

MATHEMATIK

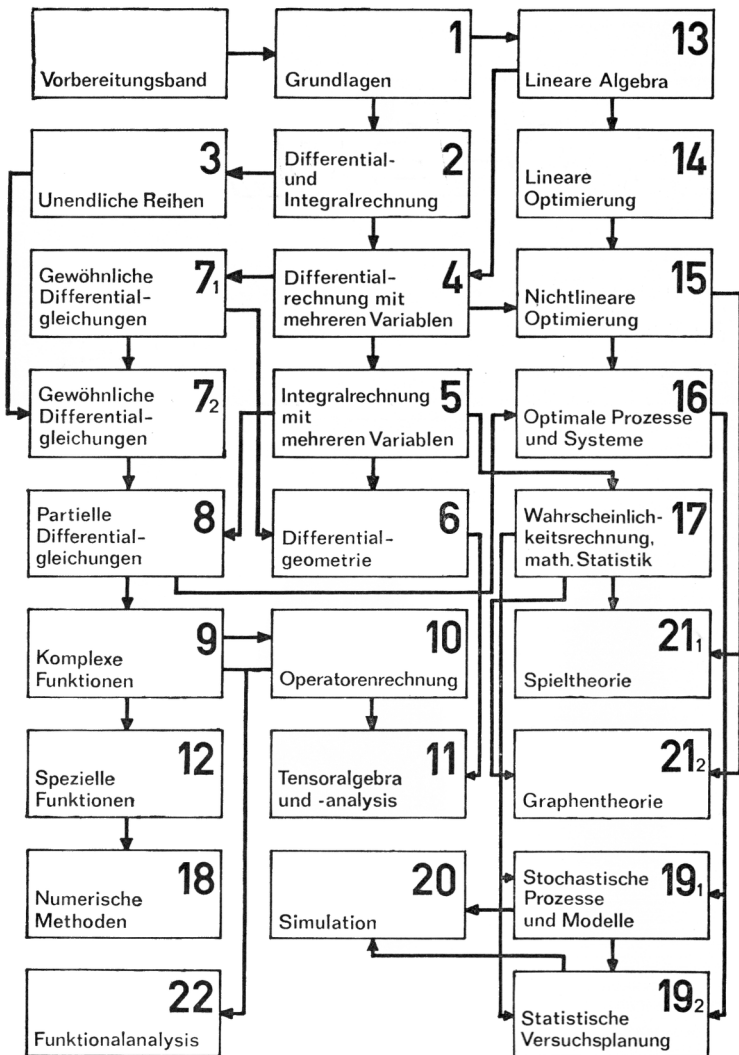
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

19/1

BEYER · GIRLICH · ZSCHIESCHE

Stochastische Prozesse und Modelle

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 19/1

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

PROF. DR. O. BEYER
PROF. DR. H.-J. GIRLICH
DR. DR. H.-U. ZSCHIESCHE

Stochastische Prozesse und Modelle



BSB B.G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

1978

Verantwortlicher Herausgeber:

Dr. rer. nat. Günter Zeidler, Dozent für Wirtschaftsmathematik an der Hochschule für Ökonomie
„Bruno Leuschner“ Berlin-Karlshorst

Autor der Abschnitte 1., 5., 6.:

Dr. sc. nat. O. Beyer, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke“
Magdeburg

Autor des Abschnittes 7.:

Dr. sc. nat. H.-J. Girlich, ordentlicher Professor an der Karl-Marx-Universität Leipzig

Autor der Abschnitte 2.-4.:

Dr. rer. nat. Dr. paed. H.-U. Zschiesche, Dozent an der Technischen Hochschule „Carl Schor-
lemmer“ Leuna-Merseburg

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1978

1. Auflage

VLN 294-375/36/78 · LSV 1074

Lektor: Ruth Stachorra

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig

Bestell-Nr. 665 786 8

DDR 9,30 M

Inhalt

1.	Einleitung	5
2.	Stochastische Prozesse	6
2.1.	Definition und Eigenschaften stochastischer Prozesse	6
2.2.	Beispiele für stochastische Prozesse	14
3.	Markowsche Prozesse	21
3.1.	Markowsche Ketten	21
3.2.	Diskrete Markowsche Prozesse	27
3.2.1.	Definition und Eigenschaften	27
3.2.2.	Geburts- und Todesprozesse	30
4.	Stationäre Prozesse	43
4.1.	Grundlegende Eigenschaften	43
4.2.	Spektraldarstellung	48
4.3.	Ein Anwendungsproblem	52
4.4.	Experimentelle Bestimmung von Parametern stochastischer Prozesse	57
5.	Einführung in die Bedienungstheorie	61
5.1.	Aufgabe der Bedienungstheorie	61
5.2.	Beschreibung eines Bedienungssystems	62
5.3.	Klassifizierung von Bedienungssystemen	63
5.4.	Poissonsche Bedienungssysteme	65
5.4.1.	Ein Poissonsches Verlustsystem	66
5.4.2.	Ein Poissonsches Wartesystem	68
5.5.	Überblick über einige weitere Methoden der Bedienungstheorie	71
6.	Einführung in die Zuverlässigkeitstheorie	72
6.1.	Aufgabe der Zuverlässigkeitstheorie	72
6.2.	Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Elements	73
6.2.1.	Zuverlässigkeitskenngrößen	73
6.2.2.	Spezielle Verteilungen	76
6.2.3.	Kenngrößenstatistik	78
6.3.	Einfache Ersatzmodelle	79
6.3.1.	Unverzögliche Erneuerung	79
6.3.2.	Verzögerte Erneuerung	81
6.3.3.	Verfügbarkeit	83
6.4.	Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems	84
6.4.1.	Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems durch Strukturanalyse	84
6.4.2.	Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems durch Zustandsanalyse	87
6.5.	Komplexe Ersatzmodelle	89
7.	Einführung in die Lagerhaltungstheorie	90
7.1.	Aufgabe der stochastischen Lagerhaltungstheorie	90
7.2.	Einflußfaktoren der Lagerhaltung	91
7.2.1.	Bedarf	91
7.2.2.	Lagerreaktion	94
7.2.3.	Beschaffung	95
7.2.4.	Kosten	96
7.3.	Periodische Lagerhaltungssysteme	97

7.3.1.	Ein periodisches Verlustsystem ohne Lieferverzögerung	97
7.3.2.	Ein periodisches Vormerkssystem mit konstanter Beschaffungszeit	102
7.3.3.	Verhaltenscharakteristiken	104
7.3.4.	Suboptimale Bestellregeln	108
7.4.	Poissonsche Lagerhaltungssysteme	111
7.4.1.	Ein Poissonsches Vormerkssystem mit konstanter Beschaffungszeit	112
7.4.2.	Ein Poissonsches Verlustsystem mit zufälliger Beschaffungszeit	115
7.5.	Optimale Lagerhaltung	116
Lösungen der Aufgaben		120
Literatur		122
Register		123

1. Einleitung

In den letzten beiden Jahrzehnten werden in zunehmendem Maße ebenso wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die mathematische Statistik auch die Theorie der stochastischen Prozesse und Klassen von stochastischen Modellen zur mathematischen Bearbeitung von Problemen der gesellschaftlichen Praxis eingesetzt. Das ist z. B. der Fall bei der Beschreibung von Rauschvorgängen in der Nachrichtentechnik, bei der Darstellung von volkswirtschaftlichen Wachstumsvorgängen, bei der Planung von Instandhaltungsmaßnahmen, bei der Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Erzeugnisses und bei Lagerhaltungsproblemen. Derartige Anwendungen sowie die damit verbundenen Fragestellungen der Praxis lieferten und liefern viele Impulse für die Entwicklung dieser Gebiete.

Die Theorie der stochastischen Prozesse, deren Entwicklung u. a. mit den Namen Markow, Wiener, Kolmogorow, Doob, Chintschin und Dynkin verbunden ist, beschäftigt sich mit der Problematik der quantitativen Analyse von dynamischen Vorgängen, bei deren Beschreibung zufällige Einflüsse zu berücksichtigen sind. Stochastische Modelle bauen in starkem Maße auf der Theorie der stochastischen Prozesse auf und sind mathematische Widerspiegelungen von speziellen Vorgängen, bei deren Modellierung zufällige Aspekte zu berücksichtigen sind. Beispiele von Klassen stochastischer Modelle sind die der Bedienungstheorie, bei deren Entwicklung u. a. Erlang, Palm, Chintschin und Gnedenko einen großen Beitrag geleistet haben, die Modelle der Zuverlässigkeitstheorie, deren Anfänge mit den Namen Lotka und Weibull verbunden sind, und die Modelle der Lagerhaltungstheorie, zu deren ersten Bearbeitern Arrow, Harris und Marschak zu zählen sind.

Durch ihre Bedeutung für die Praxis finden die Theorie der stochastischen Prozesse und gewisse Klassen von stochastischen Modellen immer mehr Eingang in die Ausbildung naturwissenschaftlicher, technischer und ökonomischer Fachrichtungen. Dabei kommt es in erster Linie darauf an, einen Überblick über diese Gebiete zu geben, wichtige Grundbegriffe zu vermitteln und das methodische Herangehen zu zeigen. Diese Zielstellung verfolgt auch der vorliegende Band der Reihe „Mathematik für Naturwissenschaftler, Ingenieure, Ökonomen und Landwirte“. Der Leser soll befähigt werden, weiterführende Literatur selbstständig durchzuarbeiten und sich mit Spezialisten dieser Gebiete austauschen zu können, wenn er entsprechende Aufgaben zu lösen hat.

Kapitel 2 gibt eine Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse. In den Kapiteln 3 und 4 werden zwei Klassen von stochastischen Prozessen, die Markowschen und die stationären Prozesse, vorgestellt. In den Kapiteln 5 bis 7 wird ein Überblick über einige für die Anwendung wichtige Klassen stochastischer Modelle gegeben. Es handelt sich dabei um ausgewählte Modelle der Bedienungstheorie (Kapitel 5), der Zuverlässigkeitstheorie (Kapitel 6) und der Lagerhaltungstheorie (Kapitel 7).

Bei der Darstellung wurde auf eine ausführliche Beweisführung verzichtet. Wesentliche Ergebnisse werden am Beispiel erläutert.

2. Stochastische Prozesse

Die Theorie der stochastischen Prozesse (zufälligen Funktionen oder Zufallsprozesse) ist eine der jüngsten Entwicklungsrichtungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie untersucht das Verhalten von Zufallsgrößen in Abhängigkeit von einem oder mehreren Parametern, z. B. der Zeit oder den Koordinaten eines Punktes im Raum, und leitet Gesetzmäßigkeiten her. Zufallsgrößen werden gewissermaßen in ihrer zeitlichen Entwicklung betrachtet (sofern der Parameter die Zeit ist). Die Theorie der stochastischen Prozesse ist heute für die Lösung vieler Aufgaben in Naturwissenschaften, Technik und Ökonomie, insbesondere auch in der Zuverlässigkeits-, Erneuerungs- und Lagerhaltungstheorie unentbehrlich geworden. Beispielsweise wird es in der Regelungstechnik durch ihre Anwendung erst möglich, die Einwirkung verschiedener zufälliger Einflüsse bzw. Störungen auf die Arbeit eines Systems zu berücksichtigen und die Stabilität der automatischen Geräte gegenüber Störungen zu sichern.

Es werden zunächst Begriffe und grundlegende Gesetzmäßigkeiten stochastischer Prozesse dargestellt. Anschließend werden Prozesse mit speziellen Eigenschaften eingehender betrachtet.

2.1. Definition und Eigenschaften stochastischer Prozesse

Vor einer genauen Begriffsbestimmung betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.1: Im Jahre 1826 beobachtete der englische Botaniker Brown unter dem Mikroskop das Verhalten kleiner Teilchen in einer Flüssigkeit. Er bemerkte, daß sie eine ungeordnete und zufällige „Zickzack-Bewegung“ ausführen. Wie sich herausstellte, kommt diese Bewegung unter dem Einfluß dauernder zufälliger Zusammenstöße mit Molekülen der Flüssigkeit zustande. Wir legen nun einmal ein räumliches Koordinatensystem (X, Y, Z) zugrunde und beobachten die Bewegung eines Teilchens, das sich zur Zeit $t_0 = 0$ im Koordinatenursprung befinden möge. Die Lage des Teilchens zur Zeit $t \geq 0$ wird durch die Koordinaten $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ beschrieben. In Folge der dauernden Zusammenstöße ist die Lage des Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ selbstverständlich nicht vorherbestimmbar, sondern zufälliger Art. $X(t)$, $Y(t)$ und $Z(t)$ sind somit für jeden festen Wert t Zufallsgrößen, wie man in der Wahrscheinlichkeitstheorie sagt. Die Menge der von t , $t \geq 0$, abhängigen Größen $X(t)$ (ebenso auch $Y(t)$ und $Z(t)$) bezeichnet man als stochastischen Prozeß.

Die ungeordnete Bewegung von Teilchen in einer Flüssigkeit ist unter dem Namen „Brownsche Bewegung“ bekannt. Mathematisch erforschten diesen Prozeß Einstein, Smoluchowski und Bachelier. Eine strenge Theorie entwickelte schließlich der Mathematiker N. Wiener.

Beispiel 2.2: Einen stochastischen Prozeß in der Technik der Werkstoffbearbeitung stellt das sogenannte „Istprofil“ eines bearbeiteten Werkstückes dar. Unter dem Mikroskop erkennt man, daß die Oberfläche niemals ganz glatt ist, sondern Gestaltsabweichungen zufälliger Art aufweist.

Bild 2.1 zeigt im Koordinatensystem einige mögliche Querschnittskurven des „Istprofils“, wobei $X(t)$ die Ordinate an der Stelle t bezeichnet. Wie man erkennt, ist $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, hinsichtlich aller möglichen Querschnittskurven für jeden Parameterwert t eine Zufallsgröße. Die Menge dieser Zufallsgrößen bilden einen sto-

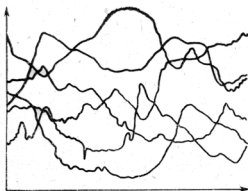


Bild 2.1. Oberflächenprofile von geschliffenen Stahlflächen nach Smirnow [24] (Vergrößerung waagrecht 1880fach und senkrecht 15000fach)

chastischen Prozeß. Stellt man bestimmte Anforderungen an die „Glätte“ der Oberfläche, dürfen spezifische Kennziffern des stochastischen Prozesses gewisse Toleranzgrenzen nicht überschreiten (vgl. [24]).

Beispiel 2.3: Für die Beurteilung der Auslastung einer Telefonzentrale ist die Untersuchung der in Abhängigkeit von der Zeit registrierten Anzahl von Ferngesprächen erforderlich. Die Beobachtung erstreckte sich jeweils über einen Tag. Die Gesprächsforderungen treffen zufällig oder, präziser gesagt, in zufälligen Zeitpunkten ein. Mit $X(t)$ werde die Gesamtzahl der bis zum Zeitpunkt t eingetroffenen Forderungen bezeichnet.

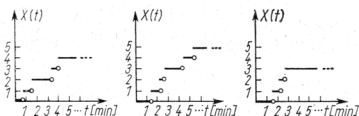


Bild 2.2. Zahl der registrierten Telefongespräche am Tagesbeginn dreier aufeinanderfolgender Tage

$X(t)$ ist für jeden Zeitpunkt des Tages eine Zufallsgröße. Die Anzahl der in Abhängigkeit der Zeit registrierten Gespräche ist ein stochastischer Prozeß, der im Gegensatz zu den bisher genannten Beispielen nur ganzzahlige nichtnegative Werte annehmen kann. Für die Beurteilung der Auslastung der Zentrale ist u. a. die Ermittlung folgender Parameter wichtig:

- Wahrscheinlichkeit, daß bis zum Zeitpunkt t höchstens m Gespräche vermittelt werden,
- Erwartungswert (mittlere Anzahl) der bis zum Zeitpunkt t vermittelten Gespräche,
- Wahrscheinlichkeit, daß n Leitungen bzw. alle zur Verfügung stehenden Leitungen besetzt sind (nach einer gewissen Anlaufphase).

Weitere Beispiele für stochastische Prozesse sind in der folgenden Übersicht zusammengefaßt. Dabei ist angegeben, für welche Probleme ihre Untersuchung von Bedeutung ist.

Stochastische Prozesse	Bedeutung
1. Lufttemperatur in Abhängigkeit der Zeit an einem Ort	Klimatische Untersuchungen
2. Signale, die bei der Übertragung durch Störungen überlagert werden	Filtration des Signals
3. Krängungswinkel eines Schiffes unter dem Einfluß der Wellenbewegung	Konstruktion geeigneter Feuerleitergeräte zur Gewährleistung der Treffsicherheit bei Bordwaffen
4. Schlingerbewegung eines Flugzeuges in Turbulenzen	Bau geeigneter Stabilisatoren
5. Auf ein System einwirkende zufällige Störungen	Optimale Steuerung eines stochastischen dynamischen Systems
6. Bedarf einer Ware in Abhängigkeit der Zeit	Vorhersage des zukünftigen Bedarfs, Extrapolation
7. Gewichtszunahme von Tieren in Abhängigkeit der Zeit	Aufstellung optimaler Futterpläne

Die Anzahl der Beispiele läßt sich beliebig erweitern. In allen genannten Fällen handelt es sich um eine Menge von Zufallsgrößen $X(t)$, die von einem nichtzufälligen Parameter t einer bestimmten Parametermenge I abhängt. Um jedoch das Neue, das mit dem Begriff des stochastischen Prozesses verbunden ist, sichtbar zu machen, betrachten wir noch einen anderen Aspekt.

In den Bildern 2.1 und 2.2 erkennt man, daß ein stochastischer Prozeß auch aus einer Menge reeller Funktionen besteht. Jeder Beobachtung entspricht in der Darstellung eine Kurve. In den Abbildungen sind nur wenige eingezeichnet.

Es ergibt sich eine Analogie zum Begriff einer Zufallsgröße. In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine Zufallsgröße als Abbildung $X = X(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) erklärt, wobei die ω sog. Elementarereignisse eines Raumes Ω sind. Jedem Elementarereignis ω wird ein Zahlenwert x der reellen Zahlengeraden zugeordnet. Bei einem stochastischen Prozeß geht man ebenfalls von einem Raum Ω von Elementarereignissen ω aus. Wir ordnen jedoch jedem Elementarereignis eine nichtzufällige Funktion $x(t)$ eines nichtzufälligen Parameters t ($t \in I$) zu. Jede solche Funktion heißt Realisierung oder *Trajektorie* des Prozesses. Faßt man beide Gesichtspunkte zusammen, gelangt man zu der folgenden

Definition 2.1: Ein **stochastischer Prozeß** ist eine Abbildung $X(\omega, t)$ aus $\Omega \times I$ auf die Menge der reellen Zahlen, die für jeden festen nichtzufälligen Parameterwert $t \in I$ eine Zufallsgröße $X(t)$ und für jedes fixierte $\omega \in \Omega$ eine gewöhnliche reelle Funktion $x(t)$ darstellt.¹⁾

Kehren wir zur Erläuterung der Definition nochmals zum Beispiel 2.3 zurück und betrachten die Tabelle 2.1 zu Bild 2.2.

¹⁾ Es gibt auch mehrdimensionale und komplexwertige stochastische Prozesse. Sie werden im Rahmen dieses Buches nicht behandelt.

Tabelle 2.1

t	Zahl der bis zum Zeitpunkt t registrierten Gespräche			
	1. Tag	2. Tag	3. Tag	...
1	1	0	0	...
2	2	1	1	...
3	2	3	3	...
4	3	3	3	...
5	4	4	3	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...

Man erkennt folgende Zusammenhänge:

Elementarereignis:	\rightarrow Trajektorie $x(t)$:
Beobachtung eines konkreten Tagesverlaufs	Funktionsmäßiger Ausdruck des konkreten Verlaufs
$t = t_1$:	\rightarrow Zufallsgröße $X(t_1)$:
Fixierung eines konstanten Zeitpunktes an jedem Tag	Zahl der bis zum Zeitpunkt t_1 registrierten Gespräche an jedem Tag

Ω besteht, wie man leicht einsieht, in diesem Beispiel aus einer abzählbaren Menge von Elementarereignissen.

Ebenso wie bei Zufallsgrößen an Stelle von $X(\omega)$ einfach X geschrieben wird, ist es auch üblich, einen stochastischen Prozeß $\{X(\omega, t), t \in I\}$ kürzer in der Form $\{X(t), t \in I\}$ zu symbolisieren.

Stochastische Prozesse werden entsprechend der Parametermenge I und der Wertemenge \mathfrak{X} , auf welcher $X(t)$ variiert, folgendermaßen klassifiziert:

Tabelle 2.2

Parametermenge I	Wertemenge \mathfrak{X}	Bezeichnung des Prozesses	Symbolisierung
stetig	beliebig	Stochastischer Prozeß	} $\{X(t), t \in I\}$
		Zufälliger Prozeß	
stetig	diskret	Diskreter stochastischer Prozeß	
		Diskreter Prozeß	} $\{X(t), t = t_0, t_1, \dots\}$ oder $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$
diskret	beliebig	Zufallsfolge	
		Zufällige Folge	
diskret	diskret	Zufällige Kette	

Ein Beispiel für einen diskreten stochastischen Prozeß lernten wir bereits in der Anzahl der eintreffenden Gespräche in einer Telefonzentrale kennen. Weitere derartige Prozesse werden im 3. Kapitel unter der Bezeichnung Geburts- und Todesprozesse behandelt.

Oftmals wird bei praktischen Problemstellungen an Stelle eines stochastischen Prozesses näherungsweise eine zufällige Folge untersucht. Es ist beispielsweise ausreichend, bei der Kontrolle der Gewichtszunahme von Tieren Messungen nur in bestimmten Abständen, etwa jeweils nach einem Monat, und nicht kontinuierlich durchzuführen; Analoges gilt für statistische Erhebungen in der Ökonomie.

Zufällige Ketten lassen sich infolge ihrer übersichtlichen Struktur relativ leicht mathematisch behandeln.

Beispiel 2.4: Betrachtet werde der Bedarf einer Ware (z. B. Kühlschränke) in einem Kaufhaus. Im n -ten Monat ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) werden ξ_n Kühlschränke benötigt ($\xi_0 \equiv 0$). Alle ξ_n können in der Praxis näherungsweise als unabhängige Zufallsgrößen angesehen werden. Dann stellt der kumulative Bedarf X_n in n Monaten eine zufällige Kette $\{X_n; n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dar. Dabei gilt

$$X_n = \sum_{i=0}^n \xi_i.$$

Ist der erwartete Bedarf im n -ten Monat a_n , dann gilt für den erwarteten kumulativen Bedarf in n Monaten

$$E(X_n) = E(\xi_1 + \dots + \xi_n) = E(\xi_1) + \dots + E(\xi_n) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Spezielle zufällige Ketten werden ausführlich im 3. Kapitel behandelt. Sie sind unter anderem wichtig bei der Lösung mathematischer, physikalischer und technischer Probleme mit Hilfe von Simulation auf digitalen Rechnern (z. B. bei der näherungsweise Lösung von Randwertproblemen).

Es ist nun die Frage zu beantworten, wie ein stochastischer Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ vollständig charakterisiert und festgelegt werden kann. Zunächst betrachte man den Prozeß an einem beliebigen aber festen Zeitpunkt t_1 .

$X(t_1)$ ist eine Zufallsgröße, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Angabe der Verteilungsfunktion

$$F_{t_1}(x_1) = P(X(t_1) < x_1) \quad (2.1)$$

bestimmt ist. Man betrachte den Prozeß jetzt gleichzeitig an zwei beliebigen Stellen t_1, t_2 :

$$\{X(t_1); X(t_2)\}$$

ist ein zweidimensionaler Zufallsvektor, der eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt, die durch die Verteilungsfunktion

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2) \quad (2.2)$$

festgelegt ist. Schließlich betrachte man $X(t)$ gleichzeitig an n verschiedenen Stellen t_1, t_2, \dots, t_n ($n \geq 1$):

$$\{X(t_1); X(t_2); \dots; X(t_n)\}$$

ist ein n -dimensionaler Zufallsvektor, dessen Verteilung durch Angabe der n -dimensionalen Verteilungsfunktion

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n) \quad (2.3)$$

bestimmt ist.

Durch Angabe der n -dimensionalen Verteilungsfunktion (2.3) für beliebige n -tupel $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ ist ein stochastischer Prozeß bereits in gewissem Grade festgelegt. Es ist plausibel, daß er um so vollständiger charakterisiert wird, je größer n ist.

Definition 2.2: Die Gesamtheit aller endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n)$$

mit beliebigen $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ und beliebigen endlichen n nennt man die dem Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ **zugeordnete Verteilung**.

Wesentlich ist, daß Prozesse mit gleicher zugeordneter Verteilung so geringfügige Unterschiede aufweisen, daß diese in der Praxis unberücksichtigt bleiben können. Man bezeichnet sie als *äquivalente stochastische Prozesse*.

Beispiel 2.5: Wir betrachten die beiden stochastischen Prozesse

$$X(\omega, t) = 0, \quad t \in I, \quad \omega \in \Omega,$$

und

$$Y(\omega, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = \omega, \\ 0 & \text{für } t \neq \omega, \end{cases} \quad t \in I, \quad \omega \in \Omega. \quad (2.4)$$

Für beide Prozesse sei $I = [0, \infty)$ und $\Omega = [0, 1]$. Beide Prozesse besitzen die zugeordnete Verteilung

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Die Realisierungen des Prozesses $X(\omega, t)$ lauten $x(t) = 0$ für alle ω . $Y(\omega, t)$ besitzt die Realisierungen

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq \omega, \\ 1 & \text{für } t = \omega. \end{cases}$$

Für jeden Wert ω unterscheiden sich die Trajektorien beider Prozesse also jeweils nur in einem Punkt.

Die Art der zugeordneten Verteilung stellt ein weiteres wichtiges Unterscheidungsmerkmal stochastischer Prozesse dar. Ausgehend hiervon werden Prozesse, deren zugeordnete Verteilung aus n -dimensionalen Normalverteilungen besteht, als *Gaußprozesse* bezeichnet.

Im allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, alle n -dimensionalen Verteilungsfunktionen (2.3) anzugeben. Man wird sich dann auf die Angabe bestimmter Parameter des Prozesses beschränken, ähnlich wie man bei der Charakterisierung von Zufallsgrößen oftmals nur Momente und nicht die Verteilungsfunktion zur Verfügung hat. Für Zufallsgrößen X sind Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $\sigma^2(X)$ ¹⁾ die wichtigsten Parameter. Diese Begriffe lassen sich unmittelbar auf stochastische Prozesse übertragen.

1) In der Literatur auch mit $D^2(X)$ bezeichnet (z.B. Bd. 17).

Definition 2.3: Als **Mittelwertfunktion** eines stochastischen Prozesses $\{X(t), t \in I\}$ bezeichnet man eine nichtzufällige Funktion $m_x(t)$, die für jeden Parameterwert $t = t_1$ gleich dem Erwartungswert $E[X(t_1)]$ der Zufallsgröße $X(t_1)$ ist.

Ähnlich wie sich alle Werte einer Zufallsgröße um ihren Mittelwert gruppieren stellt $m_x(t)$ eine „mittlere“ Funktion dar, um die sich sämtliche Trajektorien des Prozesses anordnen. Existieren eindimensionale Dichtefunktionen $f_t(x)$ zu den Zufallsgrößen $X(t)$ ($t \in I$), so kann man auch schreiben

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx, \quad t \in I. \quad (2.6)$$

Definition 2.4: Als **Varianzfunktion** eines stochastischen Prozesses $\{X(t), t \in I\}$ bezeichnet man eine nichtzufällige Funktion $\sigma_x^2(t)$, die an jeder Stelle $t = t_1$ gleich der Varianz $\sigma^2[X(t_1)]$ der Zufallsgröße $X(t_1)$ ist.

Ähnlich wie die Varianz einer Zufallsgröße eine Vorstellung von der Abweichung der Werte vom Erwartungswert vermittelt, erhält man durch die Varianzfunktion ein Bild von der Abweichung der Trajektorien vom mittleren Verlauf des stochastischen Prozesses. Es ist

$$\sigma_x^2(t) = E[X(t) - m_x(t)]^2. \quad (2.7)$$

Existieren alle eindimensionalen Dichtefunktionen $f_t(x)$, gilt

$$\sigma_x^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t))^2 f_t(x) dx. \quad (2.8)$$

$\sigma_x(t) = \sqrt{\sigma_x^2(t)}$ bezeichnet man als **Standardabweichung** des Prozesses.

Auch wenn $m_x(t)$ und $\sigma_x^2(t)$ existieren, reichen sie jedoch selbst für eine sehr grobe Beschreibung eines stochastischen Prozesses nicht aus.¹⁾ Das liegt vor allem daran, daß die Zufallsgrößen $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ ($t_1, t_2, \dots, t_n \in I$) voneinander abhängen können. Die bisher genannten Parameter lassen diesen Zusammenhang unberücksichtigt. Eine geeignete Größe hierfür ist in gewissem Maße die sogenannte Autokorrelationsfunktion, wenn sie existiert. Wir betrachten den stochastischen Prozeß zunächst an zwei beliebigen aber festen Stellen t_1, t_2 . Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (vgl. Band 17) ist bekannt, daß sich der Zusammenhang von $X_1 = X(t_1)$ und $X_2 = X(t_2)$ durch die Kovarianz

$$\text{cov}(X_1 X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))] \quad (2.9)$$

ausdrücken läßt. Durchlaufen t_1 und t_2 alle Werte der Parametermenge I unabhängig voneinander, erhält man eine Funktion zweier Veränderlicher.

Definition 2.5: Die Funktion

$$k_x(s, t) = E[(X(s) - m_x(s))(X(t) - m_x(t))], \quad s, t \in I, \quad (2.10)$$

heißt **Autokorrelationsfunktion**²⁾ (oder einfach **Korrelationsfunktion**) des Prozesses $\{X(t), t \in I\}$.

¹⁾ $m_x(t)$ und $\sigma_x^2(t)$ existieren nicht für jeden beliebigen Prozeß, weil Erwartungswert und Varianz nicht für alle Zufallsgrößen definiert sind (vgl. Bd. 17).

²⁾ Der Begriff Kovarianzfunktion ist ebenfalls gebräuchlich.

Bei Existenz zweidimensionaler Dichtefunktionen $f_{st}(x_1, x_2)$ kann $k_x(s, t)$ durch

$$k_x(s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1(t) - m_x(t))(x_2(s) - m_x(s)) f_{st}(x_1, x_2) \, ds \, dt$$

ermittelt werden. Die Funktion

$$r_x(s, t) = \frac{k_x(s, t)}{\sqrt{\sigma_x^2(s) \sigma_x^2(t)}} \quad (2.11)$$

bezeichnet man als *normierte Korrelationsfunktion*.

In den nachfolgenden Sätzen sind einige wichtige Eigenschaften von Korrelationsfunktionen zusammengefaßt.

Satz 2.1: a) Die Korrelationsfunktion eines stochastischen Prozesses ist eine bezüglich s und t symmetrische Funktion:

$$k_x(s, t) = k_x(t, s), \quad s, t \in I. \quad (2.12)$$

b) Es ist

$$k_x(t, t) = \sigma_x^2(t). \quad (2.13)$$

Beweis: a) folgt unmittelbar aus der Definition 2.5, da die Reihenfolge der Faktoren bei der Erwartungswertbildung vertauschbar ist.

Zum Beweis von b) setzt man in (2.10) $t = s$. Dann folgt

$$k_x(t, t) = E[X(t) - m_x(t)]^2 = \sigma_x^2(t).$$

Satz 2.2: Zwei Prozesse $\{X(t), t \in I\}$ und $\{Y(t), t \in I\}$ mit $Y(t) = X(t) + f(t)$, die sich nur durch eine nichtzufällige Funktion $f(t)$ unterscheiden, besitzen dieselbe Korrelationsfunktion.

Beweis: Sind $m_y(t)$ und $k_y(s, t)$ Mittelwert- und Korrelationsfunktion von $\{Y(t), t \in I\}$, so folgt unter Berücksichtigung von

$$m_y(t) = m_x(t) + f(t)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} k_y(s, t) &= E[(Y(s) - m_y(s))(Y(t) - m_y(t))] \\ &= E[(X(s) + f(s) - m_x(s) - f(s))(X(t) + f(t) - m_x(t) - f(t))] \\ &= E[(X(s) - m_x(s))(X(t) - m_x(t))] \\ &= k_x(s, t). \end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß die Prozesse $\{X(t), t \in I\}$ und $\{X(t) - m_x(t), t \in I\}$ gleiche Korrelationsfunktionen haben. Beim Operieren mit stochastischen Prozessen kann man daher oftmals ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Mittelwertfunktion gleich null annehmen.

Aufgabe 2.1: Zeigen Sie

(1) Für beliebige reelle Zahlen z_i und beliebige Werte t_i ($i = 1, \dots, n$) gilt

$$\sum_{i,j=1}^n z_i z_j k_x(t_i, t_j) \geq 0. \quad (2.14)$$

(2) Für alle $s, t \in I$ ist

$$k_x(s, t)^2 \leq k_x(s, s) k_x(t, t). \quad (2.15)$$

Aufgabe 2.2: Gegeben sei ein Zufallsprozeß $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$, mit $X(t) = Xt$. X ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit $E(X) = 0$ und $\sigma^2(X) = a^2$ ($a \neq 0$). Bestimmen Sie $m_x(t)$, $\sigma_x^2(t)$ und $k_x(s, t)$.

Die Kenntnis von Mittelwert- und Korrelationsfunktion reicht zur Behandlung bestimmter Probleme bereits aus. Ein Beispiel ist die in Kapitel 4 betrachtete Extrapolationsaufgabe (vgl. Seite 53 ff.). Es wurden auch eine Analysis stochastischer Prozesse entwickelt und verschiedene Stetigkeits-, Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitsbegriffe eingeführt. Im Rahmen dieses Buches wird hierauf nicht eingegangen. Weiterführende Darstellungen findet der Leser in [11], [21], [28] und [31].

2.2. Beispiele für stochastische Prozesse

Beispiel 2.6: Prozesse mit homogenen unabhängigen Zuwächsen. Wir knüpfen an das Beispiel 2.3 an. Die Telefonanrufe bilden eine Folge gleichartiger zufälliger Ereignisse, die im Moment ihres Eintreffens in ihrer zeitlichen Reihenfolge registriert werden. $X(t)$ sei, wie bereits erwähnt, die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t eintretenden Ereignisse (Telefonanrufe), wobei diese ab $t = 0$ gezählt werden. $\{X(t), t \geq 0\}$ ist ein diskreter Prozeß mit den Werten $m = 0, 1, 2, \dots$. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall $[0, t)$ genau m Ereignisse (Anrufe) erfolgen, werde mit $p_m(t)$ bezeichnet. Es sind nun näherungsweise zwei Eigenschaften erfüllt, die man als „Fehlen einer Nachwirkung“ und „Homogenität“ bezeichnet.

(1) Das Fehlen einer Nachwirkung besagt, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintritts einer bestimmten Anzahl m von Ereignissen in einem beliebigen Zeitabschnitt $[t_i, t_{i+1})$ mit $0 \leq t_i < t_{i+1} < +\infty$ nicht davon abhängig ist, wie viele Ereignisse vor dem Zeitpunkt t_i auftraten. Für nichtüberschneidende Intervalle

$$[t_0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-1}, t_n), \quad 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty,$$

bilden demnach die Zuwächse

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

unabhängige Zufallsgrößen. Allgemein sagt man

Definition 2.6: Ein Prozeß $\{X(t), t \in I\}$, für den bei beliebiger Zerlegung $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ($t_0, \dots, t_n, t_i \in I$) die Zuwächse

$$\Delta X_i = X(t_i) - X(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

unabhängig sind, heißt **Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen**.

(2) Die Homogenität besagt, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintritts einer bestimmten Zahl von Ereignissen in einem beliebigen Intervall $[t_i, t_{i+1})$ mit $0 \leq t_i < t_{i+1} < +\infty$ nur von der Länge, nicht aber von der speziellen Lage des Intervalls abhängig ist. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Zuwächse gleicher Intervalllänge sind gleich. Allgemein sagt man:

Definition 2.7: Ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen $\{X(t), t \in I\}$ heißt **Prozeß mit homogenen unabhängigen Zuwächsen**, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zuwächse

$$\Delta X_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$$

nur von der Differenz $t_i - t_{i-1}$, aber nicht von der Lage der Werte $t_i > t_{i-1}$ ($t_i, t_{i-1} \in I$) abhängt.

Hinsichtlich der Folge der Ereignisse ist es unwesentlich, zu welchem Zeitpunkt $t = t_0$ mit der Registrierung der Ereignisse begonnen wird. Denn sind $[t_0, t_1)$, $[t'_0, t'_1)$ zwei Intervalle gleicher Länge Δt , ist die Wahrscheinlichkeit, dieselbe Anzahl m von Ereignissen in beiden Intervallen anzutreffen, gleich. Es gilt also

$$P(X(t_1) - X(t_0) = m) = P(X(t'_1) - X(t'_0) = m) = p_m(\Delta t).$$

Man kann somit $t_0 = 0$ setzen.

Ein großer Teil der in diesem Buch betrachteten Prozesse ist dieser Art.

Aufgabe 2.3: Zeigen Sie, daß die in Beispiel 2.4 definierte Kette unabhängige Zuwächse besitzt.

Beispiel 2.7: Poissonsche Prozesse. Die Folge der zufällig eintreffenden Telefongespräche in einer Telefonzentrale ist „ordinär“. Diese Eigenschaft äußert sich in der praktischen Unmöglichkeit des gleichzeitigen Eintretens zweier oder mehrerer Ereignisse. Bezeichnet $p_{>1}(\Delta t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in Δt mehr als ein Ereignis eintritt, so läßt sie sich mathematisch durch die Beziehung $p_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$ formulieren. $o(\Delta t)$ ist eine Größe, die allein durch die Eigenschaft

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

charakterisiert wird; man sagt daher auch, daß $o(\Delta t)$ von höherer Ordnung als Δt ist (gegen null strebt). Das Symbol $o(\Delta t)$ wird „klein- o von Δt “ oder „kleines Landau-Symbol von Δt “ gelesen (vgl. mit Bd. 18, S. 55). Für das Rechnen mit diesen Größen gelten einige Besonderheiten, wie z. B. $k \cdot o(\Delta t) = o(\Delta t)$, $o(\Delta t) \pm o(\Delta t) = o(\Delta t)$, ohne daß daraus jedoch $o(\Delta t) = 0$ folgt. Als Beispiele für $o(\Delta t)$ seien $\Delta t^2, \Delta t^3, \dots$ genannt.

Es werde nun ganz allgemein eine Folge von zufällig eintretenden Ereignissen betrachtet, die homogen, ohne Nachwirkung und ordinär ist. Dann läßt sich zeigen, daß $\{X(t), t \geq 0\}$ ein sogenannter *Poissonscher Prozeß* ist (vgl. [24]).

Definition 2.8: Ein diskreter stochastischer Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$ mit den Werten $m = 0, 1, 2, \dots$ wird **Poissonscher Prozeß** mit der Intensität λ genannt, wenn

- (1) $P(X(0) = 0) = 1$ gilt,
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Prozeß mit homogenen unabhängigen Zuwächsen ist und
- (3) für ein beliebiges t ($0 \leq t < \infty$) $X(t)$ eine poissonverteilte Zufallsgröße mit

$$p_m(t) = P(X(t) = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

ist.

Die Intensität λ gibt die durchschnittliche Anzahl (Erwartungswert) der pro Zeiteinheit eintretenden Ereignisse an.

Somit läßt sich Aufgabe a) des Beispiels 2.3 lösen. Durch (2.16) sind die ein-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des betrachteten Prozesses gegeben. Werden pro Zeiteinheit durchschnittlich λ Gespräche geführt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß bis zum Zeitpunkt t höchstens m Gespräche vermittelt werden,

$$\sum_{i=0}^m p_i(t).$$

In einem Postamt wurde die Anzahl der pro Minute aufgegebenen Telegramme registriert. Die ausgezogene Linie in Bild 2.3 zeigt die empirisch ermittelte Verteilung, die gestrichelte entspricht einer theoretischen Verteilung mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p_m = \frac{e^{-0,47}(0,47)^m}{m!}.$$

Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Man kann daher annehmen, daß die Anzahl der in einem Intervall $[0, t)$ aufgegebenen Telegramme einen Poissonschen Prozeß bildet.

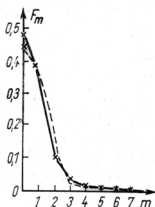


Bild 2.3
Verteilung der in einem Postamt aufgegebenen Telegramme

Parameter und wichtige Eigenschaften dieser speziellen Klasse von Prozessen mit homogenen unabhängigen Zuwächsen lassen sich unmittelbar herleiten.

Aus Band 17 ist bekannt, daß eine poissonverteilte Zufallsgröße X mit

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

den Erwartungswert λ und die Varianz λ besitzt. Somit ist unmittelbar ersichtlich, daß Mittelwert- bzw. Varianzfunktion

$$m_x(t) = \lambda t \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x^2(t) = \lambda t$$

lauten.

