MATHEMATIK

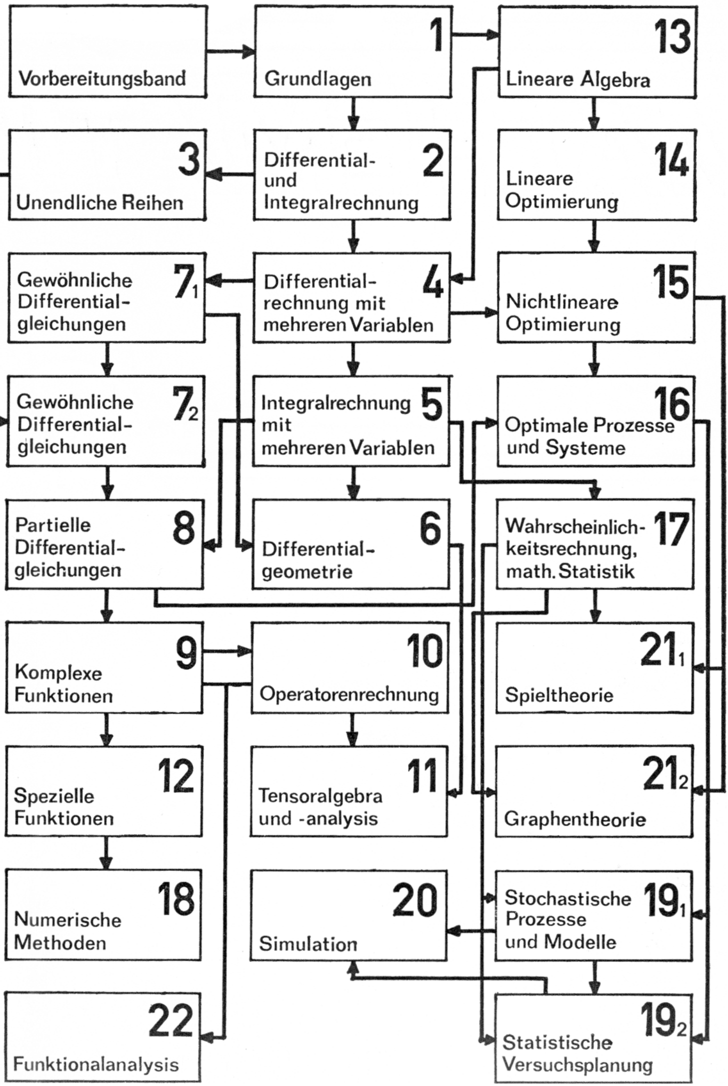
FÜR INGENIEURE
NATURWISSENSCHAFTLER
ÖKONOMEN
LANDWIRTE

21/1

MANTEUFFEL · STUMPE

Spieltheorie

Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER, ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 21/1

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

---

PROF. DR. K. MANTEUFFEL

DR. D. STUMPE

Spieltheorie

2., ÜBERARBEITETE AUFLAGE

LEIPZIG

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT
1979

Verantwortlicher Herausgeber:
Dr. rer. nat. habil. H. Erfurth, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer", Leuna-Merseburg

Autoren:
Dr. sc. nat. K. Manteuffel, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg
Dr. rer. nat. D. Stumpe, Oberassistent an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, Januar 1979 Minister für Hoch- und Fachschulwesen

2. Auflage

VLN 294-375/23/79 · LSV 1084

Lektor: Dorothea Ziegler

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig — III/18/97

Bestell-Nr. 665 832 6

DDR 4,— M

Vorwort zur 1. Auflage

Viele mathematische Theorien wurden mit dem Ziele entwickelt, optimale Lösungen von praktischen Problemen zu bestimmen. Auch bei der Spieltheorie handelt es sich um ein solches Teilgebiet der Mathematik. In diesem Falle geht es um das Auffinden optimaler Entscheidungen unter den Bedingungen des Konfliktes oder der Ungewißheit.

Vor fast 50 Jahren, im Jahre 1928, erschien die für die Spieltheorie grundlegende Arbeit von J. v. Neumann [8]. Nach 16 Jahren, 1944, wurde das Buch „Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten" von J. v. Neumann und O. Morgenstern publiziert, das mehrfach aufgelegt und ins Deutsche und Russische übersetzt wurde [9]. Schon im Titel wird ausgedrückt, daß der Anwendung der entwickelten Methoden in der Ökonomie besondere Beachtung geschenkt wird. Seit dieser Zeit ist überhaupt das Bemühen spürbar, spieltheoretische Methoden u. a. in Ökonomie und Technik anzuwenden. Da diese Anwendungen nicht nur der Unterstützung, sondern der Mitarbeit besonders der Ökonomen und Ingenieure bedürfen, und die Spieltheorie z. T. bereits Bestandteil der mathematischen Ausbildung verschiedener Fachrichtungen ist, wurde eine Einführung in die Spieltheorie in der Reihe „Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte" aufgenommen.

Für Hinweise und Bemerkungen zum Manuskript möchten wir unseren Kolleginnen und Kollegen Doz. Dr. M. Bliefernich, Berlin, Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg, Prof. Dr. H. Fischer, Berlin, und Dr. H. Jüttler, Dresden, vielmals danken.

Magdeburg, im Frühjahr 1976 — Die Verfasser

Vorwort zur 2. Auflage

Gegenüber der 1. Auflage ist der Beweis des *Hauptsatzes über Matrixspiele* (Abschnitt 2.3., Satz 2.2) ohne Anwendung von Sätzen der Funktionalanalysis, sondern mit Hilfe der Dualitätstheorie der linearen Optimierung geführt worden; auch der Abschnitt 2.4. hat eine Umarbeitung erfahren.

Ferner wurden verschiedene Hinweise berücksichtigt, für die wir den Kollegen Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg, und J. Portner, Pritzwalk, danken.

Magdeburg, im Herbst 1978

Die Verfasser

Inhalt

1. Spiele in Normalform

1.1. Einführende Bemerkungen, Definitionen

In den mannigfaltigsten praktischen Problemen treten Erscheinungen auf, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die an der Lösung dieser Probleme beteiligten Seiten die unterschiedlichsten Ziele verfolgen. Auf natürliche Weise wird jede Seite bestrebt sein, ihre Handlungsweise so auszuwählen, daß die Lösung des Problems in ihrem Sinne positiv wird.

Eine solche Erscheinung wollen wir als **Konflikt** bezeichnen. Ein Konflikt wird nicht wie in der Umgangssprache nur durch eine Konfrontation, durch die Lösung eines antagonistischen Widerspruchs charakterisiert, sondern die Grundlinien eines Konfliktes bestehen in den überaus mannigfaltigen Wechselbeziehungen der beteiligten Seiten, in vernünftigen Aussagen über seine Teilnehmer, über seine Ausgänge, die von Teilnehmerzahl und Handlungsweisen der Teilnehmer abhängen, über die Seiten, die am Ausgang des Konfliktes interessiert sind und über die Form der Offenbarung dieser Interessen.

Die Notwendigkeit, derartige Konfliktsituationen zu analysieren, führte zur Entwicklung einer speziellen mathematischen Disziplin, der Spieltheorie. Die Theorie der Spiele ist dem Wesen nach eine mathematische Modellierung von Konfliktsituationen. Die Spieltheorie ist demnach eine Theorie von Modellen, insbesondere mathematischer Modelle, mit dem Ziel, Normen zu schaffen, wie sich die am Konflikt Beteiligten zu verhalten haben, welcher Ausgang des Konfliktes erreicht werden kann, wie vernünftig, günstig und gerecht die Ausgänge sind.

