\frac{X - 4,65}{9,9} \geq \frac{24 - 4,65}{9,9}\right)$$

$$= 120 P(Z \geq 1,95) = 120[1 - P(Z < 1,95)]$$

$$= 120[1 - \Phi(1,95; 0, 1)] = 120 \cdot 0,0256 = 3,07.$$

Tabelle 3.18 enthält die erforderlichen Rechenschritte zur Bestimmung einer Realisierung (3.84) der Prüfgröße (3.83) aus den Werten der konkreten Stichprobe (vgl. Tabelle 3.3). In ihr wurden auf Grund der Forderung $np_m \geq 5$ die letzten beiden Klassen zusammengefaßt. Damit reduziert sich die Anzahl der Klassen auf 7. Die χ^2 -verteilte Prüfgröße hat hier $k - r - 1 = 4$ Freiheitsgrade, da zur Berechnung der theoretischen Häufigkeiten bei der Normalverteilung beide Parameter aus der konkreten Stichprobe geschätzt wurden. Aus Tafel 3 lesen wir für $\alpha = 0,05$ den kritischen Wert $\chi^2_{0,05; 4} = 9,5$ ab. Da $u = 1,44 < 9,5 = \chi^2_{0,05; 4}$ ist, wird die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt, d.h., das Ergebnis steht nicht im Widerspruch zu der Annahme, daß die konkrete Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit gezogen wurde.

3.5. Einführung in die Varianzanalyse

3.5.1. Problemstellung

Die Varianzanalyse, die in Verbindung mit der Auswertung von Feldversuchen in der Landwirtschaft entwickelt wurde, hat sich in den letzten Jahren zu einem sehr allgemeinen mathematisch-statistischen Verfahren entwickelt, das in Naturwissenschaft, Landwirtschaft und Technik sehr breite Anwendung bei der Auswertung von quantitativen Versuchsergebnissen findet. Ihre Wirksamkeit erstreckt sich auf zwei Gruppen von Fragestellungen:

Tabelle 3.18. Schema zur Berechnung einer Realisierung (3.84) der Prüfgröße (3.83)

1. In Erweiterung des in Abschnitt 3.4.5. angegebenen Verfahrens zur Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten wird sie zur gleichzeitigen Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte mehrerer unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten angewandt. Dadurch wird es möglich, den Einfluß eines in mehreren Stufen wirkenden Faktors auf ein meßbares Merkmal zu ermitteln. So kann z. B. der Einfluß des Faktors „Stahlsorte“ auf das meßbare Merkmal „Zugfestigkeit“ untersucht werden. Dabei werden die pro Stahlsorte ermittelten Ergebnisse verglichen.

2. Kommt es darauf an, die Anteile an der Gesamtvariabilität (Gesamtvarianz) eines meßbaren Merkmals zu ermitteln, die durch das Wirken bestimmter Faktoren oder Faktorengruppen hervorgerufen werden, so wird ebenfalls die Varianzanalyse angewandt. Eine solche Problematik tritt beispielsweise auf, wenn Aussagen über die Stabilität eines Produktionsprozesses zu machen sind.

Die Fragestellungen der ersten bzw. zweiten Gruppe werden als Problem 1. bzw. 2. Art bezeichnet und durch das Modell I bzw. II beschrieben. Bei jedem der beiden Modelle wird je nach der Anzahl der Faktoren, die berücksichtigt werden, zwischen einfacher, zweifacher, ..., n -facher Klassifikation unterschieden.

In den folgenden Abschnitten werden wir jedes der beiden Modelle bei einfacher Klassifikation und außerdem das allgemeine lineare Modell betrachten und so die Arbeitsweise der Varianzanalyse kennenlernen. Für weitergehende Ausführungen verweisen wir auf [1].

3.5.2. Modell I bei einfacher Klassifikation

Im Modell I bei einfacher Klassifikation untersuchen wir die Wirkung verschiedener festen Stufen eines Faktors auf ein meßbares Merkmal. Im Endergebnis vergleichen wir die für die einzelnen Stufen erzielten Ergebnisse. Da bei diesem Modell die einzelnen Stufen des Faktors fest vorgegeben sind, bezeichnen wir es auch als *Modell mit festen Effekten*.

Wir wollen dies an einigen Beispielen veranschaulichen:

Merkmal	Faktor	Stufen
Laufzeit von PKW-Reifen	PKW-Reifen	verschiedene Typen von PKW-Reifen
Ertrag von Getreide	Getreidesorte	verschiedene Getreidesorten
Meffehler	Meßgerät	verschiedene Meßgeräte
Kaloriengehalt von Butter	Butter	verschiedene Buttersorten

Zur Darstellung der Arbeitsweise der Varianzanalyse soll angenommen werden, daß der betrachtete Faktor k ($k \geq 2$) Stufen besitzt. Für jede einzelne Stufe wird das untersuchte meßbare Merkmal durch eine Grundgesamtheit X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) beschrieben, die $N(\mu_i; \sigma_i)$ -verteilt ist. Wir setzen dabei voraus, daß die Standardabweichung für alle X_i gleich ist, d. h. $\sigma_i = \sigma$. Die X_i sollen untereinander unabhängig sein. Aus jeder der Grundgesamtheiten ziehen wir nun eine konkrete Stichprobe. Zur Vereinfachung betrachten wir hier nur Stichproben gleichen Umfangs l . Wir haben damit insgesamt $k \cdot l = n$ Realisierungen: x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$). Diese werden im sogenannten *Versuchsplan* erfaßt, der außerdem noch die Summen $s_{i..}$ der Realisierungen pro Stufe, die Summe $s_{..}$ aller Realisierungen, die konkreten arithmetischen Mittel $\bar{x}_{i..}$ der einzelnen Stufen und das konkrete Gesamtmittel $\bar{x}_{..}$ enthält.

Tabelle 3.19. Balancierter Versuchsplan bei einfacher Klassifikation

Stufen des Faktors	Realisierungen je Stufe							
	1	2	...	j	...	l	$s_{i..}$	$\bar{x}_{i..}$
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1l}	$s_{1..}$	$\bar{x}_{1..}$
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2l}	$s_{2..}$	$\bar{x}_{2..}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{il}	$s_{i..}$	$\bar{x}_{i..}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
k	x_{k1}	x_{k2}	...	x_{kj}	...	x_{kl}	$s_{k..}$	$\bar{x}_{k..}$
							$s_{..}$	$\bar{x}_{..}$

Versuchspläne für den hier betrachteten Spezialfall (gleicher Stichprobenumfang für alle Stufen) werden als *balanciert* oder *orthogonal* bezeichnet. Das Schema eines solchen Versuchsplans ist in Tabelle 3.19 angegeben. Dabei gelten folgende Relationen:

$$s_{i..} = \sum_{j=1}^l x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.86)$$

$$s_{..} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij} = \sum_{i=1}^k s_{i..}, \quad (3.87)$$

$$\bar{x}_{i..} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l x_{ij} = \frac{1}{l} s_{i..}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.88)$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij} = \frac{1}{n} s_{..}. \quad (3.89)$$

Aufgabe der Varianzanalyse bei Modell I mit einfacher Klassifikation ist es, die Nullhypothese

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (3.90)$$

zu prüfen, um damit eine Aussage über die Wirkung der einzelnen Stufen des Faktors auf das betrachtete Merkmal machen zu können.

Zur Herleitung einer Prüfgröße für die Nullhypothese (3.90) gehen wir von der konkreten empirischen Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 \quad (3.91)$$

aus und zerlegen den Zähler dieses Ausdrucks wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..})^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{i..})^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{i..}) (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..}) \\ &\quad + l \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{..})^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Dieser Zähler ist die Summe der Abweichungsquadrate aller Realisierungen vom „Gesamtmittel“ $\bar{x}_{..}$. Wir bezeichnen ihn als „Summe der Abweichungsquadrate total“ (Symbol: SAQ_T).

Der erste Summand auf der rechten Seite von (3.92) ist die Summe der Abweichungsquadrate der Realisierungen einer Stufe vom jeweiligen „Stufenmittelwert“ $\bar{x}_{i.}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Wir bezeichnen ihn als „Summe der Abweichungsquadrate innerhalb der Stufe“ (Symbol: SAQ_I).

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.92) hat den Wert Null. Begründen Sie dies!

Der dritte Summand auf der rechten Seite von (3.92) ist die Summe der Abweichungsquadrate zwischen den „Stufenmittelwerten“ $\bar{x}_{i.}$, $i = 1, 2, \dots, k$, und dem „Gesamtmittelwert“ $\bar{x}_{..}$. Wir bezeichnen ihn als „Summe der Abweichungsquadrate zwischen den Stufen“ (Symbol: SAQ_Z).

Damit können wir für (3.92) schreiben:

$$SAQ_T = SAQ_I + SAQ_Z. \quad (3.93)$$

Teilen wir diese Größen durch die jeweiligen Freiheitsgrade – auf eine Begründung für die Aufteilung der $n - 1$ Freiheitsgrade in (3.93) soll hier verzichtet werden – erhalten wir die entsprechenden konkreten empirischen Varianzen:

$$MAQ_T = \frac{SAQ_T}{n - 1}, \quad (3.94)$$

$$MAQ_I = \frac{SAQ_I}{n - k}, \quad (3.95)$$

$$MAQ_Z = \frac{SAQ_Z}{k - 1}. \quad (3.96)$$

In der Tabelle 3.20, der sog. *Varianztafel*, sind die einzelnen Größen zusammengefaßt.

Tabelle 3.20. Varianztafel bei einfacher Klassifikation und balanciertem Versuchsplan

Variabilität	SAQ	Freiheits-grade	MAQ
Total	$SAQ_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2$	$n - 1$	$MAQ_T = \frac{SAQ_T}{n - 1}$
Zwischen den Stufen	$SAQ_Z = l \sum_{i=1}^k (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2$	$k - 1$	$MAQ_Z = \frac{SAQ_Z}{k - 1}$
Innerhalb der Stufen	$SAQ_I = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$	$n - k$	$MAQ_I = \frac{SAQ_I}{n - k}$

Zur Berechnung der „SAQ“ werden vorteilhaft folgende Relationen herangezogen:

$$\text{SAQ}_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij}^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij} \right)^2, \quad (3.97)$$

$$\text{SAQ}_Z = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^k s_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l x_{ij} \right)^2, \quad (3.98)$$

$$\text{SAQ}_I = \text{SAQ}_T - \text{SAQ}_Z. \quad (3.99)$$

Nun sind wir in der Lage, eine Prüfgröße für die Nullhypothese (3.90) anzugeben. Es läßt sich nachweisen [1], daß sich bei zutreffender Nullhypothese H_0 MAQ_Z und MAQ_I nur zufällig unterscheiden können und daß bei nichtzutreffender Nullhypothese H_0 MAQ_Z im allgemeinen einen größeren Wert als MAQ_I annimmt.

Es läßt sich weiter begründen [1], daß beide Varianzen die Voraussetzung für die Anwendung der in Abschnitt 3.4.6. angegebenen Prüfgröße (3.81) für $m_1 = k - 1$ und $m_2 = n - k$ Freiheitsgrade erfüllen. Wir bilden mit (3.95) und (3.96) den Quotienten

$$f = \frac{\text{MAQ}_Z}{\text{MAQ}_I}. \quad (3.100)$$

(3.100) ist dann eine Realisierung der Prüfgröße (3.81). Da (3.100) im allgemeinen größer als eins ist, wird in dem Fall, daß der Quotient f sehr stark von eins abweicht, die Nullhypothese abgelehnt. Für Werte von (3.100) nahe eins gibt es keine Veranlassung, die Nullhypothese abzulehnen. f ist demzufolge mit dem kritischen Wert $f_{\alpha; m_1, m_2}$ für die Irrtumswahrscheinlichkeit α zu vergleichen und über die Nullhypothese nach der in Abschnitt 3.4.6. angegebenen Vorschrift zu entscheiden.

Wird die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt, so beeinflußt der betrachtete Faktor das untersuchte Merkmal nur zufällig, d.h., die Menge der Meßwerte kann als homogen angesehen werden. Wird im Gegensatz dazu die Nullhypothese H_0 abgelehnt, so übt der betrachtete Faktor einen Einfluß auf das untersuchte Merkmal aus. Es erhebt sich dann die Frage, welche der Erwartungswerte $E(X_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, nicht gleich sind. Zur Untersuchung dieses Problems stehen mehrere Prüfverfahren zur Verfügung, auf die wir jedoch in diesem Rahmen nicht eingehen können. Wir verweisen auf [1].

Beispiel 3.31: Es soll untersucht werden, ob sich vier verschiedene Stahlsorten bezüglich des Merkmals Zugfestigkeit [10 MPa] wesentlich unterscheiden; d.h., welchen Einfluß hat der Faktor „Stahlsorte“ auf das betrachtete Merkmal „Zugfestigkeit“. Der Versuchsplan mit $k = 4$ und $l = 10$ ist in der Tabelle 3.21 angegeben.

Tabelle 3.21. Balancierter Versuchsplan bei einfacher Klassifikation für das Beispiel 3.31

Stufen des Fak- tors	Realisierungen je Stufe Merkmal: Zugfestigkeit										s_i	\bar{x}_i
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	61,9	60,2	63,3	55,3	59,3	64,2	61,9	68,1	59,3	67,7	621,2	62,12
2	68,6	72,5	71,7	73,4	68,6	75,2	79,6	62,9	67,2	72,5	712,2	71,22
3	67,2	82,3	75,2	79,6	80,5	74,8	90,2	73,4	84,1	79,6	786,9	78,69
4	58,4	58,9	63,7	59,3	60,2	62,9	64,2	62,4	65,5	57,5	613,0	61,30
											2733,3	68,33

Wir können annehmen, daß die Zugfestigkeiten X_i ($i = 1, 2, 3, 4$) der vier Stahlsorten normalverteilte Zufallsgrößen mit gleicher Varianz σ^2 sind. Die Prüfung der Hypothese $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ erfolgt mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$. Wir berechnen zuerst die einzelnen Größen der Varianztabelle. Nach Formel (3.97) erhalten wir für

$$\text{SAQ}_T = 189\,578 - 186\,773 = 2\,805,$$

nach Formel (3.98) für

$$\text{SAQ}_Z = \frac{1}{10}(621,2^2 + \dots) - 186\,773 = 2\,037$$

und schließlich nach Formel (3.99) für

$$\text{SAQ}_I = 2\,805 - 2\,037 = 768.$$

Die Varianztabelle für dieses Beispiel lautet somit:

Variabilität	SAQ	Freiheitsgrade	MAQ
Total	$\text{SAQ}_T = 2\,805$	$n - 1 = 39$	$\text{MAQ}_T = 71,9$
Zwischen den Stufen	$\text{SAQ}_Z = 2\,037$	$k - 1 = 3$	$\text{MAQ}_Z = 679$
Innerhalb der Stufen	$\text{SAQ}_I = 768$	$n - k = 36$	$\text{MAQ}_I = 21,3$

Die Prüfgröße (3.81) hat $m_1 = k - 1 = 3$ und $m_2 = n - k = 36$ Freiheitsgrade. Der kritische Wert für $\alpha = 0,01$ ist nach Tafel 5 $f_{0,01; 3, 36} = 4,39$, und damit ist das Intervall $(4,39; \infty)$ der kritische Bereich. Die Realisierung der Prüfgröße ist nach (3.100)

$$f = \frac{\text{MAQ}_Z}{\text{MAQ}_I} = \frac{679}{21,3} = 31,9.$$

Da der Wert 31,9 im kritischen Bereich liegt, wird die Hypothese H_0 abgelehnt. Der Faktor „Stahlsorte“ hat Einfluß auf das Merkmal „Zugfestigkeit“.