In Aufgabe b) des Beispiels 2.3 wurde nach dem Erwartungswert der bis zum Zeitpunkt t vermittelten Gespräche gefragt. Bei gegebenem λ kann $m_x(t)$ unmittelbar angegeben werden.

Die Korrelationsfunktion $k_x(s, t)$ läßt sich folgendermaßen finden. Zunächst sei daran erinnert, daß man an Stelle von $\{X(t), t \geq 0\}$ von einem Prozeß $\{Y(t), t \geq 0\}$ mit $Y(t) = X(t) - \lambda t$ ausgehen kann. Nach Satz 2.1 besitzen beide Prozesse dieselbe Korrelationsfunktion. Nun ist aber

$$m_y(t) = 0, \quad \sigma_y^2(t) = \lambda t. \quad (2.17)$$

Es sei zunächst $s \geq t$. Unter Berücksichtigung von $Y(s) = Y(t) + Y(s) - Y(t)$ folgt für die Korrelationsfunktion des Prozesses $\{Y(t), t \geq 0\}$

$$\begin{aligned} k_y(s, t) &= E[Y(s) Y(t)] \\ &= E\{[Y(t) + (Y(s) - Y(t))] Y(t)\} \\ &= E[Y^2(t)] + E\{Y(t) [Y(s) - Y(t)]\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wegen $Y(0) = 0$, der Unabhängigkeit der Zuwächse und $E[Y(t)] = 0$ ist

$$\begin{aligned} E\{Y(t) [Y(s) - Y(t)]\} &= E\{[Y(t) - Y(0)] [Y(s) - Y(t)]\} \\ &= E[Y(t) - Y(0)] E[Y(s) - Y(t)] = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Somit folgt aus (2.18) unter Berücksichtigung von (2.17) und (2.19)

$$k_y(s, t) = \lambda t = k_x(s, t). \quad (2.20)$$

Für $t \geq s$ erhält man entsprechend

$$* \quad k_x(s, t) = k_y(s, t) = \lambda s. \quad (2.21)$$

Faßt man beide Beziehungen (2.20) und (2.21) zusammen, ergibt sich für die Korrelationsfunktion eines Poissonschen Prozesses mit der Intensität λ

$$k_x(s, t) = \lambda \min(s, t).$$

Für einen Poissonschen Prozeß lassen sich leicht die zwei- und mehrdimensionalen Verteilungen angeben. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei Zeitpunkte s und t und bestimmen zunächst die durch die Zufallsgrößen $X(s)$ und $X(t)$ erzeugten zweidimensionalen Verteilungen. Hierfür genügt es, für alle ganzzahligen Werte $m_s, m_t \geq 0$ die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X(s) = m_s, X(t) = m_t)$$

anzugeben. Da $\{X(t), t \geq 0\}$ nach Voraussetzung ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen und $X(0) = 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} P(X(s) = m_s, X(t) = m_t) &= P(X(s) - X(0) = m_s, X(t) - X(s) = m_t - m_s) \\ &= P(X(s) = m_s) P(X(t) - X(s) = m_t - m_s). \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$P(X(s) = m_s, X(t) = m_t) = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{m_s}}{m_s!} \frac{e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^{m_t-m_s}}{(m_t-m_s)!}.$$

In ähnlicher Weise kann man alle drei- und höherdimensionalen Verteilungen bestimmen.

Betrachten wir nun noch den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen bei einem Poissonschen Prozeß. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem beliebigen Intervall $[t_0, t_0 + t)$ kein Ereignis eintritt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall $[0, t)$ kein Ereignis eintritt. Nach Definition 2.8 gilt hierfür

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2.22)$$

Es sei τ die Zeit bis zum Eintritt des ersten Ereignisses. Dann ist

$$P(\tau \geq t) = e^{-\lambda t} \quad (2.23)$$

bzw.

$$F_\tau(t) = P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.24)$$

Somit besitzt die Wartezeit bis zum Eintreffen des ersten Ereignisses oder des nächsten Ereignisses nach t_0 eine Exponentialverteilung mit der Verteilungsdichte

$$F'_\tau(t) = f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Unter Verwendung der Formel von Taylor folgt aus (2.22) für kleine t

$$p_0(t) = 1 - \frac{\lambda t}{1} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - + \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in dem Zeitintervall $[0, t)$ (bzw. Δt) kein Ereignis eintritt, ist somit

$$p_0(t) = 1 - \lambda t + o(t), \quad (p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)). \quad (2.25)$$

Aufgabe 2.4: Zeigen Sie, daß

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t); \quad p_{>0}(\Delta t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.26)$$

gilt.

In diesem Zusammenhang besitzt eine besondere Eigenschaft der Exponentialverteilung eine große Bedeutung. Es sei bekannt, daß im Intervall $[0, t)$ kein Ereignis eingetreten ist, so daß die Wartezeit τ größer als t ist. Wie groß ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall $[0; t + \Delta t)$ ein Ereignis eintritt? Es ist somit die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, daß $t < \tau < t + \Delta t$ unter der Bedingung $\tau > t$ ist. Es gilt (vgl. Band 17, Seite 29)

$$P(t < \tau < t + \Delta t / \tau > t) = \frac{P(t < \tau < t + \Delta t)}{P(\tau > t)}.$$

Unter Berücksichtigung von (2.23), (2.24) und (2.25) gilt

$$P(t < \tau < t + \Delta t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \Delta t}) = \lambda \Delta t e^{-\lambda t} + o(\Delta t). \quad (2.27)$$

Folglich ist

$$P(t < \tau < t + \Delta t / \tau > t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.28)$$

Ein Vergleich der Beziehungen (2.28) mit (2.26) zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses nicht davon abhängt, wie groß der Zeitabstand vom zuletzt eingetretenen Ereignis ist.

In bezug auf die Verteilung der Lebensdauer von Materialien und Geräten bedeutet diese Eigenschaft, daß die Anzahl der einwandfrei verlaufenden Betriebsstunden keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit der Zerstörung in der nächsten Zukunft hat. Obwohl diese Eigenschaft unreal erscheint, gibt es doch viele Beispiele, auf die das zutrifft: Lebensdauer von Zapfenlagern guter Uhren und gewisser Arten von elektrischen Sicherungen.

Beispiel 2.8: Wiener'sche Prozesse. Zu Beginn des 2. Kapitels wurde die Brownsche Molekularbewegung betrachtet. Es läßt sich zeigen, daß sie (eindimensional) durch die im folgenden betrachtete Klasse von Prozessen mathematisch modelliert werden kann.

Definition 2.9: Ein stochastischer Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$ mit stetigen Realisierungen heißt **Wienerscher Prozeß**, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:

- (1) $P(X(0) = 0) = 1$,
- (2) $X(t)$ besitzt homogene unabhängige Zuwächse,
- (3) für einen beliebigen Punkt t ($0 \leq t < \infty$) ist $X(t)$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}; \quad \sigma^2 > 0.$$

Für $\sigma^2 = 1$ spricht man von einem *standardisierten Wiener'schen Prozeß*. Erwartungswert, Varianz- und Korrelationsfunktion lassen sich leicht bestimmen. Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, daß eine normalverteilte Zufallsgröße X mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 besitzt. Somit ist sofort ersichtlich, daß Mittelwert bzw. Varianzfunktion

$$m_x(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_x^2(t) = \sigma^2 t$$

lauten.

Aufgabe 2.5: Zeigen Sie durch analoge Betrachtung zum Poissonschen Prozeß, daß die Korrelationsfunktion eines Wiener'schen Prozesses

$$k_x(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$$

lautet.

Bekanntlich sind Summe und Differenz zweier normalverteilter Zufallsgrößen ebenfalls wieder normalverteilte Zufallsgrößen. Dementsprechend sind die Zuwächse $X(t) - X(s)$, $s < t$, normalverteilt. Im standardisierten Fall ergeben sich für Erwartungswert und Varianz der Zuwächse

$$E[X(t) - X(s)] = 0, \quad \sigma^2[X(t) - X(s)] = t - s.$$

Die Trajektorien eines Wiener'schen Prozesses besitzen interessante Eigenschaften. Sie haben auf einem beliebigen Intervall eine unbeschränkte Schwankung und sind an keiner Stelle differenzierbar (vgl. [21]).

Aus der Voraussetzung $P(X(0) = 0) = 1$ und der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

für beliebige Werte $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ folgt eine Eigenschaft von grundlegender Bedeutung.

Schreibt man $X(t_n)$ in der Form

$$X(t_n) = \sum_{i=1}^n [X(t_i) - X(t_{i-1})], \quad (2.29)$$

erkennt man, daß $X(t_n)$ nur von $X(t_{n-1})$, nicht aber von Werten $X(t_i)$ ($i < n - 1$) abhängt.

Dies steht in Übereinstimmung mit dem folgenden anschaulichen Sachverhalt. Um wahrscheinlichkeits-theoretisch einzuschätzen, wo sich das Teilchen zur Zeit t_n befinden wird, genügt es, seine Lage zum Zeitpunkt t_{n-1} zu kennen. Die Kenntnis seiner Lage zu den Zeitpunkten $t_{n-2}, t_{n-3}, \dots, t_0$ bringt keine zusätzliche Information, welche die Einschätzung beeinflußt. Prozesse mit dieser Eigenschaft werden nach dem sowjetischen Mathematiker Markow benannt. Sie werden im nächsten Kapitel ausführlich untersucht.

3. Markowsche Prozesse

3.1. Markowsche Ketten

Wir wollen uns nun mit zufälligen Prozessen beschäftigen, die folgende Eigenschaft besitzen:

Jede wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage über den zukünftigen Prozeßverlauf hängt bei bekanntem Wert in der Gegenwart nicht vom Prozeßverlauf in der Vergangenheit ab.

Derartige zufällige Prozesse sind von großer Bedeutung für die Praxis. Zunächst sollen zufällige Ketten mit dieser Eigenschaft untersucht werden.

Wir knüpfen an Beispiel 2.4 an. Der kumulative Bedarf an Kühlchränken in n Monaten ist

$$X(n) = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei alle ξ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) voneinander unabhängige Zufallsgrößen sind. Den kumulativen Bedarf in $n + 1$, $n + 2$, ... Monaten kann man auch in der Form

$$X(n + 1) = X(n) + \xi_{n+1},$$

$$X(n + 2) = X(n) + (\xi_{n+1} + \xi_{n+2})$$

ausdrücken. Man erkennt, daß bei bekanntem Gesamtbedarf $X(n)$ in n Monaten bei der Einschätzung des zukünftigen kumulativen Bedarfs die Kenntnis des Gesamtbedarfs in den ersten $n - 1$ Monaten $X(n - 1)$, $X(n - 2)$, ... keine Rolle spielt. Man sagt, die Gesamtheit der Zufallsgrößen

$$X(0), X(1), X(2), \dots, X(n), X(n + 1), \dots$$

bilden eine Markowsche Kette. Mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten läßt sich diese Eigenschaft mathematisch folgendermaßen formulieren.

Gegeben sei eine zufällige Kette $\{X(t), t \in I\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann die diskrete Parametermenge I von $t \in I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und die Wertemenge \mathfrak{X} , auf welcher $X(t)$ variiert, $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ angenommen werden.

Definition 3.1: $\{X(t), t = 0, 1, 2, \dots\}$ heißt **Markowsche Kette**, wenn bei beliebigem $t \in I$ für beliebige Werte $i, j \in \mathfrak{X}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X(t + 1) = j | X(t) = i, X(t - 1) = i_1, \dots, X(0) = i_t)$$

gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(X(t + 1) = j | X(t) = i) \tag{3.1}$$

ist.

(3.1) ist die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die Kette vom Wert i bei t in den Wert j bei $t + 1$ übergeht. Die Werte i, j bezeichnet man auch als *Zustände* der Kette.

Definition 3.2: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X(t+1) = j | X(t) = i)$ heißt **Übergangswahrscheinlichkeit** des Zustandes $X(t) = i$ bei t in den Zustand $X(t+1) = j$ bei $t+1$ und wird symbolisch mit $p_{ij}(t, t+1)$ bezeichnet.

Am eindimensionalen Modell der Irrfahrt eines Teilchens untersuchen wir nun die Eigenschaften Markowscher Ketten.

Beispiel 3.1: Ein Teilchen verändere seine Lage X ($1 \leq x \leq s$) längs einer Geraden zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3, \dots$ nach folgender Vorschrift:

- Von den Punkten $x = 2, \dots, s-1$ wird es in der nachfolgenden Zeiteinheit um eine Einheit mit Wahrscheinlichkeit p in positiver und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ in negativer Richtung bewegt.
- An den Punkten $x = 1$ und $x = s$ wird das Teilchen absorbiert. Es verbleibt mit Wahrscheinlichkeit 1 in der nachfolgenden Zeiteinheit dort.

Zur Zeit $t = 0$ befinde es sich mit Wahrscheinlichkeit $p_i(0)$ bei $x = i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, s$).

Bezeichnen wir mit $X(t)$ die Lage des Teilchens zur Zeit t , ist unmittelbar ersichtlich, daß

$$\{X(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

eine Markowsche Kette mit den s möglichen Zuständen $1, 2, 3, \dots, s$ bildet. Wir wollen die Wahrscheinlichkeiten bestimmen, das Teilchen

- zur Zeit $t = 1$ bei $x = j$,
 - zur Zeit $t = n$ ($n > 1$) bei $x = j$
- anzutreffen.¹⁾

Wir bestimmen zunächst die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t, t+1)$. Für $i = j \in \{2, 3, \dots, s-1\}$ ist $p_{ij}(t, t+1) = 0$, weil das Teilchen nach Voraussetzung mit Wahrscheinlichkeit Null am Ort bleibt. Für alle i, j mit $|i - j| \geq 2$ gilt ebenfalls $p_{ij}(t, t+1) = 0$, da das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit Null um zwei und mehr Einheiten in einer Zeiteinheit fortbewegt wird. Wegen der Absorption bei $x = 1$ und $x = s$ ist $p_{11}(t, t+1) = p_{ss}(t, t+1) = 1$. Die nachfolgende Tabelle 3.1 gibt eine Übersicht über alle $p_{ij}(t, t+1)$:

Tabelle 3.1

vom Zustand i	in den Zustand j									
		1	2	3	4	5	...	$s-2$	$s-1$	s
1		1	0	0	0	0	...	0	0	0
2		q	0	p	0	0	...	0	0	0
3		0	q	0	p	0	...	0	0	0
<hr/>										
$s-1$		0	0	0	0	0	...	q	0	p
s		0	0	0	0	0	...	0	0	1

Kennzeichnend ist, daß alle Übergangswahrscheinlichkeiten von t unabhängig sind.

¹⁾ Anwendungen für „Irrfahrten“ findet der Leser in Bd. 20.

Definition 3.3: Eine Markowsche Kette heißt **homogen**, wenn für beliebige $i, j \in \mathfrak{X}$ und $t \in I$ die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t, t+1)$ nicht von t abhängen.

Man schreibt $p_{ij}(t, t+1) = p_{ij}$, wobei jetzt p_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j während einer beliebigen Zeiteinheit ist. Weiterhin erkennt man in der Tabelle, daß die Zeilensummen jeweils den Wert 1 ergeben. Es gilt die Gleichung¹⁾

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Hierin drückt sich die Tatsache aus, daß $X(t)$ in der nachfolgenden Zeiteinheit vom Zustand i unbedingt in einen der Zustände j übergeht. Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben eine Markowsche Kette vollständig. Wir lösen zunächst Aufgabe a'). Zu bestimmen ist die unbedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X(1) = j).$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$P(X(0) = i) = p_i(0), \quad i = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Unter Anwendung des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit (vgl. Band 17) folgt

$$\begin{aligned} P(X(1) = j) &= \sum_i P(X(0) = i) p_{ij} \\ &= \sum_i p_i(0) p_{ij}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Man setze beispielsweise $s = 5$, $p = q = \frac{1}{2}$. Das Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Punkt 2 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Punkt 4.

Die Anfangsbedingungen lauten also

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = \frac{1}{2}, \quad p_3(0) = 0, \quad p_4(0) = \frac{1}{2}, \quad p_5(0) = 0. \quad (3.3)$$

Dann folgt sofort gemäß (3.2)

$$\begin{aligned} P(X(1) = 1) &= \frac{1}{4}, & P(X(1) = 2) &= 0, & P(X(1) = 3) &= \frac{1}{2}, & P(X(1) = 4) &= 0, \\ P(X(1) = 5) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen zur Zeit $t = 1$ an den Stellen $j = 1, 2, 3, 4$ und 5 anzutreffen, sind also beispielsweise $1/4, 0, 1/2, 0$ bzw. $1/4$.

Wenden wir uns nun der Aufgabe b') zu. Zu bestimmen ist die unbedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X(n) = j).$$

Bezeichnet $p_{ij}(n)$ die Übergangswahrscheinlichkeit einer homogenen Markowschen Kette, nach n Zeiteinheiten vom Zustand i in den Zustand j zu gelangen, folgt analog zu a')

$$\begin{aligned} P(X(n) = j) &= \sum_i P(X(0) = i) p_{ij}(n) \\ &= \sum_i p_i(0) p_{ij}(n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹⁾ Eine entsprechende Gleichung $\sum_j p_{ij}(t, t+1) = 1$ gilt allgemein für Markowsche Ketten.

Alle $p_{ij}(n)$ lassen sich nun rekursiv aus den Werten p_{ij} berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Übergang von $X(0) = i$ in $X(1) = k$ und anschließend in $X(n) = j$ erfolgt, ist wegen der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse gleich

$$p_{ik}p_{kj}(n-1). \quad (3.5)$$

Unter Anwendung der Formel über die totale Wahrscheinlichkeit folgt

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}p_{kj}(n-1). \quad (3.6)$$

Sind alle p_{ij} bekannt, lassen sich nacheinander alle $p_{ij}(2)$, $p_{ij}(3)$ und schließlich $p_{ij}(n)$ bestimmen. Formel (3.6) ist ein Spezialfall einer allgemeineren Beziehung, die nach Markow benannt wurde.

Satz 3.1 (Gleichung von Markow): Bei homogenen Markowschen Ketten gilt für beliebiges ganzzahliges m ($1 \leq m \leq n-1$)

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n-m). \quad (3.7)$$

Den Beweis kann der Leser leicht selbst durchführen.

Bei der Berechnung der Werte $p_{ij}(n)$ ($n > 1$) kann man mit Vorteil die Matrizenrechnung anwenden. Schreibt man die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, s$) in Form einer sogenannten *Übergangsmatrix*

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

dann ist nach der Multiplikationsregel für Matrizen

$$(p_{ij}(2)) = (p_{ij})(p_{ij}) = (p_{ij})^2,$$

und allgemein gilt für $n \geq 1$

$$(p_{ij}(n)) = (p_{ij})^n. \quad (3.9)$$

Im Falle der Irrfahrt des Teilchens (vgl. Tabelle 3.1) ergibt sich für $n = 2$, $p = q = \frac{1}{2}$ und $s = 5$

$$(p_{ij}(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit den Anfangsbedingungen (3.3) erhält man beispielsweise für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit $t = 2$ bei $j = 2$ anzutreffen,

$$\begin{aligned} P(X(2) = 1) &= \sum_{i=1}^5 p_i(0) p_{i2}(2) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Häufig kann man bei homogenen Markowschen Ketten beobachten, daß die Wahrscheinlichkeit $P(X(n) = j)$, nach der Zeit $t = n$ das Teilchen an der Stelle j anzutreffen, für große Werte n ($n \rightarrow \infty$) unabhängig von den speziellen Anfangsbedingungen wird. Gemäß (3.4) müßten in diesem Fall die $p_{ij}(n)$ gegen Grenzwerte konvergieren, die nicht mehr von i abhängen.

Satz 3.2 (Ergodentheorem): Es seien p_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markowschen Kette mit einer endlichen Anzahl von Zuständen $i, j \in \mathfrak{X}$. Wenn es eine natürliche Zahl n_0 gibt, so daß die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n_0)$ mindestens für einen Zustand j die Bedingung

$$\min_i p_{ij}(n_0) = a, \quad a > 0,$$

erfüllen, existieren Wahrscheinlichkeitswerte p_j , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j, \quad j \in \mathfrak{X}, \quad (3.10)$$

mit $\sum_j p_j = 1$ gilt.

Den Beweis des Satzes findet der Leser in [8].

Die Grenzwerte p_j heißen *ergodische Wahrscheinlichkeiten*. Bei Konvergenz gegen diese Werte strebt die homogene Markowsche Kette einem Gleichgewichtszustand zu. Denn bei großen n gilt (gemäß Satz 3.2) annähernd

$$p_{ij}(n-1) = p_{ij}(n) = p_{ij}(n+1) = p_j, \quad (3.11)$$

so daß gemäß (3.4) näherungsweise

$$P(X(n-1) = j) = P(X(n) = j) = P(X(n+1) = j) = p_j$$

ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich die homogene Markowsche Kette im Zustand j befindet, ändert sich für große n nur noch wenig und konvergiert schließlich. Zur Ermittlung der p_j geht man von den Beziehungen (3.6) aus.

Unter Berücksichtigung von (3.11) erhält man für die gesuchten ergodischen Wahrscheinlichkeiten die Bestimmungsgleichungen

$$p_j = \sum_k p_k p_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.12)$$

wobei $\sum_j p_j = 1$ zu beachten ist.

Wir kehren nun zu dem betrachteten Beispiel zurück und untersuchen, ob ergodische Wahrscheinlichkeiten existieren. Der Einfachheit halber setzen wir $s = 3$. Dann ist wegen

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$p_{ij}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p_{ij} = p_{ij}(2) = p_{ij}(3) = \dots = p_{ij}(n)$. Die Voraussetzungen des Satzes 3.2 sind somit nicht erfüllt. Offenbar gelten auch die Behauptungen des Satzes nicht. Es ist wegen $p_{11}(n) = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}(n) = 1,$$

während

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{21}(n) = q, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{31}(n) = 0$$

gilt. Die Grenzwerte sind nicht unabhängig von den Anfangszuständen. Betrachten wir die Zustände bei diesem Beispiel genauer: Vom Zustand 2 gelangt man sofort nach 1 (bzw. 3), während es unmöglich ist, mit positiver Wahrscheinlichkeit von 1 (bzw. 3) nach 2 zurückzukehren. Man bezeichnet 2 als vorübergehenden Zustand.

Definition 3.4: Ein Zustand i heißt **transient**, wenn für mindestens einen Zustand j und für eine natürliche Zahl n_0 die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(n_0)$ positiv ist, aber für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ $p_{ij}(n) = 0$ gilt. Anderenfalls bezeichnet man i als **wesentlichen Zustand**.

Demnach sind die Zustände $i = 1, 3$ wesentlich und der Zustand $i = 2$ transient.

Beispiel 3.2: Es werde nun die Irrfahrt des Teilchens (vgl. Beispiel 3.1) dahingehend abgeändert, daß an den Enden des Intervalles $[1, s]$ das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit p bzw. q reflektiert wird. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gelte

$$\begin{aligned} p_{11} &= q = 1 - p; & p + q &= 1, \\ p_{ij} &= \begin{cases} p & \text{für } i = 1, 2, 3, \dots, s-1; \quad j = i+1, \\ q & \text{für } i = 2, 3, 4, \dots, s; \quad j = i-1, \\ 0 & \text{für alle übrigen Paare } (ij), \end{cases} \\ p_{ss} &= p = 1 - q. \end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix hat dann die Form

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & p \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich zeigen, daß in diesem Fall Satz 3.2 (Ergodentheorem) gilt. Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf den Fall $s = 3$. Dann ist

$$\begin{aligned} (p_{ij}) &= \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}, \\ (p_{ij}(2)) &= \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 + pq & qp & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & qp + p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 3.2 sind erfüllt.

Speziell mit $p = q = \frac{1}{2}$ errechnen sich gemäß (3.12) die ergodischen Wahrscheinlichkeiten aus dem System

$$p_1 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3,$$

$$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3,$$

unter Beachtung von

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Die Auflösung des Systems ergibt unmittelbar

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}.$$

Das Ergebnis ist plausibel, da nach einiger Zeit, unabhängig von der Anfangssituation, zu erwarten ist, das Teilchen an jedem Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit anzutreffen. Weitere Ausführungen über Markowsche Ketten findet der Leser in [5], [8] und [4a].

3.2. Diskrete Markowsche Prozesse

3.2.1. Definition und Eigenschaften

Wir betrachten nun einen diskreten stochastischen Prozeß $\{X(t), t \in I\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ setzen. Die Elemente von \mathfrak{X} werden auch wie im Falle von Ketten als *Zustände* bezeichnet.

Definition 3.5: Ein diskreter stochastischer Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ heißt **diskreter Markowscher Prozeß**, wenn für jede beliebige wachsende Folge von Werten

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$$

aus I und beliebige Zustände $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1}$ aus \mathfrak{X} gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} / X(t_n) = i_n, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0) \\ = P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} / X(t_n) = i_n). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Markoweigenschaft äußert sich wie im Falle der eben behandelten Markowschen Ketten in dem Fehlen einer Nachwirkung. Die zusätzliche Kenntnis von Zuständen zu früheren Zeitpunkten

$$X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}$$

hat keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Prozeß zur Zeit t_{n+1} im Zustand i_{n+1} befinden wird, unter der Voraussetzung, daß er sich zur Zeit t_n im Zustand i_n befindet.

Definition 3.6: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X(t) = j | X(s) = i) \quad (s < t, s, t \in I, i, j \in \mathfrak{X})$ heißt **Übergangswahrscheinlichkeit** des Zustandes i zur Zeit s in den Zustand j zur Zeit t und wird mit $p_{ij}(s, t)$ bezeichnet.

Viele Eigenschaften Markowscher Ketten lassen sich in entsprechender Weise für diskrete Markowsche Prozesse verallgemeinern.

Satz 3.3: Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(s, t)$ diskreter Markowscher Prozesse gilt:

$$0 \leq p_{ij}(s, t) \leq 1, \quad (3.14)$$

$$\sum_j p_{ij}(s, t) = 1, \quad (3.15)$$

$$p_{ij}(s, t) = \sum_k p_{ik}(s, \tau) p_{kj}(\tau, t); \quad s < \tau < t. \quad (3.16)$$

Gleichung (3.15) sagt aus, daß der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zeitintervall $[s, t]$ vom Zustand i in einen Zustand j übergeht. (3.16) ist eine Verallgemeinerung der Gleichung von Markow und wird *Chapman-Kolmogorowsche Gleichung* genannt. Weitere Eigenschaften ergeben sich aus der Betrachtung des folgenden Beispiels.

Beispiel 3.3: Es wird die Arbeit einer Telefonzentrale betrachtet. $X(t)$ ($t \geq 0$) bezeichnet die Anzahl der Gespräche, die bis zum Zeitpunkt t anfallen. Im Mittel treten 4 Gespräche pro Zeiteinheit auf.

- Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten für diesen Prozeß?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in den ersten 3 Zeiteinheiten genau 2 Gespräche registriert werden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach sehr langer Zeit ($t \rightarrow \infty$) a Gespräche registriert werden?

In Kapitel 2 wurde darauf hingewiesen, daß $\{X(t), t \geq 0\}$ ein diskreter stochastischer Prozeß mit homogenen unabhängigen Zuwächsen und speziell ein Poissonscher Prozeß ist. λ ist dabei der Erwartungswert der pro Zeiteinheit anfallenden Gespräche. Um zu zeigen, daß es sich bei dem im Beispiel beschriebenen Prozeß um einen Markowschen handelt, benötigen wir den folgenden

Satz 3.4:¹⁾ Ein diskreter stochastischer Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$ mit $P(X(0) = b) = 1$ (b konstant) und unabhängigen Zuwächsen ist ein diskreter Markowscher Prozeß.

Denn ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ eine beliebige wachsende Folge von Parameterwerten, läßt sich $X(t_{n+1})$ als Summe unabhängiger Zuwächse schreiben:

$$X(t_{n+1}) = X(0) + [X(t_1) - X(0)] + \dots + [X(t_{n+1}) - X(t_n)].$$

Unter Beachtung des letzten Abschnittes von Kapitel 2 kann der Leser den Beweis leicht selbst beenden.

Man erkennt also, daß alle Poissonschen Prozesse (somit auch der im Beispiel betrachtete Prozeß) diskrete Markowsche Prozesse sind.

¹⁾ Dieser wichtige Satz gilt nicht nur für diskrete Prozesse, sondern läßt sich verallgemeinern.

Wir ermitteln nun die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Poissonschen Prozesses. Es ist zunächst

$$\begin{aligned} p_{ij}(t_1, t_2) &= P(X(t_2) = j | X(t_1) = i) \\ &= \frac{P(X(t_1) = i, X(t_2) = j)}{P(X(t_1) = i)} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Unter Beachtung von (2.16) folgt

$$\begin{aligned} p_{ij}(t_1, t_2) &= \frac{P(X(t_1) = i) P(X(t_2) - X(t_1) = j - i)}{P(X(t_1) = i)} \\ &= \begin{cases} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mit $t = t_2 - t_1$ kann man schreiben

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases} \quad (3.19)$$

Definition 3.7: Ein diskreter Markowscher Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ heißt **homogen**, wenn für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2 \in I$ die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(t_1, t_2)$ nicht von t_1 und t_2 , sondern nur von der Differenz $t = t_2 - t_1$ abhängt. Man schreibt

$$p_{ij}(t_1, t_2) = p_{ij}(t).$$

Poissonsche Prozesse sind somit homogene diskrete Markowsche Prozesse.

Mit $\lambda = 4$ ergeben sich aus (3.18) die in Aufgabe a) von Beispiel 3.3 gesuchten Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \frac{(4t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-4t}, \quad i < j, \\ p_{ij}(t) &= 0, \quad i \geq j. \end{aligned}$$

Zur Lösung von b) bestimmen wir die absoluten Wahrscheinlichkeiten $p_j(t) = P(X(t) = j)$. Mit den allgemeinen Anfangsbedingungen

$$p_i(0) = P(X(0) = i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.20)$$

erhält man unter Berücksichtigung der Formel für totale Wahrscheinlichkeiten

$$p_j(t) = \sum_i p_i(0) p_{ij}(t). \quad (3.21)$$

Da zur Zeit $t = 0$ mit der Registrierung der Gespräche begonnen wird, ist

$$p_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ 0 & \text{für } i \neq 0, \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

und mit $\lambda = 4$

$$p_2(3) = p_{0,2}(3) = \frac{12^2}{2!} e^{-12}.$$

Aus (3.20) und (3.21) ist ersichtlich, daß Anfangsbedingungen und Übergangswahrscheinlichkeiten einen homogenen diskreten Markowschen Prozeß vollständig (wahrscheinlichkeitstheoretisch) charakterisieren. Zur Lösung von c) betrachten wir homogene diskrete Markowsche Prozesse noch etwas eingehender.

Die in Satz 3.3 angegebenen Beziehungen kann man in der Form

$$0 \leq p_{ij}(t), \quad (3.22)$$

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1, \quad (3.23)$$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(s), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

schreiben. Satz 3.2 kann in der folgenden Weise verallgemeinert werden:

Satz 3.5: Für homogene Markowsche Prozesse $\{X(t), t \geq 0\}$ mit endlich vielen Zuständen $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j \quad (3.25)$$

für alle $i, j = 0, 1, \dots, n$, wenn es ein t^* ($0 \leq t^* < \infty$) gibt, für welches alle $p_{ij}(t^*)$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n; i < j$) positiv sind.

Gemäß (3.21) streben bei Gültigkeit dieses Satzes auch die absoluten Wahrscheinlichkeiten $p_j(t)$ gegen die von den Anfangsbedingungen unabhängigen Grenzwerte p_j , denn es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \sum_i p_i(0) p_j = p_j \sum_i p_i(0) = p_j. \quad (3.26)$$

Obwohl ein Poissonscher Prozeß unendlich viele Zustände $i = 0, 1, 2, \dots$ besitzt und Satz 3.5 nicht anwendbar ist, haben alle Übergangswahrscheinlichkeiten Grenzwerte. Denn es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß für $t \rightarrow \infty$ genau $j = a$ Gespräche eintreffen, ist somit gleich null. Die Gültigkeit von (3.25) erklärt sich daraus, daß alle Zustände transient sind (vgl. Definition 3.4). Von jedem Zustand i kann man zum Zustand j ($j > i$) übergehen, aber aus dem Zustand j nicht zum Zustand i zurückkehren.

3.2.2. Geburts- und Todesprozesse

Es werden nun Prozesse betrachtet, bei denen der Zustand sowohl durch Zugänge (Geburten) als auch durch Abgänge (Todesfälle) verändert werden kann. Bei der Betrachtung von Bevölkerungsentwicklungen, der Vermehrung von Bakterien-

kolonien, radioaktiver Zerfallsprozesse sowie bei vielfältigen Problemen der Bedienungs-, Lagerhaltungs- und Zuverlässigkeitstheorie besitzen sie eine große Bedeutung.

Definition 3.8: Ein diskreter Markowprozeß $\{X(t), t \geq 0\}$, $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$, heißt **Geburts- und Todesprozeß**, wenn seine Übergangswahrscheinlichkeiten folgende Bedingungen erfüllen:

Der Prozeß geht von einem Zustand n zur Zeit t in einem genügend kleinen Zeitintervall Δt mit Wahrscheinlichkeit

$$\lambda_n(t) \Delta t + o(\Delta t)$$

in den nächsthöheren Zustand $n + 1$, mit Wahrscheinlichkeit

$$\mu_n(t) \Delta t + o(\Delta t)$$

in den nächstniederen Zustand $n - 1$ und mit Wahrscheinlichkeit $o(\Delta t)$ in einen Zustand $n \pm r$, $r \geq 2$, über.

$\lambda_n(t)$ und $\mu_n(t)$ sind von n und t abhängige Funktionen, welche die Schnelligkeit des Wachstums bzw. des Abnehmens der Ordinaten von $X(t)$ bestimmen. Sie heißen Geburts- bzw. Sterbekoeffizient. Bei $\mu_n(t) \equiv 0$, $\lambda_n(t) \neq 0$ spricht man von einem reinen Geburtsprozeß, bei $\lambda_n(t) \equiv 0$, $\mu_n(t) \neq 0$ von einem reinen Todesprozeß.

Aufgabe 3.1: Ermitteln Sie die Koeffizienten λ_n und μ_n für ein Modell einer Bakterienkolonie, wenn jeder Mikroorganismus sich in Δt mit Wahrscheinlichkeit $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ teilt und mit Wahrscheinlichkeit $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ abstirbt.

Es läßt sich nun beweisen, daß bei Geburts- und Todesprozessen die Übergangswahrscheinlichkeiten einem System von Differentialgleichungen, den sogenannten „Kolmogorowschen Gleichungen“ genügen. Stellt man dieses System auf und löst es, können alle interessierenden Parameter unmittelbar bestimmt werden. Im folgenden soll das Kolmogorowsche System aufgestellt und die Lösungen für spezielle Geburts- und Sterbekoeffizienten ermittelt werden.

Der Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$ wird zu 3 verschiedenen Zeitpunkten s , t und $t + \Delta t$ mit $s < t$ betrachtet. Es sei weiterhin bekannt, daß $X(s) = i$ und $X(t + \Delta t) = n$ ist. Dann gibt es für den Übergang von i nach n folgende Möglichkeiten:

- a) $X(t)$ geht während des Zeitabschnitts $[s, t)$ von i in $n - 1$ und anschließend im Abschnitt $[t, t + \Delta t)$ von $n - 1$ in n über. Die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$p_{i,n-1}(s, t), \quad p_{n-1,n}(t, t + \Delta t) = \lambda_{n-1}(t) \Delta t + o(\Delta t). \quad (3.28)$$

- b) $X(t)$ geht während des Abschnitts $[s, t)$ von i in $n + 1$ und anschließend im Intervall $[t, t + \Delta t)$ von $n + 1$ in n über. Die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten hierfür sind

$$p_{i,n+1}(s, t), \quad p_{n+1,n}(t, t + \Delta t) = \mu_{n+1}(t) \Delta t + o(\Delta t). \quad (3.29)$$

- c) $X(t)$ geht innerhalb $[s, t)$ von i in n über und verbleibt im nachfolgenden Intervall $[t, t + \Delta t)$ in diesem Zustand. Die Übergangswahrscheinlichkeiten hierfür sind

$$p_{in}(s, t), \quad p_{nn}(t, t + \Delta t) = 1 - \lambda_n(t) \Delta t - \mu_n(t) \Delta t - o(\Delta t). \quad (3.30)$$

d) $X(t)$ geht innerhalb $[s, t]$ von i in $n \pm r$ mit $|r| > 1$ und anschließend in $[t, t + \Delta t]$ von $n \pm r$ in n über. Hierfür ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i, n \pm r}(s, t), \quad p_{n \pm r, n}(t, t + \Delta t) = o(\Delta t). \quad (3.31)$$

Wegen der Unabhängigkeit der Übergänge in $[s, t]$ und $[t, t + \Delta t]$ gilt

$$\begin{aligned} p_{in}(s, t + \Delta t) &= \lambda_{n-1}(t) p_{i, n-1}(s, t) \Delta t + \mu_{n+1}(t) p_{i, n+1}(s, t) \Delta t \\ &\quad + [1 - \lambda_n(t) \Delta t - \mu_n(t) \Delta t] p_{in}(s, t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nach einfachen Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{p_{in}(s, t + \Delta t) - p_{in}(s, t)}{\Delta t} &= \lambda_{n-1}(t) p_{i, n-1}(s, t) + \mu_{n+1}(t) p_{i, n+1}(s, t) \\ &\quad - [\lambda_n(t) + \mu_n(t)] p_{in}(s, t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Setzt man voraus, daß die partielle Ableitung nach t existiert, folgt für $n \geq 1$

$$\frac{\partial p_{in}(s, t)}{\partial t} = \lambda_{n-1}(t) p_{i, n-1}(s, t) + \mu_{n+1}(t) p_{i, n+1}(s, t) - [\lambda_n(t) + \mu_n(t)] p_{in}(s, t) \quad (3.34)$$

und für $n = 0$

$$\frac{\partial p_{i0}(s, t)}{\partial t} = \mu_1(t) p_{i1}(s, t) - \lambda_0(t) p_{i0}(s, t),$$

da ein Glied mit $\lambda_{-1}(t)$ entfällt. Außerdem setzt man $\mu_0(t) = 0$, da sonst der Wert -1 auftreten würde.

$X(t)$ nehme mit Wahrscheinlichkeit 1 für $t \neq 0$ den Wert N an. Dann erhält man unter Berücksichtigung von (3.21) aus (3.34) ein System von Differentialgleichungen für die absoluten Wahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ ($n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_n(t) &= \lambda_{n-1}(t) p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}(t) p_{n+1}(t) - [\lambda_n(t) + \mu_n(t)] p_n(t), \quad n \geq 1, \\ \frac{d}{dt} p_0(t) &= \mu_1(t) p_1(t) - \lambda_0(t) p_0(t), \quad n = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$p_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = N, \\ 0 & \text{für } n \neq N. \end{cases}$$

Ist $\lambda_0 = 0$, so gilt $X(t) = 0$ für alle $t \geq t_1$, falls $X(t_1) = 0$ ist. Der Prozeß verbleibt also immer im Zustand Null, falls er einmal dorthin gelangt ist. Man bezeichnet $n = 0$ in diesem Fall als *absorbierenden Zustand*. Gilt $\lambda_0 > 0$, so ist mit positiver Wahrscheinlichkeit $X(t) > 0$ für $t \geq t_1$, falls $X(t_1) = 0$ ist. Der Prozeß geht mit positiver Wahrscheinlichkeit in einen Zustand $n > 0$ über. Man bezeichnet dann $n = 0$ als *reflektierenden Zustand*.

Es sollen nun unter einigen speziellen Annahmen die Lösungen angegeben werden.
Für

$$\lambda_n(t) = \lambda; \quad \mu_n(t) = 0 \quad (3.36)$$

ergibt sich mit $N = 0$ ein Poissonscher Prozeß.