Grundziel einer jeden Analyse des Konfliktes besteht in der Aufdeckung des optimalen (vernünftigen, gerechten) Ausganges, und alle anderen Aspekte, die einen Konflikt charakterisieren, haben sich diesem Ziele unterzuordnen. *Deshalb kann man die Spieltheorie als Theorie der mathematischen Modelle mit optimaler Entscheidungsfindung unter den Bedingungen von Konfliktsituationen beschreiben.*

In ihren Anfängen benutzte man die Spieltheorie zur Beschreibung ökonomischer Erscheinungen, und zwar unter den Bedingungen der Konkurrenzwirtschaft. Solche Probleme werden in den sog. **Anbotsmodellen** (mehrere in Konkurrenz stehende Personen kämpfen um *den* Auftrag oder um den Erwerb eines Gegenstandes) behandelt. Im Zuge ihrer Weiterentwicklung ist die Spieltheorie allerdings über diesen Rahmen hinausgewachsen und findet ihre Anwendung z. B. in den verschiedenen Zweigen der Ökonomie und Technik, der Militärwissenschaft und der Versuchsplanung. Betrachten wir hierzu einige Grundmodelle:

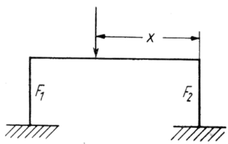
1. Spieltheorie und Statistische Qualitätskontrolle (SQK)
   In der SQK spielen einmal die Kontrollkarten und zum anderen die Stichprobenpläne eine große Rolle. Die Aufstellung solcher Stichprobenpläne kann man mit Hilfe der Spieltheorie durchführen. Wir betrachten folgende Situation: Es soll entschieden werden, ob ein Los von N gleichartigen Erzeugnissen angenommen bzw. abgelehnt wird, wobei derjenige, der die Entscheidung zu treffen hat, anhand einer Stichprobe vom Umfang n eine gewisse Information über die Güte des Loses bekommt. Wir wollen einen solchen Plan konstruieren, mit dessen Hilfe man aus der Information durch die Stichprobe für jedes beliebige Los eine entsprechende Entscheidung treffen kann. Als mathematisches Modell hat man ein sogenanntes Spiel gegen die Natur (statistisches Spiel, s. Abschnitt 3.), wobei für den 1. Spieler, die „Nuatr", die Strategie in der Wahl des Ausschußanteiles p $(0 \leqq p \leqq 1)$ liegt, und der 2. Spieler als Strategie die Möglichkeit des Ablehnens x_A bzw. An-

nehmens x_B hat. Bezeichnet man mit $L = L(p, d)$ die Verlustfunktion

$$\left(d = d(m) = \begin{cases} x_B & \text{für} \quad m \leqq k \\ x_A & \text{für} \quad m > k \end{cases}\right),$$

so kann man für diskrete p-Werte die Spielmatrix aufstellen und somit das Problem lösen.

2. Spieltheorie in der Technik
Wir betrachten folgendes statische Problem: Ein Balken mit genügender Festigkeit ruhe auf zwei Stützen, die jedoch einen beschränkten Querschnitt haben: $F_1 + F_2 = 1$. Es wirke jetzt eine normierte Kraft vom Betrage 1 in einem unbekannten Abstand x von der rechten Stütze auf den Balken.



Bezeichnen wir mit $F_1 = y$ und $F_2 = 1 - y$, so beträgt die Spannung in F_1: $\frac{x}{y}$ und in F_2: $\frac{1-x}{1-y}$. Das statische Problem liegt darin, die Stärke der Stützen zu bestimmen, damit sie den Balken tragen. Die spieltheoretische Lösung erfolgt über ein sogenanntes Spiel auf dem Einheitsquadrat (s. Abschn. 2.5.) mit folgenden Parametern:
1. Spieler: Natur mit der Strategie $x \in [0, 1]$,
2. Spieler: Ingenieur mit der Strategie $y \in [0, 1]$.
$H(x, y) = \max\left\{\frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right\}$ ist die Gewinnfunktion in diesem Spiel.

3. Angriff–Verteidigungs-Spiel
Ein idealisiertes Abbild aus der Militärwissenschaft ist das sogenannte Angriff–Verteidigungs-Spiel: Von einem Verteidiger V sollen n gleichartige Objekte vor einem Angreifer A geschützt werden. Dem Verteidiger V stehen m_V Einheiten zur Verteidigung zur Verfügung, der Angreifer A besitzt m_A Einheiten. Es wird vorausgesetzt, daß jedes Objekt mit keiner, einer oder zwei Einheiten verteidigt bzw. angegriffen wird und daß der Verteidiger (Angreifer) zu schwach ist, alle Objekte mit 2 Einheiten zu verteidigen (anzugreifen), d. h. $2n > m_V$ $(2n > m_A)$.
Die Strategiemenge des Verteidigers bzw. des Angreifers besteht in sämtlichen möglichen Kombinationen, Ziele mit 2, 1 oder 0 Einheiten zu schützen bzw. anzugreifen. Setzt man voraus, daß ein Angriff von Erfolg ist, wenn der Angreifer mindestens eine Einheit mehr als der Verteidiger einsetzt, so läßt sich die Gewinnfunktion als Erwartungswert darstellen, und somit ist das Modell als Spiel vollständig charakterisiert.

4. Probleme der Versuchsplanung
Die Versuchsplanung ist ein mathematisches Hilfsmittel zur Modellierung technologischer und physikalisch-chemischer Prozesse. Mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Versuchen ist eine Regressionsfunktion so zu bestimmen, daß durch sie ein unbekannter stetiger funktionaler Zusammenhang $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ zwischen einer Zielgröße F und unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ so genau wie möglich (optimal nach gewissen Kriterien) angenähert wird. Wir können diese Problematik spieltheoretisch in 2 verschiedenen Richtungen untersuchen:
a) bis zu einer bestimmten Stufe die Regressionsfunktion so genau wie möglich zu ermitteln,
b) zu entscheiden, ob nach dem k-ten Versuch abgebrochen wird oder nicht.

Zu a) Es seien $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ ist Variablenraum (Faktorraum), $f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_k(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$ mit $f_i(\boldsymbol{x})$ als Messung der gesuchten Funktion im Versuch $i \leqq k$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ ist Parameterraum, und $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = [f_k(x) - \sum_{j=1}^{k-1} c_j f_j(\boldsymbol{x})]$ die Gewinnfunktion.

Dann beschreibt das Spiel $\Gamma = \langle \mathfrak{X}, \mathfrak{C}, K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \rangle$ die unter a) genannte Problematik. Da die Funktion $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ konvex in $\boldsymbol{c}$ ist, besitzt der Spieler 2 eine reine optimale Strategie (s. Abschn. 2.5.).

Zu b) Angenommen, es wurde der k-te Versuch ordnungsgemäß im Sinne der Versuchsplanung durchgeführt. Danach muß man entscheiden:

entweder a_1 – Durchführung des nächsten Versuches in bestimmter Richtung,
a_2 – Konstruktion einer neuen Regressionsfläche,
a_3 – Abbrechen des Versuches.

Die Entscheidung hängt von verschiedenen Größen ab und ist durch die Entscheidungsfunktion $d \in D$ (Menge der Entscheidungsfunktionen) gegeben. Die Gewinnfunktion ist eine Risikofunktion $\varrho(\boldsymbol{x}, \mathrm{d})$, und wir haben wiederum ein Spiel gegen die Natur: $\Gamma = \langle \mathfrak{X}, D, \varrho \rangle$.

Da man auf jeder Stufe eine solche Entscheidung zu treffen hat, spricht man von einem Sequentialspiel (s. Abschn. 3.4.).

Die hier angeführten Beispiele geben selbstverständlich nur einen kleinen Einblick in die Vielzahl der spieltheoretischen Modelle und sollen das Interesse des Lesers auf die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie lenken. Die allgemeinen Perspektiven der Anwendung der Spieltheorie sind sehr umfangreich, jedoch wegen der Kompliziertheit der Aufgabenstellung nicht in diesem Rahmen zu diskutieren.