3.5.3. Modell II bei einfacher Klassifikation

Wie wir in Abschnitt 3.5.1. andeuteten, kommt es bei der Anwendung der Varianzanalyse bei Modell II darauf an, die Anteile zu ermitteln, die in mehreren Stufen wirkende Faktoren an der Gesamtvariabilität der Grundgesamtheit eines meßbaren Merkmals haben, d.h., die Variabilität des betrachteten Merkmals in der Grundgesamtheit zu untersuchen. Wir wollen die Betrachtungen wieder für den Fall des Wirkens eines Faktors, also bei einfacher Klassifikation, bei balanciertem Versuchsplan durchführen. Die einzelnen Stufen des Faktors werden als Zufallsstichproben aus der Grundgesamtheit des meßbaren Merkmals X aufgefaßt, wobei die Realisierungen pro Stufe die Elemente der jeweiligen Stichprobe sind. Wir wollen dies wieder an einigen Beispielen veranschaulichen:

Merkmal	Faktor	Stufen
Durchmesser von Wellen	Einstellung der Maschine	k Stichproben von je l Wellen, die dem Produktionsprozeß entnommen werden
Laufzeit von PKW-Reifen eines Typs	Straßenzustand	k Stichproben von je l PKW-Reifen eines Typs
Zuckergehalt von Zuckerrüben	Bodenart	k Stichproben von je l Zuckerrüben an verschiedenen Stellen des Anbaugebietes entnommen

Bei jedem dieser Beispiele können die Realisierungen $x_{ij}, j = 1, 2, \dots, l$, der i -ten Stufe, $i = 1, 2, \dots, k$, in folgender Art dargestellt werden:

$$x_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}. \quad (3.101)$$

Dabei kennzeichnet μ eine Konstante, a_i den Einfluß des Faktors in der i -ten Stufe und e_{ij} den Versuchsfehler, mit dem die j -te Realisierung der i -ten Stufe behaftet ist, wobei vorausgesetzt wird, daß

- die Größen a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) Realisierungen der untereinander unabhängigen und $N(0; \sigma_A)$ -verteilten Zufallsgrößen A_i sind,
- die Größen e_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$, Realisierungen der untereinander unabhängigen und $N(0; \sigma_E)$ -verteilten Zufallsgrößen E_{ij} sind,
- die Zufallsgrößen A_i , $i = 1, 2, \dots, k$, und E_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$, untereinander unabhängig sind.

Da die Größen A_i ($i = 1, \dots, k$) das zufällige Wirken eines Faktors (Effekts) kennzeichnen, wird das Modell II auch *Modell mit zufälligen Effekten* genannt.

Mit X_{ij} bezeichnen wir die Zufallsgrößen mit den obengenannten Realisierungen x_{ij} ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, l$).

Wegen (3.101) gilt dann

$$X_{ij} = \mu + A_i + E_{ij}. \quad (3.102)$$

Nach den Ergebnissen der Beispiele 2.57 und 2.60 aus Abschnitt 2.3.9. ist X_{ij} normalverteilt. Aus (2.129) bzw. (2.130) erhalten wir die Kennwerte

$$E(X_{ij}) = \mu + E(A_i) + E(E_{ij}) = \mu \quad (3.103)$$

und

$$\sigma^2 = D^2(X_{ij}) = D^2(A_i) + D^2(E_{ij}) = \sigma_A^2 + \sigma_E^2. \quad (3.104)$$

Es ist möglich, für die beiden Komponenten σ_A^2 und σ_E^2 als Schätzwerte s_A^2 und s_E^2 die Größen

$$s_E^2 = \text{MAQ}_I \quad \text{und} \quad s_A^2 = \frac{\text{MAQ}_Z - \text{MAQ}_I}{l} \quad (3.105)$$

zu wählen. Damit können wir unter Berücksichtigung der Fragestellung des Modells II den Versuchsplan (Tabelle 3.19) und die Varianztabelle 3.20 in Abschnitt 3.5.2. zur Berechnung dieser Schätzwerte heranziehen. Eine Begründung für dieses Vorgehen finden Sie in [1].

Um nun zu prüfen, ob die durch den Faktor bewirkte Variabilität einen signifikanten Beitrag zur Gesamtvariabilität liefert, wird von der Nullhypothese

$$H_0: \sigma_A^2 = 0 \quad (3.106)$$

ausgegangen und die in Abschnitt 3.4.6. angegebene Prüfgröße (3.81) mit $m_1 = k - 1$ und $m_2 = n - k$ Freiheitsgraden gewählt. Die Realisierung dieser Prüfgröße

$$f = \frac{\text{MAQ}_Z}{\text{MAQ}_I} \quad (3.107)$$

wird mit dem aus Tafel 5 entnommenen kritischen Wert $f_{\alpha; m_1, m_2}$ für die Irrtumswahrscheinlichkeit α verglichen und über die Nullhypothese nach der in Abschnitt 3.4.6. angegebenen Vorschrift entschieden.

Die Möglichkeit der Anwendung dieses Prüfverfahrens zur Prüfung der Nullhypothese (3.106) wird in [1] begründet.

Anmerkung: Wenn auch bei Modell I und bei Modell II dasselbe Prüfverfahren angewandt wird, so ist doch die Fragestellung und die Interpretation der Ergebnisse unterschiedlich.

Beispiel 3.32: Dem Produktionsprozeß eines gewissen Erzeugnisses sind in größeren Zeitabständen 3 Stichproben von je 8 Einheiten entnommen worden. An jeder Einheit wurde ein bestimmtes Abmaß [mm] gemessen. Es ist mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ zu prüfen, ob die im Laufe der Zeit eintretende Veränderung der Einstellung der Maschinen einen wesentlichen Anteil an der Gesamtvariabilität der Fertigung hinsichtlich dieses Abmaßes ausmacht.

Wir haben hier eine dem oben beschriebenen Modell II entsprechende Fragestellung vorliegen, wobei das untersuchte Abmaß das Merkmal, die im Laufe der Zeit eintretende Veränderung der Maschineneinstellung den Faktor, die Stichproben die Stufen und die Elemente der Stichproben die Realisierungen darstellen.

In Tabelle 3.22 ist der Versuchsplan und in Tabelle 3.23 die entsprechende Varianztabelle festgehalten.

Tabelle 3.22. Versuchsplan zum Beispiel 3.32

Nummer der Stichprobe	Realisierungen je Stufe								s_i	\bar{x}_i
	1	2	3	4	5	6	7	8		
1	1	8	6	7	6	5	5	4	42	5,25
2	3	2	2	1	2	3	4	3	20	2,5
3	5	6	7	5	4	5	6	6	44	5,5
									106	4,4

Tabelle 3.23. Varianztabelle zum Beispiel 3.32

Variabilität	SAQ	Freiheitsgrade	MAQ
Total	$SAQ_T = 88$	23	$MAQ_T = 3,8$
Innerhalb	$SAQ_I = 44$	21	$MAQ_I = 2,1$
Zwischen	$SAQ_Z = 44$	2	$MAQ_Z = 22,2$

Zur Beantwortung der Fragestellung des Beispiels ist die Nullhypothese

$$H_0: \sigma_A^2 = 0$$

mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ zu prüfen, wobei σ_A^2 die durch den Faktor in der Grundgesamtheit bewirkte Variabilität angibt.

Wir haben dazu die nach (3.107) berechnete Realisierung der Prüfgröße (3.81) für $m_1 = 2$ und $m_2 = 21$ Freiheitsgrade

$$f = \frac{22,2}{2,1} = 10,6$$

mit dem aus der Tafel 5 für eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ entnommenen Wert

$$f_{0,05; 2, 21} = 3,47$$

zu vergleichen. Da $10,6 > 3,47$, wird die Nullhypothese abgelehnt.

3.5.4. Das allgemeine lineare Modell

Die beiden in den Abschnitten 3.5.2. und 3.5.3. betrachteten Modelle sind Spezialfälle des allgemeinen linearen Modells. Wir wollen die Grundgedanken dieses Modells kurz charakterisieren. Dazu fassen wir die bei der Untersuchung eines meßbaren Merkmals X gewonnenen Meßwerte als Realisierungen von n Zufallsgrößen X_j , $j = 1, 2, \dots, n$, auf. Läßt sich jede dieser Zufallsgrößen X_j als linearer Ausdruck von k Größen β_i , $i = 1, 2, \dots, k$, darstellen, so erhalten wir das allgemeine lineare Modell:

$$X_j = \sum_{i=1}^k y_{ij} \beta_i + E_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.108)$$

wobei die Größen y_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$, noch näher zu charakterisierende reelle Zahlen und die Zufallsgröße E_j den Meßfehler des j -ten Meßwerts kennzeichnen.

Durch (3.108) werden im wesentlichen alle bekannten Modelle der Varianzanalyse erfaßt, wenn die Größen y_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$, lediglich die Werte 1 – der Effekt i ist vorhanden – und 0 – der Effekt i ist nicht vorhanden – annehmen können.

Die Unterscheidung zwischen Modell I und Modell II wird mit Hilfe der Parameter β_i , $i = 1, 2, \dots, k$, vorgenommen. Sind diese feste Größen, so sprechen wir von einem Modell mit festen Effekten (Modell I). Sind demgegenüber die β_i , $i = 1, 2, \dots, k$, Zufallsgrößen, so sprechen wir von einem Modell mit zufälligen Effekten (Modell II).

Können die Größen y_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$, nicht nur die Werte 0 und 1, sondern alle reellen Werte eines Intervalls annehmen – sie kennzeichnen dann z. B. Temperatur, Druck, Zugfestigkeit –, führt dies zu den Modellen der Regressions- und Korrelationsanalyse, deren Grundzüge wir im Abschnitt 3.6. kennenlernen werden.

3.6. Einführung in die Regressions- und Korrelationsanalyse

3.6.1. Problemstellung

Im Abschnitt 3.1.2. betrachteten wir in den Beispielen 3.3 und 3.4 bei den jeweiligen Untersuchungsobjekten gleichzeitig zwei meßbare Merkmale X und Y und lernten Möglichkeiten kennen, wie die bei einer Untersuchung als Meßwertpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, gewonnenen Meßergebnisse geordnet, verdichtet und dargestellt werden können. Wir legten dabei besonderes Gewicht auf die Beschreibung der zwischen diesen beiden Merkmalen bestehenden Abhängigkeit. Die Betrachtungen führten uns zur empirischen Kovarianz s_{XY} (3.14) und zum empirischen Korrelationskoeffizienten r_{XY} (3.18). Der Aufgabenstellung des Abschnittes 3.1. entsprechend kam es uns dabei darauf an, die in der Menge der Meßwertpaare über die Merkmale X und Y enthaltenen Informationen zu erfassen. Auf Grund unserer in Abschnitt 3.1. erworbenen Kenntnisse stellen wir unter anderem die Frage nach der Schätzung und Prüfung der entsprechenden Kennwerte der zugehörigen Grundgesamtheit (X, Y). Mit solchen Fragestellungen beschäftigt sich die Regressions- und Korrelationsanalyse, wobei die in den Abschnitten 3.3. und 3.4. angegebenen Methoden eingesetzt werden.

Während die Regressionsanalyse die Art des Zusammenhangs der betrachteten Merkmale untersucht, ist es demgegenüber Aufgabe der Korrelationsanalyse, Aussagen über die Stärke der Abhängigkeit zwischen den betrachteten Merkmalen zu machen. Im folgenden werden wir einige wichtige Methoden der Regressions- und Korrelationsanalyse kennenlernen. Dabei wollen wir uns auf den Fall zweier meßbarer Merkmale und linearen Zusammenhangs beschränken. Für weitergehende Betrachtungen verweisen wir u. a. auf [18; 14].

3.6.2. Regressionsanalyse

Im Abschnitt 3.2.1. trugen wir die bei den Beispielen 3.3 und 3.4 für die meßbaren Merkmale X und Y in der Urliste enthaltenen Meßwertpaare (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Bei beiden Beispielen stellten wir fest, daß zwischen den jeweiligen Merkmalen zwar kein Zusammenhang in Form einer Funktionsgleichung besteht, aber aus der Form der Punktwolke doch die Tendenz einer gewissen Abhängigkeit zu erkennen ist. Wir konnten auch feststellen, daß für einen bestimmten festen Wert des Merkmals X das Merkmal Y verschiedene Werte annehmen kann. Wir bezeichnen eine solche *Abhängigkeit* als *stochastisch* und das eine Merkmal als *Einflußgröße* und das andere als *Zielgröße*.

In der Regressionsanalyse ist die Zielgröße in jedem Fall eine Zufallsgröße, während die Einflußgröße eine Zufallsgröße sein kann, aber nicht sein muß.

Wie schon erwähnt, ist es die Aufgabe der Regressionsanalyse, die Art des Zusammenhangs zwischen beiden Merkmalen zu untersuchen und entsprechende Prüf- und Schätzverfahren anzugeben.

Dazu wird von einer zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) ausgegangen. Weiterhin sollen folgende Voraussetzungen erfüllt sein, wobei o. B. d. A. das Merkmal X als Einfluß- und das Merkmal Y als Zielgröße gewählt ist.

Unter der Bedingung, daß die Einflußgröße X eine beliebige, aber feste Realisierung x angenommen hat, unterliegt die Zielgröße Y einer Normalverteilung mit dem bedingten Erwartungswert

$$E(Y/X=x) = \eta(x) = \beta_1 + \beta_2 x \quad (3.109)$$

und der bedingten Varianz

$$D^2(Y/X=x) = \sigma^2 = \text{const.} \quad (3.110)$$

Anmerkung: (3.109) bedeutet, daß zwischen der Einflußgröße X und der Zielgröße Y im Mittel eine lineare Abhängigkeit besteht.

Die Gerade (3.109) bezeichnen wir als (*theoretische*) *Regressionsgerade* und ihren Anstieg β_2 als (*theoretischen*) *Regressionskoeffizienten*. Er gibt an, um wieviel die Zielgröße Y im Mittel zunimmt, wenn die Einflußgröße X um eine Einheit wächst.

(3.110) nennen wir *Varianz um die Regressionsgerade* oder auch *Restvarianz*. Dieser Kennwert gibt den Anteil der Gesamtvarianz der Zielgröße an, der nicht auf die Abhängigkeit der beiden Merkmale zurückzuführen ist. In Bild 3.25 sind die Voraussetzungen der Regressionsanalyse veranschaulicht.

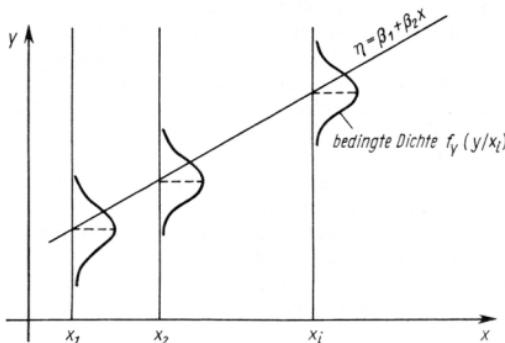


Bild 3.25. Veranschaulichung der Voraussetzungen der Regressionsanalyse bei zwei meßbaren Merkmalen

3.6.2.1. Schätzung der Parameter β_1 , β_2 und σ^2

Die Schätzung der Parameter β_1 , β_2 und σ^2 erfolgt auf der Basis einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der Grundgesamtheit (X, Y) .

Schätzung der Parameter β_1 und β_2 : Mit einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir Realisierungen b_1 und b_2 der aus einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, gewonnenen entsprechenden Punktschätzfunktionen $\hat{\beta}_1$ und $\hat{\beta}_2$ der Parameter β_1 und β_2 . Wir bezeichnen $\hat{\beta}_2$ als *empirischen* und b_2 als *konkreten empirischen Regressionskoeffizienten*. Gleichzeitig damit ergibt sich eine Realisierung

$$y(x) = b_1 + b_2 x \quad (3.111)$$

der Punktschätzung $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ von (3.109). $\hat{y}(x)$ nennen wir *empirische* und $y(x)$ *konkrete empirische Regressionsgerade*.

Die Ermittlung der Realisierungen b_1 und b_2 mit Hilfe der konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, soll nun so vorgenommen werden, daß sich die konkrete empirische Regressionsgerade (3.111) der Punktwolke (vgl. Bild 3.7 und 3.8) möglichst gut anpaßt.