Denn aus (3.35) ergibt sich das System

$$\begin{aligned} \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t), \quad n \geq 1, \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit den Anfangsbedingungen $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$, $n \geq 1$. Mit dem Lösungsansatz $p_n(t) = e^{-\lambda t} q_n(t)$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dq_n(t)}{dt} &= \lambda q_{n-1}(t), \quad n > 1, \\ \frac{dq_1(t)}{dt} &= \lambda, \quad q_0(t) = 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $q_0(0) = 1$, $q_n(0) = 0$, $n \geq 1$. Hieraus erhält man schrittweise

$$q_1(t) = \lambda t, \quad q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}, \quad \dots, \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

und schließlich

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

Mit $N = 1$ ergibt sich, wie man leicht nachprüfen kann,

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ p_0(t) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Für allgemeine Koeffizienten wird die Bestimmung der Lösung kompliziert. Ist beispielsweise

$$\lambda_n = \lambda(t) n, \quad \mu_n = \mu(t) n \quad (3.40)$$

($\lambda(t)$ und $\mu(t)$ sind stetige Funktionen), ergibt sich mit $N = 1$

$$\begin{aligned} p_0(t) &= u(t), \quad n = 0, \\ p_n(t) &= [1 - u(t)] [1 - v(t)] v(t)^{n-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit

$$u(t) = 1 - \frac{e^{-r(t)}}{w(t)}, \quad v(t) = 1 - \frac{1}{w(t)}, \quad (3.42)$$

wobei

$$w(t) = e^{-r(t)} \left[1 + \int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta \right] \quad (3.43)$$

und

$$r(t) = \int_0^t [\mu(\vartheta) - \lambda(\vartheta)] d\vartheta \quad (3.44)$$

ist. Den Lösungsweg findet der interessierte Leser ausführlich in [17] dargestellt. Unter Berücksichtigung von (3.41)–(3.44) lassen sich Mittelwert- und Varianzfunktion bestimmen. Es folgt

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n [1 - u(t)] [1 - v(t)] v(t)^{n-1} \\ &= [1 - u(t)] [1 - v(t)] \sum_{n=0}^{\infty} n v(t)^{n-1} \\ &= \frac{1 - u(t)}{1 - v(t)} = e^{-r(t)} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t [\mu(\vartheta) - \lambda(\vartheta)] d\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für die Varianzfunktion gilt

$$\sigma_x^2(t) = E[X^2(t) - m_x^2(t)]. \quad (3.46)$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) \\ &= [1 - u(t)] [1 - v(t)] \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) v(t)^{n-1} + \frac{1 - u(t)}{1 - v(t)} \\ &= [1 - u(t)] \left\{ [1 - v(t)] v(t) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) v(t)^{n-2} - \frac{1}{1 - v(t)} \right\} \\ &= [1 - u(t)] \left\{ [1 - v(t)] v(t) \frac{2}{[1 - v(t)]^3} + \frac{1}{1 - v(t)} \right\} \\ &= [1 - u(t)] \frac{2v(t) + 1 - v(t)}{[1 - v(t)]^2} \\ &= \frac{[1 - u(t)] [1 + v(t)]}{[1 - v(t)]^2}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.46)

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) &= \frac{[1 - u(t)] [1 + v(t)]}{[1 - v(t)]^2} - \left[\frac{1 - u(t)}{1 - v(t)} \right]^2 = \frac{[1 - u(t)] [u(t) + v(t)]}{[1 - v(t)]^2} \\ &= e^{-2r(t)} \int_0^t e^{r(\vartheta)} [\lambda(\vartheta) + \mu(\vartheta)] d\vartheta. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Wegen $\lambda_0 = 0 \cdot \lambda(t) = 0$ ist $n = 0$ „absorbierender Zustand“. Ist eine Trajektorie zu einem Zeitpunkt $t_1 > 0$ null, dann ist sie auch für alle $t \geq t_1$ gleich null. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Prozeß zur Zeit t im Zustand 0 befindet, ist wegen (3.42)–(3.44)

$$p_0(t) = u = \frac{\int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta}{1 + \int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta}. \quad (3.48)$$

Die Wahrscheinlichkeit der Absorption des Prozesses ist dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta}{1 + \int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta} = p_0. \quad (3.49)$$

Ist $p_0 = 1$, endet der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 durch Absorption. Das bedeutet, daß „fast alle“ Trajektorien jeweils zu irgendeinem Zeitpunkt null werden. Aus (3.49) erkennt man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Absorption mit Wahrscheinlichkeit 1 die Gültigkeit der Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta = \infty \quad (3.50)$$

ist. Wir betrachten nun etwas genauer den Zeitpunkt τ der Absorption, d. h. die Zeitpunkte, in denen die einzelnen Trajektorien des Prozesses in den Zustand Null gelangen. τ ist eine Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion $F_\tau(t)$, Verteilungsdichte $f_\tau(t)$ und Parameter leicht ermittelt werden können. Es ist

$$F_\tau(t) = P(\tau < t) = p_0(t) \quad (3.51)$$

und

$$f_\tau(t) = f_\tau(t) = \frac{e^{r(t)} \mu(t)}{\left[1 + \int_0^t e^{r(\vartheta)} \mu(\vartheta) d\vartheta\right]^2}. \quad (3.52)$$

Der Erwartungswert $E(\tau)$ kennzeichnet die mittlere Lebensdauer des Prozesses. $E(\tau)$ kann aus der Gleichung

$$\int_0^{E(\tau)} e^{r(t)} \mu(t) dt = 1 \quad (3.53)$$

ermittelt werden.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, weitere Spezialfälle zu behandeln. Ist beispielsweise

$$\lambda_n(t) = n\lambda, \quad \mu_n(t) = \mu n; \quad \lambda, \mu = \text{const},$$

ergeben sich entsprechende Formeln für absolute Wahrscheinlichkeitsverteilung, Mittelwertfunktion und Varianzfunktion unmittelbar durch Spezialisierung des eben behandelten Falles.

Beispiel 3.4: Wir betrachten im folgenden die kosmische Strahlung. Es sollen mehrere Modelle für das Zustandekommen des sogenannten Kaskadenschauers betrachtet werden. Das erste Modell ist sehr einfach und spiegelt die realen Verhältnisse nur sehr grob wider. Jedes folgende Modell berücksichtigt weitere Voraussetzungen und stimmt mit der Wirklichkeit besser überein.

Die kosmische Strahlung setzt sich aus harter und weicher Strahlung zusammen. Die weiche Strahlung, der wir unsere Aufmerksamkeit widmen wollen, besteht aus energiereichen Photonen und Elektronen hoher Geschwindigkeit. Trifft ein Photon beispielsweise auf Bleiwände, wird es auf einem Wegstück Δt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit absorbiert. Bei der Absorption entstehen ein Elektron und ein Positron (sie sollen im folgenden nicht weiter unterschieden werden). Ein Elektron strahlt beim Durchlaufen einer Wegstrecke Δt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit unter Energieverlust ein Lichtquant aus. Die sekundär entstandenen Photonen bzw. Elektronen erzeugen wiederum Elektronen bzw. Photonen. Dieser Prozeß setzt sich lawinenartig fort. Es entsteht in der Wilsonschen Nebelkammer der bekannte Kaskadenschauer. Da in der Nebelkammer nur Elektronen, jedoch keine Photonen beobachtet werden können, sollen nur Modelle angegeben werden, die Aussagen über die Zahl der Elektronen machen.

Das erste Modell wurde 1937 erstmalig angegeben. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron erzeugt wird, wurde proportional der Wegstrecke Δt angenommen. Dabei wurde weder die Zahl der bereits erzeugten Elektronen, noch ihre Energie bzw. die bereits zurückgelegten Wegstrecken berücksichtigt. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich ein reiner Geburtsprozeß mit

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = 0.$$

Nimmt man an, daß zur Zeit $t = 0$ gerade ein Elektron auf der Oberfläche des Materials auftritt, erhält man das System (3.37) mit den Anfangsbedingungen ($N = 1$)

$$p_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n \neq 1. \end{cases} \quad (3.54)$$

Als Lösung erhält man (3.39). $p_n(t)$ gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, daß zur Zeit t genau n Elektronen vorhanden sind.

Das zweite Modell wurde wenig später vorgeschlagen. Jedes weitere Elektron erzeugt ebenfalls auf der Wegstrecke Δt mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu Δt durch die beschriebene Reaktion ein weiteres Elektron. Allerdings ist auch in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Energie der Elektronen angenommen. Man erhält wiederum einen reinen Geburtsprozeß, jedoch ist

$$\lambda_n = n\lambda, \quad \mu_n = 0.$$

Bei gleichen Anfangsbedingungen (3.54) wie im ersten Modell folgt

$$\begin{aligned} p'_1(t) &= -\lambda p_1(t), & n = 1, \\ p'_n(t) &= \lambda(n-1)p_{n-1}(t) - \lambda n p_n(t), & n > 1. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (3.40)–(3.44) erhält man mit

$$\begin{aligned}r(t) &= -\lambda t, \\w(t) &= e^{\lambda t}, \\u(t) &= 0 \quad \text{und} \quad v(t) = 1 - e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

die Lösungen

$$\begin{aligned}p_0(t) &= 0, \\p_n(t) &= e^{-\lambda t} [1 - e^{-\lambda t}]^{n-1}, \quad n > 0.\end{aligned}$$

Die Mittelwertfunktion von $\{X(t), t \geq 0\}$ gibt die mittlere Zahl der Elektronen in Abhängigkeit der Zeit an und lautet gemäß (3.45)

$$m_x(t) = e^{\lambda t}.$$

Dieses Modell stellt ebenfalls noch eine grobe Näherung dar, denn während hierin der Erwartungswert für die Zahl der erzeugten Elektronen mit zunehmender Materialdicke exponentiell zunimmt, zeigt die Wirklichkeit, daß die mittlere Zahl der Elektronen zunächst stark zunimmt, nach Überschreitung einer bestimmten Plattenstärke jedoch schnell absinkt.

Das 3. Modell berücksichtigt diesen Sachverhalt. Zu den genannten Voraussetzungen kommt noch die folgende hinzu. Jedes Elektron wird beim Durchlaufen der Wegstrecke Δt mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu dieser Wegstrecke absorbiert. Diese Wahrscheinlichkeit sei unabhängig von der vorher bereits durchlaufenen Wegstrecke t . Man erhält

$$\lambda_n = n\lambda, \quad \mu_n = n\mu, \quad \mu \neq \lambda.$$

Das Differentialgleichungssystem für die $p_n(t)$ lautet dann unter den gleichen Anfangsbedingungen (3.54)

$$\begin{aligned}p'_0(t) &= \mu p_1(t), \\p'_n(t) &= (n-1)\lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) - n(\lambda + \mu)p_n(t).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (3.41)–(3.44) folgt

$$\begin{aligned}r(t) &= (\mu - \lambda)t, \\w(t) &= \frac{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}{\lambda - \mu}.\end{aligned}$$

Es ergibt sich als Lösung

$$\begin{aligned}p_0(t) &= 1 + \frac{\mu - \lambda}{\lambda - \mu} e^{(\mu-\lambda)t}, \\p_n(t) &= \frac{(\mu - \lambda)^2}{\lambda^2} e^{(\mu-\lambda)t} \frac{(1 - e^{(\mu-\lambda)t})^{n-1}}{\left(1 - \frac{\mu}{\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}\right)^{n+1}}, \quad n > 0.\end{aligned}$$

Die Erwartungswertfunktion lautet

$$m_x(t) = e^{(\lambda - \mu)t}.$$

Dabei gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } \lambda > \mu, \\ 0 & \text{für } \lambda < \mu. \end{cases}$$

Das letzte von Arley vorgeschlagene Modell berücksichtigt zusätzlich, daß die Wahrscheinlichkeit der Absorption jedes Elektrons nicht nur der Länge der betrachteten Wegstrecke Δt , sondern auch der Länge des vorher bereits durchlaufenen Weges proportional ist. Diesem Ansatz liegt die Annahme zugrunde, daß die Elektronen um so mehr Energie verlieren, je größere Strecken t sie im Material durchlaufen. Man erhält jetzt einen inhomogenen Geburts- und Todesprozeß mit

$$\lambda_n = \lambda n, \quad \mu_n(t) = \mu t n.$$

Unter Beibehaltung der bisherigen Anfangsbedingungen (3.54) ergibt sich das System

$$p'_0(t) = \mu t p_1(t),$$

$$p'_n(t) = \lambda(n-1)p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu t)np_n(t) + \mu t(n+1)p_{n+1}(t).$$

Unter Berücksichtigung von (3.40)–(3.44) folgt

$$r(t) = \frac{1}{2}\mu t^2 - \lambda t,$$

$$w(t) = 1 + \lambda e^{-\frac{1}{2}\mu t^2 + \lambda t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\mu \vartheta^2 - \lambda \vartheta} d\vartheta.$$

Somit folgt das System

$$p_0(t) = 1 - e^{\lambda t - \frac{1}{2}\mu t^2},$$

$$p_n(t) = e^{-\lambda t + \frac{\mu t^2}{2}} A^{n-1} \left[A + e^{\frac{(\mu t - \lambda)^2}{2\mu}} \right]^{-n+1}, \quad n > 0,$$

mit

$$A = \lambda \int_0^t e^{\frac{(\mu \vartheta - \lambda)^2}{2\mu}} d\vartheta.$$

Für die Mittelwertfunktion erhält man

$$m_x(t) = e^{\left(\lambda t - \frac{\mu t^2}{2}\right)}.$$

Mit $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ ergibt sich speziell $m_x(t) = \exp\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)$. Die mittlere Lebensdauer $E(\tau)$ des Prozesses kann gemäß (3.53) aus

$$\int_0^{E(\tau)} \exp\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) t dt = 1$$

bestimmt werden. Die graphische Auswertung des Integrals liefert $E(\tau) = 3,2$. Man erkennt außerdem, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = 1$ ist, weil nach (3.50)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \exp\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) t \, dt = \infty$$

ist. Das bedeutet, daß der Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 durch Absorption endet. Skizziert man den Verlauf von $m_x(t)$, erkennt man, daß die Elektronenzahl zunächst stark zunimmt und dann rasch gegen null abnimmt. Untersuchungen haben ergeben, daß dies mit den tatsächlichen Beobachtungen gut übereinstimmt.

Aufgabe 3.2: Bestimmen Sie $m_x(t)$ und $\sigma_x^2(t)$ für das Modell der Bakterienkolonie in Aufgabe 3.1. Dabei sei $\mu = \frac{1}{4}\lambda$.

Oftmals interessiert nicht die allgemeine Lösung von (3.35), sondern bei homogenen Geburts- und Todesprozessen mit konstanten Koeffizienten $\lambda_n(t) = \lambda_n$ und $\mu_n(t) = \mu_n$ die Lösung im stationären Zustand. Es kann gezeigt werden, daß mit $t \rightarrow \infty$ die ergodischen Wahrscheinlichkeiten p_n nach Satz 3.5 existieren, wenn $\frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} < 1$, $n \geq n_0$. Mit $\frac{dp_n}{dt} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, erhält man folgende Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{n-1}p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}, & n \geq 1. \\ 0 &= -\lambda_0p_0 + \mu_1p_1, & n = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Für (3.55) kann man

$$-\lambda_n p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} - (-\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_n p_n) = 0$$

schreiben, so daß sich

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, \\ p_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = p_0 \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \end{aligned} \quad (3.56)$$

ergibt. Für p_0 erhält man unter Berücksichtigung von

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_0 \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right) = 1$$

die Beziehung

$$p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \right]^{-1}. \quad (3.57)$$

Für

$$\lambda_n = \lambda; \quad \mu_n = n\mu, \quad \lambda, \mu = \text{const},$$

ermittelt man beispielsweise aus (3.55) sehr leicht

$$p_n = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

Aufgabe 3.3: Man zeige, daß für $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ das System (3.55) die Lösung

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 0,$$

besitzt.

Beispiel 3.5: Wir setzen die Behandlung der Gesprächsvermittlung in einer Telefonzentrale fort.

Es werde zunächst vorausgesetzt, daß „unendlich“ viele Leitungen vorhanden sind, so daß jeder Teilnehmer eine freie Leitung vorfindet. In Übereinstimmung mit den bisherigen Betrachtungen können wir voraussetzen, daß die Zahl der bis zum Zeitpunkt t eingetroffenen Gespräche einen Poissonschen Prozeß $\{Y(t), t \geq 0\}$ mit der Intensität λ bildet. Die Gesprächsdauer sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße Z mit dem Parameter μ . $X(t)$ sei die Anzahl der Leitungen, die zum Zeitpunkt t besetzt sind. $\{X(t), t \geq 0\}$ ist ein stochastischer Prozeß, dessen Charakteristiken ermittelt werden können. Es sei bekannt, daß zum Zeitpunkt t (Beginn der Registrierung) i Leitungen besetzt sind, d. h., $P(X(t) = i) = 1$. Dann hängt die Zahl der besetzten Leitungen zur Zeit $t + \Delta t$ eindeutig

- a) von der Zahl der Leitungen, die im Intervall Δt frei werden,
- b) von der Zahl der im Intervall Δt neu ankommenden Gespräche und
- c) von der Dauer der Gespräche, die in Δt beginnen,

ab. Auf Grund der Voraussetzungen ($\{Y(t), t \geq 0\}$ ist Poissonscher Prozeß) sind alle diese Faktoren unabhängig davon, wie der Prozeß bis zum Zeitpunkt t verlief. Das erscheint insbesondere in Hinsicht auf den ersten Faktor paradox, erklärt sich aber aus den im Kapitel 2 angegebenen Eigenschaften von Poissonprozessen und Exponentialverteilung. $\{X(t), t \geq 0\}$ ist somit ein homogener diskreter Markowprozeß mit unendlich vielen Zuständen i ($i = 0, 1, 2, \dots$). Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Zeitintervall Δt wenigstens 1 Anruf eintrifft, ist gleich $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ (vgl. Aufgabe 2.4), die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von mehr als einem Gespräch $o(\Delta t)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gespräch länger dauert als Δt , ist

$$P(Z > \Delta t) = e^{-\mu \Delta t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß n Gespräche länger als Δt dauern, ist (wegen der Unabhängigkeit der Gespräche) gleich

$$(e^{-\mu \Delta t})^n = e^{-n \mu \Delta t}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in Δt wenigstens eine Leitung frei wird, ist gleich

$$\begin{aligned} 1 - e^{-n \mu \Delta t} &= 1 - \left[1 - \frac{n \mu \Delta t}{1!} + \frac{n^2 \mu^2 \Delta t^2}{2!} - \dots + \dots \right] \\ &= n \mu \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Freiwerden von mehr als einer Leitung ist $o(\Delta t)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} p_{in}(t, t + \Delta t) &= o(\Delta t), & |i - n| > 1, \\ p_{n,n+1}(t, t + \Delta t) &= \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{n,n-1}(t, t + \Delta t) &= n\mu \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.59)$$

$\{X(t), t \geq 0\}$ ist also ein Geburts- und Todesprozeß mit

$$\lambda_n = \lambda; \quad \mu_n = n\mu. \quad (3.60)$$

Das Differentialgleichungssystem für die absoluten Wahrscheinlichkeiten $p_n(t)$ lautet dann gemäß (3.35)

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= \mu p_1(t) - \lambda p_0(t), \quad n = 0, \\ p'_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + \mu n) p_n(t) + \mu(n+1) p_{n+1}(t), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Da man sich bei dieser Problematik nur für den stationären Zustand interessiert, erhält man folgendes von den Anfangsbedingungen unabhängige Gleichungssystem [vgl. (3.55)]

$$\begin{aligned} 0 &= \mu p_1 - \lambda p_0, & n = 0, \\ 0 &= \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu n) p_n + \mu(n+1) p_{n+1}, & n > 0. \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man nach (3.58)

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \quad n \geq 0.$$

p_n ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach sehr langer Zeit n Leitungen besetzt sind (vgl. Aufgabe c) des Beispiels 2.3). Wie man erkennt, hängt diese Wahrscheinlichkeit wesentlich vom Quotienten λ/μ ab. $\sum_{i=1}^n p_i$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens n Leitungen besetzt sind, $1 - \sum_{i=1}^n p_i$ die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens n Leitungen besetzt sind.

In der Praxis ist selbstverständlich die Anzahl a der Leitungen begrenzt. Sind alle Leitungen belegt, kann ein neu eintreffender Anruf nicht berücksichtigt werden. Entfällt er, so spricht man bezüglich der Telefonzentrale von einem System mit Verlust. Da X nur die Werte $0, 1, 2, \dots, a$ annehmen kann, erhält man anstelle (3.60)

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \begin{cases} \lambda & \text{für } n = 0, 1, \dots, a, \\ 0 & \text{für } n > a; \end{cases} \\ \mu_n &= \begin{cases} \lambda & \text{für } n = 0, 1, \dots, a-1, \\ 0 & \text{für } n \geq a. \end{cases} \end{aligned}$$

Anstelle des Gleichungssystems (3.55) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda p_0 + \mu p_1 &= 0, & n &= 0, \\ \lambda p_{n-1} - (\lambda + \mu n) p_n + \mu(n+1) p_{n+1} &= 0, & 0 < n \leq a-1, \\ \lambda p_{a-1} - \mu a p_a &= 0, & n &= a. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wegen $p_n = 1/n! (\lambda/\mu)^n p_0$ für $n = 1, \dots, a$ und $\sum_{n=0}^a p_n = 1$ ist

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^a \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

und allgemein

$$p_n = \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=0}^a \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}, \quad n = 0, 1, \dots, a. \quad (3.62)$$

p_a gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß ein neu ankommender Anruf keine freie Leitung vorfindet und damit verlorenght. Tabellen für p_a unter verschiedenen Annahmen für a und λ/μ findet der Leser in [17]. In der Praxis geht man u. a. von der Forderung aus, die Zentrale so zu dimensionieren, daß Auslastung und Verlustwahrscheinlichkeit in einem vernünftigen Verhältnis stehen.

In den vorangehenden Abschnitten wurden Markowsche Ketten und diskrete Markowsche Prozesse behandelt. Von großer Bedeutung insbesondere für die Naturwissenschaften sind allgemeine stochastische Prozesse mit Markoweigenschaften.

Ein allgemeiner Markowscher Prozeß kann ähnlich wie im diskreten Fall durch Angabe einer Übergangsfunktion

$$F(s, x; t, y) = P(X(t) < y \mid X(s) = x), \quad s, t \geq 0, \quad x, y \in (-\infty; +\infty), \quad (3.63)$$

charakterisiert werden. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß im Moment t die Zufallsgröße $X(t)$ einen Wert kleiner als y annimmt, wenn bekannt ist, daß im Moment s ($s < t$) $X(s) = x$ gilt. (3.63) ist eine bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, die analog zum diskreten Fall die Übergangswahrscheinlichkeit des Prozesses von einem Wert in eine Menge anderer Werte zu einem späteren Zeitpunkt angibt. Eine ausführliche Behandlung findet der Leser in [5], [6] und [21]. Durch Prozesse dieser Art lassen sich u. a. Diffusionsvorgänge modellieren. Ein Spezialfall ist die Brownsche Molekularbewegung.

4. Stationäre Prozesse

4.1. Grundlegende Eigenschaften

In der Praxis treten häufig zufällige Prozesse auf, deren Charakteristiken sich bei Verschiebung der Parameterwerte auf der Parameterachse nicht ändern. Kehren wir zum Beispiel 2.2 zurück. Normalerweise ist es bei der statistischen Untersuchung des Oberflächenprofils eines Werkstückes gleichgültig, an welcher Stelle der Bezugspunkt $t = 0$ festgelegt wird (vgl. Bild 2.2). Wir würden die gleichen Mittelwert-, Varianz- und Korrelationsfunktionen und sogar dieselbe zugeordnete Verteilung erhalten, wenn er an einer anderen Stelle als der eingezeichneten liegen würde. Ähnliches Verhalten kann man auch bei zufälligen Prozessen, wie dem Rauschen in Elektronenröhren, dem Schwund (Fading) und der Abweichungen selbstregelnder und selbststeuernder Systeme, die unter konstanten äußeren Bedingungen arbeiten, feststellen. Bei diesen Prozessen ist es gleichgültig, zu welchem Zeitpunkt wir mit der Beobachtung und Registrierung des Prozeßverlaufs beginnen. Sie verhalten sich „stationär“ bezüglich des Parameters t .

Definition 4.1: Ein stochastischer Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ heißt **stationärer stochastischer Prozeß**, wenn sich die n -dimensionalen Verteilungsfunktionen zu beliebigen Parameterwerten t_1, t_2, \dots, t_n ($t_1, \dots, t_n \in I, n = 1, 2, \dots$) bei Verschiebung dieser Werte längs der Parameterachse um einen beliebigen Wert τ nicht ändern.

Das bedeutet

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

und falls die Dichtefunktionen $f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ existieren, gilt auch

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{t_1+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, \dots, x_n). \quad (4.2)$$

Bei zufälligen Folgen und Ketten mit dieser Eigenschaft spricht man von stationären Folgen bzw. stationären Ketten. Betrachten wir einige wichtige Eigenschaften.

Satz 4.1: Mittelwert- und Varianzfunktion eines stationären Prozesses sind konstant. Die Korrelationsfunktion hängt nur von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$, jedoch nicht von t_1 und t_2 selbst ab.

Beweis: Aus (4.1) folgt für $n = 1$

$$F_{t_1}(x_1) = F_{t_2}(x_1) = \dots = F_{t_n}(x_1).$$

Die eindimensionalen Verteilungsfunktionen sind von t unabhängig. Hieraus folgt $m_x(t) = \text{const}$ und $\sigma_x^2(t) = \text{const}$. Aus (4.1) folgt weiterhin für $n = 2$ und $\tau = -t_1$

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = F_{0, t_2-t_1}(x_1, x_2) = F_{0, t_2-t_1}(x_2 - x_1). \quad (4.3)$$

Die zweidimensionalen Verteilungsfunktionen hängen nur von $t_2 - t_1$ ab. Hieraus folgt der zweite Teil der Behauptung.

Die Korrelationsfunktion eines stationären Prozesses ist somit eine (reelle) Funktion einer Veränderlichen, und man schreibt

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau). \quad (4.4)$$

Existieren die Dichtefunktionen, erhält man $m_x(t)$, $\sigma_x^2(t)$ und $k_x(\tau)$ aus

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = m, \\ \sigma_x^2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

und

$$k_x(t_1; t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m)(x_2 - m) f_{0, t_2 - t_1}(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 = k_x(\tau).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die in Satz 4.1 genannten Eigenschaften nicht hinreichend für die Stationarität sind. Ein Prozeß $\{X(t), t \in I\}$ mit diesen Eigenschaften braucht nicht stationär zu sein. Da man sich aber in den meisten praktischen Anwendungen auf Momente erster und zweiter Ordnung beschränkt, ist es zweckmäßig, den Begriff der Stationarität etwas weiter zu fassen. Man bezeichnet einen Prozeß *im erweiterten Sinne stationär*, wenn er die in Satz 4.1 angegebenen Eigenschaften besitzt.

Aus Satz 2.1 und (2.15) ergeben sich unmittelbar die folgenden Eigenschaften von $k_x(\tau)$.

a) $k_x(\tau)$ ist eine gerade Funktion:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau). \quad (4.6)$$

b) Die Werte einer Korrelationsfunktion sind höchstens gleich der Varianz der Zufallsfunktion:

$$k_x(0) \geq k_x(\tau).$$

In den Anwendungen treten Zufallsprozesse vielfach infolge stetiger Einwirkung verschiedener zufälliger Störungen auf ein dynamisches System auf. Daher wird oftmals bei einer genügend großen Länge des Zeitintervalls $\tau = t_2 - t_1$ die Abweichung der Ordinate eines Zufallsprozesses von der mathematischen Erwartung im Zeitpunkt t_2 vom Wert dieser Abweichung im Zeitpunkt t_1 praktisch unabhängig. Dann gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) = 0, \quad (4.7)$$

und die Korrelationsfunktionen besitzen den in Bild 4.1 dargestellten Verlauf. Korrelationsfunktionen gemäß Bild 4.1a lassen sich im allgemeinen durch die Ausdrücke

$$k_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (4.8)$$

$$k_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad \alpha > 0, \quad (4.9)$$

und solche gemäß Bild 4.1b durch

$$k_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \quad (4.10)$$

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2} \cos \beta\tau \quad (4.11)$$

mit genügender Genauigkeit approximieren.¹⁾

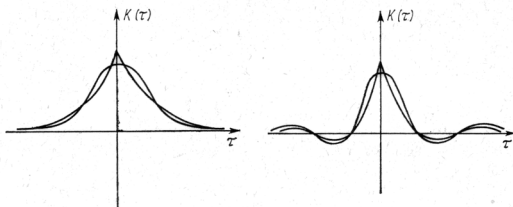


Bild 4.1. Korrelationsfunktionen stationärer Prozesse

Wir führen im folgenden einige Beispiele für stationäre Prozesse an:

Beispiel 4.1: Ein zufälliger Prozeß $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ entstehe auf folgende Weise. Wir betrachten auf der Achse Ot eine Folge von Ereignissen, die in zufälligen Momenten nacheinander eintreten. Die Wahrscheinlichkeit $p_m(\Delta t)$, daß m Ereignisse im Zeitintervall der Länge Δt eintreten, sei

$$p_m(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m}{m!} e^{-\lambda \Delta t}.$$

$X(t)$ nimmt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen im Wechsel die Werte $+1$ bzw. -1 an (vgl. Bild 4.2). Man spricht auch von einem homogenen Poisson'schen Strom von Ereignissen mit dem Parameter λ (vgl. Kapitel 5). Man bezeichnet

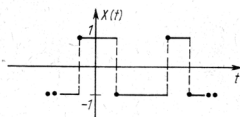


Bild 4.2. Trajektorie eines Signalprozesses

$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ auch als *Signalprozeß*. Es läßt sich zeigen, daß dieser Prozeß im erweiterten Sinne stationär ist und eine Korrelationsfunktion der Form (4.8) besitzt.

Zwei Trajektorien, die an jeder Stelle t Ordinatenwerte mit entgegengesetzten Vorzeichen besitzen, sind als *gleichwahrscheinlich* anzusehen. Daher ist sofort ein-

¹⁾ Es läßt sich beweisen, daß diese Funktionen tatsächlich Korrelationsfunktionen stationärer Prozesse sein können.

zusehen, daß an jeder Stelle t

$$X(t) = \begin{cases} +1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/2 \end{cases}$$

ist. Für Mittelwert- und Varianzfunktion ergeben sich

$$m_x(t) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0$$

und

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 1.$$

Bei der Bestimmung der Korrelationsfunktion

$$k_x(t_1, t_2) = E[X(t_1) X(t_2)] \quad (t_1 < t_2)$$

ist zu berücksichtigen, daß das Produkt $X(t_1) X(t_2)$ gleich -1 wird, wenn zwischen t_1 und t_2 eine ungerade Anzahl von Ereignissen (Vorzeichenwechsel), bzw. gleich $+1$ wird, wenn eine gerade Anzahl von Ereignissen auftritt. Die Wahrscheinlichkeit p_u für den ersten Fall ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß 1, 3, 5, 7, ... Ereignisse stattfinden. Mit $\tau = t_2 - t_1$ ist

$$p_u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m+1}}{(2m+1)!} e^{-\lambda\tau}.$$

Die Wahrscheinlichkeit p_g für den zweiten Fall ist entsprechend

$$p_g = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda\tau}.$$

Aus der Analysis sind die folgenden Beziehungen bekannt:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{1}{2} (e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{2} (e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}).$$

Somit ergibt sich für $t_1 < t_2$

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) = (-1) p_u + (+1) p_g = e^{-2\lambda\tau}.$$

Analog erhält man für $t_1 > t_2$

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Faßt man beide Beziehungen zusammen, erhält man

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Beispiel 4.2: Betrachten wir als nächstes Beispiel einen Schwingungsvorgang der Form

$$X(t) = \xi_1 \cos \lambda t + \xi_2 \sin \lambda t.$$

ξ_1 und ξ_2 sind unkorrelierte Zufallsgrößen mit

$$E(\xi_1) = E(\xi_2) = 0; \quad \sigma^2(\xi_1) = \sigma^2(\xi_2) = 1.$$

λ ist eine Konstante. Es folgt

$$m_x(t) = 0,$$

und mit $t_2 = t_1 + \tau$ ergibt sich

$$\begin{aligned} k_x(t_1, t_2) &= k_x(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1 + \tau) X(t_1)] \\ &= E\{[\xi_1 \cos \lambda(t_1 + \tau) + \xi_2 \sin \lambda(t_1 + \tau)] \\ &\quad \times [\xi_1 \cos \lambda t_1 + \xi_2 \sin \lambda t_1]\} \\ &= E\{\xi_1^2 \cos \lambda(t_1 + \tau) \cos \lambda t_1 + \xi_1 \xi_2 [\sin \lambda(t_1 + \tau) \cos \lambda t_1 \\ &\quad + \cos \lambda(t_1 + \tau) \sin \lambda t_1] + \xi_2^2 \sin \lambda t_1 \sin \lambda(t_1 + \tau)\} \\ &= \cos \lambda t_1 \cos \lambda(t_1 + \tau) + \sin \lambda t_1 \sin \lambda(t_1 + \tau). \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich

$$k_x(t_1; t_2) = k_x(\tau) = \cos \lambda \tau.$$

Die Schwingung $X(t)$ ist somit in erweitertem Sinne stationär.

Beispiel 4.3: Betrachten wir nun einen Prozeß, der durch Überlagerung einer endlichen Anzahl von zufälligen Schwingungen der eben genannten Art entsteht. Es sei

$$X(t) = \sum_{k=1}^n b_k \xi_k(t)$$

mit

$$\xi_k(t) = \xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t,$$

wobei

$$E(\xi_k) = E(\eta_k) = 0, \quad \sigma^2(\xi_k) = \sigma^2(\eta_k) = 1 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n,$$

$$E(\xi_i \xi_j) = E(\eta_i \eta_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und}$$

$$E(\xi_i \eta_j) = 0 \quad \text{für } i, j = 1, 2, \dots, n$$

vorausgesetzt wird. Durch analoge Ableitung, die der Leser zur Übung leicht selbst durchführen kann, findet man

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) = \sum_{k=1}^n b_k^2 \cos \lambda_k \tau.$$

Da $\cos \lambda_k \tau$ eine gerade Funktion ist, kann $k_x(\tau)$ mit $\lambda_{-k} = -\lambda_k$ und $b_{-k} = -b_k$ auch in der Form

$$k_x(\tau) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2} b_k^2 \cos \lambda_k \tau$$

geschrieben werden. Diese Schwingungsvorgänge haben in der Technik häufig die Bedeutung von Spannung oder Stromstärke. In diesem Fall sind die Koeffizienten b_k^2 proportional der Energie, die im Mittel auf die Schwingungen der Frequenz λ_k

entfallen, da die Energie eines elektrischen Stromes dem Quadrat der Amplituden der entsprechenden Schwingung proportional ist. Diese Analogie hat man häufig auch dann im Auge, wenn der Schwingungsprozeß keinen elektrodynamischen Prozeß charakterisiert. Die Gesamtheit der Zahlen b_k heißt daher *Energiespektrum*, die Werte λ_k *Frequenzen* des Prozesses. Die Energie ist durch die Varianz des Prozesses

$$k_x(0) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n b_k^2 \cos 0\lambda_k = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n b_k^2 \quad (4.12)$$

gegeben.

Aufgabe 4.1: Als Korrelationszeit τ_k eines stationären Prozesses $\{X(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ bezeichnet man in der Technik den Wert $\tau_k = \int_0^{\infty} |r_x(\tau)| d\tau$, wobei $r_x(\tau)$ die normierte Korrelationsfunktion ist. Bestimmen Sie τ_k für $r_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$. Was bedeutet τ_k geometrisch?

4.2. Spektraldarstellung

Wir knüpfen an die letzten Ausführungen an und stellen die Frage, ob für alle in erweitertem Sinne stationären Prozesse eine derartige analoge Betrachtungsweise möglich ist. Das ist tatsächlich der Fall. Man erkennt diesen Sachverhalt klarer, wenn eine andere Darstellungsweise der Korrelationsfunktion, die sogenannte Spektraldarstellung eingeführt wird. Betrachten wir deshalb noch einmal das Beispiel 4.2. Es wird die folgende Funktion $F(\lambda)$ definiert.

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq -\lambda_1, \\ 1/2 & \text{für } -\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_1, \\ 1 & \text{für } \lambda_1 < \lambda. \end{cases} \quad (4.13)$$

Ist $\lambda^{(i)}$ ($i = \pm 1; \pm 2; \dots$) eine beliebige Unterteilung der reellen Achse und $\Delta\lambda^{(i)} = \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$, so kann $k_x(\tau)$ auch in der Form

$$k_x(\tau) = \lim_{\Delta\lambda^{(i)} \rightarrow 0} \sum_i \cos \lambda^{(i)} \tau [F(\lambda^{(i)}) - F(\lambda^{(i-1)})]$$

oder mit Hilfe des Riemann-Stieltjes-Integrals (vgl. Band 2, S. 224)

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda \tau dF(\lambda) \quad (4.14)$$

dargestellt werden.

Da $\cos \lambda \tau$ eine gerade Funktion ist und $dF(\lambda) = -dF(-\lambda)$ gilt, kann man auch schreiben

$$k_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau dF(\lambda).$$

Zu einer Darstellung der Form (4.14) gelangt man auch beim Beispiel 4.3, wenn man $F(\lambda)$ als nichtfallende linksseitig stetige Stufenfunktion definiert, die jeweils in den Punkten $\pm\lambda_k$ um den Betrag $\frac{1}{2}b_k^2$ wächst.

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \leq -\lambda_n, \\ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-l} b_{n-k}^2 & \text{für } -\lambda_l < \lambda \leq -\lambda_{l-1} \quad (l = n, n-1, \dots, 2), \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k^2 & \text{für } -\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_1, \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l-1} b_k^2 & \text{für } \lambda_{l-1} < \lambda \leq \lambda_l \quad (l = 2, \dots, n), \\ \sum_{k=1}^n b_k^2 & \text{für } \lambda_n > \lambda_n. \end{cases}$$

Es läßt sich beweisen, daß die Korrelationsfunktion eines beliebigen reellen stationären Prozesses mit endlicher Varianz in der Form

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda \tau dF(\lambda) = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau dF(\lambda) \quad (4.15)$$

dargestellt werden kann, wobei $F(\lambda)$ eine reelle nichtfallende und beschränkte Funktion ist.¹⁾ Wird umgekehrt für $F(\lambda)$ eine Funktion mit den eben genannten Eigenschaften gewählt, die der Bedingung (4.15) genügt, dann ist $k(\tau)$ Korrelationsfunktion eines reellen stationären Prozesses.

Die Funktion $F(\lambda)$ aus (4.15) heißt *Spektralfunktion* des entsprechenden Prozesses. Im folgenden sollen einige Eigenschaften genannt werden. Zunächst wird die Beschränktheit von $F(\lambda)$ gezeigt. Unter Beachtung von (4.15) erkennt man

$$k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda). \quad (4.16)$$

Da $F(\lambda)$ eine nicht abnehmende Funktion ist, folgt mit (4.16) wegen

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} dF(\lambda) = F(\infty) - F(-\infty) = k(0) < +\infty, \quad (4.17)$$

daß $F(\lambda)$ eine beschränkte Funktion ist. Wir setzen nun voraus, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.18)$$

gilt. In der Praxis ist die Forderung fast immer erfüllt, da mit wachsendem τ die Korrelation schnell abnimmt. Dann läßt sich $k(\tau)$ in Form eines Fourierintegrals

¹⁾ Hier und im weiteren wird der Index x immer dann weggelassen, wenn bei der Betrachtung beliebiger stationärer Prozesse deren Darstellung in der Form, $\{X(t) | t \in I\}$ nicht explizit vorgegeben ist.

(vgl. Bd. 3) darstellen. Da $k(\tau)$ eine gerade Funktion ist, erhält man

$$k(\tau) = 2 \int_0^{\infty} f(\lambda) \cos \lambda \tau \, d\lambda \quad (4.19)$$

mit

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau. \quad (4.20)$$

Vergleicht man diese Darstellung mit (4.15), so erhält man

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\vartheta) \, d\vartheta, \quad (4.21)$$

also

$$F'(\lambda) = f(\lambda). \quad (4.22)$$

Die Funktion $f(\lambda)$ wird als *Spektraldichte* des Prozesses bezeichnet. Wegen (4.12) und (4.19) gilt

und
$$f(\lambda) \geq 0, \quad -\infty < \lambda < +\infty, \quad (4.23)$$

Betrachtet man an Stelle eines stationären stochastischen Prozesses eine stationäre Folge $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$, erhält man durch analoge Ableitungen anstatt (4.19) und (4.20) die Beziehungen

und
$$k_x(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \cos \lambda n \, d\lambda$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} k_x(n) \cos \lambda n. \quad (4.24)$$

Bei theoretischen und praktischen Untersuchungen stationärer Prozesse erweist es sich häufig als zweckmäßig, an Stelle der Korrelationsfunktion die Spektraldichte einzuführen, so z.B. bei der Analyse und Synthese von Regelsystemen in der Technik. Ein Grund ist darin zu sehen, daß die Spektraldichte oftmals ein sehr einfacher rationaler Ausdruck ist. Weitergehende Ausführungen findet man in [8], [18], [25] und [31].