Kehren wir wieder zum Ausgangspunkt, zur mathematischen Entscheidungsfindung unter Konfliktsituationen zurück. Zur mathematischen Modellierung von Konfliktsituationen müssen folgende Faktoren berücksichtigt werden:

1. Es müssen unbedingt die am Konflikt beteiligten Seiten fixiert sein. In dieser Rolle können Einzelpersonen, aber auch ganze Kollektive auftreten, wobei es durch Verhandlungen zwischen den einzelnen Seiten zur Bildung von Koalitionen, Gegenkoalitionen und ähnlichem kommen kann. Diese Seiten beeinflussen unmittelbar durch ihr Handeln den Ausgang des Konfliktes. Es hat sich hierfür der Begriff der **Handlungskoalition** eingebürgert; die Menge aller Handlungskoalitionen wird mit $\mathfrak{K}_H$ bezeichnet.
2. Unmittelbar daran anknüpfend stellt sich die Frage, welcher Ausgang für jede Handlung der Koalitionen erreicht werden kann. Natürlich ist jede Koalition bestrebt, im voraus einen Verhaltensplan aufzustellen, der ihr einen in ihrem Sinne positiven Ausgang des Konfliktes sichert. Wir sprechen von einer **Strategie** der Koalition.
   Die Strategie einer jeden Koalition K ist demnach ein vollständiger Verhaltensplan, der für jede mögliche Lage, in die die Koalition gelangen kann, ihr Verhalten, d. h. die in dieser Lage zu treffende Entscheidung, festlegt. Die Menge aller Strategien der Handlungskoalition K wollen wir mit S_K bezeichnen.
   Hat jede Koalition ihre Strategie gewählt, so nennt man das Ergebnis dieser Wahl eine **Situation** im Sinne der Spieltheorie. Situationen erhält man also durch die Auswahl der Strategien aller am Konflikt beteiligten Seiten, d. h., die Situationen werden

durch die Strategien bestimmt. Das gibt uns die Möglichkeit, die Menge aller Situationen, die wir mit S bezeichnen wollen, mathematisch als kartesisches Produkt darzustellen:

$$S \subseteq \prod_{K \in \mathfrak{K}_H} S_K.$$

(Die Menge S muß deshalb als Teilmenge des kartesischen Mengenproduktes betrachtet werden, weil bestimmte Situationen verboten sein können. Existieren keine verbotenen Situationen, so gilt die Gleichheit.)

3. Neben den am Konflikt unmittelbar beteiligten Seiten ist es notwendig, auch jene Seiten aufzuzeigen, die irgendein Interesse am Ausgang des Konfliktes haben. Man kann sich leicht vorstellen, daß einerseits Teilnehmer am Konflikt, die Einfluß auf seinen Ausgang nehmen, nicht unbedingt ein Interesse an seinem Ausgang haben, andererseits Interessenten am Ausgang des Konfliktes vorhanden sind, die keine Handelnden sind.

   Als Beispiel sei ein sportlicher Wettkampf angeführt. Der Schiedsrichter, der als aktiver Teilnehmer durch sein Handeln das Ergebnis des Wettkampfes in bedeutendem Maße bestimmt, darf infolge seiner Stellung kein Recht auf irgendwelche Interessen haben, der Zuschauer jedoch, der den Wettkampf beobachtet, wird am Sieg seiner Lieblingsmannschaft interessiert sein, kann aber den Verlauf des Wettkampfes nicht beeinflussen.

   Dieser Unterschied zwischen handelnden und sich interessierenden Seiten findet in der modernen Spieltheorie seinen Niederschlag. Da die sich interessierenden Seiten im allgemeinen Falle kollektiver Art sind, sprechen wir von einer **Interessenkoalition.** Die Menge aller Interessenkoalitionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_u$.

4. Um die Modellierung von Konfliktsituationen vollenden zu können, ist es notwendig, die Interessen (d. h. die Ziele) der Teilnehmer des Konfliktes zu beschreiben. Dazu wird rein formal eine binäre Vorzugsrelation eingeführt, die für jede Interessenkoalition $K \in \mathfrak{K}_u$ auf der Menge der Situationen S erklärt ist (geschrieben: $\succ_K$). Diese Vorzugsrelation besagt nichts weiter, als daß die Interessenkoalition K auf das Erreichen der für ihre Interessen günstigste Situation $s \in S$ orientiert.

   Für zwei Situationen $s_1 \in S$, $s_2 \in S$ bedeutet $s_1 \succ_K s_2$, daß die Interessenkoalition K die Situation s_1 bevorzugt.

Die eben aufgezeigten Faktoren gestatten uns, die allgemeine Definition eines Spieles als mathematisches Modell von Konfliktsituationen zu formulieren:

Definition 1.1: *Es seien $\mathfrak{K}_H$ die Menge der Handlungskoalitionen, S_K die Strategiemenge der Handlungskoalition $K \in \mathfrak{K}_H$, S die Menge der Situationen, $\mathfrak{K}_u$ die Menge der Interessenkoalitionen und $\succ_K$ eine für die Interessenkoalition $K \in \mathfrak{K}_u$ auf der Menge der Situationen S erklärte Vorzugsrelation; dann nennt man das System*

$$G = \langle \mathfrak{K}_H, \{S_k\}_{k \in \mathfrak{K}_H}, S, \mathfrak{K}_u, \{\succ_k\}_{k \in \mathfrak{K}_u} \rangle$$

ein **Spiel.**

1.2. Klassifikation der Spiele, Spiele in Normalform

Eine systematische Untersuchung der Spiele kann nur durchgeführt werden, wenn man sich eine sinnvolle Klassifikation der Spiele schafft, die auf der eben angegebenen allgemeinen Definition eines Spieles basiert. Man sollte hierbei bedenken, daß die Spieltheorie eine verhältnismäßig junge mathematische Disziplin ist (die Anfänge gehen auf eine Arbeit von John von Neumann[1]) „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" zurück, die 1928 veröffentlicht wurde) und eine einheitliche Beschreibung aller Zweige der Spieltheorie noch nicht möglich ist.

Eine grobe Klassifizierung der Spiele läßt sich aus der Gestalt der Menge der Interessenkoalitionen $\mathfrak{K}_u$, aus der Gestalt der Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ und aus den Bedingungen, die für das Wirken der Vorzugsrelationen notwendig sind, ableiten. Betrachten wir zunächst die Menge der Interessenkoaltionen $\mathfrak{K}_u$: Ist die Menge leer, d. h. $\mathfrak{K}_u = \emptyset$, so hat das Spiel rein deskriptive Aufgaben, d. h., es besteht nur in der Beschreibung des Konfliktes als solchen, ohne daß irgendwelche Seiten auftreten, die ein Interesse am Ausgang des Konfliktes bekunden. Anders ausgedrückt, eine Vorzugsrelation ist in diesem Falle nicht erklärt, d. h. $\{\succ_K\}_{K \in \mathfrak{K}_u} = \emptyset$, und der optimisierende Charakter des Spiels (im Sinne der Vorzugsrelation) geht verloren. Besteht $\mathfrak{K}_u$ nur aus einer Koalition, mathematisch dargestellt durch den Ausdruck $|\mathfrak{K}_u| = 1$, so bekommen wir die verschiedenen Klassen der Extremalwertaufgaben.

Von Spieltheorie im eigentlichen Sinne des Wortes spricht man erst, wenn die Menge der Interessenkoalitionen $\mathfrak{K}_u$ aus mindestens zwei Elementen besteht, d. h. $|\mathfrak{K}_u| \geqq 2$. Man kann hierfür bestimmte Grundklassen von Spielen konstruieren, deren Betrachtungen im einzelnen nicht durchgeführt werden sollen. Eine Grobeinteilung erhält man aus der Gestalt der Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$.

Setzen wir im weiteren immer voraus, daß die Menge der Interessenkoalitionen $\mathfrak{K}_u$ mindestens zwei Elemente besitzt, so erhalten wir in Abhängigkeit von der Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ folgende Fälle:

Ist $\mathfrak{K}_H = \emptyset$, d. h., ist die Menge der Handlungskoalitionen leer, so haben wir ein Spiel, in dem nichts geschieht, keine Seite durch ihre Strategien den Ausgang des Konfliktes beeinflußt. Ein solches Spiel ist vom mathematischen Standpunkt uninteressant.

Für den Fall, daß die Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ nur aus einem Element besteht, $|\mathfrak{K}_H| = 1$, spricht man von **nichtstrategischen Spielen.** Nichtstrategisch deshalb, weil nur eine Situation existiert, die durch diese Handlungskoalition bestimmt wird, und die Interessenten immer in dieser Situation verbleiben. In diese Klasse fallen die (allgemeinen) kooperativen Spiele, die zuerst von John von Neumann betrachtet wurden.

Besteht die Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ aus mehr als einem Element, $|\mathfrak{K}_H| \geqq 2$, so erhält man die große Klasse der **strategischen Spiele.**

Wir wollen uns in den weiteren Ausführungen vorwiegend den strategischen Spielen widmen.