Dazu verwenden wir die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate (s. Band 18 dieser Reihe), bei der diese Schätzwerte b_1 und b_2 aus der Forderung

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 \rightarrow \text{Min} \quad (3.112)$$

ermittelt werden. Die Größen b_1 und b_2 sind also so zu bestimmen, daß die Quadratsumme der Ordinatendifferenzen zwischen den Meßwertpaaren (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, und den entsprechenden Punkten $(x_i, y(x_i))$ der Geraden (3.111) zu einem Minimum gemacht wird.

Veranschaulichen Sie sich diese Forderung an einer Skizze!

Wir haben damit eine Extremwertaufgabe für eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen b_1 und b_2 zu lösen (vgl. Band 4 dieser Reihe). Durch partielle Ableitung von (3.112) nach b_1 und b_2 und Nullsetzen der jeweiligen Ergebnisse erhalten wir folgendes lineare inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 \right]}{\partial b_1} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_1 - b_2 x_i) = 0, \\ \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 \right]}{\partial b_2} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_1 - b_2 x_i) x_i = 0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Durch einfache Umformungen ergeben sich aus (3.113) die Gaußschen Normalgleichungen:

$$b_1 n + b_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \quad b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.114)$$

Mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

erhalten wir für (3.114) die Lösung

$$b_1 = \bar{y} - b_2 \bar{x}, \quad (3.115)$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.116)$$

Mit (3.14) und (3.18) können wir für (3.116) auch schreiben:

$$b_2 = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = r_{XY} \frac{s_Y}{s_X}. \quad (3.117)$$

Setzen wir (3.115) in (3.111) ein, erhalten wir

$$y(x) = (\bar{y} - b_2 \bar{x}) + b_2 x = \bar{y} + b_2(x - \bar{x}). \quad (3.118)$$

Die konkrete empirische Regressionsgerade (3.118) wird häufig durch den Zusatz „von Y in bezug auf X “ genauer erläutert.

Führen wir die obigen Betrachtungen nicht für eine konkrete, sondern für eine mathematische Stichprobe vom Umfang n durch, so erhalten wir an Stelle der Schätzwerte b_1 und b_2 die entsprechenden Punktschätzfunktionen \hat{b}_1 und \hat{b}_2 . Sie besitzen die Eigenschaften von Maximum-Likelihood-Schätzungen, da sich die Methode der kleinsten Quadrate als Sonderfall der Maximum-Likelihood-Methode darstellen lässt. Wir können in diesem Rahmen nicht näher darauf eingehen und verweisen den Leser auf [14; 18].

Anmerkungen: 1. Wenn die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt sind, kann in gleicher Art die Regression von X in bezug auf Y ermittelt werden. In diesem Fall ist das Merkmal X die Zielgröße und das Merkmal Y die Einflußgröße. Bei praktischen Problemen besteht aber meist nur Interesse für eine der beiden möglichen Regressionsgeraden.

2. Wir haben hier zur Schätzung der Regressionsgeraden die Quadratsumme der Ordinatendifferenzen minimiert. Bei der sog. *orthogonalen Regression* wird die Quadratsumme der orthogonalen Abstände der Punkte (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, von der gesuchten Geraden minimiert.

Schätzung des Parameters σ^2 : Aus einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir eine Realisierung s_R^2 der aus einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, gewonnenen entsprechenden Punktschätzfunktion $\hat{\sigma}^2$ der Restvarianz σ^2 . Wir bezeichnen $\hat{\sigma}^2$ als *empirische* und s_R^2 als *konkrete empirische Restvarianz*.

Indem wir von den Differenzen $(y_i - y(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, ausgehen, ist es sinnvoll, die konkrete empirische Restvarianz s_R^2 folgendermaßen zu erklären:

$$s_R^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2. \quad (3.119)$$

Veranschaulichen Sie sich (3.119) mit Hilfe einer Skizze!

Wird die in (3.119) für die konkrete empirische Restvarianz s_R^2 gegebene Erklärung auf die aus einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, zu ermittelnde empirische Restvarianz $\hat{\sigma}^2$ übertragen, so lässt sich zeigen (z. B. [14; 18]), daß diese eine erwartungstreue Schätzung ist.

Da die Formel (3.119) zur Berechnung von s_R^2 aufwendig ist, ist es günstiger, sie in folgender Form anzuwenden:

$$s_R^2 = \frac{1}{n-2} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 - b_2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right) \right]. \quad (3.120)$$

Beispiel 3.33: Im Abschnitt 3.1.2. war im Beispiel 3.4 für eine bestimmte Stahlsorte die Abhängigkeit der Zugfestigkeit [10 MPa] (Zielgröße Y) vom Kohlenstoffgehalt [%] (Einflußgröße X) auf der Grundlage von $n = 86$ Meßwertpaaren zu untersuchen. Unter der Annahme, daß für einen bestimmten Kohlenstoffgehalt die zugeordneten Werte der Zugfestigkeit normalverteilt sind, ist unter Verwendung der Urliste (Tabelle 3.12) und der mit dem Rechenschema (Tabelle 3.16) errechneten Werte der konkrete empirische Regressionskoeffizient b_2 nach (3.117), die konkrete empirische Regressionsgerade $y(x) = b_1 + b_2 x$ nach (3.118) und die konkrete empirische Restvarianz s_R^2 nach (3.120) zu ermitteln. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$b_2 = 0,59 \cdot \frac{4,64}{0,027} = 101,4,$$

$$b_1 = 71,53 - 101,4 \cdot 0,42 = 28,94,$$

$$y(x) = (71,53 - 101,4 \cdot 0,42) + 101,4x = 71,53 + 101,4(x - 0,42),$$

$$y(x) = 28,94 + 101,4x.$$

In Bild 3.8 ist diese Regressionsgerade eingetragen.

$$s_R^2 = 14,56; \quad s_R = 3,82.$$

Durchdenken Sie die Aussage dieser Ergebnisse!

Führen Sie entsprechende Berechnungen für Beispiel 3.3 durch! Die zugehörige Regressionsgerade ist in Bild 3.7 eingetragen.

3.6.2.2. Prüfung der Parameter β_1 und β_2 ; Konfidenzbereich für die Regressionsgerade

Im folgenden werden wir einige in Verbindung mit Regressionsanalysen wichtige statistische Prüfverfahren kennenlernen. Für die Darstellung wird wieder die im Abschnitt 3.4. angewandte Form gewählt.

Prüfung des Regressionskoeffizienten: Häufig tritt bei der Untersuchung der Abhängigkeit von zwei Merkmalen die Frage auf, ob der ermittelte konkrete empirische Regressionskoeffizient b_2 mit einem vorgegebenen Wert β_{20} vereinbar ist. Zur Prüfung dieser Frage wird das folgende Prüfverfahren angewandt:

1. $H_0: \beta_2 = \beta_{20}$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Auf der Grundlage einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus einer zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) und unter den oben angegebenen Voraussetzungen wählen wir die Prüfgröße

$$U = t_m = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_{20}}{S_{\hat{\beta}_2}}, \quad (3.121)$$

die einer Student-Verteilung mit $m = n - 2$ Freiheitsgraden unterliegt, wobei

$$S_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{(n-1) S_X^2}, \quad S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (3.122)$$

und

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

sind.

4. Der kritische Bereich K für zweiseitige Fragestellung wird aus folgender Relation bestimmt:

$$P\left(|U| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m} / H_0\right) = \alpha.$$

Er ergibt sich zu

$$\hat{\beta}_2 \geq \beta_{20} + t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\beta_2}$$

und

$$\hat{\beta}_2 \leq \beta_{20} - t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\beta_2}. \quad (3.123)$$

5. Mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der Grundgesamtheit (X, Y) wird eine Realisierung von (3.121) errechnet:

$$u = \frac{b_2 - \beta_{20}}{S_{\beta_2}} \quad (3.124)$$

mit

$$S_{\beta_2}^2 = \frac{s_R^2}{(n-1)s_X^2}.$$

6. Der Entscheid über die Nullhypothese H_0 erfolgt in folgender Art:

Ist $|u| < t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 nicht abgelehnt;

ist $|u| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 abgelehnt.

Beispiel 3.34: In Fortführung von Beispiel 3.33 ist zu prüfen, ob der errechnete konkrete empirische Regressionskoeffizient $b_2 = 101,4$ mit dem vorgegebenen Wert $\beta_{20} = 0$ vereinbar ist, wobei wieder eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ zugrunde gelegt wird. Von der Nullhypothese $H_0: \beta_2 = 0$ ausgehend, können wir mit den Werten aus Tabelle 3.14 und den Ergebnissen aus Beispiel 3.33 eine Realisierung der Prüfgröße (3.121) berechnen:

$$u = \frac{101,4}{3,82} \sqrt{85 \cdot 0,00073} = 6,6.$$

Dieser Wert wird mit dem in Tafel 4 angegebenen kritischen Wert $t_{0,005; 84} = 2,64$ verglichen.

Da $u = 6,6 > 2,64 = t_{0,005; 84}$ ist, wird H_0 abgelehnt, d. h., zwischen beiden Merkmalen liegt eine Abhängigkeit vor.

Führen Sie für Beispiel 3.3 die entsprechenden Berechnungen durch!

Prüfung der Konstanten der Regressionsgeraden: Zur Prüfung der Frage, ob die bei der Untersuchung der Abhängigkeit von zwei Merkmalen X und Y ermittelte konkrete empirische Konstante b_1 mit einem vorgegebenen Wert vereinbar ist, wird das folgende Prüfverfahren angewandt:

1. $H_0: \beta_1 = \beta_{10}$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Auf der Grundlage einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus einer zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) und unter den oben angegebenen Voraussetzungen, wählen wir die Prüfgröße

$$U = t_m = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{10}}{S_{\beta_1}}, \quad (3.125)$$

die einer Student-Verteilung mit $m = n - 2$ Freiheitsgraden unterliegt, wobei

$$S_{\beta_1}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{(n-1) S_X^2} \right) \quad (3.126)$$

mit

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

und

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ist.

4. Der kritische Bereich K für zweiseitige Fragestellung wird aus folgender Relation bestimmt:

$$P(|U| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m} / H_0) = \alpha.$$

Er ergibt sich zu

$$\hat{\beta}_1 \geq \beta_{10} + t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\beta_1}$$

und

$$\hat{\beta}_1 \leq \beta_{10} - t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\beta_1}. \quad (3.127)$$

5. Mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der Grundgesamtheit (X, Y) wird eine Realisierung von (3.125) errechnet:

$$u = \frac{b_1 - \beta_{10}}{S_{\beta_1}}, \quad (3.128)$$

wobei

$$S_{\beta_1}^2 = s_R^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{(n-1) S_X^2} \right)$$

ist.

6. Der Entscheid über die Nullhypothese H_0 erfolgt in folgender Art:

Ist $|u| < t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 nicht abgelehnt;

ist $|u| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 abgelehnt.

Beispiel 3.35: In Weiterführung von Beispiel 3.33 ist zu prüfen, ob die errechnete empirische Konstante $b_1 = 28,94$ mit dem vorgegebenen Wert $\beta_{10} = 30$ vertretbar ist, wobei wieder eine Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ zugrundegelegt wird. Wir gehen dazu von der Nullhypothese $H_0: \beta_1 = 30$ aus und errechnen mit den Werten aus Tabelle 3.16 und den Ergebnissen aus Beispiel 3.33 eine Realisierung (3.128) der Prüfgröße (3.125):

$$s_{\beta_1}^2 = 14,56 \left(\frac{1}{86} + \frac{0,42^2}{85 \cdot 0,00073} \right) = 41,56,$$

$$S_{\beta_1} = 6,45,$$

$$u = \frac{28,94 - 30}{6,45},$$

$$u = -0,16.$$

Dieser Wert wird mit dem in Tafel 4 abgelesenen kritischen Wert $t_{0,005; 84} = 2,64$ verglichen.

Da $|u| = 0,16 < 2,64 = t_{0,005; 84}$ ist, wird H_0 nicht abgelehnt.

Konfidenzbereich für die Regressionsgerade: Die Betrachtungen des Abschnittes 3.6.2.1 ermöglichen es uns, aus einer konkreten Stichprobe eine Realisierung $y(x) = b_1 + b_2 x$ der Punktschätzung $\hat{y}(x) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$ der Regressionsgeraden $\eta(x) = \beta_1 + \beta_2 x$ anzugeben. Nicht zuletzt für Untersuchungen der Praxis ist es günstig, für diese Gerade einen Konfidenzbereich anzugeben. Dies geschieht mit Hilfe der Konfidenzintervalle für die Parameter β_1 und β_2 , die auf der Grundlage einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus einer zweidimensionalen Grundgesamtheit und unter den oben angegebenen Voraussetzungen ermittelt werden.

Das Konfidenzintervall für den Parameter β_2 zum Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ wird bestimmt, indem wir in (3.121) β_{20} durch β_2 ersetzen:

$$P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{S_{\beta_2}}\right| < \frac{t_{\alpha/2; m}}{2}\right) = 1 - \alpha \quad (3.129)$$

und den in der Klammer stehenden Ausdruck nach β_2 auflösen. Wir erhalten:

$$\hat{\beta}_2 - \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_2} < \beta_2 < \hat{\beta}_2 + \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_2}. \quad (3.130)$$

Für eine entsprechend konkrete Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir dann eine Realisierung von (3.130), ein konkretes Konfidenzintervall für β_2 :

$$b_2 - \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_2} < \beta_2 < b_2 + \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_2}. \quad (3.131)$$

So errechnen wir von den Werten des Beispiels 3.4 ausgehend folgendes konkrete Konfidenzintervall für β_2 :

$$101,4 - 2,64 \frac{3,82}{\sqrt{85 \cdot 0,00073}} < \beta_2 < 101,4 + 2,64 \frac{3,82}{\sqrt{85 \cdot 0,00073}},$$

$$60,9 < \beta_2 < 141,9.$$

Ermitteln Sie in gleicher Weise aus den Werten des Beispiels 3.3 eine Realisierung des Konfidenzintervalls für β_2 !

Das Konfidenzintervall für den Parameter β_1 zum Konfidenzniveau $(1 - \alpha)$ wird in gleicher Art bestimmt. Wir ersetzen in (3.125) β_{10} durch β_1 :

$$P\left(\left|\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S_{\beta_1}}\right| < \frac{t_{\alpha/2; m}}{2}\right) = 1 - \alpha \quad (3.132)$$

und lösen den in der Klammer stehenden Ausdruck nach β_1 auf. Wir erhalten:

$$\hat{\beta}_1 - \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_1} < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_1}. \quad (3.133)$$

Für eine entsprechende konkrete Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir dann eine Realisierung von (3.133), ein konkretes Konfidenzintervall für β_1 :

$$b_1 - \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_1} < \beta_1 < b_1 + \frac{t_{\alpha/2; m}}{2} S_{\beta_1}. \quad (3.134)$$

So errechnen wir von den Werten des Beispiels 3.4 ausgehend folgendes konkrete Konfidenzintervall für β_1 :

$$28,94 - 2,64 \cdot 6,45 < \beta_1 < 28,94 + 2,64 \cdot 6,45,$$

$$11,91 < \beta_1 < 45,97.$$

Ermitteln Sie wieder in gleicher Weise aus den Werten des Beispiels 3.3 eine Realisierung des Konfidenzintervalls für β_1 !

Für die Regressionsgerade (3.109) kann nun unter Verwendung von (3.130) und (3.133) ein Konfidenzbereich angegeben werden. Wir wollen nicht auf diese Herleitung eingehen (siehe [18]), sondern lediglich das Ergebnis angeben:

$$\hat{\eta}(x) - t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\hat{\eta}} < \eta(x) < \hat{\eta}(x) + t_{\frac{\alpha}{2}; m} S_{\hat{\eta}}, \quad (3.135)$$

wobei

$$S_{\hat{\eta}}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{X})^2}{(n-1) S_X^2} \right)$$

mit

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{und} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ist und $t_{\frac{\alpha}{2}; m}$ wieder aus Tafel 4 abzulesen ist.