Beispiel 4.4: In Beispiel 4.1 lernten wir die Korrelationsfunktion

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$$

eines Signalprozesses kennen. Wir ermitteln jetzt die Spektraldichte dieses Prozesses. Es läßt sich zeigen, daß $k_x(\tau)$ die Bedingung (4.18) erfüllt. Weil $k_x(\tau)$ eine gerade Funktion ist, also $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$ gilt, kann man die folgende Beziehung anwenden:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) \cos \lambda \tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\lambda\tau} \, d\tau.$$

Somit ergibt sich gemäß (4.20)

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} e^{-\alpha|\tau|} d\tau$$

oder

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau - \alpha|\tau|} d\tau.$$

Wegen

$$|\tau| = \begin{cases} \tau, & \tau \geq 0, \\ -\tau, & \tau < 0, \end{cases}$$

folgt

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\lambda)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{(\alpha + i\lambda)\tau} d\tau \right].$$

Nach Berechnung der komplexen Integrale erhält man schließlich (vgl. Bild 4.3)

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha - i\lambda} + \frac{1}{\alpha + i\lambda} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\lambda^2 + \alpha^2}.$$

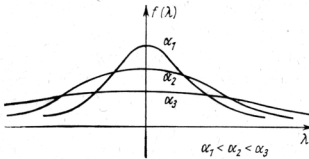


Bild 4.3. Spektraldichte des Prozesses bei unterschiedlichem α

Beispiel 4.5: Ein wichtiger Prozeß ist das sogenannte *weiße Rauschen*. Wächst in dem eben betrachteten Beispiel α , nimmt der Betrag der Ordinaten von $k_x(\tau)$ sehr schnell ab. Gleichzeitig verringert sich dabei die Anfangsordinate der Spektraldichte $\frac{1}{\pi\alpha}$. Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda = 1$$

wird das Kurvenbild der Spektraldichte $f(\lambda)$ zunehmend flacher. Während $k_x(\tau)$ für sehr große α -Werte in eine nadelförmige Funktion übergeht, deren Ordinaten nur in einem kleinen Intervall um den Nullpunkt von Null verschieden sind, ist $f(\lambda)$ in einem sehr breiten Gebiet der Frequenz λ nahezu konstant. Es ist nun naheliegend, Prozesse zu untersuchen, die ein konstantes Spektrum

$$f(\lambda) = c = \text{const}, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

besitzen. Prozesse mit derartigen Spektren bezeichnet man als *weißes Rauschen*. Für zufällige Folgen sind die Verhältnisse sehr einfach zu beschreiben. Gemäß (4.24) erhält man die Korrelationsfunktion

$$k(n) = \int_{-\pi}^{\pi} c \cos \lambda n \, d\lambda$$

$$= \begin{cases} 2\pi c & \text{für } n = 0, \\ \frac{2c}{n} \sin n\pi = 0 & \text{für } n = \pm 1; \pm 2 \dots \end{cases}$$

Solche Folgen sind also für $n \neq 0$ unkorreliert und im Falle einer Normalverteilung somit unabhängig. Bei stochastischen Prozessen (mit stetiger Zeit) stößt man bei einer analogen Betrachtungsweise auf große Schwierigkeiten. Unter Berücksichtigung von (4.23) erkennt man, daß die Varianz ∞ ist, denn es gilt

$$\sigma^2 = k(0) = 2 \int_0^{+\infty} f(\lambda) \, d\lambda$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} c \, d\lambda = \infty. \quad (4.25)$$

Die Korrelationsfunktion kann in der Form

$$k(\tau) = 2\pi c \delta(\tau)$$

ausgedrückt werden, wobei

$$\delta(\tau) = \begin{cases} +\infty, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0, \end{cases}$$

die sogenannte *Dirac-Funktion*¹⁾ ist.

Solche vollständig unkorrelierten stochastischen Prozesse gibt es in der Praxis nicht. Sie müßten insbesondere eine unendlich große Varianz zu jedem Zeitpunkt besitzen. Viele Prozesse lassen sich jedoch näherungsweise durch das weiße Rauschen darstellen (z. B. das Rauschen der Elektronenröhren) und sind somit einer einfacheren analytischen Behandlung zugänglich.

4.3. Ein Anwendungsproblem

In der Technik hat man es häufig mit dynamischen Systemen zu tun, an deren Ein- und Ausgängen Zufallsfunktionen $\{X(t), t \in I\}$ und $\{Y(t), t \in I\}$ mit bekannten Charakteristiken sind. Die Parameter des Systems sind so zu bestimmen, daß die am Ausgang des Systems gewonnene Funktion $\{Y(t), t \in I\}$ einen stochastischen

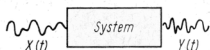


Bild 4.4. Schematische Darstellung eines stochastischen dynamischen Systems

¹⁾ Hierbei handelt es sich um keine gewöhnliche Funktion. Eine genaue Charakterisierung findet der Leser in [31].

Prozeß $\{Z(t), t \in I\}$, den man zu erreichen wünscht, möglichst genau approximiert. Man sagt dann, es ist ein *optimales dynamisches System* zu berechnen. Mathematisch bedeutet das Problem, eine Funktion zu finden, die auf $X(t)$ angewendet $Z(t)$ im Sinne eines gewählten Kriteriums am besten annähert. Im allgemeinen wählt man als Kriterium die mittlere quadratische Abweichung der Ordinaten voneinander und fordert, daß diese Differenz minimal wird (vgl. Methode der kleinsten Quadrate, Bd. 4).

$$E\{|Y(t) - Z(t)|^2\} = \min. \quad (4.26)$$

Ein spezifisches Problem dieser Art ist die *Extrapolation* oder Vorhersage. Hierbei handelt es sich darum, auf der Grundlage bis zu einem Zeitpunkt t bekannter Ordinatenwerte der stochastischen Eingangsfunktion $\{X(t), t \in I\}$ den Wert zu irgendeinem zukünftigen Zeitpunkt $t + \tau$ möglichst genau vorherzusagen. Somit ist

$$Z(t) = X(t + \tau),$$

und es muß ein Operator L so bestimmt werden, daß

$$E\{|X(t + \tau) - LX(t)|^2\} = \min \quad (4.27)$$

wird. Kennt man die Ordinatenwerte von $X(t)$ nur in einem beschränkten Intervall $[t_0, t]$, so spricht man von *Extrapolation auf der Grundlage eines endlichen Zeitintervalls*. Sind sämtliche Werte im Intervall $(-\infty, t]$ gegeben, spricht man von *Extrapolation bei Kenntnis der gesamten Vergangenheit*. Auf Extrapolationsaufgaben stößt man z. B. bei der Konstruktion von Feuerleitgeräten auf Schiffen. Sie müssen gewährleisten, daß eine Salve in dem Moment abgefeuert wird, in dem das Deck horizontal ist und dementsprechend den sich zufällig ändernden Neigungswinkel des Schiffes extrapolieren. Eine große Rolle spielt die Extrapolation auch bei der Verhinderung der Schlingerbewegungen eines Flugzeuges und beim Bau dementsprechender Dämpfungseinrichtungen.

In der Ökonomie extrapoliert man oftmals für kurze Zeiträume die Entwicklung von Kennziffern aus ihrem Verlauf in der Vergangenheit; derartige sog. kurzfristige Vorausberechnungen werden u. a. durchgeführt für den Einzelhandelsumsatz, die Warenproduktion u. ä. mehr [27].

Ein weiteres Problem ist die *Filtration* oder Glättung. Hierbei ist die Eingangsfunktion die Summe von zwei Zufallsprozessen

$$X(t) = U(t) + V(t),$$

wobei $U(t)$ ein Nutzsignal ist und $V(t)$ eine Störung darstellt, von der man sich durch Konstruktion eines passenden Filters befreien möchte. Dann ist

$$Z(t) = U(t),$$

und L ist so zu bestimmen, daß

$$E\{|L[U(t) + V(t)] - U(t)|^2\} = \min \quad (4.28)$$

gilt. Beispiele für solche Aufgaben sind u. a. die Auswertung experimentell bestimmter Kurven eines stochastischen Prozesses mit dem Ziel, Meßfehler oder Fehler in der Registriereinrichtung zu beseitigen sowie die Trennung von Nutzsignal und Rauschen in Rundfunkübertragungskanälen [28].

Die Lösung der genannten Aufgaben in ihrer Allgemeinheit bereitet große Schwierigkeiten. Wir werden uns deshalb auf die Extrapolation stationärer zufälliger Folgen beschränken. Gegeben ist eine Folge

$$\{X(t-n), \dots, X(t-2), X(t-1), X(t), X(t+1), \dots, X(t+m), \dots\},$$

$$n > 0, m \geq 0. \quad (4.29)$$

Der Prozeßverlauf sei bis zum Zeitpunkt $t-1$ bekannt, und es soll die Ordinate $X(t+m)$ ($m \geq 0$) extrapoliert werden. Gemäß (4.27) ist eine Funktion

$$L = L[X(t-1), X(t-2), \dots, X(t-n)] \quad (4.30)$$

so zu bestimmen, daß

$$E\{[L - X(t+m)]^2\} = \min \quad (4.31)$$

wird. Wir bezeichnen mit

$$E_1 = E[X(t+m)/X(t-1), X(t-2), \dots, X(t-n)] \quad (4.32)$$

die *bedingte mathematische Erwartung* (vgl. Bd. 17) von $X(t+m)$ unter der Bedingung $X(t-1), \dots, X(t-n)$. Dann läßt sich die linke Seite von (4.31) in der Form

$$E\{[(L - E_1) + (E_1 - X(t+m))]^2\} \quad (4.33)$$

schreiben. Quadriert man die Klammer aus und wendet die Rechenregel über die mathematische Erwartung einer Summe an, ergibt sich für (4.33) der Ausdruck

$$E\{[X(t+m) - E_1]^2\} + E\{[L - E_1]^2\} + 2E\{[L - E_1][E_1 - X(t+m)]\}. \quad (4.34)$$

Der letzte Summand ist jedoch gleich null. Denn unter Anwendung der folgenden Rechenregeln für bedingte mathematische Erwartungswerte

$$a) \quad E[E(X/Y_1, Y_2, \dots, Y_n)] = E(X),$$

$$b) \quad E[X_1 f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)/Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) E(X_1)$$

für Zufallsgrößen X, Y_1, \dots, Y_n gilt

$$\begin{aligned} E\{[L - E_1][E_1 - X(t+m)]\} \\ &= E\{E[L - E_1][E_1 - X(t+m)]/X(t-1), \dots, X(t-n)\} \\ &= E\{[L - E_1]E[(E_1 - X(t+m))/X(t-1), \dots, X(t-n)]\} \\ &= E\{[L - E_1][E_1 - E_1]\} = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Hieraus folgt, daß (4.31) minimiert wird, wenn

$$L[X(t-1), \dots, X(t-n)] = E_1 = E[X(t+m)/X(t-1), \dots, X(t-n)]$$

gewählt wird. Das heißt, daß die Funktion L , die den mittleren quadratischen Fehler der Approximation bei beliebigem Verteilungsgesetz der Ordinate der Zufallsfolge minimal werden läßt, gleich der bedingten mathematischen Erwartung der zu extra-

polierenden Ordinate $X(t+m)$ unter der Bedingung $X(t-1), \dots, X(t-n)$ ist. Diese bedingte mathematische Erwartung läßt sich allgemein ebenfalls sehr schwer ermitteln. Unter der Voraussetzung, daß die zugeordnete Verteilung von (4.29) eine Normalverteilung ist, läßt sich zeigen, daß

$$E[X(t+m)|X(t-1), \dots, X(t-n)] \\ = a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) + \dots + a_n X(t-n) \quad (4.36)$$

gilt, wobei a_1, a_2, \dots, a_n reelle Zahlen sind.

$L[X(t-1), \dots, X(t-n)]$ ist eine lineare Funktion von $X(t-1), \dots, X(t-n)$. Aber auch dann, wenn die Folge nicht normalverteilt ist, liefert die Anwendung eines linearen Operators brauchbare Näherungslösungen, denn viele in der Praxis auftretenden Prozesse sind näherungsweise normalverteilt. Oftmals treten auch Zufallsfunktionen als vergleichsweise kleine Zusätze zu nichtstochastischen Ausdrücken auf, so daß eine Linearisierung möglich und sinnvoll erscheint.

Es soll nun die lineare Extrapolation der stationären Folge (4.29) mit endlicher Vergangenheit (n endlich) durchgeführt werden. Die Korrelationsfunktion $k_x(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, der Folge sei bekannt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $m_x(t) = 0$. Zunächst soll $X(t)$ bei beobachteten

$$X(t-1) = x_{t-1}, \dots, X(t-n) = x_{t-n}$$

extrapoliert werden. Wir bilden den Ausdruck

$$\sigma_{0n}^2(a_1, \dots, a_n) = E \left\{ \left[X(t) - \sum_{i=1}^n a_i X(t-i) \right]^2 \right\}. \quad (4.37)$$

Die Koeffizienten a_1, \dots, a_n sind so zu bestimmen, daß $\sigma_{0n}^2(a_1, \dots, a_n)$ minimal wird. Einfache Umformungen ergeben

$$\begin{aligned} \sigma_{0n}^2(a_1, \dots, a_n) &= E \left\{ X(t) X(t) - 2X(t) \sum_{i=1}^n a_i X(t-i) + \left[\sum_{i=1}^n a_i X(t-i) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ X(t) X(t) - 2 \sum_{i=1}^n a_i X(t) X(t-i) \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_i a_l X(t-i) X(t-l) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$E[X(t) X(t)] = k_x(0); \quad E[X(t) X(t-i)] = k_x(i);$$

$$E[X(t-i) X(t-l)] = k_x(i-l)$$

folgt

$$\sigma_{0n}^2(a_1, \dots, a_n) = k_x(0) - 2 \sum_{i=1}^n a_i k_x(i) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_i a_l k_x(i-l).$$

Partielle Differentiation nach a_1, a_2, \dots, a_n liefert

$$\frac{\partial \sigma_{0n}^2}{\partial a_i} = -2k_x(i) + 2 \sum_{l=1}^n a_l k_x(i-l), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bezeichnet man die gesuchten Werte von a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$, findet man sie aus

$$\left. \frac{\partial \sigma_{0n}^2}{\partial a_1} \right|_{a_k = a_k^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial \sigma_{0n}^2}{\partial a_2} \right|_{a_k = a_k^*} = 0, \dots, \quad \left. \frac{\partial \sigma_{0n}^2}{\partial a_n} \right|_{a_k = a_k^*} = 0,$$

also durch Auflösung des Gleichungssystems

$$-k_x(i) + \sum_{l=1}^n a_l^* k_x(i-l) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Als Schätzwert für die Ordinate $X(t)$ erhält man somit

$$\hat{x}(t) = a_1^* x_{t-1} + a_2^* x_{t-2} + \dots + a_n^* x_{t-n}.$$

Die Varianz ist dabei

$$\sigma_{0n}^2(a_1^*, \dots, a_n^*) = k_x(0) - 2 \sum_{i=1}^n a_i^* k_x(i) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n a_i^* a_l^* k_x(i-l).$$

Bei der Ermittlung der extrapolierten Ordinatenwerte von $X(t+m)$, $m \geq 1$, kann analog vorgegangen werden. Es ist

$$\sigma_{mn}^2 = E \left\{ \left[X(t+m) - \sum_{i=1}^n a_i X(t-i) \right]^2 \right\}$$

zu minimieren. Die entsprechenden Werte $a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$ der linearen Funktion ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$-k_x(m+i) + \sum_{l=1}^n a_l^{(m)} k_x(i-l) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.38)$$

Wir betrachten hierzu zum Abschluß das folgende Zahlenbeispiel.

Beispiel 4.6: Für eine stationäre Folge $\{X(t); t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ sei $m_x(t) = 0$, $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}$. Zu den Zeitpunkten $t-1$ bzw. $t-2$ werden die Ordinaten $x(t-1) = 4$ und $x(t-2) = 2$ beobachtet. Zu extrapolieren seien $X(t)$ und $X(t+1)$.

Mit $m = 0$ und $n = 2$ folgt

$$a_1^* k_x(0) + a_2^* k_x(1) = k_x(1),$$

$$a_1^* k_x(1) + a_2^* k_x(0) = k_x(2).$$

Mit $k_x(0) = 1$, $k_x(1) = \frac{1}{e}$, $k_x(2) = \frac{1}{e^2}$ und $k_x(3) = \frac{1}{e^3}$ ergibt sich als Lösung $a_1^* = \frac{1}{e}$ und $a_2^* = 0$.

Somit ergibt sich als Extrapolationswert

$$\hat{x}(t) = 4a_1^* + 2a_2^* = \frac{4}{e} + 0.$$

Mit $m = 1$ und $n = 2$ folgt aus (4.38)

$$a_1^{(1)} k_x(0) + a_2^{(1)} k_x(1) = k_x(2),$$

$$a_1^{(1)} k_x(1) + a_2^{(1)} k_x(0) = k_x(3).$$

Als Lösung erhält man $a_1^{(1)} = \frac{1}{e^2}$ und $a_2^{(1)} = 0$. Der Extrapolationswert ist

$$\hat{x}(t+1) = 4a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)} = \frac{4}{e^2} + 0.$$

Wie ist die Tatsache zu bewerten, daß für beide Extrapolationswerte $a_2 = 0$ ist?

4.4. Experimentelle Bestimmung von Parametern stochastischer Prozesse

In den meisten praktischen Fällen ist ein stochastischer Prozeß nicht theoretisch vorgegeben, sondern es sind nur einige Realisierungen von ihm bekannt. Es ist dann die Aufgabe zu lösen, auf der Grundlage der Beobachtungen des Verlaufs einiger Realisierungen die Kenngrößen des Prozesses näherungsweise zu bestimmen. Im weiteren wollen wir uns insbesondere mit der experimentellen Ermittlung der wichtigsten Parameter, der Mittelwert- und der Korrelationsfunktion beschäftigen.

Gegeben sind Realisierungen $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) eines Prozesses $\{X(t), t \geq 0\}$ im Intervall $[0, T]$. Wir unterteilen $[0, T]$ in m gleiche Teilintervalle mit den Teilungspunkten

$$0 = t_0; t_1; \dots; t_j; \dots; t_m = T.$$

Die Mittelwertfunktion $m_x(t)$ läßt sich in $[0, T]$ näherungsweise bestimmen, indem wir in jedem Teilpunkt t_j den arithmetischen Mittelwert über die Werte $x_i(t_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bilden. Es gilt

$$\tilde{x}(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (4.39)$$

Die Werte

$$\tilde{x}(t_0), \tilde{x}(t_1), \dots, \tilde{x}(t_m)$$

repräsentieren näherungsweise die Mittelwertfunktion $m_x(t)$ zu den diskreten Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_m .

Um die Varianzfunktion

$$\sigma_x^2(t) = E(X(t) - m_x(t))^2 \quad (4.40)$$

näherungsweise zu ermitteln, bestimmen wir die empirische Streuung s^2 an den Teilpunkten t_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$). Es ist

$$s^2(t_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i(t_j) - \tilde{x}(t_j))^2. \quad (4.41)$$

Die Werte

$$s^2(t_0); s^2(t_1); \dots; s^2(t_m)$$

repräsentieren näherungsweise die Varianzfunktion $\sigma_x^2(t)$ zu den diskreten Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_m . Zur experimentellen Ermittlung der Korrelationsfunktion

$$k_x(t; s) = E[(X(t) - m_x(t))(X(s) - m_x(s))], \quad t, s \in [0, T], \quad (4.42)$$

bestimmen wir die empirische Korrelation $\bar{k}_x(t_j, t_l)$ jeweils zwischen zwei Zeitpunkten t_j, t_l ($j, l = 0, 1, \dots, m$). Es gilt

$$\bar{k}_x(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i(t_j) - \bar{x}(t_j))(x_i(t_l) - \bar{x}(t_l)). \quad (4.43)$$

Nach Ausführung der Multiplikation auf der rechten Seite folgt

$$\begin{aligned} \bar{k}_x(t_j, t_l) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i(t_j) x_i(t_l) - \frac{1}{n-1} \bar{x}(t_j) \sum_{i=1}^n x_i(t_l) \\ &\quad - \frac{1}{n-1} \bar{x}(t_l) \sum_{i=1}^n x_i(t_j) + \frac{n}{n-1} \bar{x}(t_j) \bar{x}(t_l). \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (4.39) ergibt sich

$$\bar{k}_x(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i(t_j) x_i(t_l) - \frac{n}{n-1} \bar{x}(t_j) \bar{x}(t_l). \quad (4.44)$$

Die Gesamtheit der Werte $\bar{k}_x(t_j, t_l)$ ($j, l = 0, 1, 2, \dots, m$) repräsentieren näherungsweise die Korrelationsfunktion zu den diskreten Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_m . Setzt man in (4.44) $t_j = t_l$, erhält man selbstverständlich (4.41).

$\bar{x}(t_j)$, $s^2(t_j)$ und $\bar{k}_x(t_j, t_l)$ sind Werte von Punktschätzungen $\bar{X}(t_j)$, $S^2(t_j)$ und $\bar{K}_x(t_j, t_l)$ für $m_x(t_j)$, $\sigma^2(t_j)$ und $k_x(t_j, t_l)$ (vgl. Bd. 17, Abschn. 3.3.2.).

Geht man in der oben angegebenen Weise vor, so muß man zur Bestimmung von Mittelwert- und Korrelationsfunktion im allgemeinen eine große Anzahl von Realisierungen des Prozesses heranziehen. In der Praxis ist jedoch die Beobachtung einer Zufallsfunktion und die darauffolgende Auswertung sehr kompliziert. Darum ist es erwünscht, mit einer möglichst geringen Anzahl von Realisierungen auszukommen. Stationäre Prozesse besitzen nun unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Eigenschaft, daß sich Mittelwert- und Korrelationsfunktion beliebig genau aus einer einzigen Realisierung $x(t)$ bestimmen lassen. Wir setzen im folgenden voraus, daß $\{X(t), t \geq 0\}$ stationär ist und die Korrelationsfunktion $k_x(\tau)$ die Bedingung

$$\int_0^\infty |k_x(\tau)| d\tau < \infty \quad (4.45)$$

erfülle. (4.45) bedeutet, daß die Werte der Korrelationsfunktion mit wachsendem τ sehr schnell abnehmen. Für die meisten der in der Praxis auftretenden Zufallsprozesse ist diese Voraussetzung erfüllt. Dann kann man einen Ergodensatz anwenden, demzufolge man sowohl die mathematische Erwartung von $\{X(t), t \geq 0\}$ als auch die Korrelationsfunktion aus einer Realisierung $x(t)$ des Prozesses durch Mittelung über die Zeit gewinnen kann:

$$m_x = E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= E[(X(t) - m_x)(X(t + \tau) - m_x)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [(x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)] dt. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Betrachten wir zunächst die experimentelle Berechnung des Mittelwertes m_x etwas eingehender. Das Intervall $[0, T]$ werde in m gleiche Intervalle der Länge $\Delta = T/m$ eingeteilt. Bei Mittelung der Ordinatenwerte einer Realisierung des Prozesses über die Zeit erhält man

$$\tilde{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x(t_j) \quad (4.48)$$

oder wegen $m = \frac{T}{\Delta}$

$$\tilde{x} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^m x(t_j) \Delta.$$

Strebt $\Delta \rightarrow 0$, erhält man

$$\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (4.49)$$

Die Beziehungen (4.48) und (4.49) können zur näherungsweisen Bestimmung von m_x herangezogen werden. Die Schätzung ist um so genauer, je größer T gewählt wird. \tilde{x} ist wiederum eine Realisierung der Punktschätzung \tilde{X} für m_x . Es läßt sich zeigen [28], daß die mathematische Erwartung von \tilde{X} gleich m_x ist, d. h.

$$E[\tilde{X}] = m_x, \quad (4.50)$$

und die Varianz von \tilde{X} mit wachsendem T gegen 0 strebt, d. h.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^2[\tilde{X}] = 0. \quad (4.51)$$

Man spricht wegen (4.50) von einer *erwartungstreuen* Schätzung für m_x .

Kommen wir nun zur näherungsweisen Bestimmung der Korrelationsfunktion eines stationären Prozesses auf der Grundlage des Ergodentheorems. Gemäß Definition gilt

$$k_x(\tau) = E[(X(t) - m_x)(X(t + \tau) - m_x)].$$

Weil m_x selbst in den meisten Fällen nicht zur Verfügung steht, nehmen wir den Schätzwert \tilde{x} . Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn angenommen wird, daß das Zeitintervall τ gerade l Intervalle der Länge Δ enthält. Dann ist

$$\tau = \frac{l}{m} T. \quad (4.52)$$

Wir gehen aus von dem Wert

$$\tilde{k}_x(\tau) = \frac{1}{m - (l + 1)} \sum_{j=1}^{m-l} [(x(t_j) - \tilde{x})(x(t_j + \tau) - \tilde{x})]. \quad (4.53)$$

Nach Erweiterung mit Δ folgt

$$\tilde{k}_x(\tau) = \frac{1}{(m-l-1)\Delta} \sum_{j=1}^{m-l} [(x(t_j) - \bar{x})(x(t_j + \tau) - \bar{x})] \Delta. \quad (4.54)$$

Unter Beachtung von (4.52) ergibt sich

$$(m-l-1)\Delta = (m-l-1)\frac{T}{m} = T - \tau - \Delta. \quad (4.55)$$

Aus (4.54) folgt dann

$$\tilde{k}_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau - \Delta} \sum_{j=1}^{m-l} [x(t_j) - \bar{x}][x(t_j + \tau) - \bar{x}] \Delta. \quad (4.56)$$

Strebt Δ gegen null, erhält man

$$\tilde{k}_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \bar{x}][x(t + \tau) - \bar{x}] dt. \quad (4.57)$$

$\tilde{k}_x(\tau)$ ist eine Realisierung der Punktschätzung $\tilde{K}_x(\tau)$ für $k_x(\tau)$. Es läßt sich zeigen, daß die folgenden Beziehungen gelten

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^2[\tilde{K}_x(\tau)] = 0, \quad (4.58)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\tilde{K}_x(\tau)] = k_x(\tau). \quad (4.59)$$

Man spricht wegen (4.59) nur von einer *asymptotisch erwartungstreuen Schätzung*. Die Gleichungen (4.53) und (4.54) können zur Ermittlung von Näherungswerten für die Korrelationsfunktion herangezogen werden. Die Genauigkeit der experimentell ermittelten Werte steigt selbstverständlich mit wachsendem T .

Weitere Ausführungen findet der Leser in [24], [25] und [28].

5. Einführung in die Bedienungstheorie

In den letzten Jahrzehnten führten die Entwicklung des Telefonwesens, der Physik und besonders auch Fragen der sinnvollen Organisation der Abfertigung in Läden, an Schaltern und durch Automaten zu einer Klasse mathematischer Aufgaben, bei deren Bearbeitung Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, speziell die der Theorie stochastischer Prozesse, eine wichtige Rolle spielen. Die Untersuchung entsprechender stochastischer Modelle führte zur Entwicklung der Bedienungstheorie, deren Ideen und Methoden in den letzten Jahren vielfältige und wichtige Anwendung fanden. In dem folgenden Kapitel wollen wir einen Überblick über einige Grundbegriffe der Bedienungstheorie geben, an einer Methode die Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Bedienungsproblemen kennenlernen und abschließend auf wesentliche weitere Methoden der Bedienungstheorie hinweisen.

5.1. Aufgabe der Bedienungstheorie

In Naturwissenschaften, Technik und Ökonomie, aber auch im Transport- und Militärwesen treten in großem Umfang *Bedienungssituationen* auf, bei denen zufällige Einflüsse eine Rolle spielen. Diese Situationen können sehr unterschiedlich in ihrem Anlaß sein. Es kann sich z. B. handeln um

- Kundenabfertigung an einem Fahrkartenschalter,
- Durchführung von Reparaturen in einer Reparaturwerkstatt,
- Vorratswirtschaft in einem Lager hinsichtlich eines bestimmten Artikels,
- Vermittlung von Telefongesprächen in einer Telefonzentrale.

Das Wesen der geschilderten Bedienungssituationen läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

In zufälligen Zeitpunkten fordern Kunden Bedienung von einem sogenannten Bedienungsapparat, der für die Abfertigung des Kunden eine zufällige Zeit benötigt. Beispiele von *Forderungen* und *Bedienungsapparaten* sind in der folgenden Aufstellung enthalten:

Forderung	Bedienungsapparat
Verkauf einer Fahrkarte	Fahrkartenverkäufer bzw. Fahrkarten-automat
Reparatur eines PKW	Autoschlosser
Bezahlung von Lebensmitteln	Kassiererin in einem Selbstbedienungsladen
Vermittlung eines Telefongesprächs	Telefonistin in einer Telefonzentrale bzw. Vermittlungsanlage
Sicherung eines bestimmten Lagerbestandes von einem gewissen Artikel in einem Lager	Disponent

In der Bedienungstheorie werden Fragen der mathematischen Modellierung (Beschreibung) von Bedienungssituationen der obengenannten Art und der Untersuchung der entsprechenden mathematischen Modelle behandelt.

Definition 5.1: *Die in Verbindung mit der mathematischen Behandlung von Bedienungssituationen betrachteten mathematischen Modelle werden als **Bedienungssysteme** (Bedienungssysteme), die Folge der von einem Bedienungssystem zu bedienenden Forderungen als **Forderungenstrom (Kundenstrom)** und die für die Bedienung einer Forderung benötigte zufällige Zeit als **Bedienungszeit** bezeichnet.*

Aufgabe der *Bedienungstheorie* ist es, Methoden bereitzustellen und der Anwendung zuzuführen, mit denen Kenngrößen des jeweiligen Bedienungssystems ermittelt werden können, die eine Beurteilung der zugrundeliegenden Bedienungssituation ermöglichen. Das können u. a. Kenngrößen sein

- für die Länge der Wartezeit einer Forderung,
- für die Länge der Zeit, in der von dem Bedienungssystem keine Bedienung gefordert wird.

Großen Einfluß auf die Entstehung der Bedienungstheorie hatten die von A. K. Erlang in den beiden ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts bei der Beschreibung von Bedienungssituationen im Telefonwesen und bei der Untersuchung der entsprechenden Bedienungsmodelle erzielten Ergebnisse. In den letzten Jahrzehnten sind große Fortschritte bei der Entwicklung der Bedienungstheorie erzielt worden. Sie sind in großem Umfang sowjetischen Mathematikern zu danken, unter denen besonders A. J. Chintschin, B. W. Gnedenko und J. N. Kowalenko zu nennen sind.

5.2. Beschreibung eines Bedienungssystems

Wir wollen von folgendem Beispiel einer Bedienungssituation ausgehen.

Beispiel 5.1: An einen Fahrkartenschalter treten Reisende in zufälligen Zeitpunkten heran und wollen Fahrausweise erwerben. Sofern der Schalter frei ist, wird mit der Abfertigung des jeweiligen Reisenden sofort begonnen. Im anderen Fall reiht er sich entweder in die Schlange der Wartenden ein, wenn er nicht, z. B. aus gesundheitlichen Gründen, bevorzugt abgefertigt wird, oder er verläßt den Schalter wieder, evtl. nach einer gewissen Wartezeit in der Schlange, um die Fahrkarte zu einem anderen Zeitpunkt, z. B. im Zug, zu erwerben. Je nach dem Reiseziel wird die Ausfertigung und der Verkauf des Fahrausweises durch den Fahrkartenverkäufer in der Zeitdauer von Reisendem zu Reisendem variieren. Sie wird von zufälliger Länge sein.

Die geschilderte Bedienungssituation können wir kennzeichnen durch

- die Folge der zufälligen Zeitpunkte des Herantretens der Reisenden an den Schalter,
- Angaben über die Zeit der Abfertigung am Schalter,
- Angaben darüber, wie sich ein Reisender verhält, der einen Schalter besetzt vorfindet,
- Angaben über Möglichkeiten der bevorzugten Abfertigung und der Art und Weise ihrer Realisierung.

Entsprechend diesem Beispiel ist die Bedienungssituation auch in anderen Fällen zu charakterisieren. Sie läßt sich allgemein beschreiben durch Angaben über den *Forderungenstrom*, die *Bedienungszeit* und die *Bedienungsorganisation*. Dabei werden der Forderungsstrom durch einen stochastischen Prozeß hinsichtlich der Anzahl der eintreffenden Forderungen im Intervall $(0, t)$, die Bedienungszeiten durch identisch verteilte Zufallsgrößen und die Bedienungsorganisation durch Angaben über das Verhalten von Forderungen, die den Bedienungsapparat besetzt vorfinden, und über Vereinbarungen hinsichtlich der vorzeitigen Bedienung einer eintreffenden Forderung erfaßt.

Durch diese Angaben ist die Bedienungssituation beschrieben und damit das entsprechende Bedienungsmodell gegeben, das mit den Methoden der Bedienungstheorie zu untersuchen und durch entsprechende Kenngrößen zu charakterisieren ist. Beispiele solcher Kenngrößen sind die mittlere Wartezeit bis zum Bedienungsbeginn oder die mittlere Warteschlangenlänge oder die Verteilung der Warteschlangenlänge, wenn die Forderung bei besetztem Bedienungsapparat nicht auf Bedienung verzichtet, und die Verlustwahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Verzichts einer Forderung auf Bedienung, wenn der Bedienungsapparat besetzt ist.

5.3. Klassifizierung von Bedienungssystemen

Im letzten Abschnitt wiesen wir darauf hin, daß die Beschreibung einer Bedienungssituation Angaben über die Bedienungsorganisation enthalten muß. Wir verstanden darunter einerseits das Verhalten einer Forderung, die bei ihrem Eintreffen den Bedienungsapparat besetzt vorfindet, und zum anderen die Berücksichtigung der Möglichkeit einer vorzeitigen Bedienung. Auf der Grundlage der Bedienungsorganisation werden die Bedienungssysteme klassifiziert in Wartesysteme, Systeme mit Prioritäten, Verlustsysteme und kombinierte Warte-Verlustsysteme.

Wartesysteme

Definition 5.2: Ein Bedienungssystem, bei dem sich eine eintreffende Forderung in die Reihe der schon auf Bedienung wartenden Forderungen, also in eine **Warteschlange**, einreihet, wird als **Wartesystem** bezeichnet.

Bei einem Wartesystem wird von der Annahme ausgegangen, daß geeignete Wartemöglichkeiten vorhanden sind. Außerdem wird bei solchen Systemen eine Festlegung über die Reihenfolge der Bedienung der in der Schlange wartenden Forderungen getroffen. („Schlangendisziplin“ [16]). Wir wollen einige Schlangendisziplinen nennen.

Definition 5.3: Erfolgt bei einem Bedienungssystem die Bedienung der Forderungen in der Reihenfolge ihres Eintreffens, so wird diese **Schlangendisziplin** als **FIFO** (*first in – first out*) bezeichnet.

Beispiel 5.2: Werden in einer Reparaturwerkstatt die Aufträge in der Reihenfolge ihres Eintreffens ausgeführt, dann liegt die Schlangendisziplin **FIFO** vor.

Definition 5.4: Erfolgt bei einem Bedienungssystem die Bedienung der zuletzt eingegangenen Forderung vor der Bedienung der schon in der Warteschlange befindlichen Forderungen, so wird diese **Schlangendisziplin** **LIFO** (*least in – first out*) genannt.

Beispiel 5.3: Werden in einem Lager die zuletzt angelieferten Waren vor die schon im Lager befindlichen gestellt und dementsprechend auch zuerst wieder ausgeliefert, dann erfolgt die Bedienung der Schlangendisziplin *LIFO* entsprechend.

Definition 5.5: Wird bei einem Bedienungssystem die zu bedienende Forderung aus den in der Warteschlange befindlichen Forderungen zufällig ausgewählt, dann wird diese **Schlangendisziplin SIRO** (*service in random order*) genannt.

Beispiel 5.4: Die Entnahme eines bestimmten Erzeugnisses durch einen Kunden aus einem Warenträger eines Selbstbedienungsladens erfolgt im allgemeinen wahllos, also der Schlangendisziplin *SIRO* entsprechend.

Systeme mit Prioritäten

Definition 5.6: Bedienungssysteme, bei denen die Forderungen verschiedene Dringlichkeitsstufen (Prioritäten) hinsichtlich des Bedienungsbegins haben, werden **Systeme mit Prioritäten** genannt.

Beispiel 5.5: In Häfen werden Schiffe mit leichtverderblicher Ladung im allgemeinen vorrangig abgefertigt. Trifft eine Forderung mit höherer Dringlichkeitsstufe ein, so wird sie entweder weit vorn in die Warteschlange eingeordnet oder sofort bedient, wobei die Möglichkeit besteht, daß bei der in der Abfertigung befindlichen Forderung die Bedienung zugunsten der gerade eingetroffenen Forderung unterbrochen wird. Dieser Bedienungssituation entspricht ein Bedienungsmodell mit Prioritäten.

Verlustsysteme

Definition 5.7: Bedienungssysteme, bei denen eintreffende Forderungen auf Bedienung verzichten, wenn sie den Bedienungssapparat besetzt vorfinden, werden **Verlustsysteme** genannt.

Beispiel 5.6: Entsprechend der Anzahl der Amtsanschlüsse können von der Telefonzentrale eines Betriebes gleichzeitig mehrere Verbindungen außerhalb des Betriebes hergestellt werden. Sind alle Leitungen besetzt, so können neu eintreffende Anrufe nicht vermittelt werden. Sie gehen verloren. Das entsprechende Bedienungssystem ist also ein Verlustsystem.

Kombinierte Warte-Verlust-Systeme

Definition 5.8: Bedienungssysteme, bei denen eine Forderung nach einer gewissen Zeit des Verweilens in der Warteschlange auf eine Abfertigung verzichtet oder bei denen es nur eine beschränkte Anzahl von Warteplätzen gibt, so daß manchmal für eine eintreffende Forderung kein Warteplatz mehr existiert, diese demzufolge nicht in die Warteschlange aufgenommen werden kann, werden **kombinierte Warte-Verlust-Systeme** genannt.

Beispiel 5.7: Ein an der Kasse eines Selbstbedienungsladens in der Schlange stehender Kunde hat etwas vergessen. Er verläßt die Schlange und stellt sich nach Entnahme des vergessenen Artikels aus dem Regal am Ende der Schlange wieder an. Das entsprechende Bedienungssystem ist ein kombiniertes Warte-Verlust-System.

Beispiel 5.8: Der Besitzer einer bestimmten Haushaltmaschine möchte diese reparieren lassen. In der Reparaturannahmestelle erhält er jedoch den Bescheid, daß die Reparaturkapazität ausgelastet ist und deshalb zur Zeit keine Annahme erfolgt. Auch dieser Bedienungssituation entspricht ein kombiniertes Warte-Verlust-System.

Wir wollen nun eine von D. G. Kendall für Wartesysteme angegebene Möglichkeit zur Charakterisierung eines Bedienungssystems in einer in [16] erweiterten Form erläutern. Die Charakterisierung erfolgt durch vier Größen in folgender Art: $A/B/s/m$.

– Durch den Buchstaben A wird der *Forderungenstrom* gekennzeichnet. Dabei bedeutet u. a.

$A = M$ (Markow), daß ein *Poissonscher Forderungenstrom* vorliegt, d. h., daß in keinem Zeitpunkt mehr als eine Forderung eintrifft und die Zeiten zwischen zwei eintreffenden Forderungen unabhängige, identisch exponentiell verteilte Zufallsgrößen sind;

$A = GI$ (general independent), daß ein *rekurrenter Forderungenstrom* vorliegt, d. h., daß in keinem Zeitpunkt mehr als eine Forderung eintrifft und die Zeiten zwischen zwei eintreffenden Forderungen unabhängige, positive, identisch verteilte Zufallsgrößen sind;

$A = D$ (deterministic), daß ein Forderungenstrom mit konstanten zeitlichen Abständen zwischen den einzelnen Forderungen vorliegt.

Mit dem Buchstaben B wird die *Folge der Bedienungen* auf den Bedienungsapparaten erfaßt. So bedeutet z. B.

$B = G$ (general), daß hinsichtlich der Bedienungszeit bei jedem Bedienungsapparat eine Folge unabhängiger, positiver, identisch verteilter Bedienungszeiten vorliegt;

$B = M$ (Markow), daß hinsichtlich der Bedienungszeit bei jedem Bedienungsapparat eine Folge unabhängiger, identisch exponentiell verteilter Bedienungszeiten vorliegt.

Weiterhin wird mit dem Buchstaben s die Anzahl der im Bedienungssystem vorhandenen gleichartigen *Bedienungsapparate* und mit dem Buchstaben m die Anzahl der im Bedienungssystem vorhandenen *Warteplätze* erfaßt. Für $m = 0$ liegt also ein Verlustsystem, für $m = \infty$ ein Wartesystem und für $0 < m < \infty$ ein kombiniertes Warte-Verlust-System vor. Bei konkreten Bedienungssystemen wird im allgemeinen die Unabhängigkeit des Forderungsstromes von der Folge der Bedienungszeiten angenommen.

5.4. Poissonsche Bedienungssysteme

In diesem Abschnitt wollen wir die Vorgehensweise bei der Untersuchung eines Bedienungssystems schildern. Es gilt allgemein, daß das zeitliche Verhalten eines solchen Systems nur mit Hilfe von stochastischen Prozessen beschrieben werden kann. Dabei hängt es vom Typ des Bedienungssystems ab, aus welcher Klasse von stochastischen Prozessen ein geeigneter Vertreter zu wählen ist.

Wir werden uns in der Darstellung auf ein einfaches Bedienungssystem, das System $M|M/n|m$ beschränken.

Definition 5.9: Ein System der Struktur $M|M/n|m$ wird als **Poissonsches Bedienungssystem** bezeichnet.