Gegeben sei eine gewisse Menge I, die sich aus der Vereinigung der Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ und der Menge der Interessenkoalitionen $\mathfrak{K}_u$ zusammensetzt,

$$I = \mathfrak{K}_H \cup \mathfrak{K}_u.$$

Die Elemente der Menge I heißen **Spieler.** Führt man auf der Menge aller Situationen S für jede Interessenkoalition $K \in \mathfrak{K}_u$ eine reellwertige Funktion F_K ein, so nennt man diese Funktion die **Gewinnfunktion** der Interessenkoalition K. Zwischen der Gewinnfunktion F_K und der im vorigen Abschnitt eingeführten Vorzugsrelation $\succ_K$ besteht ein enger Zusammenhang. Wir wissen, daß jede Interessenkoalition $K \in \mathfrak{K}_u$ bestrebt

---

[1]) John von Neumann (1903–1957), ungarischer Mathematiker, wirkte in Berlin, Hamburg, Princeton und Los Alamos.

ist, die für sie günstigste Situation $s \in S$ zu ermitteln. Als günstigste Situation können wir diejenige ansehen, für die der Wert der Gewinnfunktion F_K für die Koalition K am größten wird. Mit anderen Worten, für zwei gegebene Situationen $s_1 \in S, s_2 \in S$ wird die Koalition K diejenige bevorzugen, für die der Wert der Gewinnfunktion am größten ist. Das bedeutet mathematisch

$$s_1 \succ_K s_2 \quad \text{für} \quad K \in \mathfrak{K}_u, \quad \text{wenn} \quad F_K(s_1) > F_K(s_2).$$

Wir betrachten jetzt die Menge der Spieler I und wissen, daß für I gilt:

$$I = \mathfrak{K}_H \cup \mathfrak{K}_u.$$

Fällt die Menge der Handlungskoalitionen $\mathfrak{K}_H$ mit der Menge der Interessenkoalitionen $\mathfrak{K}_u$ zusammen, also $\mathfrak{K}_H \equiv \mathfrak{K}_u$, so gilt für die Menge der Spieler I:

$$I \equiv \mathfrak{K}_H \equiv \mathfrak{K}_u.$$

Werden gleichzeitig verbotene Situationen nicht zugelassen, d. h., die Menge der Situationen S ist dem kartesischen Mengenprodukt der Strategiemengen gleich,

$$S = \prod_{i \in I} S_i,$$

so sprechen wir von einem **nichtkooperativen Spiel.** Jedes nichtkooperative Spiel kann man durch das folgende Tripel darstellen

$$G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \rangle,$$

wobei I die Menge der Spieler, S_i die Menge der Strategien des Spielers i und F_i die Gewinnfunktion des Spielers i sind.

Ist die Anzahl der Spieler endlich, $|I| = n$, so sprechen wir von einem **n-Personenspiel.** Die eben beschriebene Form des n-Personenspiels nennt man nach J. v. Neumann ein **n-Personenspiel in Normalform.**

John von Neumann entwickelte zu dieser Form ein äquivalentes, aber bedeutend komplizierteres, allgemeines Schema eines n-Personenspiels, das er als **extensive** Form des Spielers bezeichnete und das heute in die Klasse der endlichen **Positionsspiele** eingeordnet wird.

Für die weiteren Untersuchungen gebrauchen wir nur die Normalform.

1.3. Optimalitätsprinzip

Nach der formalen Beschreibung eines Spiels ist es unbedingt notwendig, das Problem des **rationalen** oder **optimalen** Verhaltens des Spielers im Spiel zu analysieren. Die Interpretation des Wortes „optimal“ ist mehr oder weniger kompliziert, denn im Grunde genommen könnte man es mit der trivialen Bemerkung beschreiben, daß jeder Spieler den maximalen Gewinn anstrebt.

$F_i(s)$ sei die Gewinnfunktion des Spielers i bezüglich der Situation s; dann würde das eben Gesagte bedeuten, daß für jeden Spieler i das Maximum der Gewinnfunktion (sofern es existiert) zu bestimmen wäre, d. h. $\max\limits_{s \in S} F_i(s)$ für alle $i \in I$. Bei diesem Prinzip würde der Charakter des Spiels als Modell von Konfliktsituationen verlorengehen; denn der Konflikt wandelt sich zu einem Vergnügen, bei dem jeder Spieler ein Maximum an Genugtuung erhält. Aber unabhängig davon muß man das Kriterium verwerfen, denn nur in ganz speziellen, seltenen Fällen nehmen alle Gewinnfunktionen $F_i(s)$ für ein und dieselbe Situation $s \in S$ ihr Maximum an.

In den meisten Fällen werden die Spieler an der Schaffung verschiedener Situationen interessiert sein. Daraus resultiert, daß jeder Spieler nicht nur seine eigenen Handlungsmöglichkeiten analysieren, sondern auch die Möglichkeiten seiner Partner im Konflikt studieren muß. Wählt z. B. der Spieler i $(i \in I)$ die für ihn günstige Strategie s_i aus seiner Strategiemenge S_i, so muß er damit rechnen, daß ein Gegner, etwa der Spieler j $(j \in I)$, diese Strategie als eine Bedrohung für sich erkennt und Gegenmaßnahmen seinerseits durch die Auswahl einer Antwortstrategie $s_j \in S_j$ einleitet. Mit anderen Worten wird sich bei einem n-Personenspiel jeder Spieler mit seiner Strategiemenge und der seiner Mitspieler auseinandersetzen müssen, in deren Ergebnis eine Situation erarbeitet wird, die jeder Spieler akzeptiert und von der kein Spieler abweichen will. Ein solches Verhalten der Spieler führt uns zum Begriff des **Gleichgewichtspunktes** bzw. der **Gleichgewichtssituation.**

Wir betrachten eine Situation $s \in S$. Nach Definition erhält man die Menge der Situationen S aus dem kartesischen Mengenprodukt der Strategiemengen S_i der Spieler $i \in I$, $S = \prod_{i \in I} S_i$. Wir können demnach die Situation $s \in S$ wie folgt darstellen:

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n), \quad \text{wobei } s_i \in S_i \text{ für } i \in I \text{ ist.}$$

Ändert der Spieler $i \in I$ seine Strategie, wechselt er von der Strategie $s_i \in S_i$ zur Strategie $s_i' \in S_i$, so wird diese Veränderung folgendermaßen beschrieben:

$$s \parallel s_i' = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n).$$

Damit läßt sich der Begriff der Gleichgewichtssituation definieren.

Definition 1.2: *In einem n-Personenspiel $G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I}\rangle$ heißt eine Situation $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$* **Gleichgewichtssituation** *des Spieles, wenn für alle $i \in I$*

$$F_i(s \parallel s_i') \leqq F_i(s)$$

gilt. Die zur Gleichgewichtssituation s gehörende Strategie s_i des Spielers i heißt dann **Gleichgewichtsstrategie** *des Spielers i $(i \in I)$.*

Da die Gleichgewichtssituation von einem Strategien-n-Tupel beschrieben wird, spricht man oft vom **Gleichgewichtspunkt.** Eine Gleichgewichtssituation ist eine Verhaltensvorschrift für alle Spieler. Weicht beispielsweise der Spieler i von dieser Verhaltensvorschrift ab, die anderen Spieler dagegen beachten sie, so folgt aus der Definition, daß der Spieler i keinen größeren Gewinn zu erwarten hat, meist wird ihm diese Abweichung Schaden zufügen. Eine solche Situation wird von den Spielern als **optimal** anerkannt, und es existieren seitens der Spieler keine Motive, von der so festgelegten Situation abzuweichen. Somit stellt ein Gleichgewichtspunkt ein stabiles Verhalten der Spielergesamtheit dar.

Wir wollen als Lösung eines n-Personenspiels ein System von Handlungsweisen der Spieler im Spiel verstehen, das in sich eine Art Gleichgewicht und Stabilität besitzt. Das entspricht genau der Bestimmung der Gleichgewichtssituationen, und in eben dieser Bestimmung liegt unser Optimalitätsprinzip. Wir werden demnach die Gleichgewichtsstrategien als **optimale** Strategien bezeichnen.