Der Ausdruck (3.135) ist außer von α , n , S_X , \bar{X} und $\hat{\sigma}$ auch von x abhängig. Für jedes feste x erhalten wir ein Konfidenzintervall für $\eta(x)$. Während für $x = \bar{X}$ das Konfidenzintervall mit den engsten Grenzen vorliegt, wird dieses mit wachsenden $|x - \bar{X}|$ breiter. Es läßt sich zeigen, daß die Grenzen des Konfidenzbereiches Hyperbeln sind. Überlegen Sie, welche Folgerungen sich daraus über die Genauigkeit der Aussage ergeben.

Für eine entsprechend konkrete Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir dann eine Realisierung von (3.135), einen konkreten Konfidenzbereich für $\eta(x)$:

$$y(x) - t_{\frac{\alpha}{2}; m} s_{\hat{\eta}} < \eta(x) < y(x) + t_{\frac{\alpha}{2}; m} s_{\hat{\eta}}. \quad (3.136)$$

Aus den Werten des Beispiels 3.4 errechnen wir folgenden konkreten Konfidenzbereich für $\eta(x)$:

$$28,94 - 101,4x - 3,82 \sqrt{\frac{1}{86} + \frac{(x - 0,42)^2}{85 \cdot 0,00073}} \cdot 2,64 < \eta(x)$$

$$< 28,94 + 101,4x + 3,82 \sqrt{\frac{1}{86} + \frac{(x - 0,42)^2}{85 \cdot 0,00073}} \cdot 2,64.$$

Setzen Sie in diesen Ausdruck für x jeweils 0,42; 0,52 und 0,62 ein und errechnen Sie für diese die entsprechenden Werte der Grenzen des Konfidenzbereiches für $\eta(x)$!

3.6.3. Korrelationsanalyse

Die Korrelationsanalyse, die sich mit der Stärke des Zusammenhangs von zwei meßbaren Merkmalen X und Y , speziell mit entsprechenden statistischen Prüfverfahren beschäftigt, geht von der Voraussetzung aus, daß beide Merkmale Zufallsgrößen sind und die Grundgesamtheit (X, Y) durch eine zweidimensionale Normalverteilung beschrieben wird. Aus Abschnitt 2.3.7. ist uns bekannt, daß diese durch die Erwartungswerte $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, die Varianzen $D^2(X) = \sigma_X^2$, $D^2(Y) = \sigma_Y^2$ und den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} völlig bestimmt ist. Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} liefert eine Aussage über den linearen Zusammenhang zwischen X und Y . Da wir uns auf eine normalverteilte

Grundgesamtheit (X, Y) beschränken, ist $\rho_{XY} = 0$ genau dann, wenn die Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind. Aus einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, erhalten wir für ρ_{XY} eine Realisierung r_{XY} (3.18), den konkreten empirischen Korrelationskoeffizienten, seiner aus einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, gewonnenen Punktschätzfunktion $\hat{\rho}_{XY}$, des empirischen Korrelationskoeffizienten.

Im folgenden werden wir ein Verfahren zur Prüfung der Unabhängigkeit der beiden Merkmale und ein Verfahren zur Prüfung des linearen Zusammenhangs der beiden Merkmale kennenlernen.

Prüfung der Unabhängigkeit von zwei Merkmalen. Bei vielen Untersuchungen der Praxis wird die Frage gestellt, ob zwei Merkmale X und Y , die durch Zufallsgrößen charakterisiert sind, als unabhängig angesehen werden können. Zur Prüfung dieser Frage wird das folgende Prüfverfahren angewandt:

1. $H_0: \rho_{XY} = 0$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der zweidimensionalen normalverteilten Grundgesamtheit (X, Y) wählen wir die Prüfgröße

$$U = t_m = \frac{\hat{\rho}_{XY} \sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_{XY}^2}}, \quad (3.137)$$

die einer Student-Verteilung mit $m = n - 2$ Freiheitsgraden unterliegt.

4. Von zweiseitiger Fragestellung ausgehend wird der kritische Bereich K aus folgender Relation bestimmt:

$$P\left(|U| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m}/H_0\right) = \alpha. \quad (3.138)$$

Wir erhalten:

$$\hat{\rho}_{XY} \leq -t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{1}{\sqrt{n - 2 + t_{\frac{\alpha}{2}; m}^2}}, \quad \hat{\rho}_{XY} \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m} \frac{1}{\sqrt{n - 2 + t_{\frac{\alpha}{2}; m}^2}}. \quad (3.139)$$

5. Mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der Grundgesamtheit (X, Y) wird eine Realisierung von (3.137) errechnet:

$$u = \frac{r_{XY} \sqrt{n - 2}}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}}. \quad (3.140)$$

6. Die Entscheidung über die Nullhypothese H_0 geschieht folgendermaßen:

Ist $|u| < t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 nicht abgelehnt;

ist $|u| \geq t_{\frac{\alpha}{2}; m}$, so wird H_0 abgelehnt.

Beispiel 3.36: Für eine bestimmte Stahlsorte war im Beispiel 3.4 des Abschnittes 3.1.2. die Abhängigkeit der Zugfestigkeit (Zielgröße Y) vom Kohlenstoffgehalt (Einflußgröße X) auf der Grundlage von $n = 86$ Meßwertpaaren zu untersuchen. Unter der Annahme, daß die zweidimensionale Zufallsgröße (X, Y) normalverteilt ist, soll unter Verwendung des mit dem Rechenschema (Tabelle 3.14) errechneten konkreten empirischen Korrelationskoeffizienten r_{XY} geprüft werden, ob die beiden Merkmale mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ als unabhängig angesehen werden können. Dazu stellen wir wiederum die Nullhypothese $H_0: \rho_{XY} = 0$ auf und errechnen mit (3.140) eine Realisierung von (3.137):

$$u = \frac{0,59 \sqrt{84}}{\sqrt{1 - 0,59^2}} = 6,70.$$

Dieser Wert wird mit dem aus Tafel 4 entnommenen kritischen Wert $t_{0,005; 84} = 2,64$ verglichen. Da

$$u = 6,70 > 2,64 = t_{0,005; 84}$$

ist, wird die Nullhypothese abgelehnt, d. h., die Abweichung des konkreten empirischen Korrelationskoeffizienten $r_{XY} = 0,59$ vom hypothetischen Wert $\rho_{XY} = 0$ ist signifikant.

Führen Sie die entsprechende Prüfung der Unabhängigkeit der beiden Merkmale des Beispiels 3.3 im Abschnitt 3.1.2. durch!

Prüfung der Stärke des linearen Zusammenhangs von zwei Merkmalen. Neben der oben behandelten Fragestellung, ob überhaupt ein linearer Zusammenhang zwischen den Merkmalen X und Y vorliegt, kommt es im Falle der Ablehnung der Nullhypothese häufig darauf an, die Stärke des linearen Zusammenhangs zu untersuchen. Es ist also zu prüfen, ob der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} einer normalverteilten zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) den Wert $\rho \neq 0$ besitzt.

Das entsprechende Prüfverfahren lautet folgendermaßen:

1. $H_0: \rho_{XY} = \rho$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der zweidimensionalen normalverteilten Grundgesamtheit (X, Y) wählen wir unter Verwendung der Transformation

$$W = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \hat{\rho}_{XY}}{1 - \hat{\rho}_{XY}}, \quad (3.141)$$

die asymptotisch normalverteilt ist mit

$$E(W) = \mu_W = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho} + \frac{\rho}{2(n-1)} \quad \text{und} \quad D^2(W) = \sigma_W^2 = \frac{1}{n-3}, \quad (3.142)$$

die asymptotisch $N(0; 1)$ -verteilte Prüfgröße:

$$U = Z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W}. \quad (3.143)$$

4. Von zweiseitiger Fragestellung ausgehend wird der kritische Bereich K aus folgender Relation bestimmt:

$$P\left(|U| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}/H_0\right) = \alpha. \quad (3.144)$$

Er lautet:

$$W \geq \mu_W + \sigma_W z_{\frac{\alpha}{2}}$$

und

$$W \leq \mu_W - \sigma_W z_{\frac{\alpha}{2}}. \quad (3.145)$$

5. Mit Hilfe einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der Grundgesamtheit (X, Y) wird eine Realisierung von (3.143) errechnet:

$$u = \frac{w - \mu_w}{\sigma_w}. \quad (3.146)$$

6. Die Entscheidung über die Nullhypothese H_0 geschieht folgendermaßen:

Ist $|u| < z_{\frac{\alpha}{2}}$, so wird H_0 nicht abgelehnt,

ist $|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, so wird H_0 abgelehnt.

Beispiel 3.37: In Fortsetzung von Beispiel 3.36 ist mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,01$ zu prüfen, ob der Korrelationskoeffizient der Grundgesamtheit den Wert $\varrho = 0,6$ hat. Wir stellen dazu die Nullhypothese $H_0: \varrho_{XY} = 0,6$ auf und errechnen mit Hilfe von (3.141) und (3.142) eine Realisierung der Prüfgröße (3.143):

$$w = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,59}{1 - 0,59} = 0,6777,$$

$$\mu_w = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,6}{1 - 0,6} + \frac{0,6}{2 \cdot 85} = 0,6967,$$

$$\sigma_w = \frac{1}{\sqrt{83}} = 0,11,$$

$$u = \frac{0,6777 - 0,6967}{0,11} = -0,1727.$$

Dieser Wert wird mit dem aus Tafel 4 entnommenen kritischen Wert $z_{0,025} = 1,96$ verglichen. Da $|u| = 0,1727 < 1,96 = z_{0,025}$ ist, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Führen Sie die entsprechende Prüfung über die Stärke des linearen Zusammenhangs für das Beispiel 3.3 durch!

3.7. Einführung in verteilungsunabhängige Prüfverfahren

Im Abschnitt 3.4. lernten wir einige statistische Prüfverfahren kennen. Bis auf eine Ausnahme (Abschnitt 3.4.9.) wurde bei ihnen von der Voraussetzung ausgegangen, daß die erforderlichen Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten gezogen wurden. Die Nullhypothese, die bei dem jeweiligen Prüfverfahren zu testen war, bezog sich auf unbekannte Kennwerte dieser normalverteilten Grundgesamtheit. Mit anderen Worten: Der Typ der Verteilung der Grundgesamtheit wurde als bekannt angenommen, während dies für alle oder auch gewisse Kennwerte dieser Grundgesamtheit nicht der Fall war.

Mit der verstärkten Anwendung mathematisch-statistischer Methoden in Naturwissenschaft und Technik zeigte sich aber immer mehr, daß viele auftretende Zufallsgrößen keiner Normalverteilung unterliegen. In solchen Fällen war dann auch eine Anwendung der bekannten Prüfverfahren nicht möglich. Deshalb machte es sich erforderlich, mathematisch-statistische Prüfverfahren zu entwickeln, die nicht auf der Voraussetzung einer normalverteilten Grundgesamtheit aufbauen. Es entstanden die sogenannten *verteilungsunabhängigen Prüfverfahren*, die in der Literatur auch als *verteilungsfrei* oder *parametriefrei* bezeichnet werden. Sie sind anwendbar zur Prüfung von Häufigkeiten, von Rangdaten, d. h. von Daten, für die lediglich eine Rangordnung gegeben ist, und von Meßdaten. Als Beispiel eines solchen Prüfverfahrens lernten wir in Abschnitt 3.4.9. schon den χ^2 -Anpassungstest kennen, mit dem der Vergleich einer aus einer konkreten Stichprobe gewonnenen konkreten empirischen Verteilungsfunktion mit der angenommenen Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit möglich war.

Gegenüber den „klassischen“ haben verteilungsunabhängige Prüfverfahren folgende

- Vorteile:

1. Sie sind unabhängig von der Voraussetzung einer normalverteilten Grundgesamtheit.
2. Sie sind bei kleinem Stichprobenumfang einfach in der Handhabung.

- Nachteile:

1. Ihre Güte (vgl. Abschnitt 3.4.1.) ist bei gleichem Signifikanzniveau kleiner als bei einem entsprechenden „klassischen Prüfverfahren“. Mit anderen Worten: Der Nachweis vorhandener Unterschiede ist mit einem verteilungsunabhängigen Verfahren schwieriger.
2. Bei verteilungsunabhängigen Verfahren erhöht sich i. allg. mit wachsendem Stichprobenumfang der Rechenaufwand erheblich.
3. Im Prinzip erfordert jedes einzelne verteilungsunabhängige Prüfverfahren eine Tabelle der Verteilungsfunktion der entsprechenden Prüfgröße.

Verteilungsunabhängige Prüfverfahren werden wir dann anwenden, wenn die Voraussetzungen der „klassischen Prüfverfahren“ nicht erfüllt sind.

Eine umfassende Darstellung verteilungsunabhängiger Prüfverfahren ist in diesem Rahmen nicht möglich. Wir verweisen auf [18]. Die Arbeitsweise solcher Prüfverfahren wollen wir am Beispiel des

- Vierfelder- χ^2 -Prüfverfahrens,
- U-Prüfverfahrens von Mann-Whitney vermitteln.

Das Vierfelder- χ^2 -Prüfverfahren: Fragestellungen, bei denen die Unabhängigkeit von zwei Versuchen zu prüfen ist, von denen jeder die Alternativausgänge A und \bar{A} bzw. B und \bar{B} hat, werden mit dem Vierfelder- χ^2 -Prüfverfahren untersucht. Beispiele hierfür sind:

Versuch I	Versuch II
Auswahl des Produktionsverfahrens A : Neues Produktionsverfahren \bar{A} : Altes Produktionsverfahren	Qualität des Erzeugnisses B : Erzeugnis ist qualitätsgerecht \bar{B} : Erzeugnis ist nicht qualitätsgerecht
Gewicht A : Gewichtszunahme \bar{A} : keine Gewichtszunahme	Futterart B : Normalfutter \bar{B} : Spezialfutter

Die Versuche beschreiben wir durch zwei Null-Eins-verteilte Zufallsgrößen

$$X = \begin{cases} 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ eintritt,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ eintritt;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{falls } \bar{B} \text{ eintritt,} \\ 1, & \text{falls } B \text{ eintritt.} \end{cases}$$

Es ist dann zu prüfen, ob die Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind. Dazu sind folgende Schritte notwendig:

1. H_0 : Die Zufallsgrößen X und Y sind in der zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) unabhängig.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Es wird eine mathematische Stichprobe (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) betrachtet.

Die absoluten Häufigkeiten H_{kl} ($k, l = 1, 2$) werden in einer Vierfelder- (oder auch 2×2 -)Tafel zusammengefaßt (Tabelle 3.24).

Tabelle 3.24. Vierfelder-Tafel

Y	X	1	0	Summe
1	H_{11}	H_{12}	$H_{1\cdot}$	
0	H_{21}	H_{22}	$H_{2\cdot}$	
Summe	$H_{\cdot 1}$	$H_{\cdot 2}$	n	

Es gilt:

$$\begin{aligned} H_{11} + H_{12} &= H_{1\cdot}, \\ H_{21} + H_{22} &= H_{2\cdot}, \\ H_{11} + H_{21} &= H_{\cdot 1}, \\ H_{12} + H_{22} &= H_{\cdot 2}, \\ H_{11} + H_{12} + H_{21} + H_{22} &= n. \end{aligned}$$

Als Prüfgröße U wählen wir:

$$U = \chi^2_1 = \frac{n(H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21})^2}{H_{1\cdot}H_{2\cdot}H_{\cdot 1}H_{\cdot 2}}, \quad (3.147)$$

eine Größe, die annähernd χ^2 -verteilt ist mit dem Freiheitsgrad $m = 1$ [3, 18].