Wir gehen also von einer Bedienungssituation aus, die durch folgende Merkmale charakterisiert ist:

1. Der Forderungenstrom wird durch einen Poissonprozeß beschrieben. Dieser Prozeß wurde in 2.2. dargestellt. Überdenken Sie die dort erzielten Ergebnisse aus der Sicht der bei einem Poissonschen Bedienungssystem vorliegenden Bedienungssituation!
2. Bei allen Bedienungsapparaten sind die Bedienungszeiten für jede Forderung identisch exponentiell verteilte unabhängige Zufallsgrößen.
3. Die Anzahl der Bedienungsapparate beträgt n .
4. Eintreffende Forderungen
 - verzichten bei besetzten Bedienungsapparaten auf eine Abfertigung (Verlustsystem), d. h., es ist $m = 0$.
 - ordnen sich bei besetzten Bedienungsapparaten in eine Warteschlange mit der Bedienungsorganisation FIFO ein (Wartesystem), d. h., es ist $m = \infty$.

Bei der Untersuchung der beiden o. g. Bedienungssysteme fragen wir zuerst nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich k Forderungen im Bedienungssystem befinden, und anschließend nach Kenngrößen zur Charakterisierung des jeweiligen Bedienungssystems.

5.4.1. Ein Poissonsches Verlustsystem

Bei dem Verlustsystem $M/M/n/0$ stehen zur Bedienung eintreffender Forderungen n gleiche Bedienungsapparate zur Verfügung, von denen jeder gleichzeitig nur eine Forderung bedienen kann. Sofern ein Bedienungsapparat frei ist, wird die Bedienung einer eintreffenden Forderung unverzüglich begonnen. Sind alle Bedienungsapparate besetzt, verzichtet die Forderung auf Bedienung.

Bei einem solchen Bedienungssystem sind folgende Kenngrößen von Bedeutung:

1. Die Verlustwahrscheinlichkeit

Definition 5.10: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Eintreffen einer Forderung alle n Bedienungsapparate besetzt sind, wird als **Verlustwahrscheinlichkeit** bezeichnet.

2. Die mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsapparate

Beide Kenngrößen erlauben eine Einschätzung der Auslastung des Systems. Zu ihrer Ermittlung wählen wir folgenden Weg:

Wir betrachten den stochastischen Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$, der die Anzahl der zur Zeit t besetzten Bedienungsapparate bezeichnet. Zur Zeit $t = 0$ soll kein Bedienungsapparat besetzt sein. Für ein festes t ist $\{X(t), t \geq 0\}$ eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten $0, 1, 2, \dots, n$. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit $p_k(t)$, daß k Bedienungsapparate zum Zeitpunkt t besetzt sind:

$$p_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Dazu gehen wir von folgenden Annahmen aus:

1. Die Exponentialverteilung, die die Länge des Zeitintervalls $(t - t_1)$ zwischen den zu den Zeitpunkten t und t_1 eintreffenden Forderungen beschreibt, besitzt die Ver-

teilungsfunktion:

$$F(t - t_1) = 1 - e^{-\lambda(t-t_1)}, \quad (5.2)$$

wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist und $t \geq t_1$ gilt.

2. Die die Bedienzeiten beschreibende Exponentialverteilung hat die Verteilungsfunktion:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (5.3)$$

wobei $\mu > 0$ eine Konstante und $t \geq 0$ ist.

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen stellt der stochastische Prozeß, der das betrachtete Bedienungssystem $M/M/n/0$ charakterisiert, einen Geburts- und Todesprozeß (vgl. 3.2.2.) dar, für den die Relation (3.60) erfüllt ist. In Verbindung mit unseren Betrachtungen lautet diese:

$$\lambda_k = \lambda \quad \mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Das entsprechende Differentialgleichungssystem hat hier folgende Form:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \quad (5.5)$$

$$p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (5.6)$$

$$p'_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t). \quad (5.7)$$

Aufgabe 5.1: Leiten Sie dieses Differentialgleichungssystem entsprechend dem in 3.2.2. gewiesenen Weg her!

Aus diesem System von Differentialgleichungen, das als *Erlangsches System* bezeichnet wird, können sukzessive die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, n$, unter Verwendung der Relation $\sum_{k=0}^n p_k(t) = 1$ ermittelt werden.

Im allgemeinen wird in der Bedienungstheorie die stationäre Lösung für $t \rightarrow \infty$ untersucht. Da die Grenzwerte

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.8)$$

existieren, erhalten wir für das durch (5.5) bis (5.7) gegebene Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der stationären Wahrscheinlichkeiten p_k , $k = 0, 1, \dots, n$, das folgende lineare homogene Gleichungssystem:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \quad (5.9)$$

$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (5.10)$$

$$\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0. \quad (5.11)$$

Das Lösungsprinzip für dieses System wurde in (3.56) angegeben.

Wir wollen hier nochmals das Ergebnis nennen, das als *Erlangsche Formeln* bezeichnet wird:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}, \quad (5.12)$$

$$p_k = \frac{p_0}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.13)$$

Damit kann die gesuchte Verlustwahrscheinlichkeit angegeben werden:

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right)}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}. \quad (5.14)$$

Die zweite Kenngröße zur Charakterisierung des Bedienungssystems $M/M/n/0$, der Erwartungswert $m(t) = E(X(t))$ für die Anzahl der besetzten Bedienungsapparate zum Zeitpunkt t , errechnet sich für den stationären Fall zu:

$$m = \sum_{k=0}^n k p_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0. \quad (5.15)$$

Durch (5.12) wird schließlich die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben, daß alle Bedienungsapparate frei sind.

5.4.2. Ein Poissonsches Wartesystem

Bei dem Wartesystem $M/M/n/\infty$ stehen zur Bedienung der eintreffenden Forderungen n gleiche Bedienungsapparate bereit, von denen jeder gleichzeitig nur eine Forderung bedienen kann. Sofern bei Eintreffen einer Forderung ein Bedienungsapparat frei ist, wird unverzüglich mit der Abfertigung begonnen. Sind alle Bedienungsapparate besetzt, so wird die eintreffende Forderung in die Schlange der auf Bedienung wartenden Forderungen (*Warteschlange*) eingereiht und entsprechend der Reihenfolge des Eintreffens bedient.

Bei dem vorliegenden unbeschränkten Wartesystem sind u. a. folgende Kenngrößen von Bedeutung:

1. Die *mittlere Wartezeit* einer Forderung in der Warteschlange bis zum Bedienungsbeginn.
2. Die *mittlere Warteschlangenlänge*:

Definition 5.11: Als **mittlere Warteschlangenlänge** wird der Erwartungswert der Anzahl der Forderungen bezeichnet, die auf Bedienung warten.

3. Die *mittlere Anzahl der Forderungen*, die sich im Bedienungssystem aufhalten:

Definition 5.12: Die *mittlere Anzahl der Forderungen*, die sich im Bedienungssystem aufhalten, ist der Erwartungswert der Summe aus der Anzahl der Forderungen, die gerade bedient werden, und der Anzahl der in der Warteschlange befindlichen Forderungen.

4. Die *mittlere Anzahl freier Bedienungsapparate*.

Die Kenngrößen, die eine gute Einschätzung des Wartesystems zulassen, ermitteln wir folgendermaßen:

Wir betrachten den stochastischen Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$ der Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen. $X(t)$ ist die Summe aus der Anzahl der Forderungen, die gerade bedient werden, und der Anzahl der in der Warteschlange befindlichen Forderungen. Zur Zeit $t = 0$ soll kein Bedienungsapparat besetzt sein. Es können beliebig viele Forderungen im Bedienungssystem sein, d. h., $X(t)$ kann die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, dafür, daß sich k Forderungen zur Zeit t im Bedienungssystem befinden, d. h., daß $X(t)$ den Wert k annimmt:

$$p_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.16)$$

Wir machen die im Abschnitt 5.4.1. festgehaltenen Annahmen für die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Forderungen und für die Bedienungszeiten. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen ist der stochastische Prozeß $\{X(t), t \geq 0\}$, mit dem das Bedienungssystem $M/M/n/\infty$ beschrieben wird, ein Geburts- und Todesprozeß. Zur Aufstellung des Differentialgleichungssystems für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, werden deshalb entsprechende Überlegungen wie bei dem in 5.4.1. erläuterten Verlustsystem angestellt. Unterschiede ergeben sich lediglich aus der Tatsache, daß jetzt die Anzahl der im Bedienungssystem befindlichen Forderungen die Anzahl der Bedienungsapparate übersteigen kann. Dadurch ist die Anzahl der Gleichungen des Differentialgleichungssystems unbeschränkt. Im Ergebnis dieser Überlegungen erhält man das folgende Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \quad (5.17)$$

$$p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (5.18)$$

$$p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t), \quad n \leq k. \quad (5.19)$$

Wie oben beschränken wir uns auf das Aufsuchen der stationären Lösung dieses Systems für $t \rightarrow \infty$. Dabei ergibt sich jetzt zur Ermittlung der stationären Wahrscheinlichkeiten p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, das folgende lineare homogene Gleichungssystem:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \quad (5.20)$$

$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (5.21)$$

$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu) p_k + n\mu p_{k+1} = 0, \quad n \leq k. \quad (5.22)$$

Unter Verwendung der Relation $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ werden sukzessive die stationären Wahrscheinlichkeiten p_k , $k = 0, 1, \dots$, ermittelt:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}}, \quad (5.23)$$

$$p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5.24)$$

$$p_k = \frac{1}{n!} \frac{1}{n^{k-n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \quad n \leq k. \quad (5.25)$$

Nach [10] konvergiert die unendliche Reihe in (5.23), falls $\lambda/\mu = \rho < n$ ist. Im anderen Fall divergiert sie, was $p_0 = 0$ und nach (5.24) und (5.25) auch $p_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, zur Folge hat. Die Warteschlangenlänge würde unbegrenzt mit der Zeit wachsen.

Mit (5.23), (5.24) und (5.25) lassen sich die o. g. Kenngrößen ermitteln, die wir ohne Herleitung (vgl. [20]) angeben:

1. Die *mittlere Wartezeit* T_n einer Forderung bis zum Bedienungsbeginn:

$$T_n = \frac{p_0}{(n-1)! (\mu - \lambda)^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n. \quad (5.26)$$

2. Die *mittlere Warteschlangenlänge* m_1 :

$$m_1 = \frac{p_n \lambda}{n\mu \left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2}. \quad (5.27)$$

3. Die *mittlere Anzahl* m_2 *der Forderungen*, die sich im Bedienungssystem aufhalten:

$$m_2 = m_1 + \frac{np_n}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} + p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k. \quad (5.28)$$

4. Die *mittlere Anzahl* m_3 *freier Bedienungsapparate*:

$$m_3 = \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0. \quad (5.29)$$

Im Rahmen dieser Ausführungen kann nicht auf Beispiele konkreter Bedienungssituationen eingegangen werden. Wir verweisen auf [10], [16] und [20].

5.5. Überblick über einige weitere Methoden der Bedienungstheorie

Im vorangegangenen Abschnitt beschrieben wir das Bedienungssystem $M/M/n/m$ mit Hilfe von Geburts- und Todesprozessen, also mit Markowschen Prozessen. Obwohl die diesem Bedienungssystem zugrunde liegenden Voraussetzungen im allgemeinen in praktischen Anwendungen nicht genau erfüllt sind (vgl. [10]), geben sie doch einen guten Ansatzpunkt für die Untersuchung konkreter Bedienungssituationen. Andererseits wird aber auch dann, wenn wenigstens eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist, auf Grund der „günstigen Eigenschaften“ Markowscher Prozesse versucht, die Beschreibung realer Bedienungssituationen auf Markowsche Prozesse zurückzuführen. Dieses Vorgehen erwies sich als sehr erfolgreich. An dieser Stelle sind die von D. G. Kendall entwickelte *Methode der eingebetteten Markow-Ketten* (vgl. [10] und [16]) und die von L. Kosten und D. R. Cox angegebene *Methode der Zusatzvariablen* (vgl. [16]) zu nennen. Weiterhin lassen sich Bedienungssituationen, bei denen wenigstens eine auftretende Zufallsgröße nicht exponentialverteilt ist, durch *Semi-Markowsche Prozesse* (vgl. [10] und [16]) beschreiben. Nicht zuletzt ist es auch möglich, *stochastische Prozesse mit Geschwindigkeiten* (vgl. [15] und [16]) bei der Untersuchung von Bedienungssystemen einzusetzen, vorausgesetzt alle auftretenden Zufallsgrößen sind exponentialverteilt. Ist mit analytischen Verfahren, von denen oben einige genannt wurden, die Beschreibung einer realen Bedienungssituation nicht oder nur schwer möglich, bieten sich schließlich noch *Näherungs-* und *Simulationsverfahren* (vgl. [16]) an.

6. Einführung in die Zuverlässigkeitstheorie

Bei der Bearbeitung von Problemen der Zuverlässigkeit technischer Erzeugnisse sind mathematische Methoden, speziell die der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik, ein wesentliches Hilfsmittel. Im folgenden Kapitel werden wir die Aufgabe der mathematischen Theorie der Zuverlässigkeit (kurz: Zuverlässigkeitstheorie) und einige für die Zuverlässigkeitsarbeit wichtige stochastische Modelle kennenlernen. Dabei kann lediglich eine kurze Einführung und kein vollständiger Überblick gegeben werden.

6.1. Aufgabe der Zuverlässigkeitstheorie

Im Zuge des technischen Fortschritts werden einerseits die technischen Erzeugnisse (Maschinen, Anlagen) immer umfangreicher und in ihrem Aufbau komplizierter, wodurch eine Erhöhung ihrer Störanfälligkeit gegeben ist, andererseits entstehen aber auf Grund ihrer hohen Produktivität durch einen Ausfall hohe Verluste. Es ist demzufolge eine wichtige Aufgabe bei Entwicklung, Fertigung und Einsatz solcher Erzeugnisse, jede Vorsorge zu treffen, um die Störanfälligkeit während der geplanten Betriebszeit und unter den vorgesehenen Betriebsbedingungen so klein wie möglich zu halten.

Zur Beurteilung technischer Erzeugnisse hat sich deshalb in den letzten Jahren zusätzlich ein weiteres Bewertungskriterium zu denen, die durch technisch-physikalische Kenngrößen und durch Anschaffungs- und Unterhaltungskosten gegeben sind, herausgebildet: die Zuverlässigkeit des betreffenden Erzeugnisses.

Definition 6.1: *Mit dem Begriff Zuverlässigkeit wird die Eigenschaft eines Erzeugnisses charakterisiert, unter definierten umgebungs- und funktionsbedingten Beanspruchungen während einer vorgegebenen Zeitdauer unter Beibehaltung seiner Betriebskennwerte in vorgegebenen Grenzen bestimmten Forderungen an seine Funktion zu entsprechen.¹⁾*

Durch geeignete Kenngrößen erfolgt die Quantifizierung der verschiedenen Aspekte dieser Eigenschaft.

Die bei der Bearbeitung auftretenden Fragestellungen sind derart komplex, daß sie im allgemeinen in interdisziplinärer Arbeit von Spezialisten mehrerer Fachdisziplinen (Mathematikern, Ingenieuren, Ökonomen, Physikern, Chemikern) bearbeitet werden.

Aufgabe der Zuverlässigkeitstheorie ist es, mathematische Methoden zur Bearbeitung von Zuverlässigkeitsproblemen bereitzustellen, d. h. entsprechende mathematische Modelle zu entwickeln. Diese Modelle sind im allgemeinen stochastische Modelle, da die bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen auftretenden mathematischen Fragestellungen zu ihrer Bearbeitung meist Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik erfordern.

¹⁾ Zuverlässigkeit in der Technik – Begriffe. TGL 26096, Blatt 1.

Wir wollen einige für die weiteren Betrachtungen wichtige Begriffe klären.

Definition 6.2: Jeder Gegenstand einer Zuverlässigkeitsuntersuchung wird **Betrachtungseinheit** genannt. Jeder Zustand einer Betrachtungseinheit, bei dem mindestens eine der gestellten Anforderungen nicht erfüllt ist, wird als **Fehler** bezeichnet; ein Zustand der Betrachtungseinheit, bei dem diese nicht mehr arbeitsfähig ist, wird **Ausfall** genannt.¹⁾

Jeder Ausfall ist also ein Fehler, aber nicht jeder Fehler ist gleichzeitig ein Ausfall. Wir werden allgemein den Begriff Fehler verwenden.

Jede Betrachtungseinheit wird je nach der zu beantwortenden Fragestellung entweder als Element oder als System aufgefaßt.

Definition 6.3: Als **Element** wird die kleinste Betrachtungseinheit, die eine weitere Unterteilung für die jeweilige Zuverlässigkeitsbetrachtung nicht erfordert, und als **System** eine Kombination von Elementen, die für die jeweiligen Zuverlässigkeitsbetrachtungen eine funktionelle Einheit bilden, bezeichnet.¹⁾

So wird z. B. ein Getriebe vom Hersteller als System und vom Abnehmer, der dieses Getriebe in einen LKW einbaut, als Element betrachtet werden.

6.2. Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Elements

Häufig tritt bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen die Frage auf, wie die Zuverlässigkeit eines Elements charakterisiert werden kann, das zum Zeitpunkt $t = 0$ seine Arbeit aufnimmt und bei dem erstmals zum Zeitpunkt t ein Fehler auftritt. Eine solche Fragestellung ist z. B. von Interesse bei Zuverlässigkeitsbetrachtungen an Flugzeugen, an in der Erntesaison eingesetzten Landmaschinen (z. B. Mähdreschern) oder an Rechenautomaten.

Ausgangspunkt für entsprechende Untersuchungen ist die Tatsache, daß dieser Zeitpunkt t nicht voraus bestimmt werden kann, sondern vielmehr von Element zu Element variiert. So kann z. B. der Zeitpunkt des Durchbrennens einer Glühlampe vor diesem Ereignis nicht exakt angegeben werden. Wir werden deshalb die fehlerfreie Arbeitszeit T eines Elements im Intervall $[0, t)$ als Zufallsgröße auffassen und mit Hilfe ihrer Verteilungsfunktion $F(t)$ die Zuverlässigkeit des betrachteten Elements charakterisieren. Das erfolgt durch entsprechende Kenngrößen.

6.2.1. Zuverlässigkeitskenngrößen

Zur Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Elements bieten sich die Ausfallwahrscheinlichkeit, die Überlebenswahrscheinlichkeit, der Erwartungswert der fehlerfreien Arbeitszeit und die Ausfallrate an.

1. Die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$:

Definition 6.4: Als **Ausfallwahrscheinlichkeit** $F(t)$ wird die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, daß bei dem Element der erste Fehler vor dem Zeitpunkt t ($0 \leq t < +\infty$)

¹⁾ s. TGL 26096, Blatt 1.

auftritt:

$$F(t) = P(T < t). \quad (6.1)$$

Im allgemeinen ist die fehlerfreie Arbeitszeit T eine stetige Zufallsgröße. Wir wollen dies im folgenden voraussetzen. Für die Dichte $f(t)$ dieser Zufallsgröße – sie wird Dichte der Ausfallwahrscheinlichkeit genannt – gilt dann

$$f(t) = F'(t). \quad (6.2)$$

2. Die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$:

Definition 6.5: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Element bis zum Zeitpunkt t ($0 \leq t < +\infty$) nicht ausfällt, wird **Überlebenswahrscheinlichkeit** (auch: **Zuverlässigkeitsfunktion**) $R(t)$ genannt:

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T \geq t). \quad (6.3)$$

3. Der Erwartungswert T_0 der fehlerfreien Arbeitszeit T :

$$T_0 = E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt. \quad (6.4)$$

Unter der Voraussetzung, daß die auftretenden Integrale konvergieren, ergibt sich für (6.4) durch partielle Integration:

$$T_0 = \int_0^{+\infty} R(t) dt. \quad (6.5)$$

Für T_0 wird auch die Bezeichnung MTBF (engl.: mean time before failure) verwandt.

4. Die Ausfallrate (auch Fehlerrate) $\lambda(t)$:

Sie ist ein lokales Charakteristikum und kann als Maß für die Anfälligkeit eines Elements angesehen werden, das das Alter t erreicht hat. $\lambda(t) \Delta t$ ist bis auf eine Größe der Ordnung $o(\Delta t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei dem betrachteten Element ein Fehler im Intervall $[t, t + \Delta t)$ eintritt, wenn es im Intervall $[0, t)$ ordnungsgemäß arbeitete.

Wir wollen $\lambda(t)$ näher betrachten und gehen dazu von folgender Fragestellung aus: Gesucht wird die bedingte Wahrscheinlichkeit $R(t, t + \Delta t)$, daß ein Element, das bis zum Zeitpunkt t ordnungsgemäß arbeitete, auch im Intervall $[t, t + \Delta t)$ ordnungsgemäß arbeitet. Bezeichnen wir mit E_1 das Ereignis $\{t \leq T < t + \Delta t\}$ und mit E_2 das Ereignis $\{T > t\}$, dann erhalten wir:

$$R(t, t + \Delta t) = P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}. \quad (6.6)$$

Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t, t + \Delta t)$ erhalten wir dann:

$$F(t, t + \Delta t) = 1 - R(t, t + \Delta t) = 1 - \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)}.$$

Für hinreichend kleines Δt ergibt sich weiterhin:

$$F(t, t + \Delta t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \Delta t + o(\Delta t).$$

Es ist nun möglich, die Ausfallrate $\lambda(t)$ zu definieren:

Definition 6.6:

$$\lambda(t) = - \frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}. \quad (6.7)$$

Für hinreichend kleines Δt kann also gesetzt werden:

$$F(t, t + \Delta t) \approx \lambda(t) \Delta t. \quad (6.8)$$

Die Ausfallrate $\lambda(t)$ hat für viele Elemente die in Bild 6.1 angegebene typische Form einer „Badewannenkurve“. Im Verlauf dieser Kurve fallen drei typische

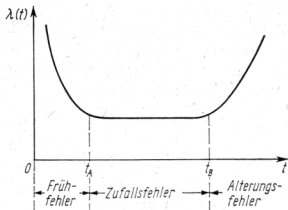


Bild 6.1. Kurvenverlauf der Ausfallrate $\lambda(t)$

Abschnitte auf. Der erste, in dem die Ausfallrate monoton fällt, wird bestimmt durch die bei dem Element auftretenden *Frühfehler*. Der zweite mit annähernd konstanter Ausfallrate ist gekennzeichnet durch die bei dem Element auftretenden *Zufallsfehler*. Im letzten Abschnitt wächst die Ausfallrate monoton. Dies ist durch die bei dem Element auftretenden *Alterungsfehler* zu erklären.

Alle drei Fehlerarten besitzen Zufallscharakter. Im Prinzip kann jede von ihnen in allen drei Abschnitten unabhängig von den beiden anderen auftreten.

Dabei sind Frühfehler durch eine monoton fallende ($\lambda_1(t)$), Zufallsfehler durch eine konstante ($\lambda_2(t)$) und Alterungsfehler durch eine monoton wachsende ($\lambda_3(t)$)

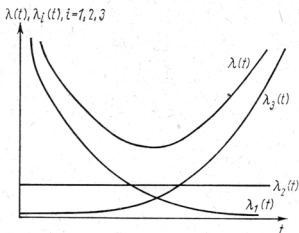


Bild 6.2. Kurvenverlauf der Ausfallrate $\lambda(t)$ durch Superposition der Ausfallraten für Frühfehler $\lambda_1(t)$, für Zufallsfehler $\lambda_2(t)$ und für Alterungsfehler $\lambda_3(t)$

Ausfallrate über alle drei Abschnitte gekennzeichnet. Durch Superposition dieser Ausfallraten ergibt sich der oben angegebene Verlauf der Ausfallrate $\lambda(t)$ (Bild 6.2). Da aber in jedem der drei Abschnitte eine der drei Fehlerarten dominiert, werden in der Regel die beiden anderen vernachlässigt.

Der zwischen der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$, der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ und der Ausfallrate $\lambda(t)$ bestehende Zusammenhang ist in Tabelle 6.1 angegeben:

Tabelle 6.1

Zusammenhang zwischen den Größen $F(t)$, $R(t)$ und $\lambda(t)$

$F(t)$	$R(t)$	$\lambda(t)$
$1 - R(t)$	$1 - F(t)$	$-\frac{R'(t)}{R(t)}$
$1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$	$e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$	$\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$

Prüfen Sie die in dieser Tabelle angegebenen Relationen nach!

6.2.2. Spezielle Verteilungen

Die in Abschnitt 6.2.1. erklärten Kenngrößen sind in Tabelle 6.2 für einige in der Zuverlässigkeitstheorie wichtige Verteilungen zusammengestellt. Es handelt sich dabei um die Exponential-, die Weibull-, die Gamma-, die Normal- und die Lognormalverteilung.

In vielen Fällen wird bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen die *Exponentialverteilung* angewandt. Das hat zwei Gründe. Einmal ist sie — nicht zuletzt aus physikalischen Gründen — zur Beschreibung vieler bei Zuverlässigkeitsbetrachtungen auftretenden Erscheinungen gut geeignet. Zum anderen vereinfachen sich viele Berechnungen bei Anwendung der Exponentialverteilung. Dies ist besonders dadurch begründet, daß bei ihr die Wahrscheinlichkeit fehlerfreier Arbeit im Intervall $[t, t + \Delta t)$ nur von der Intervalllänge Δt und nicht von der schon abgelaufenen Arbeitszeit t abhängt, d. h., die Arbeitsfähigkeit eines Elements zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist unabhängig von der Vorgeschichte. Analytisch drückt sich dies folgendermaßen aus:

$$R(t, t + \Delta t) = \frac{R(t + \Delta t)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}. \quad (6.9)$$

Auch das Umgekehrte gilt: Ist für eine Verteilung die Relation (6.9) erfüllt, dann ist sie exponentialverteilt.

Da die Exponentialverteilung eine konstante Ausfallrate besitzt, eignet sie sich gut zur Beschreibung des Abschnitts, der durch die beim Element auftretenden Zufallsfehler gekennzeichnet ist. Dasselbe gilt für die *Weibull-* (für $\alpha = 1$) und für die *Gammaverteilung* (für $\alpha = 1$).

Zur Beschreibung der Früh- und Alterungsfehler werden im allgemeinen die *Normal-*, die *Weibull-*, die *Lognormal-* und auch die *Gammaverteilung* herangezogen. Für $\alpha < 1$ besitzen die Weibull- und die Gammaverteilung eine fallende Ausfallrate. Sie eignen sich also zur Beschreibung von Frühfehlern. Eine wachsende Ausfallrate haben die Normalverteilung (für $\mu \gg \sigma$), die Lognormalverteilung (für $\mu < 3\sigma$), die Weibull- und die Gammaverteilung (für $\alpha > 1$). Mit ihrer Hilfe kann das Auftreten von Alterungsfehlern charakterisiert werden.

Tabelle 6.2
Zuverlässigkeitskenngrößen für einige Verteilungen

	Exponential- verteilung	Normalverteilung	Weibullverteilung	Gammaverteilung	Lognormalverteilung
$F(t)$	$1 - e^{-\lambda t}$ $\lambda > 0, t \geq 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$ $-\infty < t < +\infty$	$1 - e^{-\lambda t^\alpha}$ $\lambda > 0, \alpha > 0,$ $t \geq 0$	$\int_0^t \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} dx$ $\alpha, \lambda > 0, t \geq 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ $-\infty < \mu < +\infty$ $\sigma > 0, t > 0$
$f(t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}$	$\frac{\lambda \alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
$R(t)$	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$	$e^{-\lambda t^\alpha}$	$\int_{\lambda t}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} dx$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$
T_0	$\frac{1}{\lambda}$	μ	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\frac{1}{\lambda^\alpha}}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$e^{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2}}$
$\lambda(t)$	λ	$\frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}$	$\alpha \lambda t^{\alpha-1}$	$\frac{\lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\int_{\lambda t}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx}$	$\frac{e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{t \int_t^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx}$

6.2.3. Kenngrößenstatistik

Wir wollen nun für einige der in Abschnitt 6.2.1. erklärten Kenngrößen Möglichkeiten zu ihrer experimentellen Bestimmung kennenlernen. Dazu werden N gleichartige Elemente zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Versuch eingesetzt, wobei sie sich in ihrer Arbeitsweise gegenseitig nicht beeinflussen sollen, d. h., es werden gleichzeitig N unabhängige Versuche durchgeführt.

Zur experimentellen Bestimmung der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ zum Zeitpunkt t_0 wird die Anzahl $n(t_0)$ der bis dahin fehlerfrei arbeitenden Elemente festgestellt. Dann kann die relative Häufigkeit $H_N = \frac{n(t_0)}{N}$ (bis zum Zeitpunkt t_0 tritt bei dem Element kein Fehler auf) als Schätzung für $R(t_0)$ gewählt werden, da die relative Häufigkeit für $N \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen $R(t_0)$ konvergiert [9].

Definition 6.7: Die relative Häufigkeit H_N (bis zum Zeitpunkt $t \leq t_0$ tritt bei dem Element kein Fehler auf) wird als **empirische Überlebenswahrscheinlichkeit** $R_N(t)$ bezeichnet.

Beträgt die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t ($t \leq t_0$) fehlerfrei arbeitenden Elemente $n(t)$, dann berechnet sich $R_N(t)$ wie folgt:

$$R_N(t) = \frac{n(t)}{N}. \quad (6.10)$$

Für hinreichend große N können wir sie nach dem Satz von Gliwensko [4] als Schätzung für die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ wählen und dann also setzen:

$$R(t) \approx R_N(t) = \frac{n(t)}{N}. \quad (6.11)$$

Eine Extrapolation von $R_N(t)$ für einen Zeitpunkt $t > t_0$ sollte unterbleiben, wenn die analytische Form von $R(t)$ nicht aus Vorversuchen bekannt ist bzw. wenn entsprechende physikalische Überlegungen nicht angestellt werden können.

Bei der experimentellen Bestimmung der mittleren Lebensdauer T_0 wird von jedem der N Elemente die Zeit t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, bis zum Auftreten eines Fehlers festgestellt und das arithmetische Mittel \bar{t} dieser Zeiten ermittelt:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}. \quad (6.12)$$

Definition 6.8: Das durch (6.12) gegebene arithmetische Mittel \bar{t} wird als **empirische mittlere Lebensdauer** bezeichnet.

Es läßt sich zeigen, daß \bar{t} für $N \rightarrow +\infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen T_0 konvergiert [4, 9]. Für hinreichend großes N können wir wiederum setzen:

$$T_0 \approx \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}. \quad (6.13)$$

Zur experimentellen Bestimmung der Ausfallrate $\lambda(t)$ stellen wir die Anzahl $n(t)$ der Elemente fest, bei denen bis zum Zeitpunkt t noch kein Fehler auftrat. Wir betrachten nun die folgende Größe:

$$\begin{aligned}\lambda_N(t) &= \frac{R_N(t) - R_N(t + \Delta t)}{\Delta t R_N(t)} = \frac{\frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{N}}{\Delta t \frac{n(t)}{N}} \\ &= \frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{\Delta t n(t)},\end{aligned}\quad (6.14)$$

wobei $\Delta t > 0$ ist.

Definition 6.9: Die durch (6.14) gegebene Größe $\lambda_N(t)$ wird als **empirische Ausfallrate** bezeichnet.

Für hinreichend kleines Δt und hinreichend großes N können wir setzen:

$$\lambda(t) \approx \lambda_N(t). \quad (6.15)$$

6.3. Einfache Ersatzmodelle

Im Gegensatz zu der im letzten Abschnitt behandelten Fragestellung wird jetzt das betrachtete Element nach dem Auftreten eines Fehlers durch ein anderes Element ersetzt, d. h., es wird erneuert. Das fehlerhafte Element wird entweder durch ein neues, mit dem alten identisches Element ersetzt, oder es wird einer Reparatur unterzogen, in deren Ergebnis seine Gebrauchseigenschaften wiederhergestellt werden. Für die nun folgende Darstellung einfacher Ersatzmodelle ist nicht die Art, sondern die Folge der Ersetzungen (Erneuerungen) von Interesse.

6.3.1. Unverzögliche Erneuerung

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, daß die Erneuerung eines fehlerhaften Elements sofort nach Auftreten des Fehlers und ohne zeitliche Dauer erfolgt. Die

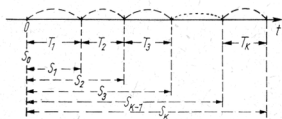


Bild 6.3. Schematische Darstellung eines einfachen Erneuerungsprozesses (nach [19], S. 192)

in dieser Form vorgenommene Erneuerung ist in Bild 6.3 veranschaulicht. Dabei nehmen wir an, daß das Element zum Zeitpunkt $S_0 = 0$ seine Arbeit aufnimmt und nicht schon eine gewisse Zeit in Betrieb ist. Nach Ablauf der zufälligen Zeit T_1 tritt zum Zeitpunkt $T_1 = S_1$ bei dem Element ein Fehler auf. Das erneuerte Element

wird nach Ablauf der zufälligen Zeit T_2 zum Zeitpunkt S_2 fehlerhaft. Allgemein ausgedrückt: Nach der $(k - 1)$ -ten Erneuerung tritt bei dem Element nach Ablauf der zufälligen Zeit T_k zum Zeitpunkt S_k , $k = 1, 2, \dots$, ein Fehler auf. Auf Grund unserer Annahme sind die zufälligen Zeiten T_i , $i = 1, 2, \dots$, identisch verteilte, unabhängige, positive Zufallsgrößen, d. h., für ihre Verteilungsfunktion gilt: $F(t) = P(T_i < t)$, $i = 1, 2, \dots$. Hinsichtlich der Zeitpunkte S_i , die als *Erneuerungspunkte* bezeichnet werden, ist das nicht mehr der Fall. Sie genügen der Beziehung:

$S_k = \sum_{i=1}^k T_i$, $k = 1, 2, \dots$, und bilden einen *einfachen* (auch: *gewöhnlichen*) *Erneuerungsprozeß*. Das ist ein stochastischer Prozeß aus der Klasse der Punktprozesse.

Definition 6.10: Durch eine Folge unabhängiger, positiver Zufallsgrößen T_i mit den Verteilungsfunktionen $F(t) = P(T_i < t)$, $i = 1, 2, \dots$, wird ein **einfacher Erneuerungsprozeß** erklärt.

Zu seiner Charakterisierung werden verwendet:

1. Der stochastische Prozeß $\{N(t), t \geq 0\}$, mit

$$N(t) = \max_i (i: S_i < t, t \geq 0). \quad (6.16)$$

Er ist ein sogenannter *Zählprozeß* und gibt die *Anzahl der Erneuerungen* im Intervall $[0, t)$ an. Für jedes $t > 0$ ist $N(t)$ eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten $0, 1, 2, \dots$. Die für den Erneuerungsprozeß $\{S_i, i = 1, 2, \dots\}$ erklärten zufälligen Ereignisse $\{S_n \geq t\}$, $n = 1, 2, \dots$, sind den zufälligen Ereignissen $\{N(t) \leq n\}$, $n = 1, 2, \dots$, des Zählprozesses $\{N(t), t \geq 0\}$ äquivalent:

$$\{N(t) \leq n\} = \{S_n \geq t\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

Es gilt deshalb:

$$P(N(t) \leq n) = P(S_n \geq t) = 1 - P(S_n < t). \quad (6.18)$$

Die Verteilung des Zählprozesses $\{N(t), t \geq 0\}$ kann für jedes $t > 0$ mit Hilfe der Verteilung des Erneuerungsprozesses $\{S_i, i = 1, 2, \dots\}$ angegeben werden. Die Verteilungsfunktion $F_n(t)$ der Zufallsgröße S_n , $n = 1, 2, \dots$,

$$F_n(t) = P(S_n < t) = P\left(\sum_{i=1}^n T_i < t\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

erhalten wir für $n > 1$ durch Faltung (vgl. [4]) der Verteilungsfunktionen $F_{n-1}(t)$ und $F(t)$:

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-y)f(y) dy, \quad (6.20)$$

wobei $f(t)$ die Dichte der Verteilungsfunktion $F(t)$ ist:

$$F'(t) = f(t).$$

2. Die Mittelwertfunktion des Zählprozesses $\{N(t), t \geq 0\}$, die hier mit $H(t)$ bezeichnet und *Erneuerungsfunktion* genannt wird:

$$H(t) = E(N(t)). \quad (6.21)$$

Mit (6.19) berechnen wir $H(t)$:

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n[F_n(t) - F_{n+1}^*(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (6.21')$$

Dieser Erwartungswert existiert immer: $H(t) < \infty$.

3. Die sogenannte *Erneuerungsdichte* $h(t)$, die wie folgt erklärt ist:

$$h(t) = \frac{dH(t)}{dt}. \quad (6.22)$$

Sie existiert, wenn $F'(t) = f(t)$ gilt. Existiert weiterhin $F_n'(t) = f_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, so errechnet sich $h(t)$ wie folgt:

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t). \quad (6.23)$$

Im Rahmen dieses Bandes ist es nicht möglich, auf den Erneuerungsprozeß näher, z. B. auf Fragen der Stationarität und auf Grenzwertsätze, einzugehen. Ausführliche Darstellungen sind in [9] und [19] enthalten. Mit den Charakteristiken des Erneuerungsprozesses können Zuverlässigkeitsaussagen für ein Element gemacht werden, bei dem nach einem Fehler eine Erneuerung unter den oben genannten Voraussetzungen vorgenommen wird.

Beispiel 6.1: Für den Fall, daß die zufälligen Zeiten T_i , $i = 1, 2, \dots$, zwischen zwei Erneuerungen durch eine Exponentialverteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F(t) = P(T_i < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0, \quad (6.24)$$

beschrieben werden können, ergeben sich für die n -fache Faltung von (6.24) und die o. g. Charakteristiken für den entsprechenden einfachen Erneuerungsprozeß, den *Poissonprozeß*:

$$F_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (6.25)$$

$$H(t) = \lambda t, \quad h(t) = \lambda \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\lambda} = E(T_1) = E(T_2) = \dots, \quad (6.26)$$

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.27)$$

Die Anzahl der Erneuerungen bis zum Zeitpunkt t ist also durch eine Poissonverteilung mit dem Erwartungswert λt gegeben.

Bringen Sie diese Relationen in Zusammenhang mit den im Abschnitt 2.2. zum Poissonprozeß angeführten Ergebnissen!

6.3.2. Verzögerte Erneuerung

Betrachten wir nun den Fall, daß für das Element nach dem Auftreten eines Fehlers eine endliche Erneuerungszeit zugelassen wird, wobei diese Zeit nicht in Anteile für das Aufsuchen und den Austausch bzw. die Reparatur des fehlerhaften Elements

gegliedert wird. Bild 6.4 veranschaulicht die Aufeinanderfolge der in dieser Form vorgenommenen Erneuerungen. Auch hier wird angenommen, daß das Element zum Zeitpunkt $S'_0 = 0$ seine Arbeit aufnimmt und nicht schon eine gewisse Zeit in Betrieb ist. Auf die Erläuterung dieses Falls wollen wir uns hier beschränken. Nach

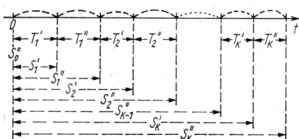


Bild 6.4. Schematische Darstellung eines alternierenden Erneuerungsprozesses (nach [19], S. 192)

Ablauf der zufälligen Zeit T'_1 tritt zum Zeitpunkt $T'_1 = S'_1$ bei dem Element ein Fehler auf. Die zufällige Erneuerungszeit beträgt T''_1 , so daß zum Zeitpunkt S''_1 das erneuerte Element die Arbeit wieder aufnimmt. Nach Ablauf der zufälligen Zeit T'_2 tritt zum Zeitpunkt S'_2 wiederum bei dem Element ein Fehler auf, der nach Ablauf der zufälligen Zeit T'_2 zum Zeitpunkt S''_2 behoben ist. Allgemein ausgedrückt: Das zum Zeitpunkt S'_{k-1} , $k = 1, 2, \dots$, in Betrieb genommene Element wird nach Ablauf der zufälligen Zeit T'_k zum Zeitpunkt S'_k fehlerhaft. Nach der ebenfalls zufälligen Erneuerungszeit T''_k wird es zum Zeitpunkt S''_k wieder in Betrieb genommen, d. h., Arbeitsphase und Reparaturphase folgen alternierend aufeinander.

Die zufälligen Zeiten T'_i bzw. T''_i , $i = 1, 2, \dots$, sind positive, unabhängige Zufallsgrößen, die identisch verteilt sind mit den Verteilungsfunktionen $F(t) = P(T'_i < t)$, $i = 1, 2, \dots$, bzw. $G(t) = P(T''_i < t)$, $i = 1, 2, \dots$. Zu den Zeitpunkten

$$S'_k = \sum_{i=1}^{k-1} [T'_i + T''_i] + T'_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.28)$$

treten Fehler auf, und zu den Zeitpunkten

$$S''_k = \sum_{i=1}^k [T'_i + T''_i], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.29)$$

sind die Erneuerungen jeweils beendet.

Definition 6.11: Durch die Folge der Zeitpunkte (S'_k, S''_k) , $k = 1, 2, \dots$, wobei S'_k bzw. S''_k durch (6.28) bzw. (6.29) gegeben ist, wird ein **alternierender Erneuerungsprozeß** erklärt.

Auch dieser Prozeß ist ein stochastischer Prozeß aus der Klasse der Punktprozesse.