Eine wichtige Frage besteht in der Existenz solcher Gleichgewichtssituationen. Wir wollen die Frage nicht im voraus beantworten, sondern die Existenz im Verlaufe der Betrachtungen der verschiedenen Spiele soweit wie möglich beschreiben. Zuvor noch einige einfache Definitionen:

Definition 1.3: *Ein n-Personenspiel in Normalform* $G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \rangle$ *heißt* **endlich**, *wenn alle Strategiemengen* S_i $(i \in I)$ *endlich sind.*

Definition 1.4: *Zwei n-Personenspiele* $G_1 = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \rangle$ *und* $G_2 = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F'_i\}_{i \in I} \rangle$ *mit* $F'_i(s) = a_i F_i(s) + b_i$ ($a_i > 0, b_i$ *beliebig und reelle Zahlen) heißen* **äquivalent** *zueinander.*

Diese Äquivalenzrelation führt, wie wir später sehen werden, zu gewissen Vorteilen bei der Lösung von Spielen, denn die Gleichgewichtssituationen in äquivalenten Spielen sind gleich.

Definition 1.5: *Das Spiel* $G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \rangle$ *heißt* **Konstantsummenspiel**, *falls eine Zahl c existiert mit*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(s) = c, \qquad s \in S.$$

Ist $c = 0$, *so spricht man von einem* **Nullsummenspiel.**

Besteht die Spielermenge I nur aus zwei Elementen, $I = \{1, 2\}$, so sprechen wir von einem **Zweipersonenspiel.** Eine interessante Klasse von Zweipersonenspielen sind die Zweipersonennullsummenspiele, für die gilt

$$\sum_{i=1}^{2} F_i(s) = 0 \quad \text{oder} \quad F_1(s) = -F_2(s).$$

Solche Zweipersonennullsummenspiele bezeichnet man auch als **antagonistische** Spiele, denn bezüglich der Interessen der Spieler besteht ein antagonistischer Widerspruch.

2. Zweipersonennullsummenspiele

2.1. Matrixspiele

Nachdem im vorigen Abschnitt ein kurzer Abriß über Form und Inhalt des Spieles und eine grobe Klassifizierung der Spiele gegeben wurde, kommen wir nun zum Hauptanliegen der spieltheoretischen Untersuchungen dieses Lehrbuches – der Bestimmung der optimalen Lösungen für bestimmte Klassen von antagonistischen Spielen. Als Rechtfertigung für solches Herangehen sei bemerkt, daß es bisher im wesentlichen nur für Zweipersonennullsummenspiele gelungen ist, eine ziemlich vollständige Theorie des optimalen Verhaltens der Spieler im Spiel zu schaffen.

Wir betrachten ein Zweipersonennullsummenspiel

$$G = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle \quad \text{mit} \quad I = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad F_1(s) = -F_2(s).$$

Die formale Beschreibung eines solchen Spieles läßt sich wesentlich vereinfachen:

a) Die Spielermenge I besteht immer aus zwei Elementen, $I = \{1, 2\}$; es ist demnach nicht nötig, sie extra aufzuführen.
b) Die Elemente der Menge $\{S_i\}_{i\in I}$ sind die Strategiemengen der beiden Spieler: S_1 und S_2. Um eine unübersichtliche Indizierung zu verhindern, bezeichnen wir sie mit X und Y, d. h. $S_1 = X$, $S_2 = Y$.
c) Im Zweipersonennullsummenspiel unterscheiden sich die Gewinnfunktionen der beiden Spieler nur um das Vorzeichen. Aus diesem Grunde genügt es, in der Beschreibung des Spieles nur die Gewinnfunktion des 1. Spielers anzugeben,

$$F(s) = F_1(s) = -F_2(s).$$

Daraus ergibt sich für das Zweipersonennullsummenspiel die folgende abgekürzte Bezeichnung

$$G = \langle X, Y, F\rangle.$$

Ist das Spiel G endlich, d. h., sind die Strategiemengen der Spieler endliche Mengen, so lassen sich die Werte der Gewinnfunktion $F(s)$ in Abhängigkeit der Situationen $s \in S$ in Matrixform darstellen. Besteht die Menge X aus m Elementen,

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

und die Menge Y aus n Elementen

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$$

dann erhält man für jede Situation $s \in S$ das Zahlenpaar

$$s = (x, y) \quad \text{oder} \quad s_{ij} = (x_i, y_j) \quad \text{für} \quad \begin{cases} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

und für die Gewinnfunktion F die Werte

$$F(s) = F(x, y), \qquad x \in X, \qquad y \in Y,$$

bzw.

$$F(s_{ij}) = F(x_i, y_j) = F_{ij} \quad \text{mit} \quad i = 1, \ldots, m; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Trägt man zeilenweise die Werte F_{ij} in Abhängigkeit der Strategien des Spielers 1 ab und in den Spalten die entsprechenden Werte in Abhängigkeit der Strategien des

Spielers 2, so erhält man folgende schematische Darstellung:

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n
x_1	F_{11}	F_{12}	$\cdots$	F_{1j}	$\cdots$	F_{1n}
x_2	F_{21}	F_{22}	$\cdots$	F_{2j}	$\cdots$	F_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	F_{i1}	F_{i2}	$\cdots$	F_{ij}	$\cdots$	F_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	F_{m1}	F_{m2}	$\cdots$	F_{mj}	$\cdots$	F_{mn}

Eine solche Tabelle (*Matrix*) bezeichnet man als **Gewinnmatrix** des Spielers 1 oder als **Spielmatrix**, wobei im weiteren bei ihrer Darstellung die übliche Matrizenschreibweise gebraucht werden soll, also

$$\boldsymbol{F} = [F_{ij}]_{m,n} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mn} \end{bmatrix}.$$

Spiele, bei denen man eine solche Spielmatrix aufstellen kann, heißen **Matrixspiele.**

Wir betrachten hierzu folgende Beispiele:

1. Ein Betrieb B kann ein bestimmtes Produkt durch n verschiedene technologische Prozesse erzeugen. Der Unterschied bei der Anwendung der verschiedenen Technologien besteht darin, daß in einem festgelegten Zeitraum eine unterschiedliche Stückzahl von verschiedener Qualität des Produktes hergestellt wird, d. h., die Anwendung der Technologie i ergibt z. B. eine größere Stückzahl von minderer Qualität des Produktes als die Anwendung der Technologie j. Der Betrieb hat also die Möglichkeit eine solche Technologie auszuwählen, die ihm die größte Stückzahl (schlechteste Qualität) und somit den größten Gewinn sichert. Auf der anderen Seite steht der Abnehmer A. Er ist daran interessiert, vom Betrieb B qualitätsgerechte Produkte zu erhalten, die er zur Weiterverarbeitung bzw. zum Verkauf an den Endverbraucher benötigt. Liefert der Betrieb B keine qualitätsgerechte Ware, so besteht für den Abnehmer das Recht der Rückgabemöglichkeit, bzw. er kann vom Betrieb eine gewisse Entschädigung fordern. Wir wollen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Betrieb B zwei technologische Prozesse zur Herstellung des Produktes zur Verfügung hat, d. h. $n = 2$. Damit ist gleichzeitig die Strategiemenge X des Betriebes B bestimmt: $X = \{x_1, x_2\}$ mit x_1 – Anwendung der Technologie 1 und x_2 – Anwendung der Technologie 2. Um das Verhalten des Abnehmers A analysieren zu können, muß man etwas über die Güte der vom Betrieb benutzten Technologie aussagen. Wir setzen voraus, daß im Zeitraum T der Betrieb B bei der Anwendung der Technologie 1 80 Stück des Produktes mit einer Ausschußquote von $p_1 = 0{,}05$ herstellt und bei der Anwendung der Technologie 2 50 Stück mit der Ausschußquote $p_2 = 0{,}02$. Mit anderen Worten würden bei der Anwendung der Strategie x_1 des Betriebes B von den 80 hergestellten Produktstücken durchschnittlich 4 Stück Ausschuß sein, und bei der Anwendung der Strategie x_2 hat man im Mittel von 50 produzierten Stücken 1 Ausschußstück.

Zwischen Betrieb und Abnehmer besteht folgende Vereinbarung:

Akzeptiert der Abnehmer A das angebotene Los bedingungslos, so haftet der Betrieb für eventuell auftretende Verluste durch Ausschußware nicht, meldet der Abnehmer jedoch von vornherein Bedenken an, so hat er die Möglichkeit, die schlechten Stücke zurückzugeben und eine Entschädigung von 1 Einheit pro schlechtem Stück zu verlangen. Der Stückpreis des erzeugten Produktes betrage 1 Einheit.