4. Den kritischen Bereich K bestimmen wir für die einseitige Fragestellung aus der Relation

$$P(U \geq \chi^2_{\alpha, 1} / H_0) = \alpha,$$

wobei wir den entsprechenden kritischen Wert $\chi^2_{\alpha, 1}$ aus Tafel 3 entnehmen.

5. Mit einer konkreten Stichprobe (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n aus der zweidimensionalen Grundgesamtheit (X, Y) ermitteln wir eine Realisierung der Prüfgröße (3.147)

$$u = \frac{n(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2}{h_{1\cdot}h_{2\cdot}h_{\cdot 1}h_{\cdot 2}}, \quad (3.148)$$

wobei die Größen h_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, h_{\cdot 1}, h_{\cdot 2}, h_{\cdot 1}, h_{\cdot 2}$ Realisierungen der entsprechenden Größen in (3.147) darstellen.

6. Der Entscheid über die Nullhypothese H_0 wird in folgender Weise gefällt:

Ist $u < \chi^2_{\alpha, 1}$, so wird H_0 nicht abgelehnt, d.h., beide Merkmale können als unabhängig angesehen werden;

ist $u \geq \chi^2_{\alpha, 1}$, so wird H_0 abgelehnt, d.h., beide Merkmale können als abhängig angesehen werden.

Anmerkungen: Die in (3.147) angegebene Prüfgröße ist für $n > 60$, $H_{\cdot 1} \geq 5$ und $H_{\cdot 2} \geq 5$ mit guter Näherung χ^2 -verteilt mit $m = 1$ Freiheitsgraden. Das ist auch noch für einen Stichprobenumfang $20 \leq n \leq 60$ der Fall, wenn (3.147) mit der Korrektur von Yates angewandt wird:

$$U = \chi^2_1 = \frac{n(|H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}| - n/2)^2}{H_{1\cdot}H_{2\cdot}H_{\cdot 1}H_{\cdot 2}}. \quad (3.149)$$

Beispiel 3.38: Ein Erzeugnis wird nach einem neuen Verfahren gefertigt. Dabei wird eine geringere Ausschußquote als bei Einsatz des alten Verfahrens beobachtet. Es erhebt sich die Frage, ob mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ ein Zusammenhang zwischen der Art der Fertigung und der erzielten Qualität nachzuweisen ist.

Zu ihrer Beantwortung werden der nach dem alten und dem neuen Verfahren erfolgten Produktion $n = 360$ Erzeugnisse entnommen und bei jedem geprüft, ob es qualitätsgerecht ist oder nicht. Die aufgetretenen Häufigkeiten sind in einer Vierfelder-Tafel (Tabelle 3.25) festgehalten.

Tabelle 3.25. Vierfelder-Tafel für Beispiel 3.38

	Altes Verfahren	Neues Verfahren	Summe
Qualitätsgerecht	142	188	330
Nicht qualitätsgerecht	18	12	30
Summe	160	200	360

Zur Prüfung stellen wir die Nullhypothese

$$H_0: \text{„Beide Merkmale sind unabhängig“}$$

auf. Mit den in Tabelle 3.25 enthaltenen Werten errechnen wir eine Realisierung (3.148) der Prüfgröße (3.147):

$$u = \frac{360(142 \cdot 12 - 188 \cdot 18)^2}{160 \cdot 200 \cdot 330 \cdot 30} = 3,207.$$

Für die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ lesen wir weiterhin den kritischen Wert $\chi^2_{0,05; 1} = 3,8$ ab. Zum Entscheid werden beide Werte verglichen.

Da $u = 3,207 < 3,8 = \chi^2_{0,05; 1}$ ist, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt, d. h., beide Merkmale sind als unabhängig zu betrachten. Zwischen der Art der Fertigung und der Qualität der Erzeugnisse kann also keine Abhängigkeit nachgewiesen werden.

Das U-Prüfverfahren von Mann-Whitney: Zur Untersuchung der Fragestellung, ob zwei unabhängig voneinander gewonnene Stichproben, kurz zwei unabhängige Stichproben, aus identisch verteilten Grundgesamtheiten gezogen sein können, ist es möglich, das U-Prüfverfahren – es zählt zu den Rangprüfverfahren – einzusetzen. Das ist z. B. dann der Fall, wenn ein Erzeugnis auf zwei Maschinen gefertigt wird und ermittelt werden soll, ob sich die auf beiden Maschinen gefertigten Erzeugnisse hinsichtlich eines bestimmten Qualitätsmerkmals unterscheiden. Es ist also zu prüfen, ob die beiden Grundgesamtheiten X und Y mit den Verteilungsfunktionen $F_X(t) = F(t)$ und $F_Y(t) = G(t)$ für alle t ($-\infty < t < +\infty$) gleich sind.

Wir wenden dazu folgendes Prüfverfahren an:

1. $H_0: F(t) \equiv G(t)$.

2. Vorgabe der Irrtumswahrscheinlichkeit α .

3. Zu einer mathematischen Stichprobe $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$ vom Umfang n_1 aus der Grundgesamtheit X mit der Verteilungsfunktion $F(t)$, $-\infty < t < +\infty$, und einer mathematischen Stichprobe $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$ vom Umfang n_2 aus der Grundgesamtheit Y mit der Verteilungsfunktion $G(t)$, $-\infty < t < +\infty$, werden beide Stichproben zu einer vom Umfang $n = n_1 + n_2$ vereinigt. Nun wird die Prüfgröße U gewählt:

$$U = U_n := \text{Anzahl der Inversionen}^1) \text{ in der vereinigten und mit einer Rangordnung versehenen Stichprobe vom Umfang } n.$$

Dies ist eine diskrete Zufallsgröße, die ganzzahlige Werte zwischen 0 und $n_1 n_2$ annimmt und für $n_1 + n_2 \geq 20$ annähernd

¹⁾ Der Begriff Inversion wird in Verbindung mit der konkreten Stichprobe (Pkt. 5) erläutert.

$$N\left(\frac{1}{2}n_1 n_2; \sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}\right) \text{-verteil ist.}$$

In diesem Fall ist dann die $N(0; 1)$ -verteilte Prüfgröße anwendbar

$$Z = \frac{U_n - \frac{1}{2}n_1 n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}}. \quad (3.150)$$

Im anderen Fall ist die Tafel der Prüfgröße U_n heranzuziehen, die z. B. in [18] enthalten ist.

4. Bei der Bestimmung des kritischen Bereiches K wollen wir uns auf den Fall der Prüfgröße (3.150) beschränken. Er ist bei zweiseitiger Fragestellung aus der Relation

$$P\left(|Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}/H_0\right) = \alpha \quad (3.151)$$

und bei einseitiger Fragestellung aus der Relation

$$P(Z \geq z_{\alpha}/H_0) = \alpha \quad (3.152)$$

zu bestimmen. Wir verweisen hierzu auf die Ausführungen in Abschnitt 3.4.1.

5. Aus einer konkreten Stichprobe $x_i, i = 1, 2, \dots, n_1$, vom Umfang n_1 aus der Grundgesamtheit X und einer konkreten Stichprobe $y_k, k = 1, 2, \dots, n_2$, aus der Grundgesamtheit Y bilden wir die vereinigte Stichprobe vom Umfang $n_1 + n_2 = n$. Die Elemente dieser Stichprobe ordnen wir mit dem kleinsten beginnend der Größe nach, d.h., wir stellen eine Rangordnung her und ermitteln die Gesamtanzahl der Inversionen dieser Stichprobe. Dabei wird unter einer Inversion eines beliebigen Paares (x_i, y_k) die Erfüllung der Relation $y_k < x_i$ verstanden. Eine Inversion liegt also dann vor, wenn in der Rangfolge y_k vor x_i steht.

Anmerkung: Stehen alle $x_i, i = 1, 2, \dots, n_1$, in der Rangfolge vor den $y_k, k = 1, 2, \dots, n_2$, so ist die Anzahl der Inversionen also 0. Begründen Sie, warum diese dann, wenn alle $y_k, k = 1, 2, \dots, n_2$, vor den $x_i, i = 1, 2, \dots, n_1$, stehen, $n_1 \cdot n_2$ beträgt. In beiden Fällen werden die Stichproben nicht aus derselben Grundgesamtheit stammen.

Die Gesamtanzahl der Inversionen in der aus den beiden konkreten Stichproben gebildeten Stichprobe stellt dann gleichzeitig eine Realisierung u_n der Prüfgröße U_n dar:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_1} I(y_k - x_i), \quad (3.153)$$

wobei

$$I(y_k - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } y_k - x_i < 0, \\ 0 & \text{für } y_k - x_i \geq 0 \end{cases} \quad (3.154)$$

ist. Treten bei den Stichproben gleiche Meßwerte, sogenannte *Bindungen* auf, so wird die Differenz zwischen beiden gleich null; entsprechend (3.154) soll ein solcher Fall nicht als Inversion gezählt werden.

Bei unseren Betrachtungen wollen wir uns auf den Fall $n_1 + n_2 \geq 20$ beschränken. Wir können deshalb für den Vergleich eine Realisierung der Prüfgröße (3.150) wählen:

$$z = \frac{u_n - \frac{1}{2}n_1 n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}}. \quad (3.155)$$

Über die Nullhypothese H_0 kann auf Grund unserer in 5. gegebenen Beschränkung nach der in 3.4.1. angegebenen Weise entschieden werden.

Beispiel 3.39: Auf zwei Prüfgeräten sollen für ein bestimmtes Material gleichzeitig Dehnungsversuche durchgeführt werden. In einem Vorversuch soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ ermittelt werden, ob beide Geräte gleichmäßig arbeiten, d. h. ob die an beiden Geräten ermittelten Meßwerte einer Grundgesamtheit entstammen können. Dazu wurden die an Probestäben eines bestimmten Materials für eine feste Belastung ermittelten Dehnungen [mm] festgehalten.

Bei dem ersten Gerät wurden bei $n_1 = 10$ Versuchen folgende Dehnungen festgestellt, wobei mit X die entsprechende Grundgesamtheit gekennzeichnet wurde:

$$x_1 = 5,0,$$

$$x_5 = 25,0,$$

$$x_9 = 45,1,$$

$$x_2 = 9,9,$$

$$x_6 = 30,6,$$

$$x_{10} = 49,8,$$

$$x_3 = 14,6,$$

$$x_7 = 36,0,$$

$$x_4 = 20,1,$$

$$x_8 = 40,4,$$

Bei dem zweiten Gerät wurden bei $n_2 = 10$ Versuchen folgende Dehnungen ermittelt, wobei mit Y die entsprechende Grundgesamtheit gekennzeichnet ist:

$$y_1 = 5,2,$$

$$y_5 = 24,8,$$

$$y_9 = 45,8,$$

$$y_2 = 10,1,$$

$$y_6 = 26,9,$$

$$y_{10} = 50,0,$$

$$y_3 = 14,5,$$

$$y_7 = 35,8,$$

$$y_4 = 20,2,$$

$$y_8 = 40,6,$$

Tabelle 3.26. Rangzahlen und Inversionen
für Beispiel 3.39

Meßwerte		Rangzahlen		Inversionen
x_i	y_k			
5,0	-	1	-	-
-	5,2	-	2	9
9,9	-	3	-	-
-	10,1	-	4	8
-	14,5	-	5	8
14,6	-	6	-	-
20,1	-	7	-	-
-	20,2	-	8	6
-	24,8	-	9	6
25,0	-	10	-	-
-	26,9	-	11	5
30,6	-	12	-	-
-	35,8	-	13	4
36,0	-	14	-	-
40,4	-	15	-	-
-	40,6	-	16	2
45,1	-	17	-	-
-	45,8	-	18	1
49,8	-	19	-	-
-	50,0	-	20	0

Zur Prüfung der aufgeworfenen Problematik stellen wir die Nullhypothese

H_0 : „Die Verteilungsfunktionen der beiden Grundgesamtheiten sind für alle t gleich“

auf, vereinigen die beiden konkreten Stichproben zu einer vom Umfang $n = n_1 + n_2$, ordnen die Elemente dieser neuen Stichprobe nach der Größe und ermitteln die Gesamtanzahl der vorliegenden Inversionen.

In Tabelle 3.26 sind die entsprechenden Ergebnisse zusammengefaßt. Insgesamt treten $u_n = 49$ Inversionen auf. Damit kann die Realisierung (3.155) der Prüfgröße (3.150) berechnet werden:

$$z = \frac{49 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 10(10 + 10 + 1)}} = -0,0756.$$

Wir führen für die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ den Entscheid bei zweiseitiger Fragestellung durch, wobei $z_{0,025} = 1,96$ ist. Da nun $|z| = 0,0756 < 1,96 = z_{0,025}$ ist, wird die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt, d. h., die beiden Geräte unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander.

3.8. Aufgaben

- * 3.1: Die Zugfestigkeit [10 MPa] einer Sorte von Stahlblechen wird untersucht. 90 Meßwerte enthält die folgende Urliste:

49,9	48,8	51,2	50,5	50,1	48,7	50,9	51,4	50,6	50,0
49,5	48,0	49,1	45,9	47,0	50,0	46,2	48,0	49,2	47,4
50,8	50,4	49,2	45,5	47,8	47,7	48,4	49,8	46,6	46,0
47,2	46,3	48,6	47,0	46,0	48,2	46,3	48,2	47,3	47,4
47,7	44,4	45,3	43,1	47,0	48,4	46,6	47,4	45,1	46,6
48,0	47,8	42,0	45,5	47,8	45,2	44,6	42,3	43,7	45,3
46,0	43,5	45,2	43,4	47,0	46,8	46,5	47,7	48,4	48,9
48,0	48,3	50,1	46,5	47,9	48,8	45,1	48,5	51,3	47,0
49,5	49,1	44,7	49,2	44,4	49,3	48,7	44,8	47,9	46,9

Stellen Sie eine sekundäre Häufigkeitstabelle auf und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm, das Häufigkeitspolygon und das Summenpolygon! Berechnen Sie \bar{x} und s !

- * 3.2: Zeigen Sie, daß das arithmetische Mittel \bar{X} eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Erwartungswert μ einer Grundgesamtheit X ist!
- * 3.3: In einer Werkhalle arbeiten 12 gleichartige Maschinen. Die Anzahl der durch Störungen in einer bestimmten Zeiteinheit aus gefallenen Maschinen kann als poissonverteilte Zufallsgröße X aufgefaßt werden. In $n = 220$ Zeiteinheiten wurden die Ausfälle gezählt. Das Ergebnis dieser Beobachtungen enthält folgende Tabelle:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h_k	38	66	56	27	18	7	4	2	1	1	0	0	0

(h_k Anzahl der Zeiteinheiten mit k aus gefallenen Maschinen)

Unter Verwendung der Maximum-Likelihood-Methode ist der Parameter $\lambda = E(X)$ dieser

Poisson-Verteilung zu schätzen. Berechnen Sie danach die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$!

3.4: Von einer exponentialverteilten Grundgesamtheit X ist der Parameter $\Theta = \lambda$ unbekannt. Mit Hilfe einer konkreten Stichprobe x_1, x_2, \dots, x_n ist nach der Maximum-Likelihood-Methode für λ ein Schätzwert zu ermitteln.

3.5: Eine konkrete Stichprobe vom Umfang 100 stamme aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit dem Parameter $\sigma = 2$. Die Stichprobe hat den Mittelwert $\bar{x} = 6,4$. Bestimmen Sie zu dem Konfidenzniveau 0,95 ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter μ !

3.6: Wie groß muß in Aufgabe 3.5 der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit wir zu dem Konfidenzniveau 0,95 ein konkretes Konfidenzintervall mit der Länge 0,5 erhalten?

3.7: Welche konkreten Konfidenzintervalle ergäben sich in Aufgabe 3.5, wenn $n = 400$ bzw. $n = 10$ wäre?