Die Charakterisierung dieses Erneuerungsprozesses erfolgt auf folgendem Weg: Wir erklären die Zufallsgrößen

$$T_i = T'_i + T''_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.30)$$

mit der Verteilungsfunktion $K(t) = P(T_i < t)$ und der Dichte $k(t) = K'(t)$. $K(t)$ erhalten wir durch Faltung der Verteilungsfunktionen $F(t)$ der Zufallsgröße T'_i ,

$i = 1, 2, \dots$, und $G(t)$ der Zufallsgröße T_i'' , $i = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} K(t) &= P(T_i < t) = P(T_i' + T_i'' < t) \\ &= \int_0^t F(t-x) g(x) dx, \end{aligned} \quad (6.31)$$

wobei die Existenz der Dichte $G'(t) = g(t)$ vorausgesetzt wird.

Die Folge der Zufallsgrößen T_1, T_2, \dots definiert einen einfachen Erneuerungsprozeß, bei dem sich jede Zufallsgröße T_i , $i = 1, 2, \dots$, auf einen Erneuerungszyklus, der sich aus der Zeit bis zum Auftreten eines Fehlers und aus der sich anschließenden Reparaturzeit zusammensetzt, bezieht. Die Erneuerungszeitpunkte

$S_k = \sum_{i=1}^k T_i$, $k = 1, 2, \dots$, geben dann die Zeit bis zur Vollendung des n -ten Zyklus an.

Die Charakteristiken dieses einfachen Erneuerungsprozesses erhalten hinsichtlich des ursprünglichen alternierenden Prozesses folgende Bedeutung:

1. Mit dem Zählprozeß $N(t) = \max_i (i: S_i < t; t \geq 0)$ wird eine Aussage über die Anzahl der Erneuerungszyklen im Intervall $[0, t)$ gemacht.

2. Die Verteilungsfunktion der Zeit bis zur Beendigung des n -ten Zyklus $K_n(t)$ erhalten wir durch die n -fache Faltung der Verteilungsfunktion $K(t)$:

$$K_n(t) = P(S_n < t) = \int_0^t K_{n-1}(t-x) k(x) dx. \quad (6.32)$$

3. Die Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $N(t)$ (t fest!) ergeben sich zu:

$$P(N(t) = n) = K_n(t) - K_{n+1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.33)$$

4. Die Erneuerungsfunktion

$$H(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t) \quad (6.34)$$

gibt den Erwartungswert der im Intervall $[0, t)$ auftretenden Erneuerungen an.

Vergleichen Sie die hier aufgeführten Charakteristiken mit den in (6.16)–(6.23) angegebenen Größen!

6.3.3. Verfügbarkeit

In Verbindung mit dem in Abschnitt 6.3.2. erklärten alternierenden Erneuerungsprozeß spielt – besonders auch für die Anwendung in der Praxis – eine weitere Kenngröße eine große Rolle, die Verfügbarkeit $V(t)$.

Definition 6.12: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Element zu einem Zeitpunkt $t > 0$ ordnungsgemäß arbeitet, wird als **Verfügbarkeit** $V(t)$ des Elements bezeichnet.

Sie ist wie folgt zu ermitteln:

$$V(t) = R(t) + \int_0^t R(t-x) h(x) dx, \quad (6.35)$$

wobei $R(t)$ die in (6.3) erklärte Überlebenswahrscheinlichkeit und $h(t)$ die in (6.22) angegebene Erneuerungsdichte sind. Im allgemeinen wird jedoch der Grenzwert V von $V(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ betrachtet. Unter der Annahme seiner Existenz wollen wir ihn ohne Herleitung – es sei auf [9] und [19] verwiesen – angeben:

$$V = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \frac{E(T_i')}{E(T_i') + E(T_i'')}, \quad (6.36)$$

d. h., V ist der Quotient aus dem Erwartungswert der Zeit fehlerfreier Arbeit und der Summe aus dem Erwartungswert der Zeit fehlerfreier Arbeit und dem Erwartungswert der Erneuerungszeit.

6.4. Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems

6.4.1. Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems durch Strukturanalyse

In Abschnitt 6.1. haben wir ein System als „Kombination von Elementen, die für die jeweiligen Zuverlässigkeitsuntersuchungen eine funktionelle Einheit bilden“ (vgl. TGL 26096) charakterisiert. Wir werden nun kennenlernen, wie die Zuverlässigkeit eines solchen Systems durch die seiner Elemente ausgedrückt werden kann.

Dazu wollen wir von folgenden Voraussetzungen ausgehen:

1. Das System S besteht aus n Elementen E_i , $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Die Elemente E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, arbeiten unabhängig voneinander, d. h., das Auftreten eines Fehlers bei einem Element besitzt keine Auswirkungen auf das Fehlverhalten der anderen Elemente des Systems.
3. Die Struktur und die Arbeitsweise des Systems sind in einem solchen Umfang bekannt, daß für jede Gruppe¹⁾ von Elementen des Systems bekannt ist, ob ein bei ihnen auftretender Fehler zu einem Fehler des Systems führt.
4. Erforderliche Zuverlässigkeitskenngrößen der Elemente des Systems, also z. B. Überlebenswahrscheinlichkeit, Ausfallrate, sind bekannt.

Die Struktur eines Systems ist im Hinblick auf seine Zuverlässigkeit nicht identisch mit seiner funktionellen Struktur. So kann z. B. bei einem einfachen elektrischen System, das aus zwei Elementen besteht, die funktionelle Struktur durch eine Parallelschaltung gegeben sein, während seine Zuverlässigkeitsstruktur eine weiter unten erklärte Serienstruktur ist. In [19] ist dafür ein Beispiel angegeben.

Die Zuverlässigkeitsstruktur eines Systems wird in Form einer sogenannten *Zuverlässigkeitersatzschaltung* entweder hinsichtlich der Arbeitsfähigkeit oder hinsichtlich des Fehlerverhaltens des Systems erfaßt. Sie wird unter Verwendung der Symbole der Schaltalgebra grafisch dargestellt.

Wir wollen die Zuverlässigkeit eines Systems S , das die o. g. Voraussetzungen erfüllt und zum Zeitpunkt $t = 0$ seine Arbeit aufnimmt, bis zum ersten Auftreten eines Fehlers zum Zeitpunkt t für verschiedene Zuverlässigkeitsstrukturen charakterisieren.

¹⁾ Als „Gruppe von Elementen“ wird in diesem Zusammenhang mit Ausnahme der leeren Teilmenge jede Teilmenge der Menge der Elemente E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, bezeichnet.

Serienstruktur:

Definition 6.13: Die Struktur eines Systems (hinsichtlich der fehlerfreien Arbeit des Systems bis zum Zeitpunkt t) wird als **Serienstruktur** bezeichnet, wenn das System bis zum Zeitpunkt t nur dann fehlerfrei arbeitet, wenn alle n Elemente des Systems bis zu diesem Zeitpunkt fehlerfrei arbeiten.

In Bild 6.5 ist die zugehörige Zuverlässigkeitsersatzschaltung angegeben. Unter Verwendung der Überlebenswahrscheinlichkeiten $R_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, der Elemente

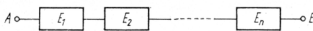


Bild 6.5. Zuverlässigkeitsersatzschaltung einer Serienstruktur

ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t). \quad (6.37)$$

Ist $\lambda(t)$ die Ausfallrate des Systems und sind $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, die Ausfallraten der Elemente, dann ergibt sich mit der Relation in Tabelle 6.1 aus (6.37):

$$e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = e^{-\int_0^t \lambda_1(s) ds - \int_0^t \lambda_2(s) ds - \dots - \int_0^t \lambda_n(s) ds}.$$

Damit erhalten wir:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t), \quad (6.38)$$

d. h., bei einer Serienstruktur summieren sich die Ausfallraten. Kann die zufällige Zeit bis zum Auftreten eines Fehlers bei dem Element E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, durch eine Exponentialverteilung mit der Ausfallrate $\lambda_i(t) = \lambda$, $i = 1, 2, \dots, n$, beschrieben werden, dann ergibt sich mit (6.38) für die Ausfallrate $\lambda(t)$ des Systems

$$\lambda(t) = \lambda + \lambda + \dots + \lambda = n\lambda, \quad (6.39)$$

d. h., die zufällige Zeit bis zum Auftreten eines Fehlers kann bei dem System mit einer Exponentialverteilung mit der Ausfallrate $\lambda(t) = n\lambda$ beschrieben werden.

Aufgabe 6.1: Berechnen Sie für den Fall der Exponentialverteilung den Erwartungswert T_0 der fehlerfreien Arbeitszeit T des Systems!

Aus (6.37) können wir schließlich die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = 1 - R(t)$ des Systems ermitteln, wenn $F_i(t) = 1 - R_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente sind:

$$F(t) = 1 - (1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) \dots (1 - F_n(t)). \quad (6.40)$$

Parallelstruktur:

Definition 6.14: Die Struktur eines Systems (hinsichtlich der fehlerfreien Arbeit des Systems bis zum Zeitpunkt t) wird als **Parallelstruktur** bezeichnet, wenn für seine fehlerfreie Arbeit nur die fehlerfreie Arbeit eines seiner Elemente E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, erforderlich ist.

Bild 6.6 zeigt die zugehörige Zuverlässigkeitsersatzschaltung. In diesem Falle wird auch von der *Redundanz* der Elemente gesprochen. Sie trägt zu einer Erhöhung der

Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems bei. Die Ermittlung der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems erfolgt jetzt mit der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t) = 1 - R(t)$ des Systems und den Ausfallwahrscheinlichkeiten $F_i(t) = 1 - R_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, der Elemente. Bei dem System tritt bis zum Zeitpunkt t nur dann ein Fehler auf, wenn bei allen Elementen bis dahin ein Fehler auftritt, d. h., es gilt für

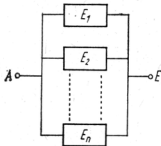


Bild 6.6

Zuverlässigkeitsersatzschaltung einer Parallelstruktur

die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t)$ des Systems bis zum Zeitpunkt t :

$$F(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_n(t). \quad (6.41)$$

Mit (6.41) ergibt sich durch Einsetzen für die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems bis zum Zeitpunkt t :

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)). \quad (6.42)$$

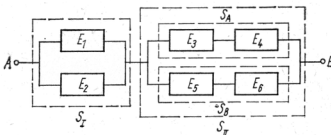
Die Ausfallrate $\lambda(t)$ des Systems läßt sich offensichtlich nicht in so einfacher Art durch die Ausfallraten der Elemente $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, wie bei der Serienstruktur ausdrücken. In diesem Fall kann die Zeit bis zum ersten Auftreten eines Fehlers bei dem System nicht durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden, wenn auch die Zeit bis zum ersten Auftreten eines Fehlers bei den Elementen einer Exponentialverteilung genügt.

Serienparallelstruktur:

Definition 6.15: Die Struktur eines Systems (hinsichtlich der fehlerfreien Arbeit des Systems bis zum Zeitpunkt t) wird als **Serienparallelstruktur** bezeichnet, wenn sie durch eine Kombination von Serien- und Parallelstrukturen aus den Elementen E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, erfaßt werden kann.

Die Zuverlässigkeitsersatzschaltung eines solchen Systems ist dann eine Serienparallelschaltung. Wir wollen die Ermittlung der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ eines solchen Systems am Beispiel erläutern.

Beispiel 6.2: Zu bestimmen ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ eines Systems S , das aus $n = 6$ Elementen besteht und das die in Bild 6.7 angegebene Struktur besitzt, aus den Überlebenswahrscheinlichkeiten $R_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, seiner Elemente E_i , $i = 1, 2, \dots, 6$.

Bild 6.7. Zuverlässigkeitsersatzschaltung eines Beispiels einer Serienparallelstruktur ($n = 6$)

In einem ersten Schritt wird das System S in die Teilsysteme S_I und S_{II} gegliedert, für die das System eine Serienstruktur besitzt. Das Teilsystem S_{II} wiederum besitzt hinsichtlich der Teilsysteme S_A und S_B eine Parallelstruktur, die selbst wieder in bezug auf die Elemente E_3 und E_4 bzw. E_5 und E_6 eine Serienstruktur haben.

In einem zweiten Schritt wird unter Verwendung von (6.37) und von (6.42) schrittweise die gesuchte Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems S errechnet. Die einzelnen Ergebnisse sind im folgenden zusammengestellt, wobei die Angaben für jedes Teilsystem durch entsprechende Indizes gekennzeichnet sind:

$$R_I(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)),$$

$$R_A(t) = R_3(t) R_4(t),$$

$$R_B(t) = R_5(t) R_6(t),$$

$$\begin{aligned} R_{II}(t) &= 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t)) \\ &= 1 - (1 - R_3(t) R_4(t))(1 - R_5(t) R_6(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(t) &= R_I(t) R_{II}(t) \\ &= [1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t))] \\ &\quad \times [1 - (1 - R_3(t) R_4(t))(1 - R_5(t) R_6(t))]. \end{aligned}$$

Ist die Darstellung der Struktur eines Systems durch Serienparallelstrukturen möglich, kann die Bestimmung der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ dieses Systems mit Hilfe eines *Booleschen Zuverlässigkeitsmodells* erfolgen. Solche Modelle werden in [19] und [26] ausführlich beschrieben.

Auch für Systeme, deren Struktur sich nicht in einfacher Weise durch eine Kombination von Serien- und Parallelstrukturen darstellen läßt, kann dann die Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t)$ des Systems berechnet werden, wenn von jeder der $2^n - 1$ Gruppen der n Elemente des Systems bekannt ist, ob das Auftreten eines Fehlers bei allen Elementen der jeweiligen Gruppe zu einem Fehler des Systems führt oder nicht. Wir können darauf nicht näher eingehen und verweisen auf [9].

6.4.2. Charakterisierung der Zuverlässigkeit eines Systems durch Zustandsanalyse

Zuverlässigkeitsmodelle, bei denen auf die Unabhängigkeit der Arbeitsweise der Elemente und auf die bei den Booleschen Modellen geforderte Monotonieeigenschaft verzichtet wird, gehen primär nicht vom Verhalten der Elemente aus, um von da auf die Arbeitsweise des Systems zu schließen, sondern stellen an die Spitze der Untersuchung eine *Zustandsanalyse* des Systems.

Definition 6.16: Als *Zustandsanalyse* eines gegebenen Systems S wird die Erfassung der in Verbindung mit der vorliegenden Fragestellung interessierenden Zustände des Systems und der Möglichkeiten des Übergangs zwischen den einzelnen Zuständen bezeichnet.

Bei der Zustandsanalyse des Systems werden die Zustände der Elemente des Systems berücksichtigt.

Beispiel 6.3: Bei der Zustandsanalyse eines Systems S , dessen Zuverlässigkeitsersatzschaltung in Bild 6.8 angegeben ist, werden die Zustände S_1 (das System arbeitet fehlerfrei) und S_2 (bei dem System liegt ein Fehler vor) und entsprechend bei den Elementen $E_i, i = 1, 2, 3$, die Zustände E_{i1} (das i -te Element arbeitet fehlerfrei)

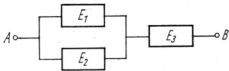


Bild 6.8. Zuverlässigkeitsersatzschaltung eines Beispiels einer Serienparallelstruktur ($n = 3$)

und E_{i2} (bei dem i -ten Element liegt ein Fehler vor) betrachtet. Die Zustände des Systems ergeben sich aus den Zuständen der Elemente in der in Tabelle 6.3 zusammengestellten Art. Mit Hilfe der Tabelle 6.3 ist es möglich, Betrachtungen hinsichtlich des Übergangs zwischen den Zuständen anzustellen.

Tabelle 6.3
Abhängigkeit des Systemzustandes von den Zuständen der Elemente für das in Bild 6.8 dargestellte System

Zustand des Systems S	Zustand der Elemente $E_i, i = 1, 2, 3$
S_1	E_{11}, E_{21}, E_{31}
S_1	E_{11}, E_{22}, E_{31}
S_1	E_{12}, E_{21}, E_{31}
S_2	E_{11}, E_{21}, E_{32}
S_2	E_{11}, E_{22}, E_{32}
S_2	E_{12}, E_{21}, E_{32}
S_2	E_{12}, E_{22}, E_{32}

Im einzelnen wird bei solchen Modellen vorausgesetzt:

1. Das System S kann m Zustände z_1, z_2, \dots, z_m annehmen.
2. Der Zustand des Systems S wird für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$ durch eine Zufallsgröße $Z(t)$ charakterisiert.
3. Der Zustand $Z(t)$ des Systems wird in seiner zeitlichen Abhängigkeit durch einen stochastischen Prozeß $\{Z(t), t \geq 0\}$ mit endlich vielen Zuständen und stetigem Parameterraum beschrieben.

Bild 6.9 zeigt eine Realisierung eines derartigen Prozesses.

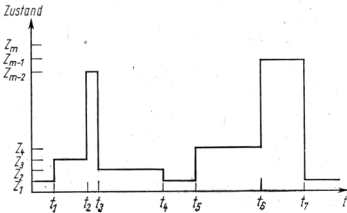


Bild 6.9
Mögliche Realisierung eines stochastischen Prozesses mit endlich vielen Zuständen und stetigem Parameterraum (nach [19], S. 109)

Bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen eines Systems S auf der Grundlage eines Modells, das die o. g. Voraussetzungen erfüllt, wird nach Möglichkeit ein stochastischer Prozeß einer Klasse gewählt, deren Eigenschaften schon gut bekannt sind. So wird häufig – nicht zuletzt aus physikalisch-technischen Überlegungen – versucht, die Klasse der *Markowschen* oder auch *Semi-Markowschen* Prozesse einzusetzen. Die damit verbundenen Überlegungen führen zu den Markowschen Zuverlässigkeitsmodellen. Im Rahmen dieses Bandes können wir nicht näher darauf eingehen. Ausführliche Darstellungen sind in [9] und [19] enthalten.

6.5. Komplexe Ersatzmodelle

Im vorangehenden Abschnitt haben wir Zuverlässigkeitsbetrachtungen für ein System bis zum ersten Auftreten eines Fehlers angestellt. Jetzt wollen wir Möglichkeiten für Zuverlässigkeitsaussagen bei Systemen skizzieren, wenn deren Elemente bei jedem Fehler erneuert werden, und uns dabei auf den Fall beschränken, daß die Erneuerung sofort nach dem Eintritt des Fehlers und ohne Erneuerungszeit erfolgt. Nach der Erneuerung der fehlerhaften Elemente soll das System seine Arbeitsfähigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ wiedererlangt haben. Wir wollen weiter annehmen, daß die Elemente des Systems unabhängig voneinander arbeiten, d. h. untereinander unabhängig sind. Gehen wir von unseren Überlegungen für ein einzelnes Element in Abschnitt 6.3. aus, so bilden die Zeitpunkte, zu denen ein Fehler im System auftritt, gleichzeitig also auch eine Erneuerung stattfindet, einen *Erneuerungsprozeß*. Besteht das System S aus

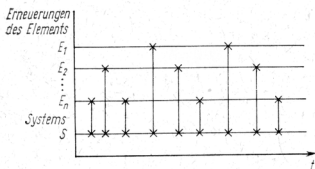


Bild 6.10. Schematische Darstellung eines Erneuerungsprozesses für ein System S als Summe der Erneuerungsprozesse seiner Elemente E_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (nach [9], S. 122)

n Elementen E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, so wird dieser Erneuerungsprozeß auf Grund der von uns angenommenen Unabhängigkeit der Elemente E_i durch die Erneuerungsprozesse der Elemente bestimmt. Besitzt das System eine Serienstruktur, dann ergibt sich dieser Erneuerungsprozeß durch die Summierung der n Erneuerungsprozesse der Elemente (Bild 6.10).

Aufgabe der Zuverlässigkeitstheorie ist es, diesen Erneuerungsprozeß zu untersuchen, seine Grundcharakteristiken zu erfassen und damit entsprechende Zuverlässigkeitsaussagen zu ermöglichen. In [9] und [19] wird diese Problematik, auf die wir hier nicht näher eingehen können, eingehend behandelt.

7. Einführung in die Lagerhaltungstheorie

Stochastische Lagerhaltungsmodelle werden erst seit etwa 25 Jahren studiert. Dabei laufen die Untersuchungen in zwei Richtungen. Einerseits wird – vor allem in jüngster Zeit – der spezifische Ablauf der Lagerhaltung exakt erfaßt, und dazu werden als mathematische Hilfsmittel stochastische Prozesse eingesetzt. Andererseits werden die Steuerungen eines Lagers erforscht. Dazu wird eine in einem gewissen Sinne beste Steuerung gesucht, wobei das Prozeßverhalten in den Hintergrund tritt.

Das vorliegende Kapitel wendet sich besonders dem zuerst genannten deskriptiven Problembereich zu und analysiert einfache Lagerhaltungssysteme. Dabei werden die in den vorangegangenen Kapiteln bereitgestellten Aussagen über Markowsche Ketten und diskrete Markowsche Prozesse verwendet. Die normative Seite der Lagerhaltung, die auf Optimierungsprobleme führt, kann hier nur gestreift werden.

7.1. Aufgabe der stochastischen Lagerhaltungstheorie

Lager werden in Industrie, Landwirtschaft, Medizin und Handel angelegt, um Produktion und Konsumtion kontinuierlich aufrechtzuerhalten und ihre naturbedingten lokalen und zeitlichen Diskrepanzen auszugleichen. Ein Lager hat also die Aufgabe, einen Bedarf an Produkten oder Materialien zu befriedigen. Nun ist z. B. der Verbrauch von Hilfsmaterialien oder Blutkonserven nicht exakt planbar, auch erfordert die Zuführung von Produkten an das Lager eine gewisse, zumeist nicht genau angebbare Beschaffungszeit. Damit erhalten im allgemeinen die Bestände eines Lagers im Planzeitraum einen zufälligen Charakter. Bei dieser Unsicherheit hat der Lagerhalter die Frage zu beantworten: Wann ist wieviel zu bestellen? Hierzu müssen noch folgende ökonomischen Konsequenzen beachtet werden. Durch genügend große Bestände kann jede Bedarfsforderung erfüllt werden. Andererseits binden hohe Lagerbestände beträchtliche Umlaufmittel. Deshalb besteht das Problem, bei möglichst niedrigen Beständen eine weitgehende Bedarfsbefriedigung zu gewährleisten. Einen Weg zur Lösung des Lagerhaltungsproblems weist die stochastische Lagerhaltungstheorie, deren Einsatz in der Praxis von großer volkswirtschaftlicher Bedeutung ist (vgl. etwa [22]).

Betrachten wir z. B. die Material- und Lagerwirtschaft eines Kombinats, so werden im Durchschnitt einige zehntausend Artikel in etwa einem Dutzend Magazinen gelagert. Wollen wir ein derartiges komplexes System rationalisieren, so ist dazu ein Modell erforderlich, das die wichtigsten Einflußgrößen berücksichtigt, dabei aber noch so einfach ist, daß es sich rechenstechnisch in vertretbarer Zeit realisieren läßt. Es werden deshalb folgende Annahmen getroffen:

- A. Die Magazine des Kombinats werden zu einem Lager zusammengefaßt (Informationen über den Verbrauch in den einzelnen Magazinen werden nicht genutzt).
- B. Jeder Artikel wird isoliert gehalten (Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Artikeln, wie Einsparung durch gemeinsame Bestellmöglichkeit oder Austauschbarkeit, werden vernachlässigt).

C. Der Umfang des Bedarfs wird für jeden Artikel durch Stückzahlen charakterisiert (durch geeignete Wahl der Mengeneinheiten ist C stets erfüllbar).

Unter diesen drei Voraussetzungen genügt es, sogenannte *diskrete Ein-Lager/Ein-Produkt-Modelle* einzusetzen. Im weiteren werden nur derartige Modelle aufgestellt und untersucht. Auf das Problem des Einbaus solcher Lagerhaltungsmodelle in ein EDV-Projekt „Material“ kann hier nicht eingegangen werden (vgl. hierzu aber [1] bzw. [14]).

7.2. Einflußfaktoren der Lagerhaltung

Wir beschäftigen uns nun mit der Konstruktion von Lagerhaltungsmodellen und beginnen damit, die wichtigsten Einflußgrößen zusammenzustellen und mathematisch zu beschreiben (s. Bild 7.1). Es handelt sich hierbei um den Bedarf und die Lagerreaktion (L), welche den Lagerabgang bestimmen, sowie um die Bestellregeln (B)

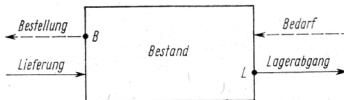


Bild 7.1

nebst Beschaffungszeit, welche die Lagerzufuhr steuern. Für die Modellierung ist der Prozeßcharakter der Lagerhaltung wesentlich. Durch die Vorgabe der genannten Einflußfaktoren ist das Verhalten des Lagers, gekennzeichnet etwa durch die jeweils vorhandenen Bestände, für die Zukunft (d. h. den unendlichen Planzeitraum $\{t: 0 \leq t < \infty\}$) festgelegt. Ändern wir speziell die Bestellregel, so ändern sich natürlich auch die Bestände. Um nun entscheiden zu können, welche Bestellregel besser ist, wird dem System eine Kostenstruktur aufgeprägt; damit werden gleichzeitig die vorhandenen Bestände aber auch die Bedarfsbefriedigung bewertet. Über die erhaltene Kostenfunktion gelingt es, eine optimale Bestellregel zu ermitteln.

7.2.1. Bedarf

Unter der *Nachfrage* verstehen wir die innerhalb eines Zeitintervalls vom Lager abgeforderte Menge eines Artikels. Vielfach beobachtet man in der Praxis folgende Eigenschaften der Nachfrage:

- In gleichlangen Zeitintervallen verhält sich die Nachfrage annähernd gleichartig;
- die Nachfrage wächst mit der Größe des Intervalls;
- zwischen der Nachfrage in getrennten Intervallen besteht kein funktionaler Zusammenhang.

Wie bereits unter 7.1. festgestellt wurde, ist die Nachfrage in einem Intervall des Planzeitraumes i. allg. zufällig, wir sprechen dann kurz vom *Bedarf*. Werden die

Annahme C sowie die Eigenschaften a), b) und c) berücksichtigt, kann man diesen Begriff mathematisch wie folgt präzisieren:

Definition 7.1: Ein (kumulativer)¹⁾ **Bedarfsprozeß** ist ein stochastischer Prozeß $\{\beta(t), t \geq 0\}$ mit unabhängigen, homogenen, nichtnegativ-ganzzahligen Zuwächsen und $\beta(0) = 0$.

Stochastische Prozesse mit unabhängigen, homogenen Zuwächsen wurden im zweiten Kapitel eingeführt. Deshalb kann hier festgestellt werden, daß ein Bedarfsprozeß bereits vollständig charakterisiert wird durch die sogenannte *Bedarfsfunktion*

$$b_t(k) = P(\beta(t) - \beta(0) = k) = P(\beta(t) = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.1)$$

welche die Verteilung des Bedarfs in einem Intervall der Länge t angibt.

Als Beispiele führen wir zwei Bedarfsprozesse an, die uns auch später zur Illustration dienen werden.

Definition 7.2: Ein (kumulativer) **Bedarfsprozeß** mit der Bedarfsfunktion:

$$a) \quad b_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.2)$$

heißt **Poissonscher Bedarfsprozeß** mit Intensität $\lambda > 0$,

$$b) \quad b_t(k) = \binom{-[t]}{k} (-q)^k (1 - q)^{[t]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

heißt **Bernoullischer Bedarfsprozeß** mit Parameter q , wobei $0 < q < 1$ ist, $[t]$ ist der ganze Anteil der Zahl t .

Beim Poissonschen Bedarfsprozeß mit Intensität λ ist der Bedarf während einer Zeiteinheit wegen (7.2) Poisson-verteilt mit dem Erwartungswert λ . Dieser Prozeß läßt sich auch bedienungstheoretisch als Forderungenstrom deuten. Zu gewissen

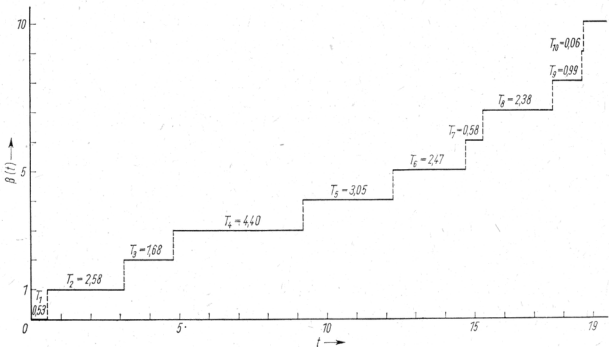


Bild 7.2. Realisierung eines Poissonschen Bedarfsprozesses mit $\lambda = 0,5$

¹⁾ „kumulativ“ bedeutet „aufsummiert, angehäuft“ (auf ein Zeitintervall bezogen).

Zeitpunkten, den sogenannten Bedarfsfällen, treffen Forderungen nach jeweils einer Mengeneinheit des Artikels im Lager ein, wobei die Pause T_k zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bedarfsfällen exponentiell verteilt ist.

Beim Bernoullischen Bedarfsprozeß mit Parameter q ist der Bedarf während einer Zeiteinheit nach (7.3) geometrisch verteilt mit dem Erwartungswert $\mu = \frac{q}{1-q}$.

Er kann als ein Forderungenstrom interpretiert werden, bei dem Forderungen im Abstand von jeweils einer Zeiteinheit eintreffen und der Umfang jeder Forderung geometrisch verteilt ist.

Wir wollen einen Bedarfsprozeß, bei dem die Pause zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bedarfsfällen gerade eine Zeiteinheit beträgt, einen *periodischen Bedarfsprozeß* nennen. Bild 7.3 zeigt eine Realisierung eines periodischen Bedarfsprozesses.

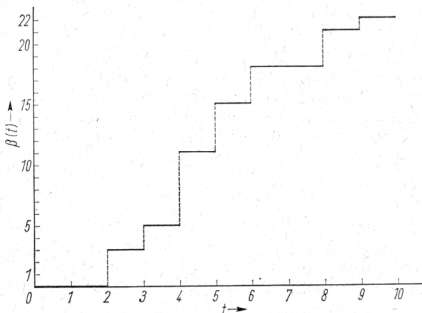


Bild 7.3. Realisierung eines Bernoullischen Bedarfsprozesses mit $q = 0,5$

Der Zufall steckt bei einem derartigen Prozeß nur noch in den Sprunghöhen. Deshalb ist es sinnvoll, eine einfachere Darstellung einzuführen. Die Differenz

$$\beta(n+0) - \beta(n-0) =: \beta_n \quad (7.4)$$

gibt die im Zeitpunkt $t = n$ vom Lager abgeforderte (zufällige) Stückzahl des betrachteten Artikels an. Die Folge von unabhängigen Zufallsgrößen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ mit der Eigenschaft¹⁾

$$P(\beta_n = k) = b_1(k) =: b(k) \quad (7.5)$$

ist dann äquivalent einem periodischen Bedarfsprozeß. Das Verteilungsgesetz des Prozesses ist eindeutig festgelegt durch Vorgabe einer Funktion $b(k)$, wobei k eine ganzzahlige Variable ist, mit den Eigenschaften

$$b(k) \geq 0 \quad \text{mit} \quad b(k) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0, \quad (7.6a)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b(k) = 1. \quad (7.6b)$$

¹⁾ (7.5) folgt wegen der Homogenität der Zuwächse unmittelbar aus (7.1) und (7.4).

Unter dem *mittleren Bedarf* eines periodischen Bedarfsprozesses verstehen wir $\mu = E(\beta_n) = \sum_{k=1}^{\infty} kb(k)$.

Der Gesamtbedarf der ersten n Bedarfsfälle ergibt sich hier zu $\beta(n) = \sum_{k=1}^n \beta_k$ mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $b_n(\cdot)$ und der Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} B_n(j) &= P(\beta(n) \leq j) = P(\beta(n-1) + \beta_n \leq j) \\ &= \sum_{k=0}^j B_{n-1}(j-k) b(k) \end{aligned} \quad (7.7)$$

nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

Beim Bernoullischen Bedarfsprozeß liefert (7.3) speziell die Verteilungsfunktion

$$B_n(j) = (1-q)^n \sum_{k=0}^j \binom{n+k-1}{k} q^k,$$

der negativen Binomialverteilung mit den Parametern q und n .

Die Bedarfsfunktion $b(k) = b_1(k)$ liefert die Verteilung des Bedarfs während einer Zeiteinheit. Dieser Sachverhalt führt uns darauf, jedem (kumulativen) Bedarfsprozeß $\{\beta(t), t \geq 0\}$ einen periodischen Bedarfsprozeß $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n, \dots$ gemäß der Vorschrift

$$\beta(n) - \beta(n-1) =: \beta'_n$$

zuzuordnen. Hierbei gibt β'_n den Bedarf in der n -ten Periode ($n-1 < t \leq n$) an. Offenbar ist dieser periodische Bedarfsprozeß im allgemeinen nicht mehr dem (kumulativen) Bedarfsprozeß äquivalent, sondern stellt eine die Bedarfsinformation verdichtende Vergrößerung dieses Prozesses dar. Dabei wird ein fiktiver Bedarfsfall im Endpunkt des Intervalls angenommen, an dem der ursprüngliche Bedarfsprozeß mit dem zugeordneten Prozeß übereinstimmt.

7.2.2. Lagerreaktion

Der Bedarf wurde als ein Informationsstrom eingeführt, der unabhängig von den Möglichkeiten des Lagers abläuft. Es wird nun vereinbart, wie der durch den Bedarfsprozeß ausgelöste Lagerabgang erfolgt. Tritt zu einem Zeitpunkt t ein Bedarfsfall auf, wobei der Umfang der abgeforderten Menge gleich u ist, so kann diese Nachfrage sofort befriedigt werden, wenn der vorhandene Lagerbestand $x \geq u$ ist. Gilt dagegen $x < u$, so können wir den unbefriedigten Bedarf $u - x$ für einen späteren Zeitpunkt vormerken oder aber nur den Anteil x der Nachfrage befriedigen und den Rest abweisen, d. h. auch später unberücksichtigt lassen. Diese beiden *Lagerreaktionen*, die mathematisch Transformationen des Bestands sind, werden formelmäßig wie folgt erfaßt:

Definition 7.3: Es sei x der Bestand unmittelbar vor einem Bedarfsfall vom Umfang u und r der Bestand nach der Lagerreaktion. Wir sprechen von einer **Vormerkreaktion**, falls

$$r = r(x, u) = x - u \quad (7.8)$$

gilt, bzw. von einer **Verlustreaktion** im Falle

$$r = r(x, u) = [x - u]^+ = \begin{cases} x - u & \text{für } x > u, \\ 0 & \text{für } x \leq u. \end{cases} \quad (7.9)$$

Bei der Verlustreaktion wird körperlich¹⁾ vorhandener Bestand wieder in körperlichen Bestand überführt. Ist bei der Vormerkreaktion (7.8) x körperlicher Bestand, so ist r im Falle $u > x$ negativ. Wir nennen $(-r)$ dann *Fehlbestand* und für beliebiges x und u die Größe r *Buchbestand*.

In der Betriebswirtschaft dominiert die Vormerkreaktion. Im Handel werden dagegen noch häufig Verlustreaktionen praktiziert.

7.2.3. Beschaffung

Wir fassen unter dem Begriff „Beschaffung“ die Kontrolle der Bestände, die Festlegung der erforderlichen Bestellmenge, die Auslösung einer Bestellung sowie die Anlieferung zusammen und modellieren diese Vorgänge wie folgt:

Die Bestandskontrolle und die Aufgabe einer Bestellung erfolge stets zum Zeitpunkt eines Bedarfsfalles. Der Umfang der Bestellmenge werde durch eine *Bestellregel* in Abhängigkeit vom derzeitigen Bestand ermittelt. Nach einer *Beschaffungszeit* l , die auch zufällig sein kann und den Bestellvorgang, eventuell die Produktionszeit des Artikels und den Transport zum Lager einschließt, ist die bestellte Menge am Lager verfügbar.

Die Wahl der Bedarfsfälle als Bestellzeitpunkte ist nicht so einschneidend, wie man auf den ersten Blick annehmen könnte. Die in der Betriebspraxis übliche maschinelle Bestandsrechnung liefert dem Disponenten u. U. nur alle 10 Tage oder sogar nur monatlich die erforderliche Information, so daß dann die Bestellzeitpunkte durch die Organisation und nicht durch den Bedarfsprozeß bestimmt werden. Dieser Fall wird jedoch im Modell dadurch erfaßt, daß man — wie in Abschnitt 7.2.1. ausgeführt — den ursprünglichen Bedarfsprozeß vergrößert und gemäß (7.7) zu einem periodischen Bedarfsprozeß übergeht. Dabei wird unter der Angabe $t = n$ ein Zeitpunkt verstanden, der n Zeiteinheiten vom Anfang des Planzeitraumes entfernt ist.

Es seien noch einige spezielle Bestellregeln angegeben. Die denkbar einfachste Bestellregel besteht darin, bei jedem Bedarfsfall dieselbe feste Menge Q zu bestellen. Eine weitere Bestellregel legt eine Bestellmenge fest, die den Bestand auf ein Niveau S ergänzt. Wir erweitern und präzisieren dies in der

Definition 7.4: Es seien x der Bestand unmittelbar nach einem Bedarfsfall und s, S ganze Zahlen mit $0 < s \leq S$. Eine Vorschrift, die dann die Bestellmenge $z(x)$ gemäß

$$z(x) = \begin{cases} S - x & \text{für } x < s, \\ 0 & \text{für } x \geq s \end{cases} \quad (7.10)$$

festlegt, heißt **Bestellregel vom (s, S) -Typ**.

Bei einer Bestellregel vom (s, S) -Typ wird also genau dann eine Bestellung ausgelöst, wenn der Bestand unter den sogenannten *Bestellpunkt* s gesunken ist. Liegt

¹⁾ „körperlich“ bezeichnet die am Lager materiell vorhandenen und verfügbaren Bestände.

der Anfangsbestand unterhalb von S , so wird im Spezialfall $s = S$ bei jedem Bedarfsfall bestellt. Stets wird auf das Niveau S aufgestockt.

Abschließend sei noch der Rhythmus des Zusammenspiels der Elemente der Beschaffung und der Bedarfsbefriedigung festgelegt. Tritt zum Zeitpunkt t eine Nachfrage auf, so wird folgende Reihenfolge eingehalten:

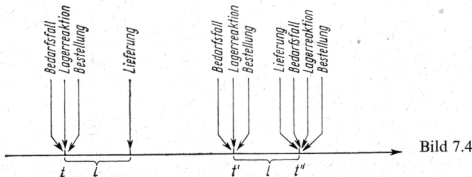


Bild 7.4

Bedarfsfall – Lagerreaktion – Bestellung. Daran schließt sich die Lieferung an. Bei beliebiger Beschaffungszeit ist es möglich, daß eine Lieferung gerade im Zeitpunkt eines Bedarfsfalls verfügbar wird. Dann erfolgt die Bestandsänderung vor der Lagerreaktion (vgl. Bild 7.4).

7.2.4. Kosten

Durch Vorgabe der bisher aufgeführten Einflußgrößen kann man den Lagerhaltungsprozeß vollständig beschreiben und Verhaltenscharakteristiken berechnen. Zur Beantwortung der Grundfrage: „Wann ist wieviel zu bestellen?“ ist aber eine Bewertung der Lagerhaltung erforderlich. Wir werden deshalb Lagerhaltungskosten in Rechnung stellen und diejenige Bestellregel als beste auszeichnen, welche die Gesamtkosten des Lagerhaltungsprozesses minimiert.

Hier werden drei Kostenfaktoren berücksichtigt: Beschaffungskosten, Lagerkosten und Fehlmengenkosten.

Beschaffungskosten entstehen bei jeder Bestellung, wobei insbesondere der Transport zum Lager berücksichtigt wird. Es werden folgende Symbole für die Kostenfaktoren verwendet:

K [M/Bestellung] – fixe Beschaffungskosten für eine Bestellung; hierbei gibt M die Geldeinheit an.

c [M/ME] – mengenproportionale Beschaffungskosten für eine Mengeneinheit (ME).

Lagerkosten erfassen den Aufwand, der bei der Unterhaltung von Lagern und bei der Finanzierung der gelagerten Artikel (Umlaufmittelbindung) entsteht.

h [M/ME · ZE] – Lagerkosten für das Lagern einer Mengeneinheit für eine Zeiteinheit (ZE).

Fehlmengenkosten werden erhoben, wenn bei einem Bedarfsfall das Lager nicht über die angeforderte Menge verfügt.

g [M/ME · ZE] – Kosten beim Fehlen einer (angeforderten) Mengeneinheit für eine Zeiteinheit.

Auf die Problematik des Erfassens der Kosteneinheiten kann hier nicht eingegangen werden.

7.3. Periodische Lagerhaltungssysteme

Durch Spezialisierung der unter 7.2. eingeführten Einflußfaktoren können jetzt Lagerhaltungsmodelle aufgestellt werden. Dabei setzen wir uns das Ziel, verschiedene Bestandsprozesse zu erklären und damit Verhaltenscharakteristiken wie mittlerer Bestand, Bestellzyklus und Sicherheitsgrad zu bestimmen. Außerdem wird noch eine Kostenminimierung zur Berechnung optimaler Parameter angeschlossen.