In Abhängigkeit von der Kenntnis über das Vorgehen des Betriebes B hat der Abnehmer A 2 Möglichkeiten, seine Strategiemenge zu bestimmen.

(a) Besteht zwischen Betrieb und Abnehmer ein Vertrauensverhältnis und gibt der Betrieb im voraus seine Handlungsweise bekannt, so sprechen wir von einem Spiel gegen den vollständig informierten Abnehmer. Die Strategiemenge des Abnehmers A hat dann folgendes Aussehen:

y_1: Der Abnehmer akzeptiert bedingungslos die Entscheidung des Betriebes. Mit anderen Worten, wählt der Betrieb B die Strategie x_1, so nimmt der Abnehmer A das Los ohne irgendwelche Bedingungen an (Bezeichnung: o), und genauso verhält sich der Abnehmer, wenn sich der Betrieb B für die Strategie x_2 entscheidet. Wir können die Strategie y_1 des Abnehmers A durch das Buchstabenpaar oo charakterisieren, wobei der erste Buchstabe die Antwort des Abnehmers auf die Strategie x_1 des Betriebes beschreibt und der zweite Buchstabe entsprechend die Antwort auf x_2 darstellt.

y_2: Der Abnehmer akzeptiert die Strategie x_1 des Betriebes bedingungslos, er antwortet also mit o und meldet als Antwort auf die Strategie x_2 Bedenken an, d. h., die Strategie x_2 des Betriebes wird nicht bedingungslos akzeptiert (Bezeichnung: n). Als Buchstabenpaar ausgedrückt, erhalten wir on. Analog ergibt sich y_3 : no und y_4 : nn.

Setzen wir voraus, daß bei Anwendung der Technologie 1 die Selbstkosten für ein produziertes Los 78 Einheiten sowohl für Betrieb und Abnehmer sind und entsprechend bei Anwendung der Technologie 2 die Selbstkosten 49,5 Einheiten betragen, so erhält man aus den vorliegenden Daten leicht die Gewinnmatrix für beide Spieler:

Betrieb B:

$F_B =$

B \ A	y_1 (oo)	y_2 (on)	y_3 (no)	y_4 (nn)
x_1	$80-78$	$80-78$	$72-78$	$72-78$
x_2	$50-49{,}5$	$48-49{,}5$	$50-49{,}5$	$48-49{,}5$

$=$

B \ A	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	2	2	-6	-6
x_2	0,5	$-1{,}5$	0,5	$-1{,}5$

Abnehmer A:

$F_A =$

B \ A	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$76-78$	$76-78$	$84-78$	$84-78$
x_2	$49-49{,}5$	$51-49{,}5$	$49-49{,}5$	$51-49{,}5$

$=$

B \ A	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	-2	-2	6	6
x_2	$-0{,}5$	1,5	$-0{,}5$	1,5

Wir sehen, daß $F = F_B = -F_A$ ist, wir haben es also mit einem Zweipersonennullsummenspiel zu tun, und wegen der Endlichkeit der Strategiemengen beider Spieler ist dieses Spiel ein Matrixspiel.

(b) Eine andere Variante des Problems erhalten wir dann, wenn der Abnehmer nicht vom Betrieb über sein Vorgehen informiert wird. Dann erweisen sich die Handlungsmöglichkeiten o und n des Abnehmers unmittelbar selbst als Strategien von A, d. h., der Abnehmer hat die Möglichkeit, ohne (o) oder mit (n) Einschränkung auf das Vorgehen des Betriebes zu antworten. Bleiben die oben angeführten Wertigkeiten erhalten, so ergeben sich die folgenden Gewinnmatrizen:

Betrieb B:

$F_B =$

B \ A	y_1 (o)	y_2 (n)
x_1	$80-78$	$72-78$
x_2	$50-49{,}5$	$48-49{,}5$

$=$

B \ A	y_1	y_2
x_1	2	-6
x_2	0,5	$-1{,}5$

Abnehmer A:

$F_A =$

B \ A	y_1	y_2
x_1	$76-78$	$84-78$
x_2	$49-49{,}5$	$51-49{,}5$

$=$

B \ A	y_1	y_2
x_1	-2	6
x_2	$-0{,}5$	1,5

Auch diese Variante stellt ein Matrixspiel dar, denn $F = F_B = -F_A$, und die Strategiemengen der Spieler sind endlich.

2. Knobelspiel Papier–Schere–Stein

Das Knobelspiel Papier–Schere–Stein ist ein Zweipersonenspiel. Beide Spieler wählen unabhängig voneinander eines der Symbole „Papier“, „Schere“ oder „Stein“. Danach vergleicht man das Gewählte, und der Sieger erhält vom Verlierer 1 Einheit nach der Regel: Papier verliert gegenüber Schere, Schere verliert gegenüber Stein, und Stein verliert gegenüber Papier.

Die Art des Spieles ist antagonistisch und ein Matrixspiel, denn die Strategiemengen sind endlich. Die Strategiemengen der beiden Spieler kann man wie folgt beschreiben:

1. Spieler: x_1 – er wählt Papier (P)
x_2 – er wählt Schere (Sch)
x_3 – er wählt Stein (St)

2. Spieler: y_1 – er wählt Papier (P)
y_2 – er wählt Schere (Sch)
y_3 – er wählt Stein (St)

Die Gewinnmatrix des 1. Spielers hat dann folgendes Aussehen:

X/Y	$y_1(P)$	$y_2(Sch)$	$y_3(St)$
$x_1(P)$	0	-1	1
$x_2(Sch)$	1	0	-1
$x_3(St)$	-1	1	0

2.2. Wert eines Spieles und optimale Strategien

Als nächstes wollen wir uns die Aufgabe stellen, die optimalen Strategien im Matrixspiel zu bestimmen und anhand der eben angeführten Beispiele zu erläutern. Die optimalen Strategien der Spieler werden durch die Gleichgewichtsstrategien

(s. Abschn. 1.3.) gegeben, wobei die Gleichgewichtsstrategien die zu einer Gleichgewichtssituation S gehörenden Strategien sind. Eine Gleichgewichtssituation ist dadurch gekennzeichnet, daß für jeden Spieler ein Abweichen von dieser unvorteilhaft wäre, d. h.

$$F_i(s \parallel s_i) \leqq F_i(s) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Auf ein allgemeines Zweipersonennullsummenspiel übertragen, d. h. $I = \{1, 2\}$ und $F(s) = F_1(s) = -F_2(s)$, ergibt sich daraus

$$F_1(s \parallel s_1) \leqq F_1(s) \quad \text{und} \quad F_2(s \parallel s_2) \leqq F_2(s).$$

Wird die Gleichgewichtssituation $s \in S$ durch das Strategienpaar (x^*, y^*) beschrieben, $s = (x^*, y^*)$, und werden die entsprechenden Abweichungen davon wie folgt dargestellt

$$(s \parallel s_1) = (x, y^*),$$

$$(s \parallel s_2) = (x^*, y),$$

so erhält man entsprechend der Gleichgewichtsdefinition

$$F_1(x, y^*) \leqq F_1(x^*, y^*) \quad \text{und} \quad F_2(x^*, y) \leqq F_2(x^*, y^*).$$

Aus der Beziehung $F_1(x, y) = -F_2(x, y)$ und aus der letzten Ungleichung folgt

$$-F_1(x^*, y) \leqq -F_1(x^*, y^*)$$

oder

$$F_1(x^*, y^*) \leqq F_1(x^*, y),$$

und als Resümee bekommt man die Bedingung für einen Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) im Zweipersonennullsummenspiel

$$F(x, y^*) \leqq F(x^*, y^*) \leqq F(x^*, y)$$

(dabei wurde die Beziehung $F(x, y) = F_1(x, y)$ impliziert). Diese Bedingung ist gleichwertig mit der Beziehung

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} F(x, y^*) = \min_{y \in Y} F(x^*, y),$$

sofern die Existenz des Maximums bzw. des Minimums der Gewinnfunktion gesichert ist. Die letzte Behauptung läßt sich leicht aus den Beziehungen

$$\max_{x \in X} F(x, y^*) \geqq F(x, y^*) \quad \text{für alle } x \in X$$

und

$$\min_{y \in Y} F(x^*, y) \leqq F(x^*, y) \quad \text{für alle } y \in Y$$

verifizieren.