3.8: Es wurden 5 unabhängige Messungen zur Bestimmung der Ladung eines Elektrons durchgeführt. Die Versuche lieferten folgende Resultate (in absoluten elektrostatischen Einheiten)

$$4,781 \cdot 10^{-10}; \quad 4,792 \cdot 10^{-10}; \quad 4,769 \cdot 10^{-10}; \\ 4,795 \cdot 10^{-10}; \quad 4,779 \cdot 10^{-10}.$$

Es sind eine Schätzung für die Größe der Ladung des Elektrons und unter der Annahme, daß die Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammt, ein konkretes Konfidenzintervall mit $\alpha = 0,01$ anzugeben. (Entnommen [16])

3.9: Für die Zufallsgröße X (Zugfestigkeit) in Aufgabe 3.1 ist zu dem Konfidenzniveau 0,95 für den Parameter μ der zugehörigen Grundgesamtheit ein konkretes Konfidenzintervall zu ermitteln.

3.10: Eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 25$, die einer normalverteilten Grundgesamtheit entnommen wurde, ergibt $s^2 = 8,5$. Mit $\alpha = 0,05$ ist ein konkretes Konfidenzintervall für den Parameter σ^2 zu ermitteln.

3.11: Die Lebensdauer X einer Glühlampenart wird geprüft. Eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 25$ ergab $\bar{x} = 2480$ Stunden und $s = 18$ Stunden. Unter der Annahme, daß X eine normalverteilte Zufallsgröße ist, sind für die Parameter μ und σ mit $\alpha = 0,05$ konkrete Konfidenzintervalle zu berechnen.

3.12: Aus der Produktion von Kugellagern wurden 150 Stück zufällig entnommen. In dieser Stichprobe sind 6 unbrauchbare. Der Ausschußprozentsatz $p \cdot 100\%$ der Gesamtproduktion ist unbekannt. Mit Hilfe der Stichprobe ist ein konkretes Konfidenzintervall für p mit $\alpha = 0,05$ zu berechnen.

3.13: An 40 Einzelteilen (Stichprobe aus einer Tagesproduktion) wird der Sollwert eines Maßes geprüft. Die Stichprobe liefert einen Mittelwert der Abweichung vom Sollwert von $\bar{x} = 22,95 \mu\text{m}$ und die Standardabweichung $s = 4,42 \mu\text{m}$. Unter der Voraussetzung, daß die zugehörige Grundgesamtheit normalverteilt ist, ist zu testen, ob diese Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit $\mu_0 = 20 \mu\text{m}$ stammen kann. Es sei $\alpha = 0,01$.

3.14: Eine konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 16$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit X ergibt die Standardabweichung $s = 3,9$. Es ist mit $\alpha = 0,05$ bei einseitiger Fragestellung zu testen, ob diese Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit $\sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$ stammen kann.

- * 3.15: Ein bestimmtes Erzeugnis wird nach 2 Verfahren hergestellt. Es wird untersucht, ob bei beiden Verfahren der Rohstoffverbrauch pro Produkt der gleiche ist. X sei der Rohstoffverbrauch bei dem ersten Verfahren und Y bei dem zweiten Verfahren. Eine Stichprobe aus X ist $3,6; 3,3; 3,9; 3,5; 3,7; 3,0$; eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit Y ist $4,5; 4,8; 4,5; 4,2; 3,5$. Unter der Annahme, daß σ bei beiden Grundgesamtheiten gleich ist, ist mit $\alpha = 0,05$ die Hypothese $H_0: E(X) = E(Y)$ zu prüfen. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß X und Y normalverteilt sind.
- * 3.16: In der Aufgabe 3.15 wurde die Annahme gemacht, daß $D^2(X) = D^2(Y) = \sigma^2$ ist. Testen Sie diese Annahme mit $\alpha = 0,05$.
- * 3.17: Prüfen Sie, ob die konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 150$ in Aufgabe 3.12 aus einer Null-Eins-verteilten Grundgesamtheit X mit $E(X) = p_0 = 0,02$ stammen kann! Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei $0,01$.
- * 3.18: Werten Sie mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes das Zahlenmaterial in Aufgabe 3.1 aus!
- * 3.19: Prüfen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$, ob die in Aufgabe 3.1 angegebene Urliste eine konkrete Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit sein kann!
- * 3.20: Aus einer Grundgesamtheit (X, Y) wurde folgende konkrete Stichprobe vom Umfang $n = 6$ entnommen:

x_i	2,4	3,3	4,4	5,7	7,7	9,6
y_i	3,5	4,8	5,8	7,1	9,5	11,7

Für X und Y gelten die Voraussetzungen des Abschnittes 3.6.2. Mit Hilfe dieser konkreten Stichprobe ist

- a) eine Schätzung für die Regressionsgerade $\eta(x) = \beta_1 + \beta_2 x$,
- b) mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ ein konkretes Konfidenzintervall für den Regressionskoeffizienten β_2 zu ermitteln.

- * 3.21: Unter der Annahme, daß die Stichprobe

x_i	2	4	5	7	8
y_i	4	6	5	6	7

aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammt, ist für den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} ein Schätzwert zu bestimmen.

- * 3.22: Ein Werk liefert Eisenplatten. Der Verwendungszweck dieser Platten erfordert, daß sie eine gleichmäßige Dicke besitzen. Zur Untersuchung dieses Merkmals werden der Lieferung 5 Platten entnommen. An jeder dieser Platten wird die Dicke [mm] an vier verschiedenen Stellen gemessen. Die Meßergebnisse enthält folgende Tabelle:

Stellen-Nr.	Platten-Nr.				
	1	2	3	4	5
1	9,3	9,3	9,1	9,3	9,2
2	9,6	9,5	9,6	9,5	9,5
3	9,1	9,1	9,0	9,0	9,0
4	9,7	9,7	9,5	9,6	9,5

Auf Grund dieser Stichprobe ist zu entscheiden, ob der Unterschied der Plattenstärke zwischen den verschiedenen Meßstellen zufällig oder signifikant ist. Als Irrtumswahrscheinlichkeit wird $\alpha = 0,01$ gewählt.

Lösungen der Aufgaben

- 2.1: a) $A \cap C \dots$ „Die gezogene Zahl ist höchstens gleich 12 und gerade“;
 $B \cap C \cap D \dots$ „Die gezogene Zahl ist 12 oder 18“;
 $B \cup D \dots$ „Die gezogene Zahl ist mindestens gleich 8 oder ein Vielfaches von 3“;
 $(A \cup B) \cap D \dots$ „Die gezogene Zahl ist ein Vielfaches von 3“;
 $\overline{B} \cap C \dots$ „Die gezogene Zahl ist 2 oder 4 oder 6“;
 $(\overline{A} \cap B) \cap C \cap \overline{D} \dots$ „Die gezogene Zahl ist mindestens gleich 8, gerade und kein Vielfaches von 3“;

b) $F = \overline{B} \cap \overline{C}$; $G = \overline{A} \cap C$; $H = (\overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$.

2.3: $D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2)$; $\overline{D} = \overline{A} \cup (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)$.

2.4: a) $\frac{10!}{12!}$; b) $\frac{3! \cdot 10!}{12!}$.

2.5: a) $\frac{\binom{n-a}{k}}{\binom{n}{k}}$; b) $1 - \frac{\binom{a}{k}}{\binom{n}{k}}$.

2.8: $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10}$.

2.9: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{2}$.

2.10: $\frac{7}{30}$. 2.11: a) 0,9998; b) 0,0081; c) 0,0919; d) 0,3911; e) 0,5087.

k	-2	0	+2
$P(X=k)$	p^2	$2p(1-p)$	$(1-p)^2$

2.13: a) $a = \frac{1}{2}$; b) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t \leq 2, \\ 1 & \text{für } t > 2. \end{cases}$

2.14: a) $F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t^2} & \text{für } t \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-t^2} & \text{für } t > 0; \end{cases}$ b) $P(0 \leq X < 1) = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) = 0,3161$.

2.15: $E(X) = 2$.

2.16: a) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^4} & \text{für } t > 1; \end{cases}$ b) $P(1 \leq X < 2) = \frac{15}{16} = 0,9375$; c) $E(X) = \frac{4}{3}$;
d) $E(X^2) = 2$, $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{9}$; e) $P\left(X \geq \frac{4}{3}\right) = \frac{81}{256} = 0,3164$.

2.19: a) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq -3, \\ 0,1 & \text{für } -3 < t \leq 0, \\ 0,25 & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ 0,35 & \text{für } 1 < t \leq 2, \\ 0,6 & \text{für } 2 < t \leq 3, \\ 1 & \text{für } 3 < t; \end{cases}$ b) $P(X > 0) = 0,75$;
c) $E(X) = 1,5$; d) $D^2(X) = 3,35$.

2.20: a)

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

 b) 0,648;

$$c) F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 0,216 & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ 0,648 & \text{für } 1 < t \leq 2, \\ 0,936 & \text{für } 2 < t \leq 3, \\ 1 & \text{für } 3 < t; \end{cases} \quad d) 1,2; \quad e) 0,72.$$

- 2.21: Jede Zahl aus dem Intervall $(0, 1]$ ist Quantil der Ordnung $0,1; 0,2; 0,3$.
 Jede Zahl aus dem Intervall $(1, 2]$ ist Quantil der Ordnung $0,4; 0,5$.

$$2.22: \frac{\binom{5}{0} \binom{25}{4} + \binom{5}{1} \binom{25}{3}}{\binom{30}{4}}.$$

p	$N(0; 1)$	$N(2; 3)$	Q_p
0,01	-2,33	-4,99	
0,05	-1,64	-2,92	
0,1	-1,28	-1,84	
0,2	-0,84	-0,52	

- 2.25: a), b)

X	Y	0	1	2	3	
0	0,000 001	0,000 027	0,000 243	0,000 729	0,001 000	
1	0,000 270	0,004 860	0,021 870	0	0,027 000	
2	0,024 300	0,218 700	0	0	0,243 000	
3	0,729 000	0	0	0	0,729 000	
	0,753 571	0,223 587	0,022 113	0,000 729	1,000 000	

$$c) \frac{k}{P(X = k | Y = 1)} \mid \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0,000\,121 & 0,021\,737 & 0,978\,143 & 0 \end{array}$$

3.1: $\bar{x} = 47,47; s = 2,14.$

3.3: $\hat{\lambda} = 1,91; P(X \leq 2) = 0,700.$

3.4: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$

3.5: $6,01 < \mu < 6,79.$

3.6: $n \approx 246.$

3.7: $6,2 < \mu < 6,6$ bzw. $5,16 < \mu < 7,64.$

3.9: $47,03 < \mu < 47,91.$

3.8: $\bar{x} = 4,783 \cdot 10^{-10}; 4,761 \cdot 10^{-10} < \mu < 4,805 \cdot 10^{-10}.$

3.10: $5,2 < \sigma^2 < 16,4.$

3.11: $2472,6 < \mu < 2487,4; 14 < \sigma < 25,2.$

3.12: $0,018 < p < 0,085.$

3.13: Die Hypothese $H_0: E(X) = \mu_0 = 20$ wird abgelehnt.

3.14: Die Hypothese $H_0: D^2(X) = \sigma_0^2 = 10$ wird nicht abgelehnt.

3.15: Die Hypothese $H_0: E(X) = E(Y)$ wird abgelehnt.

3.16: Die Hypothese $H_0: D^2(X) = D^2(Y)$ wird nicht abgelehnt.

3.17: Die Hypothese $H_0: E(X) = p_0 = 0,02$ wird nicht abgelehnt.

3.19: Die Hypothese $H_0: F_X(t) = \Phi(t; \mu_0, \sigma_0)$ wird nicht abgelehnt.

3.20: a) $y = 0,89 + 1,12 x;$ b) $1,05 < \beta_2 < 1,19.$

3.21: $r_{XY} = 0,86.$

3.22: Die Hypothese $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ wird abgelehnt.

Anhang: Tafeln

Tafel 1. Normalverteilung: Ordinatenwerte der Dichtefunktion $\varphi(t; 0, 1)$ (s. Bild S. 210)

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.39894	.39892	.39886	.39876	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
0,1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
0,2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
0,3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
0,4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.35889	.35723	.35553	.35381
0,5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
0,6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
0,7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
0,8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
0,9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1,0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1,1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1,2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1,3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1,4	.14973	.14764	.14556	.14330	.14146	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1,5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12001	.11816	.11632	.11450	.11270
1,6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1,7	.09405	.09246	.09080	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1,8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1,9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2,0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2,1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2,2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03103	.03034	.02965	.02898
2,3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2,4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01889	.01842	.01797
2,5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01468	.01431	.01394
2,6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2,7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2,8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2,9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00471	.00457
3,0	.00443	.00327	.00238	.00172	.00123	.00087	.00061	.00042	.00029	.00020

Tafel 2. Normalverteilung: Ordinatenwerte der Verteilungsfunktion $\Phi(t; 0,1)$ (s. Bild S.210)

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500 000	.503 989	.507 978	.511 966	.515 953	.519 938	.523 922	.527 903	.531 881	.535 856
0,1	.539 828	.543 795	.547 758	.551 717	.555 670	.559 618	.563 560	.567 495	.571 424	.575 345
0,2	.579 260	.583 166	.587 064	.590 954	.594 835	.598 706	.602 568	.606 420	.610 261	.614 092
0,3	.617 911	.621 720	.625 516	.629 300	.633 072	.636 831	.640 576	.644 309	.648 027	.651 732
0,4	.655 422	.659 097	.662 757	.666 402	.670 031	.673 645	.677 242	.680 822	.684 386	.687 933
0,5	.691 462	.694 974	.698 468	.701 944	.705 402	.708 840	.712 260	.715 661	.719 043	.722 405
0,6	.725 747	.729 069	.732 371	.735 653	.738 914	.742 154	.745 373	.748 571	.751 748	.754 903
0,7	.758 036	.761 148	.764 238	.767 305	.770 350	.773 373	.776 373	.779 350	.782 305	.785 236
0,8	.788 145	.791 030	.793 892	.796 731	.799 546	.802 338	.805 106	.807 850	.810 570	.813 267
0,9	.815 940	.818 589	.821 214	.823 814	.826 391	.828 944	.831 472	.833 977	.836 547	.838 913
1,0	.841 345	.843 752	.846 136	.848 495	.850 830	.853 141	.855 428	.857 690	.859 929	.862 143
1,1	.864 334	.866 500	.868 643	.870 762	.872 857	.874 928	.876 976	.879 000	.881 000	.882 977
1,2	.884 930	.886 861	.888 768	.890 651	.892 512	.894 350	.896 165	.897 958	.899 727	.901 475
1,3	.903 200	.904 902	.906 582	.908 241	.909 877	.911 492	.913 085	.914 656	.916 207	.917 736
1,4	.919 243	.920 730	.922 196	.923 642	.925 066	.926 471	.927 855	.929 219	.930 563	.931 889
1,5	.933 193	.934 478	.935 744	.936 992	.938 220	.939 429	.940 620	.941 792	.942 947	.944 083
1,6	.945 201	.946 301	.947 384	.948 449	.949 497	.950 528	.951 543	.952 540	.953 521	.954 486
1,7	.955 434	.956 367	.957 284	.958 185	.959 070	.959 941	.960 796	.961 636	.962 462	.963 273
1,8	.964 070	.964 852	.965 620	.966 375	.967 116	.967 843	.968 557	.969 258	.969 946	.970 621
1,9	.971 283	.971 933	.972 571	.973 197	.973 810	.974 412	.975 002	.975 581	.976 148	.976 704
2,0	.977 250	.977 784	.978 308	.978 822	.979 325	.979 818	.980 301	.980 774	.981 237	.981 691
2,1	.982 136	.982 571	.982 997	.983 414	.983 823	.984 222	.984 614	.984 997	.985 371	.985 738
2,2	.986 097	.986 447	.986 791	.987 126	.987 454	.987 776	.988 089	.988 396	.988 696	.988 989
2,3	.989 276	.989 556	.989 830	.990 097	.990 358	.990 613	.990 862	.991 106	.991 344	.991 576
2,4	.991 802	.992 024	.992 240	.992 451	.992 656	.992 857	.993 053	.993 244	.993 331	.993 613
2,5	.993 790	.993 963	.994 132	.994 297	.994 457	.994 614	.994 766	.994 915	.995 060	.995 201
2,6	.995 339	.995 473	.995 604	.995 731	.995 855	.995 975	.996 093	.996 207	.996 319	.996 427
2,7	.996 533	.996 636	.996 736	.996 833	.996 928	.997 020	.997 110	.997 197	.997 282	.997 365
2,8	.997 445	.997 523	.997 599	.997 673	.997 744	.997 814	.997 882	.997 948	.998 012	.998 074
2,9	.998 134	.998 193	.998 250	.998 305	.998 359	.998 411	.998 462	.998 511	.998 559	.998 605
3,0	.998 650	.999 032	.999 313	.999 517	.999 663	.999 767	.999 841	.999 892	.999 928	.999 952