Zur Illustration verdeutlichen wir diese Aufgaben an zwei Beispielen, auf die wir später zurückkommen werden.

Beispiel 7.1: Ein Betrieb benötigt während einer Zeiteinheit im Durchschnitt μ Mengeneinheiten eines bestimmten Materials. Eine genauere statistische Analyse der vorhandenen Verbrauchszahlen ergab, daß der Bedarf in einer Zeiteinheit geometrisch verteilt ist mit dem Parameter q . Der Disponent des Betriebes nimmt höchstens S Mengeneinheiten des Materials auf Lager und stockt den Bestand erst dann auf das Niveau S auf, wenn dieser unter den Sicherheitsbestand s gefallen ist.

Die Effektivität einer derartigen Disposition kann an folgenden Kriterien eingeschätzt werden:

- Wie groß sind die mittleren Lagerbestände?
- Mit welcher Sicherheit wird eine auftretende Nachfrage sofort befriedigt?
- In welchen Abständen werden Bestellungen aufgegeben?

Beispiel 7.2: Der Bedarf an einem Produkt in einem Magazin sei während einer Zeiteinheit geometrisch verteilt mit Erwartungswert $\mu = 1$. Es wurden folgende Kosteneinheiten ermittelt: $K = 8$, $h = 1$, $g = 21$.

Wann ist wieviel zu bestellen, damit der finanzielle Aufwand der Lagerhaltung möglichst klein gehalten wird?

Unser Anliegen ist es, die Methodik an möglichst einfachen Systemen vorzuführen. Deshalb beschränken wir uns im folgenden auf Bestellregeln vom (s, S) -Typ und auf verschwindende, konstante bzw. exponentiell verteilte Beschaffungszeit. Dabei werden nur Verlust- bzw. Vormerkreaktionen verwendet, und daher wird von *Verlust-* bzw. *Vormerkssystemen* gesprochen. Weiterhin betrachten wir ausschließlich periodische oder Poissonsche Bedarfsprozesse und nennen das entsprechende System *periodisches* bzw. *Poissonsches Lagerhaltungssystem*.

7.3.1. Ein periodisches Verlustsystem ohne Lieferverzögerung

Es wird die Lagerhaltung eines Systems untersucht, die durch folgende spezielle Einflußgrößen beschrieben werden kann, welche wir zusammenfassen zu dem

Modell 1

- Der Bedarfsprozeß ist periodisch und wird durch eine Bedarfsfunktion $b(k)$ mit den Eigenschaften (7.6) charakterisiert.
- Es gilt die Verlustreaktion (7.9).
- Die Beschaffungszeit I ist vernachlässigbar.
- Die Bestellregel ist vom (s, S) -Typ.
- Der Anfangsbestand beträgt S Mengeneinheiten.

Die körperlichen Bestände im Modell 1 während des Planzeitraumes werden durch zwei stochastische Prozesse X_0, X_1, X_2, \dots sowie Y_0, Y_1, Y_2, \dots beschrieben. Dabei bezeichnet X_n den Bestand zur Zeit $t = n$ vor der Bestellung und Y_n den Bestand

zur Zeit $t = n + 0$ nach der unverzüglichen Lieferung. Der Zusammenhang ergibt sich aus den Bilanzgleichungen:

$$Y_n = X_n + z(X_n), \quad (7.11a)$$

$$X_n = [Y_{n-1} - \beta_n]^+, \quad (7.11b)$$

wobei z durch (7.10) erklärt ist und zu (7.11b) gerade (7.9) verwendet wurde. Aus (7.11b) erhalten wir mittels (7.11a) und (7.10)

$$X_n = \begin{cases} [X_{n-1} - \beta_n]^+ & \text{für } X_{n-1} \geq s \\ [S - \beta_n]^+ & \text{für } X_{n-1} < s. \end{cases} \quad (7.12)$$

Aus (7.11a) folgt mit (7.11b) und (7.10)

$$Y_n = \begin{cases} [Y_{n-1} - \beta_n]^+ & \text{für } Y_{n-1} \geq \beta_n + s, \\ S & \text{für } Y_{n-1} < \beta_n + s. \end{cases} \quad (7.13)$$

Wird noch die Voraussetzung e) berücksichtigt, so ergibt sich

$$X_0 = Y_0 = S. \quad (7.14)$$

Im Modell 1 ist der Bestandsprozeß X_0, X_1, X_2, \dots über (7.12) und (7.14) und der Bestandsprozeß Y_0, Y_1, Y_2, \dots über (7.13) und (7.14) eindeutig festgelegt. Verwenden wir die in Bild 7.3 angegebene Bedarfsrealisierung, ergibt sich für die beiden Bestandsprozesse der in Bild 7.5 angegebene Verlauf. Hieraus ist ersichtlich, daß im Zustandsbereich $[s, S)$ beide Prozesse übereinstimmen.

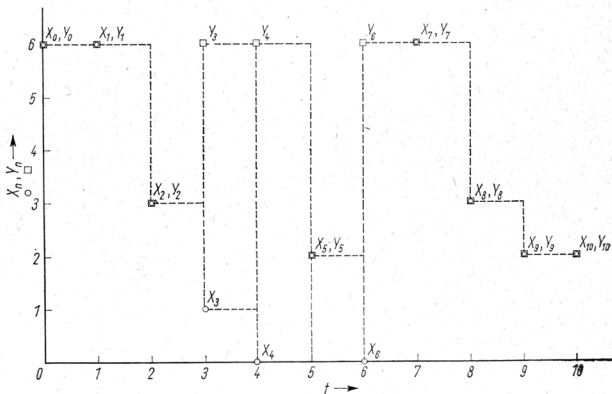


Bild 7.5. Realisierung zweier Bestandsprozesse bei Bernoullischem Bedarfsprozeß mit $q = 0,5$ und einer Bestellregel vom (s, S) -Typ mit $s = 2$ und $S = 6$

Im Hinblick auf eine effektive Lagerhaltung können wir uns nicht mit dem bloßen Nachvollziehen der Prozesse begnügen, sondern müssen nach den Verteilungsgesetzen der beiden Bestandsprozesse fragen.

Satz 7.1: Die durch (7.12), (7.13) und (7.14) definierten Bestandsprozesse sind homogene Markowsche Ketten mit den Zustandsräumen

$$\mathcal{X}_X = \{S, S-1, \dots, 1, 0\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{X}_Y = \{S, S-1, \dots, s+1, s\}$$

und den Übergangsmatrizen

$$\mathbf{P}_X = \begin{bmatrix} b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & \dots & b(S-1) & \bar{B}(S) \\ 0 & b(0) & \dots & b(D-1) & b(D) & \dots & b(S-2) & \bar{B}(S-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b(0) & b(1) & \dots & b(s-1) & \bar{B}(s) \\ b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & \dots & b(S-1) & \bar{B}(S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & \dots & b(S-1) & \bar{B}(S) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

bzw.

$$\mathbf{P}_Y = \begin{bmatrix} \bar{B}(D+1) + b(0) & b(1) & \dots & b(D) \\ \bar{B}(D) & b(0) & \dots & b(D-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{B}(1) & 0 & \dots & b(0) \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

wobei $D := S - s$ und $\bar{B}(i) := 1 - B(i-1) = \sum_{k=i}^{\infty} b(k)$ gesetzt wurde und $b(k)$ entsprechend (7.5) erklärt ist.

Beweis: Aus den Rekursionen (7.12) und (7.13) erhalten wir direkt die Markow-Eigenschaft der Ketten. Hinsichtlich der Übergangsmatrizen beschränken wir uns hier auf die Ermittlung von p_{ij} für den X -Prozeß und Zustände $i \geq s$. Es gilt wegen (7.12) für $j \neq 0$

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P([X_{n-1} - \beta_n]^+ = j | X_{n-1} = i) \\ &= P(\beta_n = i - j | X_{n-1} = i) = P(\beta_n = i - j) = b(i - j). \end{aligned}$$

Für $j = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{i0} &= P([X_{n-1} - \beta_n]^+ = 0 | X_{n-1} = i) \\ &= P(X_{n-1} - \beta_n \leq 0 | X_{n-1} = i) \\ &= P(\beta_n \geq i) = \sum_{k=i}^{\infty} b(k) = \bar{B}(i). \end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der ersten $D+1$ Zeilen der Matrix \mathbf{P}_X bestätigt. Zu beachten ist nur, daß die Elemente entsprechend der Anordnung im Zustandsraum gruppiert sind. So steht in der linken oberen Ecke von \mathbf{P}_X das Element $p_{SS} = b(S-S) = b(0)$ und in der rechten oberen Ecke $p_{s0} = \bar{B}(S)$.

Fassen wir die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $p_j(n) = P(X_n = j)$ zu einem Vektor $\mathbf{p}_n(X) := (p_s(n), p_{s-1}(n), \dots, p_0(n))$ zusammen, erhalten wir (s. Kap. 3) das Bildungsgesetz

$$\mathbf{p}_n(X) = \mathbf{p}_{n-1}(X) \mathbf{P}_X = \mathbf{p}_0(X) \mathbf{P}_X^n, \quad (7.17)$$

wobei wegen (7.14) für die Anfangsverteilung gilt

$$p_s(0) = 1 \quad \text{und} \quad p_k(0) = 0 \quad \text{für} \quad k \neq s. \quad (7.18)$$

Für unsere Untersuchungen wird, nicht zuletzt um den Apparat zu vereinfachen, statt der Verteilungen $\mathbf{p}_n(X)$ die ergodische Verteilung $\mathbf{p}(X)$ benutzt. Wir sagen dann auch, das System befindet sich im *stationären Regime*. Das bedeutet, der Bestand ist unabhängig von der Zeit, er wird durch eine Zufallsgröße X charakterisiert, deren Verteilung gerade die stationäre Grenzverteilung $\mathbf{p}(X)$ ist.

Satz 7.2: *Gibt es eine ganze Zahl $x \geq S$ mit*

$$b(x) > 0, \quad (7.19)$$

dann sind die beiden durch die Anfangsverteilung (7.18) und die Übergangsmatrizen (7.15), (7.16) definierten Markowschen Ketten ergodisch. Die stationären Bestandsverteilungen ergeben sich zu

$$f_j(X) = \begin{cases} \frac{1}{1 + M(D)} \sum_{k=S}^{\infty} m(k/D) & \text{für } j = 0, \\ \frac{m(S-j/D)}{1 + M(D)} & \text{für } 0 < j < s, \\ \frac{m(S-j)}{1 + M(D)} & \text{für } s \leq j \leq S, \end{cases} \quad (7.20)$$

bzw.

$$f_j(Y) = \begin{cases} \frac{m(S-j)}{1 + M(D)} & \text{für } s \leq j < S, \\ \frac{1 + m(0)}{1 + M(D)} & \text{für } j = S. \end{cases} \quad (7.21)$$

Die in den Formeln (7.20), (7.21) auftretenden Hilfsfunktionen sind wie folgt rekursiv aufgebaut:

$$m(k) = b(k) + \sum_{j=0}^k b(k-j) m(j); \quad (7.22)$$

$$m(k/D) := b(k) + \sum_{j=0}^D b(k-j) m(j), \quad k > D; \quad (7.23)$$

$$M(k) := \sum_{j=0}^k m(j). \quad (7.24)$$

Der Grenzwertsatz 7.2 gilt also schon, wenn zu einem Bedarfsfall eine Menge abgefordert werden kann, die größer oder gleich dem Niveau S ist. Ist die Nachfrage stets kleiner als S , vereinfachen sich die Prozesse, die Bestände sind dann gleichmäßig beschränkt. Dem Leser sei empfohlen, diesen Fall selbstständig zu erarbeiten.

Beweis von Satz 7.2: Nach Voraussetzung (7.19) und (7.6) ist $\bar{B}(S) = \sum_{k=S}^{\infty} b(k) > 0$.

Weiterhin gilt $\bar{B}(j) \geq \bar{B}(S)$ für alle $j \leq S$. Damit enthält die letzte Spalte der Matrix (7.15) bzw. die erste Spalte der Matrix (7.16) nur positive Elemente. Nach Satz 3.2 sind deshalb die beiden Markowschen Ketten ergodisch, und es existieren stationäre Grenzverteilungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n(X) = \mathbf{f}(X), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n(Y) = \mathbf{f}(Y). \quad (7.25)$$

Wegen (7.17) kann man diese stationären Verteilungen bestimmen, indem jeweils ein lineares Gleichungssystem von der Form

$$\mathbf{f}(X) = \mathbf{f}(X) \mathbf{P}_X, \quad \mathbf{f}(Y) = \mathbf{f}(Y) \mathbf{P}_Y \quad (7.26)$$

gelöst und dabei die Verteilungseigenschaft (vgl. (7.6)) beachtet wird sowie die Hilfsfunktionen gemäß (7.22), (7.23), (7.24) verwendet werden.

Beispiel 7.3: Modell 1 mit Bernoullischem Bedarfsprozeß. Entsprechend Def. 7.2 gilt für die Bedarfsfunktion hier

$$b(k) = q^k(1 - q) = P(\beta_n = k), \quad (7.27)$$

wobei $0 < q < 1$ ist. Aus (7.22) folgt damit

$$m(k) = (1 - q) \left[q^k + \sum_{j=0}^k q^{k-j} m(j) \right]. \quad (7.28)$$

Für $k = 0$ ergibt sich aus (7.28) sofort $m(0) = (1 - q)/q$. Induktiv kann allgemein gezeigt werden, daß

$$m(k) = (1 - q)/q = 1/\mu \quad (7.29)$$

gilt. Mit (7.29) und (7.27) erhalten wir für die Hilfsfunktionen (7.23) und (7.24):

$$m(k/D) = (1 - q) q^{k-D-1} \quad (7.30)$$

und

$$M(D) = (1 + D)(1 - q)/q = (1 + D)/\mu. \quad (7.31)$$

Nach Satz 7.2 ergibt sich die stationäre Verteilung des Bestandes unmittelbar vor einer Bestellung zu

$$f_j(X) = \begin{cases} \frac{\mu q^{s-1}}{\mu + 1 + D} & \text{für } j = 0, \\ \frac{q^{s-j}}{\mu + 1 + D} & \text{für } 0 < j < s, \\ \frac{1}{\mu + 1 + D} & \text{für } s \leq j \leq S, \end{cases} \quad (7.32)$$

entsprechend folgt für die stationäre Verteilung des Bestandes unmittelbar nach einer Lieferung:

$$f_j(Y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu + 1 + D} & \text{für } s \leq j < S, \\ \frac{1 + \mu}{\mu + 1 + D} & \text{für } j = S. \end{cases} \quad (7.33)$$

7.3.2. Ein periodisches Vormerkssystem mit konstanter Beschaffungszeit

Das Modell des vorigen Abschnitts wird modifiziert, indem die Annahmen b) und c) über die Lagerreaktion und die Beschaffungszeit geändert werden.

Modell 2

- a) Der Bedarfsprozeß ist periodisch mit der Bedarfsfunktion $b(k)$ und dem mittleren Bedarf μ .
- b) Es gilt die Vormerkreaktion (7.8).
- c) Die Beschaffungszeit I ist eine feste natürliche Zahl.
- d) Die Bestellregel ist vom (s, S) -Typ.
- e) Der Anfangsbestand beträgt S Mengeneinheiten.

Analog zu den Bilanzgleichungen (7.11) werden die beiden Bestandsprozesse¹⁾

$${}^dY_n = {}^dX_n + z({}^dX_n), \quad (7.34a)$$

$${}^dX_n = {}^dY_{n-1} - \beta_n \quad (7.34b)$$

eingeführt; dabei wurde (7.34b) gemäß (7.8) gebildet. Entsprechend d) ersetzen wir $z(\cdot)$ nach (7.10) und erhalten

$${}^dX_n = \begin{cases} {}^dX_{n-1} - \beta_n & \text{für } {}^dX_{n-1} \geq s, \\ S - \beta_n & \text{für } {}^dX_{n-1} < s, \end{cases} \quad (7.35)$$

sowie

$${}^dY_n = \begin{cases} {}^dY_{n-1} - \beta_n & \text{für } {}^dY_{n-1} \geq s + \beta_n, \\ S & \text{für } {}^dY_{n-1} < s + \beta_n. \end{cases} \quad (7.36)$$

Für den Spezialfall verschwindender Beschaffungszeit gibt uns dY_n den zur Zeit $t = n$ unmittelbar nach der Lieferung körperlich vorhandenen Lagerbestand an. dX_n erfaßt den Buchbestand zur Zeit $t = n$ vor der Bestellung. Ist dagegen die Beschaffungszeit größer als null, müssen wir den Ansatz (7.34) und die damit erklärten Prozesse andersartig deuten. Wir nennen dY_n den *disponiblen Bestand nach der Bestellung* zur Zeit $t = n$. Dieser besteht aus dem körperlich vorhandenen Bestand sowie den bestellten aber noch nicht verfügbaren Mengen abzüglich der vorgemerkten Mengen. dX_n heißt *disponibler Bestand vor der Bestellung* zur Zeit $t = n$. Er unterscheidet sich von dY_n nur um die zur Zeit $t = n$ aufgegebene Bestellmenge.

Es sei betont, daß gemäß (4.37a) die Bestellregel sich auf den disponiblen Bestand bezieht, d. h., falls bestellt wird, dann wird der disponible Bestand auf das Niveau S

¹⁾ Der hochgestellte Index „d“ weist auf „disponibel“ hin.

gebracht. Werden (7.13) und (7.36) verglichen, so ergibt sich die Gleichheit des Bestands nach der Bestellung bei Verlustreaktion und Vormerkreaktion. Allerdings handelt es sich einmal um körperlichen und einmal um disponiblen Bestand. Als neuer Prozeß braucht deshalb nur der disponible Bestand vor der Bestellung untersucht zu werden.

Satz 7.3: Der durch (7.35) und ${}^dX_0 = S$ definierte disponible Bestandsprozeß bildet eine homogene Markowsche Kette mit dem Zustandsraum ${}^d\mathcal{X} = \{S, S-1, \dots\}$ und der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & b(D+2) & \dots \\ 0 & b(0) & \dots & b(D-1) & b(D) & b(D+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & b(0) & b(1) & b(2) & \dots \\ b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & b(D+2) & \dots \\ b(0) & b(1) & \dots & b(D) & b(D+1) & b(D+2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Beweis: Für $s \leq i \leq S$ gilt wegen (7.35)

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P({}^dX_n = j | {}^dX_{n-1} = i) = P({}^dX_{n-1} - \beta_n = j | {}^dX_{n-1} = i) \\ &= P(\beta_n = i - j) = b(i - j). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Für $i < s$ ergibt sich $p_{ij} = P(S - \beta_n = j) = b(S - j)$.

Satz 7.4: Eine homogene Markowsche Kette mit der Übergangsmatrix \mathbf{P} gemäß (7.37) ist ergodisch. Die stationäre Verteilung besitzt die Komponenten

$$f_j({}^dX) = \begin{cases} \frac{m(S-j)}{1+M(D)} & \text{für } s \leq j \leq S, \\ \frac{m(S-j/D)}{1+M(D)} & \text{für } j < s. \end{cases} \quad (7.39)$$

Auf den Beweis wollen wir hier verzichten und nur auf Satz 7.2 Formel (7.20) verweisen.

Die stationäre Bestandsverteilung im Falle von Modell 2 und einem Bernoullischen Bedarfsprozeß ergibt sich aus (7.29), (7.30), (7.31) und (7.39) zu

$$f_j({}^dX) = \begin{cases} \frac{1}{\mu + 1 + D} & \text{für } s \leq j \leq S, \\ \frac{q^{s-j}}{\mu + 1 + D} & \text{für } j < s. \end{cases} \quad (7.40)$$

Wie wir sehen, ist der disponible Bestand unabhängig von der Beschaffungszeit. Um aber ein Lagerhaltungssystem beurteilen zu können, ist die Kenntnis der körper-

lichen Bestände bzw. der Buchbestände erforderlich. Orientieren wir uns zunächst an einem Beispiel (vgl. Bild 7.6) über die Wirkung einer Beschaffungszeit $l > 0$.

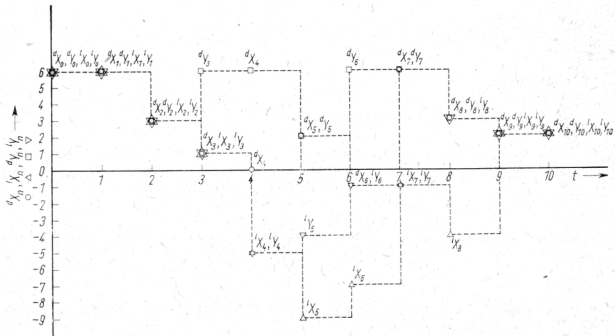


Bild 7.6. Realisierung des disponiblen Bestandes und des Buchbestandes bei einem Bernoulli-Bedarfsprozess mit $q = 0,5$ und einer Bestellregel vom (s, S) -Typ mit $s = 2$ und $S = 6$ sowie Beschaffungszeit $l = 2$

Dem Bild sowie der Modellannahme e) können folgende Zusammenhänge zwischen den Beständen entnommen werden:

$${}^lX_n = {}^lY_n := S - \sum_{k=1}^n \beta_k \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, l, \quad (7.41)$$

sowie

$${}^lY_n := {}^dY_{n-l} - \sum_{k=1}^l \beta_{n-l+k} \quad \text{für } n > l, \quad (7.42a)$$

$${}^lX_n := {}^lY_{n-1} - \beta_n \quad \text{für } n > l. \quad (7.42b)$$

Die Größe lY_n gibt den Buchbestand zur Zeit $t = n$ sofort nach Eintreffen der zur Zeit $t = n - l$ bestellten Menge an. lX_n erfasst den Buchbestand zur Zeit $t = n$ unmittelbar vor dem Eintreffen der Lieferung.

Die Verteilungsgesetze der Buchbestände ergeben sich aus den Verteilungen des Bedarfsprozesses und des disponiblen Bestandsprozesses (der zum Bestandsprozeß von Modell 1 äquivalent ist). Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen auf den rechten Seiten von (7.41) und (7.42) erhalten wir die Verteilung der Komponenten lX_n , lY_n durch Faltung.

7.3.3. Verhaltenscharakteristiken

Das Verhalten eines Lagerhaltungssystems haben wir bisher durch verschiedene Bestandsprozesse erfasst. Für den Disponenten in der Praxis sind diese Prozesse selbst zu aufwendig und deshalb ungeeignet. Er benötigt verdichtete Daten.

a) Eine geeignete Kenngröße ist der *mittlere Bestand*, den wir als Erwartungswert des stationären Bestands definieren. Aus Satz 7.2 folgt direkt

Satz 7.5: Bei Modell 1 ergibt sich der mittlere Bestand vor der Bestellung zu

$$E(X) = \frac{1}{1 + M(D)} \left[\sum_{j=1}^{s-1} jm(S - j/D) + \sum_{j=s}^S jm(S - j) \right] \quad (7.43)$$

und der mittlere Bestand unmittelbar nach der Lieferung zu

$$E(Y) = S - \frac{1}{1 + M(D)} \sum_{k=1}^D km(k). \quad (7.44)$$

Im Falle des Bernoullischen Bedarfsprozesses erhalten wir speziell aus Satz 7.5 unter Berücksichtigung von (7.29), (7.30), (7.31):

$$E(X) = \frac{1}{\mu + 1 + D} \left[\mu s - \frac{q(1 - q^s)}{(1 - q)^2} + \left(s + \frac{D}{2} \right) (D + 1) \right] \quad (7.45)$$

und

$$E(Y) = S - \frac{D(D + 1)}{2(\mu + D + 1)}. \quad (7.46)$$

Satz 7.6: Bei Modell 2 ergibt sich der mittlere disponible Bestand vor der Bestellung zu

$$E^{(d)}X = \frac{1}{1 + M(D)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (s - k) m(D + k/D) + \sum_{k=0}^D (S - k) m(k) \right]. \quad (7.47)$$

Der mittlere disponible Bestand nach der Bestellung wird durch (7.44) gegeben, d. h. $E^{(d)}Y = E(Y)$.

Für den Bernoullischen Bedarfsprozeß ergibt sich im Modell 2

$$E^{(d)}X = \frac{1}{\mu + 1 + D} \left[\mu + \left(s + \frac{D}{2} \right) (D + 1) \right]. \quad (7.48)$$

Satz 7.7: Die mittleren Buchbestände haben bei Modell 2 die Form

$$E^{(l)}X = E(Y) - (l + 1) \mu \quad (7.49)$$

$$E^{(l)}Y = E(Y) - l\mu, \quad (7.50)$$

wobei $E(Y)$ durch (7.44) gegeben ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (7.42) und Satz 7.6. Betrachten wir wieder speziell einen Bernoullischen Bedarfsprozeß, so ist der mittlere Buchbestand gegeben durch

$$E^{(l)}Y = S - l\mu - \frac{D(D + 1)}{2(\mu + D + 1)}, \quad (7.51)$$

d. h., zu einem beliebigen Zeitpunkt $t = n$ bei stationärem Regime ist im Mittel der Buchbestand (7.51) vorhanden, wobei eine eventuell zur Zeit $t = n$ eintreffende Lieferung bereits mit berücksichtigt wird.

b) Für die Beurteilung der Lieferbereitschaft eines Lagers können wir den sogenannten *Sicherheitsgrad* verwenden, den wir als die Wahrscheinlichkeit dafür definieren, daß zu einem beliebigen Bedarfsfall im stationären Regime die Nachfrage vollständig befriedigt wird.

Satz 7.8: Im Modell 1 gilt für den Sicherheitsgrad

$$P_1(s, S) := P(Y - \beta \geq 0) \quad (7.52)$$

$$P_1(s, S) = \frac{1}{1 + M(D)} \left[B(S) + \sum_{k=0}^D B(S - k) m(k) \right]. \quad (7.53)$$

Beweis: Wie aus Bild 7.4 ersichtlich, erfolgt nach einem Bedarfsfall die Lagerreaktion, die im vorliegenden Verlustfall unbefriedigten Bedarf bei der Bildung des Restbestandes X nicht ausweist. Vor einem Bedarfsfall ist der (stationäre) Bestand Y vorhanden. Deshalb ist der Sicherheitsgrad durch (7.52) gegeben, wobei $\beta = \beta_1$ den Umfang des Bedarfs angibt. Mittels der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich unter Verwendung von (7.21)

$$\begin{aligned} P_1(s, S) &= \sum_{j=s}^S P(Y - \beta_1 \geq 0 | Y = j) f_j(Y) \\ &= \sum_{j=s}^{S-1} P(\beta_1 \leq j) \frac{m(S - j)}{1 + M(D)} + P(\beta_1 \leq S) \frac{1 + m(0)}{1 + M(D)}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Wird nun die Beziehung

$$P(\beta_1 \leq j) = \sum_{k=0}^j b(k) = B(j),$$

berücksichtigt, so folgt (7.53), was zu beweisen war.

Für den Bernoullischen Bedarfsprozeß liefert Satz 7.8 zusammen mit $\bar{B}(j) = q^j$ die Beziehung

$$P_1(s, S) = 1 - \frac{\mu q^s}{\mu + 1 + D}. \quad (7.55)$$

Aus (7.55) kann man ablesen, daß sich hier der Sicherheitsgrad mit wachsendem s bzw. wachsendem $D = S - s$ erhöht.

Satz 7.9: Im Modell 2 gilt für den Sicherheitsgrad

$$\begin{aligned} P_2(s, S) &= P(X \geq 0) \\ &= \frac{1}{1 + M(D)} \left[B_{I+1}(S) + \sum_{k=0}^D B_{I+1}(S - k) m(k) \right]. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Die Funktion $B_{I+1}(j)$ kann rekursiv nach (7.7) berechnet werden, wobei $B_1(j) = B(j)$ ist.

Im Falle des Bernoullischen Bedarfsprozesses erhalten wir speziell

$$P_2(s, S) = \frac{(1 - q)^{I+1}}{\mu + 1 + D} \left[\mu \sum_{k=0}^S \binom{I+k}{k} q^k + \sum_{j=s}^S \sum_{k=0}^j \binom{I+k}{k} q^k \right]. \quad (7.57)$$

c) Auskunft über die Häufigkeit einer Bestellauslösung erhalten wir über den *Bestellzyklus* T , der Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bestellungen. In den Modellen 1 und 2 ist T eine Zufallsgröße.

Diesen Sachverhalt wollen wir noch etwas genauer erklären. Die Zeitpunkte, an denen bestellt wird, zerlegen den Planzeitraum in Intervalle der Länge T_1, T_2, T_3, \dots . Die Längen T_k sind Zufallsgrößen, die aus dem Bedarfsprozeß mittels der übrigen Einflußgrößen des Systems bestimmt werden. Bei dem von uns betrachteten periodischen Lagerhaltungssystem sind die Zufallsgrößen T_k identisch verteilt und unabhängig. In diesem Sinne wählen wir T als Repräsentanten dieser Zufallsgrößen und sprechen vom Bestellzyklus (der Länge) T .

Zunächst wird eine Beziehung für den Bestellzyklus T hergeleitet, die es gestattet, dessen Verteilungsgesetz zu gewinnen. In den Modellen 1 und 2 ist zum Zeitpunkt $t = n$ unmittelbar nach der hier erfolgten Bestellung der (körperliche bzw. disponible) Bestand gleich S . Wann wird nun die nächste Bestellung ausgelöst? Offenbar genau dann, wenn erstmalig der Bestellpunkt s unterschritten wird. Wegen $s > 0$ (vgl. Def. 7.4) gilt also für beide Modelle im Falle des Bestellzyklus T :

$$S - (\beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \dots + \beta_{n+T-1}) \geq s, \quad (7.58a)$$

$$S - (\beta_{n+1} + \dots + \beta_{n+T-1} + \beta_{n+T}) < s. \quad (7.58b)$$

Im Modell 2 sind die linken Seiten von (7.58) gerade gleich $^dX_{n+T-1}$ bzw. $^dX_{n+T}$, im Modell 1 ist die linke Seite von (7.58a) gleich X_{n+T-1} . Nach der Bestellung zur Zeit $t = n$ wird also erstmalig zur Zeit $t = n + T$ bestellt. Aus (7.58) erhalten wir

Satz 7.10: Für die Modelle 1 und 2 besitzt der Bestellzyklus folgendes Verteilungsgesetz:

$$P(T = k) = B_{k-1}(D) - B_k(D). \quad (7.59)$$

Der mittlere Bestellzyklus ergibt sich zu

$$E(T) = 1 + M(D). \quad (7.60)$$

Beweis: Wir setzen $\beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \dots + \beta_{n+r} = \gamma_r$ und können damit (7.58) vereinfachen zu

$$\gamma_{T-1} \leq D \quad \text{und} \quad \gamma_T > D. \quad (7.61)$$

Wegen (7.61) folgt aus $T \leq k$ sofort $\gamma_k > D$ und umgekehrt. Deshalb gilt unter Beachtung von (7.7)

$$P(T \leq k) = P(\gamma_k > D) = 1 - B_k(D). \quad (7.62)$$

Auf Grund der Beziehung

$$P(T = k) = P(T \leq k) - P(T \leq k - 1)$$

folgt mit (7.62) die Behauptung (7.59). Der Erwartungswert des Bestellzyklus kann nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k) + \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} P(T = k + 2) + \dots \\ &= P(T > 0) + P(T > 1) + P(T > 2) + \dots \\ &= 1 + B_1(D) + B_2(D) + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(D). \end{aligned} \quad (7.63)$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(u) =: R(u)$ ist in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergent, so daß

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^u R(u-i) b(i) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^u B_n(u-i) b(i) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{n+1}(u) = R(u) - B_1(u) \end{aligned}$$

gebildet werden kann, wobei (7.7) benutzt wurde. Aus dieser Gleichung folgt

$$R(u) = B_1(u) + \sum_{i=0}^u R(u-i) b(i). \quad (7.64)$$

Betrachten wir andererseits die Gleichung (7.22) für $k = 0, 1, \dots, u$ und summieren, so ergibt sich wegen (7.24)

$$\begin{aligned} M(u) &= \sum_{k=0}^u b(k) + \sum_{k=0}^u \left(\sum_{j=0}^k b(k-j) m(j) \right) \\ &= B_1(u) + \sum_{i=0}^u b(u-i) \sum_{j=0}^i m(j) \\ &= B_1(u) + \sum_{i=0}^u M(u-i) b(i). \end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht genau (7.64). Da (7.64) eindeutig lösbar ist, folgt damit

$$M(u) = R(u) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(u). \quad (7.65)$$

Die gesuchte Beziehung (7.60) ergibt sich nun unmittelbar aus (7.63) und (7.65).

Die mittlere Dauer des Bestellzyklus bei einem Bernoullischen Bedarfsprozeß erhält man aus (7.60) und (7.31) zu

$$E(T) = 1 + \frac{1}{\mu} (D + 1). \quad (7.66)$$

Wie auch allgemein gezeigt werden kann, wächst der mittlere Bestellzyklus in den Modellen 1 und 2 mit D monoton.

7.3.4. Suboptimale Bestellregeln

Unser Lager wird mittels Bestellregeln vom (s, S) -Typ gesteuert. Deshalb liegt es nahe, nach der besten Bestellregel dieses Typs zu fragen. Zunächst muß präzisiert werden, was als „beste“ Bestellregel verstanden werden soll. Wir nennen eine Bestellregel vom (s, S) -Typ *suboptimal*, wenn die durch sie verursachten Gesamtkosten nicht größer sind als die bez. irgendeiner anderen Bestellregel dieser Klasse. Wir sprechen von einer *optimalen* Bestellregel, wenn sie die Gesamtkosten hinsichtlich beliebiger Bestellregeln minimiert.

a) Es werden nun durchschnittliche Gesamtkosten für ein periodisches Lagerhaltungssystem aufgestellt. In jeder Periode fallen zufällige Kosten an, die wir über die Funktion $k(\cdot)$ erfassen. Das Argument dieser Funktion ist eine Zufallsgröße U , die den jeweiligen Lagerbestand charakterisiert. Die Kosten während der ersten

N Perioden ergeben sich dann zu $\sum_{n=1}^N k(U_n)$. Da bei unbeschränktem Planzeitraum diese Kosten über alle Grenzen wachsen, ist es ratsam, zu Durchschnittskosten überzugehen, die sich als Limes der arithmetischen Mittel der Kosten in den einzelnen Perioden ergeben. Die Praktikabilität dieser Durchschnittskosten k wird durch folgendes Theorem von J. L. Doob gewährleistet:

Bildet die Folge U_1, U_2, \dots eine ergodische Markowsche Kette mit der stationären Verteilung $f(U)$, dann gilt

$$k := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N k(U_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_U} k(j) f_j(U), \quad (7.67)$$

falls die rechte Seite von (7.67) endlich ist.¹⁾

Auf der Grundlage von Formel (7.67) werden für die Modelle 1 und 2 Durchschnittskosten hergeleitet.

b) Zunächst werden für das Modell 1 die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten $L(y)$ in der n -ten Periode ($n-1, n$] unter der Bedingung $Y_{n-1} = y$ angegeben (Bild 7.7). Dabei wird eine sogenannte lineare Restbestandsbewertung benutzt.

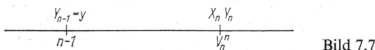


Bild 7.7

Unter $\{Y_{n-1} = y\}$ ergibt sich der Restbestand in der n -ten Periode zu

$$y - \beta_n = \begin{cases} X_n, & \text{falls } \beta_n \leq y, \\ -V_n, & \text{falls } \beta_n > y. \end{cases}$$

Ist der Restbestand positiv, so sind Lagerkosten zu zahlen, ist er negativ, sind Fehlmengenkosten zu entrichten. Unter Berücksichtigung der in 7.2.4. eingeführten Kostenfaktoren ergibt sich

$$\begin{aligned} L(y) &= E(hX_n + gV_n) \\ &= h \sum_{j=0}^y (y-j) b(j) + g \sum_{j=y+1}^{\infty} (j-y) b(j). \end{aligned} \quad (7.68)$$

Natürlich könnte auch anders bewertet werden. Da wir den Periodenbedarf erst am Ende der Periode wirksam werden lassen, wären auch die Lagerkosten hy denkbar. Doch soll für das weitere stets (7.68) verwendet werden.

c) Nun werden Durchschnittskosten für Modell 1 bestimmt. Für den von uns gewählten unendlichen Planzeitraum brauchen mengenproportionale Beschaffungskosten nicht berücksichtigt zu werden, d. h., man kann $c = 0$ setzen. Während einer Periode fallen die Kosten

$$k(y) = \begin{cases} K + L(S), & \text{falls } y = S, \\ L(y), & \text{falls } s \leq y < S, \end{cases} \quad (7.69)$$

¹⁾ Durch (7.67) wird der Zusammenhang zwischen den in der Ökonomie durchaus üblichen Durchschnittskosten pro Periode und den mittels der stationären Verteilung des Bestandsprozesses gebildeten, relativ einfach auswertbaren „stationären Kosten“ aufgedeckt.

an, wenn der Bestand nach der Bestellung gleich y ist. Nach (7.67) ergibt sich damit für die Durchschnittskosten

$$\begin{aligned} k = k(s, S) &= (K + L(S))f_s(Y) + \sum_{j=s}^{S-1} L(j)f_j(Y) \\ &= \frac{1}{1 + M(D)} \left[(K + L(S))(1 + m(0)) + \sum_{j=s}^{S-1} L(j)m(S-j) \right] \\ &= \frac{1}{1 + M(D)} \left[K + L(S) + \sum_{j=0}^D L(S-j)m(j) \right] + \frac{Km(0)}{1 + M(D)}, \end{aligned}$$

wobei Formel (7.21) von Satz 7.2 verwendet wurde. Der Ansatz (7.69) setzt implizit voraus, daß in jeder Periode Bedarf auftritt; wir können uns aber von der Bedingung $b(0) = 0$ lösen, indem wir die Bestände vor der Entscheidung heranziehen.

Satz 7.11: Für Modell 1 ergeben sich die beeinflussbaren Durchschnittskosten zu

$$\mathcal{L}(S, D) = \frac{1}{1 + M(D)} \left[K + L(S) + \sum_{j=0}^D L(S-j)m(j) \right], \quad (7.70)$$

wobei $L(y)$ durch (7.68) erklärt ist.

d) Für den Spezialfall eines Bernoullischen Bedarfsprozesses und linearer Restbestandsbewertung (7.68) werden die Kosten $\mathcal{L}(S, D)$ expliziert. Wird (7.27) in (7.68) eingesetzt, so ergibt sich

$$L(y) = (y - \mu)h + (h + g)\mu q^y. \quad (7.71)$$

Damit folgt aus (7.70) unter Beachtung von (7.29) und (7.31)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s + D, D) &= \frac{1}{\mu + 1 + D} [\mu K + h \langle 0,5D^2 + (s + 0,5)D \\ &\quad + (s - \mu)(\mu + 1) \rangle + \mu^2(h + g)q^{s-1}]. \end{aligned}$$

Aus den bekannten Bedingungen für ein lokales Minimum dieser Funktion¹⁾ folgen für die suboptimalen Parameter s^* und $S^* = s^* + D^*$ die Einschließung

$$-1,5 + \sqrt{0,25 + 2\mu(K - h)/h} \leq D^* \leq 0,5 + \sqrt{1,25 + 2\mu(K + h)/h} \quad (7.72a)$$

sowie

$$q^{s^*} \leq \frac{(\mu + 1 + D^*)h}{(h + g)\mu} \leq q^{s^*-1}. \quad (7.72b)$$

Für das Beispiel 7.2 ergibt sich aus Formel (7.72a)

$$2,3 \leq D' \leq 4,9$$

¹⁾ Diese Bedingungen führen auf ein nichtlineares Gleichungssystem, für das eine ganzzahlige Lösung (s^* , D^*) gesucht wird. Dieses System kann nur näherungsweise gelöst werden, und seine Lösungen sind im allgemeinen keine ganzen Zahlen; deshalb wird es durch das Ungleichungssystem (7.72a, b) ersetzt.

und aus Formel (7.72b)

$$\frac{22}{D' + 2} \leq 2^{s'} \leq \frac{44}{D' + 2}.$$

$D' = 4$ und $s' = 2$ ist die einzige ganzzahlige Lösung dieses Ungleichungssystems. Damit ist die Bestellregel vom (s, S) -Typ mit $s = 2$ und $S = 6$ suboptimal.

e) Im Modell 2 bewirkt eine Bestellauslösung zur Zeit $t = n - 1$ eine Lieferung und damit eine Änderung der körperlichen Bestände zum Zeitpunkt $t = n - 1 + l$, d. h., die Entscheidung wird nicht in der n -ten Periode, sondern erst in der $(n + l)$ -ten Periode wirksam (Bild 7.8).