Die Gewinnfunktion $F(x, y)$ muß also in der Gleichgewichtssituation $s = (x^*, y^*)$ bezüglich x ein Maximum und bezüglich y ein Minimum erreichen. John v. Neumann bezeichnet die Gleichgewichtspunkte der Zweipersonennullsummenspiele als **Sattelpunkte**, wobei der Name „Sattelpunkt" aus der Geographie stammt und unser Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) die wesentlichen Merkmale eines Sattelpunktes oder Passes in diesem Punkt hat.

Für die Existenz eines Sattelpunktes gilt folgender Satz:

Satz 2.1: *Für das Zweipersonennullsummenspiel* $G = \langle X, Y, F \rangle$ *erhält man dann und nur dann einen Sattelpunkt, wenn die Ausdrücke* $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$ *und* $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y)$

existieren und gleich sind, d. h.

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = F(x^*, y^*) = v.$$

Die Gleichgewichtsstrategien des 1. Spielers sind diejenigen Strategien $x^* \in X$, für die das y-Infimum bzgl. x das Maximum erreicht, und analog sind die Gleichgewichtsstrategien des 2. Spielers diejenigen Strategien $y^* \in Y$, für die das x-Supremum bzgl. y sein Minimum annimmt.

Beweis: Ist (x^*, y^*) ein Sattelpunkt, so gilt nach der Definition des Sattelpunktes

$$F(x, y^*) \leqq F(x^*, y^*) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Existiert $\inf_{y \in Y} F(x, y)$, dann gilt erst recht

$$\inf_{y \in Y} F(x, y) \leqq F(x^*, y^*) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Aus der Beziehung

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} F(x, y^*) = \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

folgt, daß der Ausdruck $\min_{y \in Y} F(x^*, y)$ selbst ein solches y-Infimum ist, d. h.

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y).$$

Analog zeigt man, daß auch

$$F(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

gilt, und also die Gleichung

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = v$$

erfüllt ist.

Umgekehrt sei

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = v.$$

Die Gleichgewichtsstrategie x^* des 1. Spielers ist diejenige Strategie, für die das y-Infimum bzgl. x das Maximum erreicht, d. h.

$$\inf_{y \in Y} F(x^*, y) = v.$$

Analog gilt für y^*

$$\sup_{x \in X} F(x, y^*) = v.$$

Da aber $\inf_{y \in Y} F(x^*, y) \leqq F(x^*, y^*)$ ist, erhalten wir

$$v \leqq F(x^*, y^*).$$

Genauso folgt aus

$$\sup_{x \in X} F(x, y^*) = v,$$

daß

$$F(x^*, y^*) \leqq v$$

ist. Demnach erhält man

$$F(x^*, y^*) = v = \sup_{x \in X} F(x, y^*) = \max_{x \in X} F(x, y^*)$$

und

$$F(x^*, y^*) = v = \inf_{y \in Y} F(x^*, y) = \min_{y \in Y} F(x^*, y)$$

d. h., (x^*, y^*) ist Gleichgewichtspunkt, und der Satz ist bewiesen.

Aus der Existenz des Sattelpunktes folgt unmittelbar der Begriff des Wertes eines Spieles.

Definition 2.1: *Das antagonistische Spiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ besitze einen Sattelpunkt. Die Zahl*

$$v = v(G) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

heißt **Wert des Spieles** *(für den Spieler 1).*

Aus der Art der Zweipersonennullsummenspiele erhält man den Wert für den Spieler 2 durch Umkehrung des Vorzeichens.

Für Matrixspiele folgt aus der Endlichkeit der Strategiemengen und der Beschränktheit der Gewinnfunktion für die Existenz des Sattelpunktes und damit des Wertes des Spieles das Kriterium

$$v(G) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y).$$

Dieses Kriterium ist auch unter dem Namen **Minimax-Prinzip** bekannt.

Wenn für ein Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ ein solcher Sattelpunkt existiert, so läßt er sich leicht ermitteln. Die Strategiemenge des 1. Spielers bestehe wieder aus m Elementen,

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\},$$

und die Strategiemenge des 2. Spielers habe n Elemente,

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Die Gewinnfunktion

$$F_{ij} = F(x_i, y_j)$$

sei beschränkt. Dann erhält man den Wert des Spieles aus der Relation

$$v(G) = \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} F_{ij} = \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} F_{ij}.$$

Zur Bestimmung des Wertes betrachten wir zunächst die linke Seite der letzten Gleichung, also den Ausdruck

$$\max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} F_{ij}.$$

Dazu ermittelt man in jeder Zeile i ($i = 1, \ldots, m$) der Gewinnmatrix F den minimalen Funktionswert der Gewinnfunktion F_{ij}, und aus dieser erhaltenen Menge bestimmt man bzgl. i, also bezüglich der Zeilen, das Maximum. Ebenso verfährt man mit der rechten Seite der obigen Gleichung. Wir bestimmen zunächst in jeder Spalte j ($j = 1, \ldots, n$) der Gewinnmatrix F den maximalen Funktionswert und anschließend aus der erhaltenen Menge das Minimum.

Schematisch sieht das so aus:

$F =$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	$\min_{j=1}^{n} F_{ij}$
x_1	F_{11}	F_{12}	$\cdots$	F_{1j}	$\cdots$	F_{1n}	F_1
x_2	F_{21}	F_{22}	$\cdots$	F_{2j}	$\cdots$	F_{2n}	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	F_{i1}	F_{i2}	$\cdots$	F_{ij}	$\cdots$	F_{in}	F_i[1]
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	F_{m1}	F_{m2}	$\cdots$	F_{mj}	$\cdots$	F_{mn}	F_m
$\max_{i=1}^{m} F_{ij}$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\cdots$	$\bar{F}_j$	$\cdots$	$\bar{F}_n$	$F_i = \bar{F}_j$

$\min(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n) = \bar{F}_j$ = Wert des Spieles

Aus dem Kriterium für den Wert des Spieles $v(G)$ folgt, daß

$$F_i = \bar{F}_j = v(G)$$

sein muß, der Sattelpunkt ist der Funktionswert F_{ij}, und die optimale Strategie des 1. Spielers ist die Strategie

$$x^* = x_i$$

und die des 2. Spielers

$$y^* = y_j.$$

Zur Illustration wollen wir den Wert der Spiele, den Sattelpunkt und die optimalen Strategien der Spieler für die im Abschnitt 2.1. aufgeführten Beispiele bestimmen.

---

[1]) $\max(F_1, F_2, \ldots, F_m) = F_i$.

1. (a) Spiel gegen den informierten Abnehmer:
Die Gewinnmatrix des Betriebes B hatte folgende Gestalt:

$F =$

B \ A	y_1	y_2	y_3	y_4	$\min\limits_{j=1}^{4} F_{ij}$
x_1	2	2	−6	−6	−6
x_2	0,5	−1,5	0,5	−1,5	−1,5
$\max\limits_{i=1}^{2} F_{ij}$	2	2	0,5	−1,5	$v(G) = -1{,}5$

$\max(-6, -1{,}5) = -1{,}5$

$\min(2,\ 2,\ 0{,}5,\ -1{,}5) = -1{,}5$

Bildet man die Zeilenminima der Gewinnmatrix, so erhält man die Menge $(-6, -1{,}5)$, und das hieraus ermittelte Maximum ist $-1{,}5$. Analog bekommt man aus den Spaltenmaxima die Menge $(2, 2, 0{,}5, -1{,}5)$, und das dazugehörige Minimum hat ebenfalls den Wert $-1{,}5$. Damit ist die Bedingung

$$v(G) = \max_{i=1}^{m} \min_{j=1}^{n} F_{ij} = \min_{j=1}^{n} \max_{i=1}^{m} F_{ij} = -1{,}5$$

erfüllt und somit Sattelpunkt und Wert des Spieles (natürlich für Spieler 1 = Betrieb B) ermittelt.