Tafel 3. χ^2 -Verteilung: $\chi_{\alpha; m}^2$ -Werte (s. Bild S. 210)

Anzahl der Freiheits-grade m	Irrtumswahrscheinlichkeit α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
1	0,000 16	0,000 98	0,003 9	3,8	5,0	6,6
2	0,020	0,051	0,103	6,0	7,4	9,2
3	0,115	0,216	0,352	7,8	9,4	11,3
4	0,297	0,484	0,711	9,5	11,1	13,3
5	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1
6	0,872	1,24	1,64	12,6	14,4	16,8
7	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5
8	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1
9	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7
10	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2
11	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7
12	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2
13	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7
14	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1
15	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6
16	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0
17	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4
18	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8
19	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2
20	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6
21	8,90	10,3	11,6	32,7	35,5	38,9
22	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3
23	10,2	11,7	13,1	35,2	38,1	41,6
24	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0
25	11,5	13,1	14,6	37,7	40,6	44,3
26	12,2	13,8	15,4	38,9	41,9	45,6
27	12,9	14,6	16,2	40,1	43,2	47,0
28	13,6	15,3	16,9	41,3	44,5	48,3
29	14,3	16,0	17,7	42,6	45,7	49,6
30	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9
40	22,2	24,4	26,5	55,8	59,3	63,7
50	29,7	32,4	34,8	67,5	71,4	76,2
60	37,5	40,5	43,2	79,1	83,3	88,4
70	45,4	48,8	51,7	90,5	95,0	100,4
80	53,5	57,2	60,4	101,9	106,6	112,3
90	61,8	65,6	69,1	113,1	118,1	124,1
100	70,1	74,2	77,9	124,3	129,6	135,8

Tafel 4. t -Verteilung: $t_{\alpha; m}$ - und $t_{\frac{\alpha}{2}; m}$ -Werte (s. Bilder S. 210)

Anzahl der Freiheitsgrade m	Irrtumswahrscheinlichkeit α für zweiseitige Fragestellung					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	1,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
$\infty^1)$	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Irrtumswahrscheinlichkeit α für einseitige Fragestellung					

¹⁾ Für den Freiheitsgrad $m \rightarrow \infty$ ist die Normalverteilung Grenzverteilung der t -Verteilung. Spezielle Quantile der Normalverteilung, die i. allg. für statistische Untersuchungen von Interesse sind, lassen sich in der Zeile $m = \infty$ ablesen.

Tafel 5.1. F -Verteilung: $f_{\alpha; m_1, m_2}$ -Werte für $\alpha = 0,01$ (s. Bild S. 210)

m_2	m_1											
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6261	6287	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,47	99,47	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,50	26,41	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,84	13,74	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,27	9,89	9,47	9,38	9,29	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	7,23	7,14	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,99	5,91	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	5,20	5,12	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,65	4,57	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	4,25	4,17	3,91
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,94	3,86	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,70	3,62	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,51	3,43	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,35	3,27	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	3,21	3,13	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	3,10	3,02	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	3,00	2,92	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,92	2,84	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,84	2,76	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,78	2,69	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,72	2,64	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,67	2,58	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,62	2,54	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,58	2,49	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,54	2,45	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,50	2,42	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,47	2,38	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,44	2,35	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,41	2,33	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,38	2,30	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	2,20	2,11	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	2,03	1,94	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	1,95	1,86	1,76	1,38
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,79	1,70	1,59	1,00

Tafel 5.2. F -Verteilung: $f_{\alpha; m_1, m_2}$ -Werte für $\alpha = 0,05$

m_2	m_1												
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	30	40	∞	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	250	251	254,3	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,46	19,47	19,50	
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,62	8,60	8,53	
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,74	5,71	5,63	
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,50	4,46	4,36	
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,81	3,77	3,67	
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,38	3,34	3,23	
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	3,08	3,05	2,93	
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,86	2,82	2,71	
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,70	2,67	2,54	
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,57	2,53	2,40	
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,46	2,42	2,30	
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,38	2,34	2,21	
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,31	2,27	2,13	
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,25	2,21	2,07	
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,20	2,16	2,01	
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	2,15	2,11	1,96	
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	2,11	2,07	1,92	
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	2,07	2,02	1,88	
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	2,04	1,99	1,84	
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	2,00	1,96	1,81	
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,98	1,93	1,78	
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,96	1,91	1,76	
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,94	1,89	1,73	
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,92	1,87	1,71	
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,90	1,85	1,69	
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,88	1,84	1,67	
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,87	1,81	1,65	
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,85	1,80	1,64	
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,84	1,79	1,62	
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,74	1,69	1,51	
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,63	1,59	1,39	
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,55	1,46	1,25	
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,46	1,35	1,00	

Tafel 6. Einzelwahrscheinlichkeiten der Poisson-Verteilung:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904 837	0,818 731	0,740 818	0,670 320	0,606 531	0,548 812
1	0,090 484	0,163 746	0,222 245	0,268 128	0,303 265	0,329 287
2	0,004 524	0,016 375	0,033 337	0,053 626	0,075 816	0,098 786
3	0,000 151	0,001 091	0,003 334	0,007 150	0,012 636	0,019 757
4	0,000 004	0,000 055	0,000 250	0,000 715	0,001 580	0,002 964
5		0,000 002	0,000 015	0,000 057	0,000 158	0,000 356
6			0,000 001	0,000 004	0,000 013	0,000 035
7					0,000 001	0,000 003

k	λ					
	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496 585	0,449 329	0,406 570	0,367 879	0,135 335	0,049 787
1	0,347 610	0,359 463	0,365 913	0,367 879	0,270 671	0,149 361
2	0,121 663	0,143 785	0,164 661	0,183 940	0,270 671	0,224 042
3	0,028 388	0,038 343	0,049 398	0,061 313	0,180 447	0,224 042
4	0,004 968	0,007 669	0,011 115	0,015 328	0,090 224	0,168 031
5	0,000 695	0,001 227	0,002 001	0,003 066	0,036 089	0,100 819
6	0,000 081	0,000 164	0,000 300	0,000 511	0,012 030	0,050 409
7	0,000 008	0,000 019	0,000 039	0,000 073	0,003 437	0,021 604
8		0,000 002	0,000 004	0,000 009	0,000 859	0,008 101
9				0,000 001	0,000 191	0,002 701
10					0,000 038	0,000 810
11					0,000 007	0,000 221
12					0,000 001	0,000 055
13						0,000 013
14						0,000 003
15						0,000 001

Tafel 6. (Fortsetzung)

k	λ					
	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018 316	0,006 738	0,002 479.	0,000 912	0,000 335	0,000 123
1	0,073 263	0,033 690	0,014 873	0,006 383	0,002 684	0,001 111
2	0,146 525	0,084 224	0,044 618	0,022 341	0,010 735	0,004 998
3	0,195 367	0,140 374	0,089 235	0,052 129	0,028 626	0,014 994
4	0,195 367	0,175 467	0,133 853	0,091 126	0,057 252	0,033 737
5	0,156 293	0,175 467	0,160 623	0,127 717	0,091 604	0,060 727
6	0,104 194	0,146 223	0,160 623	0,149 003	0,122 138	0,091 090
7	0,059 540	0,104 445	0,137 677	0,149 003	0,139 587	0,117 116
8	0,029 770	0,065 278	0,103 258	0,130 377	0,139 587	0,131 756
9	0,013 231	0,036 266	0,068 838	0,101 405	0,124 077	0,131 756
10	0,005 292	0,018 133	0,041 303	0,070 983	0,099 262	0,118 580
11	0,001 925	0,008 242	0,022 529	0,045 171	0,072 190	0,097 020
12	0,000 642	0,003 434	0,011 262	0,026 350	0,048 127	0,072 765
13	0,000 197	0,001 321	0,005 199	0,014 188	0,029 616	0,050 376
14	0,000 056	0,000 472	0,002 228	0,007 094	0,016 924	0,032 384
15	0,000 015	0,000 157	0,000 891	0,003 311	0,009 026	0,019 431
16	0,000 004	0,000 090	0,000 334	0,001 448	0,004 513	0,010 930
17	0,000 001	0,000 014	0,000 118	0,000 596	0,002 124	0,005 786
18		0,000 004	0,000 039	0,000 232	0,000 944	0,002 893
19		0,000 001	0,000 012	0,000 085	0,000 397	0,001 370
20			0,000 004	0,000 030	0,000 159	0,000 617
21			0,000 001	0,000 010	0,000 061	0,000 264
22				0,000 003	0,000 022	0,000 108
23				0,000 001	0,000 008	0,000 042
24					0,000 003	0,000 016
25					0,000 001	0,000 006
26						0,000 002
27						0,000 001

Tafel 7. Zufallszahlen

4357	4146	8353	9952	8004	7945	1530	5207	4730	1967
5339	7325	6862	7584	8634	3485	2278	5832	0612	8118
6583	8433	0717	0606	9284	2719	1888	2889	0285	2765
6564	3526	2171	3809	3428	5523	9078	0648	7768	3326
4811	1933	3763	6265	8931	0649	8085	6177	4450	2139
6931	7236	1230	0441	4013	1352	6563	1499	7332	3068
8755	3390	6120	7825	9005	7012	1643	9934	4044	7022
6742	2260	3443	0190	9278	1816	7697	7933	0067	2906
6655	3030	9014	6032	7574	1685	5258	3100	5358	1929
8514	4806	4124	9286	0449	5051	4772	4651	0038	1580
8135	5004	7299	8981	4689	1950	2271	2201	8344	3852
4414	6855	0127	5489	5157	6386	7492	3736	7164	0498
3727	7959	5056	5983	8021	0204	7616	4325	7454	5039
5434	7342	0314	7252	0067	2800	6292	4706	3454	6881
7195	8828	9869	2785	3186	8375	7414	7232	0401	2483
2705	8245	6251	9611	1077	0641	0195	7024	6202	3899
1547	8981	4972	1280	4286	5678	0338	8096	8284	7010
3424	1435	1354	7631	7260	7361	0151	8903	9056	8684
8969	7551	3695	4915	7921	2913	3840	9031	9747	9735
5225	7820	8898	2478	3342	9200	8836	7269	2992	6284
6432	9861	1516	2849	2539	2208	4595	8616	6170	5865
3085	5903	8319	2744	0814	7318	8619	7614	3265	5999
0264	1246	3687	9759	6995	6565	3949	1012	0179	0059
8710	2419	6065	0036	9650	2027	6042	5467	1839	5577
5736	9001	3132	4521	9973	5070	8078	4150	2276	5059
7529	1339	4802	5751	3785	7125	4922	8877	9530	6499
5133	7995	8030	7408	2186	0725	5554	5664	6791	9677
3170	9915	6960	2621	6718	4059	9919	1007	6469	5410
3024	0680	1127	8088	0200	5868	0084	6362	6808	3727
4398	3121	7749	8191	2087	8270	5233	3980	6774	8522
0082	5419	7659	2061	2506	7573	1157	3979	2309	0811
4351	6516	6814	5898	3973	8103	3616	2049	7843	0568
3268	0086	7580	1337	3884	5679	4830	4509	9587	2184
4391	8487	4884	1488	2249	6661	5774	7205	2717	0730
7328	0705	0652	9424	7082	8579	5647	5571	9667	5855
3835	2938	2671	4691	0559	8382	2825	4928	5379	8635
8731	4980	8674	4506	7262	8127	2022	2178	7463	4842
2995	7868	0683	3768	0625	9887	7060	0514	0034	8600
5597	9028	5660	5006	8325	9677	2169	3196	0357	7811
3081	5876	8150	1360	1868	9265	3277	8465	7502	6458
7406	4439	5683	6877	2920	9588	3002	2869	3746	3690
5969	9442	7696	7510	1620	4973	1911	1288	6160	9797
4765	9647	4364	1037	4975	1998	1359	1346	6125	5078
3219	2532	7577	2815	8696	9248	9410	9282	6572	3940
6906	8859	5044	8826	6218	3206	9034	0843	9832	2703
7993	3141	0103	4528	7988	4635	8478	9094	9077	5306
2549	3737	7686	0723	4505	6841	1379	6460	1869	5700
3672	7033	4844	0149	7412	6370	1884	0717	5740	8477
2217	0293	3978	5933	1032	5192	1732	2137	9357	5941
3162	9968	6369	1258	0416	4326	7840	6525	2608	5255

[entnommen dem Tafelwerk von Owen]

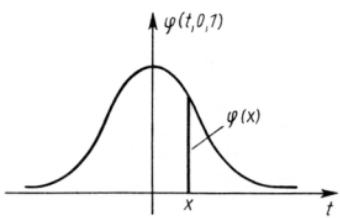


Bild zu Tafel 1

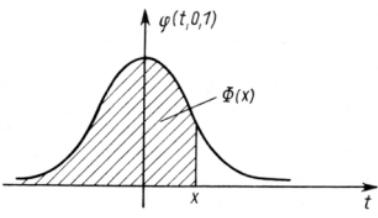


Bild zu Tafel 2

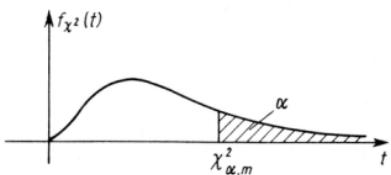


Bild zu Tafel 3

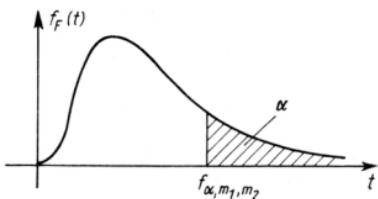


Bild zu Tafel 5

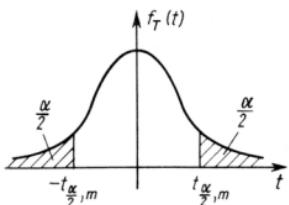


Bild zu Tafel 4

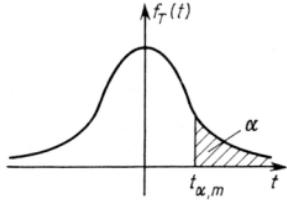


Bild zu Tafel 4

Literatur

- [1] Ahrens, H.: Varianzanalyse (WTB Nr. 49). Berlin: Akademie-Verlag 1967.
- [2] Bandemer, H. u.a.: Optimale Versuchsplanung. 2. Aufl. (WTB Nr. 131). Berlin: Akademie-Verlag 1976.
- [3] Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (Übers. a. d. Poln.). 10. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1980.
- [4] Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übers. a. d. Russ.). 8. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1980.
- [5] Lohse, H.; Ludwig, R.: Statistik für Forschung und Beruf. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1974.
- [6] Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Math. Schülerbüch. Nr. 63). 3. Aufl. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1980.
- [7] Müller, P. H. (Hrsg.): Lexikon der Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik). 3. überarb. u. ergänzte Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1979.
- [8] Müller, P. H.; Neumann, P.; Storm, R.: Tafeln der mathematischen Statistik. 3. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1980.
- [9] Pawłowski, Z.: Einführung in die mathematische Statistik (Übers. a. d. Poln.). Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1971.
- [10] Rao, C. R.: Lineare statistische Methoden und ihre Anwendungen (Übers. a. d. Engl.). Berlin: Akademie-Verlag 1973.
- [11] Rasch, D.: Elementare Einführung in die mathematische Statistik. 2. bericht. u. erw. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.
- [12] Renyi, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie. 6. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979.
- [13] Rosanow, J. A.: Wahrscheinlichkeitstheorie (WTB Nr. 68) (Übers. a. d. Russ.). 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1972.
- [14] Smirnow, N. W.; Dunin-Barkowski, I. W.: Mathematische Statistik in der Technik (Übers. a. d. Russ.). 3. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1973.
- [15] Storm, R.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Statistik. Statistische Qualitätskontrolle. 7. Aufl. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1979.
- [16] Sweschnikow, A. A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Aufgaben (Übers. a. d. Russ.). Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970.
- [17] Vincze, I.: Mathematische Statistik mit industriellen Anwendungen. Budapest: Akadémiai Kiadó 1971.
- [18] Weber, E.: Grundriß der biologischen Statistik. 7. Aufl. Jena: VEB Gustav Fischer Verlag 1972.
- [19] Wentzel, E. S.; Owtscharow, L. A.: Aufgabensammlung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übers. a. d. Russ.). 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag 1975.