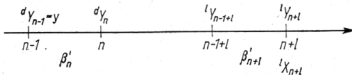


Bild 7.8

Um nun die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten für eine Periode auszurechnen, gehen wir wieder von der Bedingung $\{^dY_{n-1} = y\}$ aus. Der Restbestand in der $(n + l)$ -ten Periode ergibt sich dann zu

$$^lX_{n+l} = ^lY_{n-1+l} - \beta_{n+l} = y - \sum_{k=0}^l \beta_{n+k} = y - \beta(l + 1). \quad (7.73)$$

Wir erhalten analog zu (7.68) bei linearer Restbestandsbewertung

$$L(y) = h \sum_{j=0}^y (y - j) b_{l+1}(j) + g \sum_{j=y+1}^{\infty} (j - y) b_{l+1}(j). \quad (7.74)$$

f) Im Abschnitt 7.3.2. wurde festgestellt, daß $P(^dY_n = Y_n) = 1$ ist und damit $\mathbf{f}^d(Y) = \mathbf{f}(Y)$ gilt. Deshalb können wir entsprechend zu Satz 7.11 verfahren und erhalten

Satz 7.12: Für Modell 2 ergeben sich die beeinflussbaren Durchschnittskosten zu

$$\mathcal{L}(S, D) = \frac{1}{1 + M(D)} \left[K + L(S) + \sum_{j=0}^D L(S - j) m(j) \right], \quad (7.75)$$

wobei $L(y)$ durch (7.74) erklärt ist.

7.4. Poissonsche Lagerhaltungssysteme

Es werden nun zwei Modelle für ein Ersatzteillager betrachtet, von dem in zufälligen Zeitpunkten jeweils ein Ersatzteil abgefordert wird. Wir beschreiben ein derartiges Nachfrageverhalten durch einen Poissonschen Bedarfsprozeß mit der Bedarfsfunktion

$$b_t(k) = P(\beta(t) = k) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} & \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{für } k < 0. \end{cases} \quad (7.76)$$

7.4.1. Ein Poissonsches Vormerkssystem mit konstanter Beschaffungszeit

Das Modell 2 von Abschnitt 7.3.2. wird nun hinsichtlich des Bedarfsprozesses geändert und ergibt

Modell 3

- Der Bedarf wird durch einen Poissonschen Prozeß mit der Bedarfsfunktion (7.76) beschrieben.
- Es gilt die Vormerkreaktion (7.8).
- Die Beschaffungszeit l ist eine feste natürliche Zahl.
- Die Bestellregel ist vom (s, S) -Typ.
- Der Anfangsbestand beträgt S Mengeneinheiten.

Das Konzept der Bilanzgleichungen, das bei periodischen Systemen erfolgreich angewendet wurde, um Bestandsprozesse einzuführen, läßt sich nicht ohne weiteres einsetzen. Wie der Bedarfsprozeß werden auch die Bestandsprozesse zu stochastischen Prozessen in stetiger Zeit und nicht einfach rekursiv erzeugte Folgen von Zufallsgrößen.

Wir bezeichnen mit dX_t bzw. dY_t den disponiblen Bestand vor bzw. nach der Bestellung zur Zeit t . Nach Bedingung e) gilt ${}^dY_0 = S$.

Wegen d) wird solange abgebaut, bis der Bestand auf das Niveau $s - 1$ gefallen ist. Dann erfolgt sofort eine Bestellauslösung, wobei die Menge $Q := S - s + 1$ bestellt wird. Zu diesem Zeitpunkt t' wird also der disponible Bestand wieder S erreichen; in Formeln

$${}^dX_{t'} = S - \beta(t') = s - 1, \quad {}^dY_{t'} = S. \quad (7.77)$$

Der (zufällige) Zeitpunkt t' wird hierbei durch die Vorschrift $t' := \min(t: \beta(t) = Q)$ erklärt. In t' startet bekanntlich der Poissonsche Bedarfsprozeß und damit auch Y_t von neuem. Der Bestand S wird bis zum Zeitpunkt $t'' = \min(t: \beta(t) = 2Q)$ abgebaut und in t'' wiederum die Menge Q bestellt. Den disponiblen Bestandsprozeß bezeichnet man deshalb auch als einen *regenerativen Prozeß* (vgl. Bild 7.9).

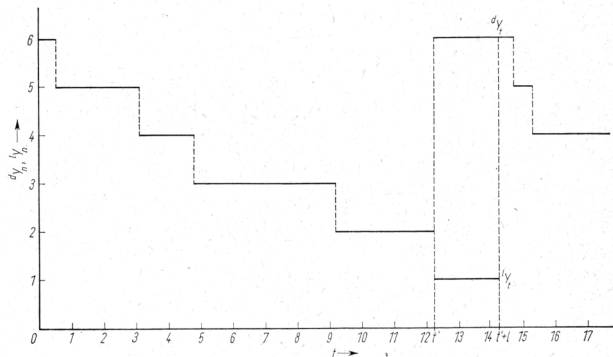


Bild 7.9. Realisierung des disponiblen Bestandes bei einem Poissonschen Bedarfsprozeß mit $\lambda = 0,5$ und einer Bestellregel vom (s, S) -Typ mit $s = 2$ und $S = 6$ sowie $l = 2$

Wir wollen im folgenden den Buchbestand 1Y_t näher untersuchen. Für kleine t ($t < t'$) gilt: ${}^1Y_t = S - \beta(t)$. Für $t \geq t'$ sind noch die bis zur Zeit t erfolgten Lieferungen zu berücksichtigen. Die Anzahl der Bestellungen bis zur Zeit t ist gerade $[\beta(t)/Q]$, d. h. der ganze Anteil des Quotienten $\beta(t)/Q$. Denn es wird genau dann bestellt, wenn $\beta(t)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von Q ist. Beachten wir noch die Beschaffungszeit l , so ergibt sich die bis zur Zeit t gelieferte Gesamtmenge zu $[\beta(t-l)/Q]Q$. Damit erhalten wir für den Buchbestand zur Zeit $t \geq l$ die Darstellung

$${}^1Y_t = S + [\beta(t-l)/Q]Q - \beta(t). \quad (7.78)$$

Dieser Buchbestand bildet keinen Markowschen Prozeß, denn das Ereignis $\{{}^1Y_{t+\tau} = k\}$ für $0 < \tau < l$ wird nicht durch das Ereignis $\{{}^1Y_t = j\}$ allein, sondern zusätzlich noch durch die Lage des letzten Bestellzeitpunktes vor t beeinflußt.

Satz 7.13: Der Buchbestandsprozeß (7.78) besitzt folgende Grenzverteilung

$$f_j = f_j({}^1Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} P({}^1Y_t = j) = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} b_i(S - i - j). \quad (7.79)$$

Beweis: Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$P({}^1Y_t = j) = \sum_{u,v} P({}^1Y_t = j/A_{uv}) P(A_{uv}) \quad (7.80)$$

mit

$$A_{uv} := \{\beta(t-l) = u, \beta(t) - \beta(t-l) = v\}.$$

Wegen der Unabhängigkeit und der Stationarität der Zuwächse des Bedarfsprozesses folgt mit (7.76)

$$P(A_{uv}) = b_{t-l}(u) b_l(v). \quad (7.81)$$

Zu jedem u gibt es ein $k = k(u) \geq 0$, so daß gilt

$$kQ \leq u < (k+1)Q.$$

Damit ergibt sich unter Beachtung von (7.78)

$$\begin{aligned} P({}^1Y_t = j/A_{uv}) &= P\left(S + \left[\frac{u}{Q}\right]Q - (u+v) = j/A_{uv}\right) \\ &= P(S + kQ - u - v = j, kQ \leq u < (k+1)Q/A_{uv}). \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist genau dann gleich eins, falls

$$v = S + kQ - u - j$$

ist.

Wir erhalten hiermit aus (7.80) und (7.81) sowie (7.76)

$$\begin{aligned} P({}^1Y_t = j) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{u=kQ}^{(k+1)Q-1} \frac{\lambda^u (t-l)^u}{u!} e^{-\lambda(t-l)} b_l(S + kQ - u - j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{Q-1} \frac{a^{i+kQ}}{(i+kQ)!} e^{-a} b_l(S - i - j), \end{aligned} \quad (7.82)$$

wobei $a := \lambda(t - l)$ ist und $u - kQ = i$ gesetzt wurde. Berücksichtigen wir noch die Beziehung

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{m+kQ}}{(m+kQ)!} = \frac{1}{Q},$$

erhalten wir aus (7.82) die Behauptung (7.79).

Wir geben noch zwei Verhaltenscharakteristiken an.

Satz 7.14: Für den mittleren Buchbestand gilt in Modell 3:

$$E(IY) = S - l\lambda - \frac{1}{2}(Q - 1) \quad (7.83a)$$

$$= \frac{1}{2}(s + S) - l\lambda. \quad (7.83b)$$

Beweis: Nach (7.79) erhalten wir

$$\begin{aligned} E(IY) &= \frac{1}{Q} \sum_{j=-\infty}^S j \sum_{i=0}^{Q-1} b_i(S - i - j) \\ &= \frac{S}{Q} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{Q-1} b_i(u - i) - \sum_{u=0}^{\infty} u \sum_{i=0}^{Q-1} b_i(u - i) \\ &= \frac{S}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} \sum_{v=-i}^{\infty} b_i(v) - \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} \sum_{v=-i}^{\infty} (i + v) b_i(v) \\ &= S - \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{Q-1} (i + l\lambda) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Satz 7.15: Im Modell 3 gilt für den Sicherheitsgrad

$$\begin{aligned} P_3(s, S) &= P(IY \geq 0) \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{u=0}^S (B_l(u) - B_l(u - Q)). \end{aligned} \quad (7.84)$$

Beweis: Ist t ein beliebiger, aber fest gewählter Zeitpunkt, so haben wir $P(IY_t = IY_t) = 1$, denn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß t Lieferzeitpunkt ist, verschwindet wegen der Stetigkeit der Pausenverteilung. Wir können deshalb Satz 7.13 anwenden

$$\begin{aligned} P_3(s, S) &= \sum_{j=0}^S f_j = \frac{1}{Q} \sum_{j=0}^S \sum_{i=0}^{Q-1} b_i(S - i - j) \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{u=0}^{Q-1} (Q - u) b_l(u) + \frac{1}{Q} \sum_{u=Q}^S \sum_{i=0}^{Q-1} b_l(u - i) \end{aligned}$$

und erhalten nach entsprechenden Umformungen, die dem Leser überlassen seien, die Behauptung (7.84).

Es können sehr einfach durchschnittliche Lager- und Fehlmengenkosten \mathcal{D} eingeführt werden, wenn der stationäre Buchbestand 1Y in den stationären körperlichen Bestand Y^k und den stationären Fehlbestand Y^f zerlegt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(s, S) &= hE(Y^k) + gE(Y^f) \\ &= (h + g) E(Y^k) - gE(^1Y) \\ &= (h + g) \sum_{j=1}^S jf_j - g[\frac{1}{2}(s + S) - l].\end{aligned}$$

Auf die Bestimmung suboptimaler Bestellregeln wollen wir hier verzichten.

7.4.2. Ein Poissonsches Verlustsystem mit zufälliger Beschaffungszeit

In der Praxis kann bei verschiedenen Artikeln eine feste Lieferfrist nicht garantiert werden. Vielfach werden Verträge abgeschlossen, in denen Lieferanten ein Spielraum für die Anlieferung eingeräumt wird. Einen derartigen Sachverhalt modellieren wir mittels einer zufälligen Beschaffungszeit.

Modell 4

a) Der Bedarf wird durch einen Poissonschen Prozeß mit der Bedarfsfunktion (7.76) beschrieben.

b) Es gilt die Verlustreaktion (7.9).

c) Die Beschaffungszeit T_B ist eine exponentiell verteilte Zufallsgröße mit dem Parameter $\tau = \frac{1}{T}$.

d) Die Bestellregel ist vom (S, S) -Typ, d. h. $s = S$.

e) Der Anfangsbestand beträgt S Mengeneinheiten.

Das Modell 4 unterscheidet sich also vom Modell 3 in der Lagerreaktion und der Beschaffungszeit. Es gilt aber für die mittlere Beschaffungszeit: $E(T_B) = l$. Weiterhin ist gegenüber dem Modell 3 die Bestellregel speziell gewählt. Dies hat zur Folge, daß zu jedem Bedarfsfall das abgegebene Ersatzteil unverzüglich zu ersetzen ist und deshalb sofort eine Bestellung ausgelöst wird. Trifft jedoch eine Forderung zu einem Zeitpunkt ein, an dem das Lager leer ist, wird diese wegen b) zurückgewiesen.

Gesucht ist – wie beim Modell 1 – der körperliche Bestand $Y(t) := Y_t$ zur Zeit t .

Satz 7.16: Der Bestandsprozeß $\{Y(t), t \geq 0\}$, zu Modell 4 ist ein homogener Markowscher Prozeß mit dem Zustandsraum $\mathfrak{X}_Y = \{S, S-1, \dots, 1, 0\}$ und der Intensitätsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \tau & -(\lambda + \tau) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tau & -(\lambda + 2\tau) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (S-1) & -(\lambda + (S-1)\tau) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S\tau & -S\tau \end{bmatrix}. \quad (7.85)$$

Unter den Modellvoraussetzungen können wir die Markow-Eigenschaft zeigen sowie die Darstellung der Übergangsmatrix für ein Zeitintervall mit kleiner Länge Δt :

$$P_Y(\Delta t) = I + A \Delta t + o(\Delta t) \quad (7.86)$$

mit der Einheitsmatrix I und einer Matrix A gemäß (7.85).

Satz 7.17: *Der Bestandsprozeß zu Modell 4 besitzt die stationäre Grenzverteilung*

$$f_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_t = j) = \frac{(l\lambda)^{s-j}}{(S-j)! \sum_{k=0}^S \frac{(l\lambda)^k}{k!}}. \quad (7.87)$$

Beweis: Wie in 3., (3.61), ergibt sich die stationäre Verteilung eines homogenen Markowschen Prozesses aus

$$f \cdot A = 0. \quad (7.88)$$

Die einfache Bandstruktur der Matrix (7.85) läßt uns sofort die Lösung

$$f^* = \left(1, l\lambda, \frac{1}{2} (l\lambda)^2, \dots, \frac{(l\lambda)^S}{S!} \right)$$

von (7.88) ablesen, wobei $l = \frac{1}{\tau}$ ist. Normieren wir diesen Vektor, so erhalten wir die Behauptung (7.87), falls wir die Reihenfolge der Komponenten von f entsprechend

$$f = (f_S, f_{S-1}, \dots, f_0) \quad (7.89)$$

beachten.

Wie Sewastjanow 1957 in einem anderen Zusammenhang gezeigt hat, bleibt die sogenannte Erlangsche Formel (7.87) für jede Beschaffungszeit T_B mit dem Erwartungswert l gültig, insbesondere also auch für konstante Beschaffungszeit $T_B = l$.

Satz 7.18: *Im Modell 4 gilt für den mittleren Bestand*

$$E(Y) = S - l\lambda \frac{F_{l\lambda}(S-1)}{F_{l\lambda}(S)} \quad (7.90)$$

und für den Sicherheitsgrad

$$P_4(S, S) = 1 - f_0 = \frac{F_{l\lambda}(S-1)}{F_{l\lambda}(S)}, \quad (7.91)$$

wobei $F_r(j) = e^{-r} \sum_{k=0}^j \frac{r^k}{k!}$ ist.

Den einfachen Beweis möchten wir dem Leser überlassen.

7.5. Optimale Lagerhaltung

Wir wollen nun das Lagerhaltungsproblem „Wann ist wieviel zu bestellen?“ in einem etwas allgemeineren Rahmen lösen. Bisher sind wir jeweils von einer Bestellregel vom (s, S) -Typ ausgegangen. Wir können natürlich auch andere Bestellregeln

zulassen; weiterhin ist es möglich, zu verschiedenen Bedarfsfällen verschiedene Bestellregeln anzuwenden. Deshalb erklären wir: Unter einer *Bestellstrategie* („Entscheidung“)

$$e = (e_1, e_2, \dots) \text{ mit } e_n(x) \geq x \text{ für jedes ganze } x \quad (7.92)$$

verstehen wir eine Folge von Bestellregeln, wobei $e_n(\cdot)$ die zum n -ten Bedarfsfall zu verwendende Bestellregel bezeichnet. Sind alle Bestellregeln untereinander gleich, sprechen wir von einer *stationären Strategie*.

Am Ende wird sich zeigen, daß unter gewissen Bedingungen trotz einer derartigen Erweiterung der Bestellmöglichkeiten die erwarteten Kosten nicht kleiner ausfallen als die Kosten, die mittels einer stationären Bestellstrategie vom (s, S) -Typ erzielt werden.

Um den Sachverhalt möglichst zu konkretisieren, beschränken wir uns auf eine Modifikation des Modells 2:

Modell 5

- a) Der Bedarfsprozeß ist periodisch mit der Bedarfsfunktion $b(t)$.
- b) Es gilt die Vormerkreaktion (7.8).
- c) Die Beschaffungszeit l ist eine feste natürliche Zahl.
- d) Die Bestellstrategie e ist von der Form (7.92).
- e) Das Lager ist am Anfang leer.

Entsprechend den Bilanzgleichungen (7.34) werden zwei disponible Bestandsprozesse definiert:

$${}^d Y_n^e = e_n({}^d X_n^e), \quad (7.93a)$$

$${}^d X_n^e = {}^d Y_{n-1}^e - \beta_n. \quad (7.93b)$$

Bezeichnet x den realisierten disponiblen Bestand vor der Bestellung zur Zeit $t = n$, so gibt $e_n(x) =: y$ den disponiblen Bestand unmittelbar nach der Bestellung zur Zeit $t = n$ an. Für die Bestellmenge gilt $z = e_n(x) - x$.

Uns interessieren nun die Kosten, die durch Bestellungen in den ersten N Perioden verursacht und in den Perioden $l + 1$ bis $l + N$ wirksam werden. Bezeichnen wir mit

$$c(z) := K\delta(z) + cz, \quad \text{wobei} \quad \delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0, \\ 1 & \text{für } z > 0, \end{cases} \quad (7.94)$$

die Beschaffungskosten für z Mengeneinheiten und mit $L(y)$ gemäß (7.74) die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten, so ergeben sich die beeinflussbaren erwarteten diskontierten Kosten für den Zeitraum $[0, N]$:

$$k_\alpha(e, N) = E \sum_{n=1}^N \alpha^{n+l} [c({}^d Y_n^e - {}^d X_n^e) + L({}^d Y_n^e)], \quad (7.95)$$

hierbei ist α ein Diskontfaktor¹⁾ für eine Zeiteinheit ($0 < \alpha \leq 1$). Die Summanden von (7.95) können wie folgt interpretiert werden: Eine zur Zeit $t = n$ aufgegebene Bestellung verursacht Kosten k_n , die bei Eingang der Lieferung zur Zeit $t = n + l$

¹⁾ Der Diskontfaktor α ergibt sich aus dem Zinssatz $p \cdot 100\%$ nach der Formel $\alpha(1 + p) = 1$.

zu zahlen sind. Beziehen wir die zu verschiedenen Zeiten anfallenden Kosten auf den Beginn des Planzeitraumes, haben die Kosten k_n den Wert $\alpha^{n+1}k_n$.

Definition 7.5: Eine Bestellstrategie e^* heißt (N, α) -optimal, falls

$$k_\alpha(e^*, N) \leq k_\alpha(e, N)$$

für jede Entscheidung e gilt.

Die dynamische Optimierung (vgl. Band 16) liefert uns eine Methode zur Bestimmung einer (N, α) -optimalen Bestellstrategie. Dazu bezeichnen wir mit $g_n(i)$ die erwarteten diskontierten Kosten für den Zeitraum $[n-1, N]$ bei einer (N, α) -optimalen Lagersteuerung und dem Bestand $x = i$ zur Zeit $t = n-1$. Dann ergibt sich nach dem Bellmanschen Optimalitätsprinzip

$$g_n(i) = \min_{y \geq i} [c(y-i) + L(y)], \quad (7.96a)$$

$$g_n(i) = \min_{y \geq i} \left[c(y-i) + L(y) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} g_{n+1}(y-k) b(k) \right], \quad (7.96b)$$

$n = N-1, N-2, \dots, 1$. Wird $g_n(\cdot)$ nach (7.96a) berechnet, ergibt sich gleichzeitig e_N^* gemäß

$$g_n(i) = c(e_N^*(i) - i) + L(e_N^*(i)).$$

Rekursiv erhalten wir dann $g_{N-1}(\cdot), e_{N-1}^*, \dots, g_1(\cdot), e_1^*$ und damit

$$k_\alpha(e^*, N) = \alpha^{N+1}g_1(0).^1)$$

Definition 7.6: Eine Bestellstrategie e^* heißt α -optimal, falls

$$k_\alpha(e^*, \infty) \leq k_\alpha(e, \infty)$$

für jede Entscheidung e gilt.

Beim Übergang vom endlichen zum unendlichen Planzeitraum gelangen wir von (7.96b) zur Funktionalgleichung

$$g(i) = \min_{y \geq i} \left[c(y-i) + L(y) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} g(y-k) b(k) \right], \quad (7.97)$$

der sogenannten *optimalen Lagerhaltungsgleichung*.

Wir geben hierzu noch zwei wichtige Ergebnisse an.

Satz 7.19: Es sei $g(\cdot)$ eine endliche, nach unten gleichmäßig beschränkte Lösung der optimalen Lagerhaltungsgleichung (7.97). Dann gilt für jedes α -optimale e^* :

$$k_\alpha(e^*, \infty) = \alpha^{N+1}g(0). \quad (7.98)$$

Einen Beweis von Satz 7.19 findet der Leser z. B. in [29], S. 64.

¹⁾ Bezüglich des hierfür erforderlichen recht umfangreichen Rechenaufwands vgl. Bd. 16, Abschn. 4.3.1.

Satz 7.20: Es werde das Modell 5 gemäß (7.95) bewertet, wobei $L(y)$ konvex ist und $c(1 - \alpha)y + L(y) \rightarrow \infty$ für $|y| \rightarrow \infty$ strebt. Dann gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} (1 - \alpha) k_{\alpha}(e^*, \infty) = \mathcal{L}(S^*, D^*). \quad (7.99)$$

Der auf Scarf (1960) zurückgehende Satz 7.20 besagt, daß in der Klasse der Bestellstrategien (7.92) bereits Strategien optimal sind, die aus untereinander identischen Bestellregeln von (s, S) -Typ bestehen. Damit wird die in den vorangehenden Abschnitten praktizierte Beschränkung auf Bestellregeln vom (s, S) -Typ – zumindest unter gewissen Konvexitätsbedingungen an die Kosten – nachträglich gerechtfertigt.

Beispiel 7.2 kann nunmehr für den Fall einer linearen Restbestandsbewertung abgeschlossen werden.

Die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten $L(y)$ ergeben sich nach (7.71) für $y > 0$ zu

$$L(y) = y - 1 + 22 \cdot 0,5^y$$

und für $y < 0$ zu

$$L(y) = 1 - y.$$

Die Voraussetzungen von Satz 7.20 sind also erfüllt. Damit ist die suboptimale Bestellregel vom (s, S) -Typ sogar optimal, d. h., es gibt hier keine bessere Bestellstrategie als die angegebene stationäre vom (s, S) -Typ mit $s = 2$, $S = 6$.

Aufgabe 7.1: Es ist der Zusammenhang zwischen einem Poissonschen Verlustsystem mit zufälliger Beschaffungszeit, einem Bedienungssystem $M/M/n/0$ und der Gesprächsvermittlung in einer Telefonzentrale herzustellen.

Aufgabe 7.2: Es sind die Verhaltenscharakteristiken (mittlerer Bestand, Sicherheitsgrad und Bestellzyklus) für ein Lagerhaltungssystem unter den Bedingungen von Beispiel 7.2 bei optimaler Steuerung zu berechnen.

Lösungen der Aufgaben

2.1: (1) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $m_x(t) = 0$ gesetzt werden. Dann ist

$$E\left[\left\{\sum_{i=1}^n z_i X(t_i)\right\}^2\right] = \sum_{i,j=1}^n z_i z_j k_x(t_i, t_j) \geq 0.$$

(2) für beliebiges α gilt $E[X(s) + \alpha X(t)]^2 \geq 0$. Einfache Umformungen ergeben

$$\begin{aligned} E[X(s)]^2 + 2\alpha E[X(s) X(t)] + \alpha^2 E[X(t)]^2 \\ = E[X(t)]^2 \left[\alpha + \frac{E(X(s) X(t))}{E(X(t))^2} \right]^2 + E[X(s)]^2 - \frac{[E\{X(s) X(t)\}]^2}{E[X(t)]^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Da der linke Teil für alle α nicht negativ bleibt, folgt

$$\{E[X(s) X(t)]\}^2 \leq E[X(s)]^2 E[X(t)]^2,$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

2.2: $m_x(t) = E(Xt) = t EX = 0,$

$$k_x(s, t) = E[(Xs - 0)(Xt - 0)] = s t E[X^2] = a^2 s t,$$

$$\sigma_x^2(t) = k_x(t, t) = a^2 t^2.$$

2.3: Die Unabhängigkeit der Zuwächse folgt aus der Unabhängigkeit der ξ_i ($i = 1, 2, \dots$).

2.4: Es gilt: $p_{>0}(\Delta t) = 1 - p_0(\Delta t) = \lambda t + o(\Delta t)$. Wegen $p_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$ folgt $p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

2.5: Mit $m_x(t) = 0$ und $\sigma_x^2(t) = \sigma^2 t$ folgt unter Verwendung der Beziehungen (2.18) und (2.19) $k_x(s, t) = E[X(t)]^2 = \sigma^2 t$ für $s \geq t$ und $k_x(s, t) = \sigma^2 s$ für $s \leq t$.

3.1: $\lambda_n = n\lambda, \quad \mu_n = n\mu.$

3.2: Unter Verwendung der Formeln (3.45) und (3.47) findet man

$$\begin{aligned} m_x(t) &= e^{\frac{3}{4}\lambda t}, & \sigma_x^2(t) &= e^{\frac{3}{2}\lambda t} \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\lambda \tau} \cdot \frac{5}{4} \lambda d\tau \\ & & &= \frac{5}{4} \lambda e^{\frac{3}{2}\lambda t} \int_0^t e^{-\frac{3}{4}\lambda \tau} d\tau \\ & & &= \frac{5}{3} e^{\frac{3}{4}\lambda t} \left(e^{\frac{3}{4}\lambda t} - 1 \right) \end{aligned}$$

3.3: Die Lösung ergibt sich sofort unter Beachtung der Beziehungen (3.56) und (3.57).

4.1:
$$\tau_k = \int_0^\infty e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}.$$

5.1: Unter Verwendung dieser Beziehungen sind nun die Differenzenquotienten zu bilden und der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ auszuführen; danach erhält man das Gleichungssystem (5.5)–(5.7).

$$p_k(t_1 + (t - t_1)) = \sum_{l=0}^n p_l(t_1) p_{lk}(t - t_1), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

Mit $t_1 = t$ und $\Delta t = t - t_1$ ergibt sich daraus:

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^n p_i(t) p_{ik}(\Delta t), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Da der betrachtete Prozeß ein Geburts- und Todesprozeß ist, gilt:

$$p_{00}(\Delta t) = 1 - p_{01}(\Delta t) + o(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{01}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{k,k-1}(\Delta t) = k\mu \Delta t + o(\Delta t),$$

$$p_{k,k+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Durch Bildung der Differenzenquotienten und Durchführung des Grenzübergangs $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich das Differentialgleichungssystem (5.5)–(5.7).

6.1: Nach Tabelle 6.2 ist bei der Exponentialverteilung der Erwartungswert T_0 der fehlerfreien Arbeitszeit T gleich dem Kehrwert der Ausfallrate λ . Bei einer Serienstruktur mit einer entsprechend (6.39) gegebenen Ausfallrate ergibt sich also:

$$T_0 = \frac{1}{n\lambda}.$$

7.1: Der Bestandsprozeß eines Poissonschen Verlustsystems mit exponentiell verteilter Beschaffungszeit läßt sich nach Satz 7.16 durch einen homogenen Markowschen Prozeß $Y(t)$ mit der Intensitätsmatrix A gemäß (7.85) beschreiben. Die stationäre Grenzverteilung ergibt sich dann nach der Erlang-schen Formel (7.88). Betrachten wir die Anzahl der Forderungen in einem Bedienungssystem $M/M/n/0$ (vgl. 5.4.1.), so bildet diese ebenfalls einen Markowschen Prozeß $X(t)$. Setzen wir die Anzahl der Bedienungsgesetze $n = S$, so ist der Prozeß $S - Y(t)$ zum Prozeß $X(t)$ äquivalent; insbesondere erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Forderungen im System im stationären Regime über die Erlangsche Formel. Die Modellierung der Gesprächsvermittlung in einer Telefonzentrale durch einen Markowschen Prozeß wird in Kapitel 3 (Beispiel 3.5) erörtert.

7.2: Für das Beispiel 7.2 ist die (2,6)-Bestellregel in der Klasse der Bestellregeln vom (s, S) -Typ suboptimal. Beachten wir (7.71), so erhalten wir $L(y) = y - 1 + 22 \left(\frac{1}{2}\right)^y$. Offenbar ist diese Funktion konvex, und es gilt $\lim_{y \rightarrow \infty} L(y) = \infty$. Damit ist Satz 7.20 anwendbar, so daß die Bestellstrategie, die aus untereinander identischen Bestellregeln von (2,6)-Typ besteht, eine optimale Steuerung hinsichtlich des Modells 5 liefert.

Nun umfaßt das Modell 5 unser Modell 2. Speziell für verschwindende Beschaffungszeit bekommen wir für die Verhaltenscharakteristiken

a) mittlerer Bestand vor der Bestellung: $E(X) = \frac{21}{6} = 3,5$ ME nach (7.48);

b) mittlerer Bestand nach der Bestellung: $E(Y) = \frac{26}{6} = 4,3$ ME nach (7.46);

c) Sicherheitsgrad: $P_2(2,6) = \frac{1}{12} \left[\sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{j=2}^6 \left(\sum_{k=0}^j \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) \right] = \frac{11,5}{12} \approx 0,96$ nach (7.57);

d) mittlerer Bestellzyklus: $E(T) = 6$ ZE nach (7.66).

Literatur

- [1] Autorenkollektiv: Lagerhaltungsmodelle. Neue Anwendungen, Erfahrungen und Erkenntnisse. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1974.
- [2] *Beichelt, F.*: Zuverlässigkeit und Erneuerung. Berlin: VEB Verlag Technik 1970.
- [3] *Beichelt, F.*: Optimale Instandhaltung. Berlin: VEB Verlag Technik 1974.
- [4] *Beyer, O.*; *Hackel, H.*; *Pieper, V.*; *Tiedge, J.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976.
- [4a] *Fersch, F.*: Markovketten. Berlin/New York: Springer-Verlag 1970.
- [5] *Fisz, M.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.
- [6] *Гухман, И.И.*; *Скорород, А.В.*: Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука 1965.
- [7] *Girlich, H.-J.*: Diskrete stochastische Entscheidungsprozesse und ihre Anwendung in der Lagerhaltung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1973.
- [8] *Gnedenko, B. W.*: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1957.
- [9] *Gnedenko, B. W.*; *Beljajew, J. K.*; *Solowjew, A. D.*: Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1968.
- [10] *Gnedenko, B. W.*; *Kowalenko, I. N.*: Einführung in die Bedienungstheorie (Übers. a. d. Russ.; mit einem Anhang über Unempfindlichkeitseigenschaften von Bedienungsprozessen von D. König, K. Matthes und K. Nawrotzki). Berlin: Akademie-Verlag 1971.
- [11] *Hummitzsch, P.*: Zuverlässigkeit von Systemen. Berlin: VEB Verlag Technik 1965.
- [12] *Jaglom, A. M.*: Einführung in die Theorie stationärer Prozesse (Übers. a. d. Russ.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955.
- [13] *Kempe, V.*: Theorie stochastischer Systeme. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen der Analyse und Synthese. Berlin: Akademie-Verlag 1974.
- [14] *Klemm, H.*; *Mikut, M.*: Lagerhaltungsmodelle, Theorie und Anwendung. Berlin: Verlag die Wirtschaft 1972.
- [15] *König, D.*: Anwendung von stochastischen Prozessen mit Geschwindigkeiten zur Untersuchung von Bedienungs- und Zuverlässigkeitsmodellen. Wiss. Ztschr. der TH Magdeburg, H. 4/1974.
- [16] *König, D.*; *Stoyan, D.*: Methoden der Bedienungstheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1976.
- [17] *Lahres, H.*: Einführung in die diskreten Markoff-Prozesse und ihre Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1964.
- [18] *Otto, H.*; *Peschel, M.*: Anwendung statistischer Methoden in der Regelungstechnik, Korrelations- und Spektralanalyse. Berlin: VEB Verlag Technik 1970.
- [19] *Reinschke, K.*: Zuverlässigkeit von Systemen, Bd. 1. Berlin: VEB Verlag Technik 1973.
- [20] *Rosenberg, W. J.*; *Prochorow, A. I.*: Einführung in die Bedienungstheorie. (Übers. a. d. Russ.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1964.
- [21] *Rosanow, J. A.*: Stochastische Prozesse (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1975.
- [22] *Ryshikow, J. I.*: Lagerhaltung (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1973.
- [23] *Sewastjanow, B. A.*: Verzweigungsprozesse (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Akademie-Verlag 1974.
- [24] *Smirnow, N. W.*; *Dunin-Barkowski, I. W.*: Mathematische Statistik in der Technik (Übers. a. d. Russ.). Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969.
- [25] *Solodownikow, W. W.*: Analyse und Synthese linearer Systeme (Übers. a. d. Russ.). Berlin: VEB Verlag Technik 1971.
- [26] *Störmer, H.*: Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. Berlin: Akademie-Verlag 1970.
- [27] *Struck, R.*: Kurzfristige statistische Vorausberechnung. Bln: Verlag Die Wirtschaft 1973.
- [28] *Sweschnikow, A. A.*: Untersuchungsmethoden der Zufallsfunktionen mit praktischen Anwendungen (Übers. a. d. Russ.). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1965.
- [29] *Tijms, H. C.*: Analysis of (s, S) Inventory Models. Amsterdam: Mathematisch Centrum 1972.
- [30] *Wiener, N.*: Extrapolation, Interpol. and Smoothing of Stationary Time Series. New York 1949.
- [31] *Wunsch, G.*: Systemanalyse, Bd. 1–3. Berlin: VEB Verlag Technik 1970.

Register

- Alterungsfehler 75
- Ausfall 73
- Ausfallrate 74
 - , empirische 79
- Ausfallwahrscheinlichkeit 73
- Autokorrelationsfunktion 12
- Badewannenkurve 75
- Bedarf 91
- Bedarf, mittlerer 92
- Bedarfsfunktion 92
- Bedarfsprozeß 92
 - , Bernoullischer 92
 - , periodischer 93
 - , Poissonscher 92
- Bedienungen, Folge der 65
- Bedienungsapparate 61, 65
 - , mittlere Anzahl der besetzten 66
 - , — freier 69, 70
- Bedienungsmodelle 62
- Bedienungsorganisation 63
- Bedienungssituationen 61
- Bedienungssystem 62
 - , Poissonsches 65
- Bedienungszeit 62
- Bernoullischer Bedarfsprozeß 92
- Beschaffungskosten 96
- Beschaffungszeit 95
- Bestand, disponibler 102
 - , körperlicher 95
 - , mittlerer 105
- Bestandsverteilungen, stationäre 100
- Bestellpunkt 95
- Bestellregel 95
 - , optimale 108
 - , suboptimale 108
 - vom (s, S)-Typ 95
- Bestellstrategie 117
 - , α -optimale 118
 - , (N, α) -optimale 118
- Bestellzyklus 107
- Betrachtungseinheit 73
- Boolesches Zuverlässigkeitsmodell 87
- Brownsche Bewegung 6
- Buchbestand 95
- Chapman-Kolmogorowsche Gleichung 28
- Chintschin, A. J. 5, 62
- Cox, D. R. 71
- Dirac-Funktion 52
- Doob, J. L. 5
- Durchschnittskosten 110
- Dynkin, E. B. 5
- Element 73
- Energiespektrum 48
- Ergodentheorem 25
- ergodische Wahrscheinlichkeiten 25
- Erlang, A. K. 5, 62
- Erlangsche Formeln 68
- Erlangsches System 67
- Erneuerungen 79, 80
- Erneuerungsdichte 81
- Erneuerungsfunktion 80
- Erneuerungsprozeß 80, 89
 - , alternierender 82
- Ersetzungen 79
- Erwartungswertfunktion 12
- Exponentialverteilung 76
- Extrapolation 53
- Fehlbestand 95
- Fehler 73
- fehlerfreie Arbeitszeit 73
- Fehlerrate 74
- Fehlmengenkosten 96
- FIFO 63
- Filtration 53
- Folge der Bedienungen 65
 - , zufällige 9
- Forderungen 61
 - , mittlere Anzahl der 69
- Forderungenstrom 62, 65
 - , Poissonscher 65
 - , rekurrenter 65
- Frühfehler 75
- Gammaverteilung 76
- Gaußprozesse 11
- Geburtskoeffizient 31
- Geburts- und Todesprozesse 10, 31, 67
- Gnedenko, B. W. 5, 62
- Kendall, D. G. 65, 71
- Kette, zufällige 9
 - , Zustände der 21
- Kolmogorow, A. N. 5
- Korrelationsfunktion 12
 - , normierte 13
- Kosten, L. 71
- Kowalenko, J. N. 62
- Kundenstrom 62
- Lagerhaltungssystem, periodisches 97
 - , Poissonsches 97, 111
- Lagerkosten 96
- Lagerreaktion 94
- Lebensdauer, empirische mittlere 78
- LIFO 63
- Lognormalverteilung 76
- Markow, A. A. 5
 - , Gleichung von 24
- Markow-Ketten, Methode der eingebetteten 71
- Markowsche Kette, homogene 23
- Methode der Zusatzvariablen 71
- mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsapparate 66
 - — — Forderungen 69, 70
 - — freier Bedienungsapparate 69, 70

- mittlere Warteschlangenlänge 68, 70
 - Wartezeit 68, 70
- mittlerer Bedarf 94
 - Bestand 105
- Näherungs- und Simulationsverfahren 71
- Normalverteilung 76
- Nutzsignal 53
- Parallelstruktur 85
- Poissonscher Bedarfsprozeß 92
 - Forderungenstrom 65
 - Prozeß 16, 81
- Poissonsches Bedienungssystem 65
 - Lagerhaltungssystem 97, 111
- Prioritäten 64
- Prozeß, diskreter 9
 - , – stochastischer 9
 - , im erweiterten Sinne stationärer 44
 - mit homogenen unabhängigen Zuwächsen 15
 - – unabhängigen Zuwächsen 15
 - , Poissonscher 16
 - , Semi-Markowscher 71
 - , stationärer stochastischer 43
 - , stochastischer 8
 - , –, mit Geschwindigkeiten 71
 - , Wienerscher 19
 - , zufälliger 9
- Prozesse, äquivalente stochastische 11
- Rauschen, weißes 51
- Redundanz 85
- Schätzung, asymptotisch erwartungstreue 60
- Schlangendisziplin 63
- Serienparallelstruktur 86
- Serienstruktur 85
- Sicherheitsgrad 106
- Signalprozeß 45
- SIRO 64
- Spektraldichte 50
- Spektralfunktion 49
- Sterbekoeffizient 31
- Störung 53
- Strategie, stationäre 117
- Strukturanalysen 84
- System 73
 - , Erlangsches 67
 - mit Prioritäten 64
 - , optimales dynamisches 53
- transient 26
- Übergangswahrscheinlichkeit 22
- Überlebenswahrscheinlichkeit 74
 - , empirische 78
- Varianzfunktion 12
- Verfügbarkeit 83
- Verlustreaktion 95
- Verlustsystem 64, 66, 97
 - , periodisches, ohne Lieferverzögerung 97
 - , Poissonsches, mit zufälliger Beschaffungszeit 115
- Verlustwahrscheinlichkeit 66
- Verteilung, zugeordnete 11
- Vormerkreaktion 94
- Vormerkssystem 97
 - , periodisches, mit konstanter Beschaffungszeit 102
 - , Poissonsches, mit konstanter Beschaffungszeit 112
- Wahrscheinlichkeiten, ergodische 25
- Warteplätze 65
- Warteschlange 63, 68
- Warteschlangenlänge, mittlere 68, 70
- Wartesystem 63, 66
- Warte-Verlust-Systeme, kombinierte 64
- Wartezeit, mittlere 68, 70
- Weibullverteilung 76
- weißes Rauschen 51
- Wiener, N. 5
- Wienerscher Prozeß 19
- Zählprozeß 80
- zufällige Folge 9
 - Kette 9
- zufälliger Prozeß 9
- Zufallsfehler 75
- Zufallsfolge 9
- Zustand, absorbierender 32
 - , reflektierender 32
 - , wesentlicher 26
- Zustände der Kette 21
- Zustandsanalyse 87
- Zuverlässigkeit 72
- Zuverlässigkeitsersatzschaltung 84
- Zuverlässigkeitsfunktion 74
- Zuverlässigkeitsmodell, Boolesches 87