Namen- und Sachregister

- Ablehnungsbereich 152
absolute Häufigkeit der Ereignisse 20
absolutes zentrales Moment 1. Ordnung 58
Abweichung, mittlere quadratische 118
Abweichungsquadrate, Summe der 174
allgemeines lineares Modell 179
Alternativhypotesen 151
Anpassungstest 166
Anzahl der Freiheitsgrade 90, 91, 92
a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten 31
a-priori-Wahrscheinlichkeiten 31
arithmetisches Mittel 89, 90, 117, 131
asymptotisch erwartungstreu 134
-, normalverteilt 104
atomares Ereignis 17
axiomatischer Aufbau 23
Axiomensystem von A.N. Kolmogorow 28
- balanciert 173
Bayessche Formel 31
bedingte Dichtefunktionen 82
- Einzelwahrscheinlichkeiten 80
- relative Häufigkeit 22, 23
- Wahrscheinlichkeit 28
bedingter Erwartungswert 86
Beljajew, J. K. 7
Bereich, kritischer 152
Bernoulli, Gesetz der großen Zahlen von 101,
 102
Bernoullisches Versuchsschema 61
beschreibende Statistik 110
Binomialverteilung 61, 87
- charakteristische Funktion 93, 94, 97
- - einer normalverteilten Zufallsgröße 95
Chintschin, Gesetz der großen Zahlen von 102
Chi-Quadrat-Anpassungstest 167
Chi-Quadrat (χ^2)-Verteilung 90, 132
- Dichtefunktion 43
Dichtefunktionen, bedingte 82
Dichtemittel 117, 118
Differenz der Ereignisse 14
diskrete Zufallsgröße 37, 40
- zweidimensionale Zufallsgröße 78
Dispersion 51
dreieckverteilte Zufallsgröße 88
 3σ -Regel 75
Dynkin, E. B. 7
- effektiv 136
effizient 134, 136
einander ausschließend 14
einfache Klassifikation 172
Einheiten 110
einseitige Fragestellung 155
Einzelwahrscheinlichkeiten 42
-, bedingte 80
Element der Stichprobe 129
Elementarereignis 17
empirische Kovarianz S_{XY} 125
- Regressionsgerade 181
- Standardabweichung 118
- Varianz 118, 131
- Verteilungsfunktion 130
empirischer Korrelationskoeffizient 125
- Regressionskoeffizient 181
- Variationskoeffizient 118, 120
entgegengesetztes Ereignis 14
Ereignis, atomares 17
- A unabhängig vom Ereignis B 32
- A , Wahrscheinlichkeit des 23
-, entgegengesetztes 14
-, komplementäres 14
-, sicheres 11
-, unmögliches 11
-, zufälliges 10
-, zusammen gesetztes 17
Ereignisfeld 16
-, Laplacesches 25
Ereignisse, absolute Häufigkeit der 20
-, Differenz der 14
-, günstige 26
-, mögliche 26
-, Multiplikationsregel für unabhängige 32
-, paarweise unabhängige 32
-, Produkt der 13
-, relative Häufigkeit der 20
-, Summe der 12
-, unabhängige 33
-, vollständig unabhängige 33
Ereignissen, vollständiges System von 15
Erlangverteilung 77, 89
Erwartung, mathematische 49, 50
erwartungstreu 134
Erwartungswert 49, 50
-, bedingter 86
erzeugende Funktion 98
Exponentialverteilung 70
Exzeß 58
- Faltung 89
-, n -fache 89

- Fehler 1. Art 153
 - 2. Art 153
- Fisher, R. A. 134
- Fishersche *F*-Verteilung 92, 132
 - Information 136
- Formel, Bayessche 31
 - für die totale Wahrscheinlichkeit 30
- Formeln, de Morgansche 15
- Fragestellung, einseitige 155
 - , zweiseitige 154
- Freiheitsgrade, Anzahl der 90, 91, 92
- Funktion, charakteristische 93, 94, 97
 - , erzeugende 98
- Funktionen von mehrdimensionalen Zufallsgrößen 86
 - - Zufallsgrößen 52
- F*-Verteilung, Fishersche 92, 132

- Gauß, C. F. 7
- geometrische Verteilung 68
 - Wahrscheinlichkeit 27
- geometrisches Mittel 117, 118
- Gesetz der großen Zahlen von Bernoulli 101, 102
 - - - Chintschin 102
- gewöhnliches Moment k -ter Ordnung 55
- Gichman, J. J. 7
- gleichmäßig stetig 69
- gleichmäßige diskrete Verteilung 68
 - stetige Verteilung 69
- Gliwenko, Satz von 131
- Gnedenko, B. W. 7
- Grenzwertsatz, zentraler 104
- große Zahlen, schwaches Gesetz der 107
 - , starkes Gesetz der 107
- Grundgesamtheit 128
- Grundverteilungen der mathematischen Statistik 89
- günstige Ereignisse 26
- Güte 154

- Häufigkeit, bedingte relative 22, 23
 - der Ereignisse, absolute 20
 - -, relative 20
 - , Stabilität der relativen 22, 102
- Häufigkeitspolygon 115
- Häufigkeitstabelle 111
- Hauptsatz der mathematischen Statistik 131
- Hilfsmodelle 9
- Histogramm 114
- hypergeometrische Verteilung 66
- Hypothesen, statistische 150

- idealer Würfel 25
- Information, Fishersche 136

- Inversion 194
- Irrtumswahrscheinlichkeit 140, 152, 153

- Klassen 111
- Klassenbreite 111
- Klassengrenze 111
- Klassenmitte 111
- Klassifikation, einfache 172
 - , n -fache 172
- Kolmogorow, A. N. 7
 - , Axiomensystem von 28
 - , Satz von 107
- komplementäres Ereignis 14
- Konfidenzgrenzen 140
- Konfidenzintervall 140
- Konfidenzniveau 140
- Konfidenzschätzung 140
 - , konkrete 141
- konkrete empirische Verteilungsfunktion 130
 - Konfidenzschätzung 141
 - Stichprobe 129
- konsistent 134, 135
- konvergent mit Wahrscheinlichkeit 1 102, 107
- Konvergenz in Wahrscheinlichkeit 102, 106
- Korrektur von Yates 192
- Korrelationsanalyse 179, 187
- Korrelationskoeffizient 84, 187
 - , empirischer 125
- Korrelationstabelle 123
- Kovarianz 85
 - , empirische 125
- Kovarianzmatrix 85
- kritischer Bereich 152

- Laplacesches Ereignisfeld 25
- Likelihood-Funktion 137
- Linienpolygon 115
- logarithmische Normalverteilung 77

- Mann-Whitney, *U*-Prüfverfahren von 193
- Maßzahlen, statistische 116
- mathematische Erwartung 49, 50
 - Statistik, Grundverteilungen der 89
 - -, Hauptsatz der 131
 - Stichprobe 129
- Maximum-Likelihood-Methode 137
- Maximum-Likelihood-Schätzung 138
- Median 59, 117
- mehrdimensionale Zufallsgrößen 76
- Merkmale 110
- Merkmalssachse 114
- Merkmalswerte 110
- meßbarer Raum 27
- Meßwerte 110

- Mittel, arithmetisches 89, 90, 117, 131
- , geometrisches 117, 118
- Mittelwert 117
- Mittelwertmaße 117
- mittlere quadratische Abweichung 118
- Modalwert 117, 118
- Modell I der Varianzanalyse 172
 - II der Varianzanalyse 176
 - allgemeines lineares 179
 - mit festen Effekten 172
 - zufälligen Effekten 177
- mögliche Ereignisse 26
- Moivre-Laplace, Satz von 105
- Moment 1. Ordnung, absolutes zentrales 58
 - k -ter Ordnung, gewöhnliches 55
 - -, zentrales 55
- Momentenmethode 139
- de Morgansche Formeln 15
- Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse 32
 - - Wahrscheinlichkeiten 29
- Multiplikationssatz 97

- n-fache Faltung** 89
 - Klassifikation 172
- normalverteilt, asymptotisch 104
- normalverteilte Zufallsgröße 94
 - -, charakteristische Funktion einer 95
- Normalverteilung 71, 88
 - , logarithmische 77
 - , zweidimensionale 81
- Null-Eins-Verteilung 60
- Nullhypothese 151

- obere Klassengrenze 111
- orthogonal 173

- paarweise unabhängige Ereignisse** 32
- parameterfrei 190
- passend 135
- Poisson, Satz von 102, 103
- Poissonverteilung 64, 88, 94, 207 (Taf.)
- Polynomialverteilung 79
- p-Quantil 57
- primäre Häufigkeitstabelle 111
 - Verteilungstafel 111
- Produkt der Ereignisse 13
- Protokoll 110
- Prüfgröße 153
- Prüfverfahren, verteilungsunabhängiges 167, 190
- Punktschätzfunktion 133
- Punktschätzung 133
- Punktschätzwerte 133

- Quantil der Ordnung p 57

- Randdichte 81
- Randverteilung der Zufallsgröße X bzw. Y 79
- Rao-Cramér, Satz von 136
- Raum, meßbarer 27
- Reduktionslage 113
- reduzierte Häufigkeitstabelle 111
- Regressionsanalyse 180
- Regressionsgerade, empirische 181
 - , theoretische 180
- Regressionskoeffizient, empirischer 181
 - , theoretischer 180
- relative Häufigkeit, bedingte 22, 23
 - - der Ereignisse 20
 - - Wirksamkeit 136
- relativen Häufigkeit, Stabilität der 22, 102
- Restvarianz 180

- Satz von Gliwenko 131
 - - Kolmogorow 107
 - - Moivre-Laplace 105
 - - Poisson 102, 103
 - - Rao-Cramér 136
- Schätzfunktionen 133
- Schiefe 58
- schwaches Gesetz der großen Zahlen 107
- sekundäre Häufigkeitstabelle 111
- sicheres Ereignis 11
- signifikant 152
- Signifikanzniveau 152
- Signifikanztest 154
- Spannweite 111, 120
- Sprunghöhen 43
- Sprungstellen 43
- Stabilität der relativen Häufigkeit 22, 102
- Standardabweichung 51
 - , empirische 118
- standardisierte Zufallsgröße 55
- Standardisierung 55
- starkes Gesetz der großen Zahlen 107
- Statistik, beschreibende 110
 - , Grundverteilungen der mathematischen 89
 - statistische Hypothesen 150
 - Maßzahlen 116
 - Tests 151
- stetige Zufallsgröße 43
 - zweidimensionale Zufallsgröße 78
- Stichprobe, Element der 129
 - , konkrete 129
 - , mathematische 129
- Stichprobenfunktionen 131
- Stochastik 7
- Streckendiagramm 115
- Streuung 117
- Streuungsmaße 118
- Student-Verteilung 91, 132
- Summe der Abweichungsquadrate 174

- Summe der Ereignisse 12
- Summen von unabhängigen Zufallsgrößen 87
- Summenpolygon 115

- Tafeln von Zufallszahlen 130, 209
- Testgröße 153
- Tests, statistische 151
- theoretische Regressionsgerade 181
 - Verteilungsfunktion 130
- theoretischer Regressionskoeffizient 180
- totale Wahrscheinlichkeit, Formel für die 30
- Trennschärfe 154
- Treppenpolygon 115
- Tschebyscheffsche Ungleichung 100
- t-Verteilung 91

- Umkehrformeln 100
- unabhängige Ereignisse 33
 - -, Multiplikationsregel für 32
 - Versuche 20
 - Zufallsgrößen 83
- Ungleichung, Tschebyscheffsche 100
- unmögliches Ereignis 11
- untere Klassengrenze 111
- Untersuchungsobjekt 110
- unvereinbar 14
- unverzerrt 134
- U-Prüfverfahren von Mann-Whitney 193
- Urliste 110, 122

- Varianz 51
 - , empirische 118, 131
- Varianzanalyse 170
- Varianztabelle 174
- Variationsbreite 111, 118, 120
- Variationskoeffizient 51
 - , empirischer 118, 120
- Variationsreihe 110
- Versuch, zufälliger 9
- Versuche, unabhängige 20
- Versuchsplan 172
- Versuchsschema, Bernoullisches 61
- Verteilung der Zufallsgröße 39
 - , geometrische 68
 - , gleichmäßige diskrete 68
 - , - stetige 77
 - , hypergeometrische 66
- verteilungsfrei 190
- Verteilungsfunktion 39, 82
 - , empirische 130
 - , konkrete empirische 130
 - , theoretische 130
- Verteilungstafel 111
- Verteilungsunabhängiges Prüfverfahren 167, 190

- Vertrauensgrenzen 140
- Vertrauensintervall 140
- Vertrauensniveau 140
- Vierfelder- χ^2 -Prüfverfahren 191
- Vierfelder-Tafeln 192
- vollständig unabhängige Ereignisse 33
- vollständiges System von Ereignissen 15

- Wahrscheinlichkeit 22
 - , bedingte 28
 - des Ereignisses A 23
 - , Formel für die totale 30
 - , geometrische 27
 - , Konvergenz in 102, 106
 - 1, konvergent mit 107
- Wahrscheinlichkeiten, a-posteriori- 31
- , a-priori 31
- , Multiplikationsregel für 29
- Wahrscheinlichkeitselement 45
- Wahrscheinlichkeitsfunktion 42
- Wahrscheinlichkeitsmaß 27
- Wahrscheinlichkeitsnetz 164
- Wahrscheinlichkeitsraum 27
- Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße 39
- Weibullverteilung 77
- wirksam 136
- Wirksamkeit, relative 136
- Wirkungsgrad 136
- Würfel, idealer 25

- Yates, Korrektur von 192

- Zahlen, schwaches Gesetz der großen 107
- , starkes Gesetz der großen 107
- zentraler Grenzwertsatz 104
- zentrales Moment k-ter Ordnung 55
- Zentralwert 117
- zufälliger Versuch 9
- zufälliges Ereignis 10
- Zufallsgröße 36, 37, 38
 - , binomialverteilte 98
 - , charakteristische Funktion einer normalverteilten 95
 - , diskrete 37, 40
 - , - zweidimensionale 78
 - , dreieckverteilte 88
 - , standardisierte 55
 - , stetige 43
 - , - zweidimensionale 78
 - , Verteilung der 39
 - , Wahrscheinlichkeitsverteilung der 39
 - , normalverteilte 94
 - X bzw. Y, Randverteilung der 79

- Zufallsgrößen, Funktionen von 52
 - , Funktionen von mehrdimensionalen 86
 - , mehrdimensionale 76
 - , Summen von unabhängigen 87
 - , unabhängige 83
- Zufallsstichprobe 130
- Zufallsvektor 76
- Zufallszahlen, Tafeln von 130, 209
- zusammengesetztes Ereignis 17
- zweidimensionale Normalverteilung 81
- Zweipunktnormalverteilung 60
- 2×2 Tafeln 191