Die optimale Strategie für den Spieler 1, also für den Betrieb, ist die Strategie

$$x^* = x_2,$$

d. h., der Betrieb arbeitet nach der Technologie 2. Die optimale Strategie des Abnehmers ist

$$y^* = y_4.$$

Der Abnehmer nimmt also nie ein Los bedingungslos an, ganz gleich, welche Strategie der Betrieb auch wählt. Ein Abweichen einer Seite von der Gleichgewichtssituation würde nur mit Verlust der abweichenden Seite enden, denn würde z. B. der Betrieb die Strategie x_1 vorziehen, der Abnehmer aber die optimale Strategie beibehalten, so beträgt sein Gewinn -6 Einheiten, und genauso würde es dem Abnehmer ergehen, wenn er von der Gleichgewichtssituation abweicht.

(b) Spiel gegen den nichtinformierten Abnehmer:
Der Ausgangspunkt ist wieder die Gewinnmatrix:

$F =$

B \ S	y_1	y_2	$\min\limits_{j=1}^{2} F_{ij}$
x_1	2	−6	−6
x_2	0,5	−1,5	−1,5
$\max\limits_{i=1}^{2} F_{ij}$	2	−1,5	$v(G) = -1{,}5$

$\min(2, -1{,}5) = -1{,}5$

Analog dem Beispiel (a) bildet man zunächst die Zeilenminima und ermittelt aus der erhaltenen Menge den maximalen Wert. Aus den Zeilenmaxima erhält man durch Ermittlung des zugehörigen minimalen Wertes die rechte Seite des Sattelpunktkriteriums. Wir sehen, daß ein Gleichgewichtspunkt existiert, der Wert des Spieles (für Spieler 1) beträgt $-1{,}5$ Einheiten, und die optimalen Strategien sind die Strategien

$$x^* = x_2 \text{ (Betrieb wählt Technologie 2)},$$

$$y^* = y_2 \text{ (Abnehmer akzeptiert nicht bedingungslos)}.$$

2. **Knobelspiel Papier–Schere–Stein**

Wir wollen auch hier genauso wie bei den vorangegangenen Beispielen den Wert des Spieles mit den zugehörigen optimalen Strategien bestimmen:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3	$\min\limits_{i=1}^{3} F_{ij}$	
x_1	0	−1	1	−1	
x_2	1	0	−1	−1	$\max(-1, -1, -1) = -1$
x_3	−1	1	0	−1	
$\max\limits_{j=1}^{3} F_{ij}$	1	1	1		
	$\min(1, 1, 1) = 1$				

Wir erhalten also

$$\max_{i=1}^{3} \min_{j=1}^{3} F_{ij} = -1 \quad \text{und} \quad \min_{j=1}^{3} \max_{i=1}^{3} F_{ij} = 1,$$

d. h., daß beide Relationen nicht übereinstimmen, das Minimax-Kriterium nicht erfüllt ist und somit kein Sattelpunkt und Wert des Spieles existiert.

Damit tritt natürlich sofort die Frage in den Vordergrund, ob nicht doch eine Lösung des Spieles und somit eine optimale Verhaltensvorschrift für die Spieler möglich ist.

Die Beantwortung dieser Frage führt zur Erweiterung des Spielbegriffes.

2.3. Gemischte Erweiterung

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal das Knobelspiel Papier–Schere–Stein, so liegt die Vermutung nahe, daß dieses Spiel nicht nur einmal, sondern in mehreren Partien hintereinander gespielt wird. Der gesunde Menschenverstand sagt uns, daß es dann für die Spieler günstig ist, ihre Strategien nach den Mechanismen des Zufalls zu wechseln, ihre Strategien mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu mischen. Das führt zu dem Begriff der gemischten Strategien.

Definition 2.2: *Gegeben sei das Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ mit den Strategiemengen $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ und $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.*

Unter der **gemischten Strategie** *des Spielers 1 versteht man den m-dimensionalen Vektor $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)'$ mit $p_i \geqq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$* und $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$; *eine ge-*

mischte Strategie des 2. Spielers ist dann entsprechend der n-dimensionale Vektor $b = (q_1, q_2, \ldots, q_m)'$ *mit* $q_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ und $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Die Menge der gemischten Strategien für den 1. Spieler ist somit eine Menge von Vektoren des R^m, also

$$P = \{\boldsymbol{p} \in R^m | p_i \geqq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}.$$

Entsprechend ist

$$Q = \{\boldsymbol{q} \in R^n | q_i \geqq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\}$$

die Menge der gemischten Strategien des 2. Spielers. Im Unterschied zu den gemischten Strategien werden die bisher betrachteten gewöhnlichen Strategien als **reine Strategien** bezeichnet. Offensichtlich kann man diese reinen Strategien als Spezialfall der gemischten Strategien auffassen. Aus der Definition der gemischten Strategie ist ersichtlich, daß man diese als Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der reinen Strategien interpretieren kann. Eine spezielle Verteilung, die einer bestimmten Strategie das Wahrscheinlichkeitsmaß 1 und den restlichen das Maß 0 zuordnet, etwa $p_i = 1$ und $p_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m, j \neq i)$ ist eine solche reine Strategie. Das Entsprechende gilt natürlich für die Menge Q.

Die Mengen P und Q sind, wie man leicht zeigen kann, abgeschlossen und beschränkt. Die Konvexität der Menge P (d. h., wenn man zwei beliebige Punkte der Menge P betrachtet, so müssen sämtliche Punkte auf der Verbindungstrecke dieser beiden Punkte wieder zu P gehören, vgl. Bd. 4, 1.1.3.) erhält man aus (und analog für die Menge Q):

$$\lambda \boldsymbol{p}' + (1 - \lambda) \boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}''', \qquad \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'' \in P, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{1}$$

Offensichtlich ist

$$p_j''' \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

denn wenn $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'' \in P$, so sind $\boldsymbol{p}' \geqq 0$ und $\boldsymbol{p}'' \geqq 0$ und folglich auch $\boldsymbol{p}''' \geqq 0$.

Es ist nach (1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} p_i''' &= \sum_{i=1}^{m} (\lambda p_i' + (1 - \lambda) p_i'') \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} p_i' + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} p_i''.\end{aligned}$$

Aus der Definition der Menge P ist ersichtlich, daß

$$\sum_{i=1}^{m} p_i' = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i'' = 1$$

ist, und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{m} p_i''' = \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Für $\boldsymbol{p}'''$ gilt also: $\boldsymbol{p}''' \in R^m$, $\boldsymbol{p}''' \geqq 0$ und $\sum_{i=1}^{m} p_i''' = 1$, d. h. $\boldsymbol{p}''' \in P$; P ist demnach konvex.

Mit Hilfe des Begriffs der gemischten Strategie läßt sich der Spielbegriff erweitern.

Definition 2.3: *Gegeben sei ein endliches Zweipersonennullsummenspiel* $G = \langle X, Y, F\rangle$, *wobei* $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ *und* $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *die reinen Strategiemengen der Spieler und* $\boldsymbol{F} = [F_{ik}]_{m,n}$ *die dazugehörige Gewinnmatrix sind. Die Mengen der gemischten Strategien sind* $P = \{\boldsymbol{p} \in R^m | \boldsymbol{p} \geqq 0$ *und* $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1\}$ *und* $Q = \{\boldsymbol{q} \in R^n | \boldsymbol{q} \geqq 0$ *und* $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q}_j = 1\}$.

Für jede gemischte Strategie $\boldsymbol{p} \in P$ und $\boldsymbol{q} \in Q$ *läßt sich dann der Erwartungswert* E (*für Spieler* 1) *nach*

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F_{ij} q_j = \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}$$

bestimmen, und das Spiel $\Gamma = \langle P, Q, E\rangle$ *heißt* **gemischte Erweiterung** *von* G.

Der Erwartungswert $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F_{ij} q_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F(x_i, y_j)\, q_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} F(x_i, y_j)\, q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} F(x_i, y_j)\, p_i . \end{aligned}$$

Bezeichnen wir

$$\sum_{j=1}^{n} F(x_i, y_j)\, q_j = E(x_i, \boldsymbol{q}) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

und den entsprechenden Vektor

$$[E(x_i, \boldsymbol{q})]_{m,1} = \boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{q})$$

bzw. ist $\sum_{i=1}^{m} F(x_i, y_j)\, p_i = E(\boldsymbol{p}, y_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ oder vektoriell

$$[E(\boldsymbol{p}, y_j)]_{n,1} = \boldsymbol{E}_y(\boldsymbol{p}),$$

so erhalten wir für den Erwartungswert

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} E(x_i, \boldsymbol{q})\, p_i = \boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{p},$$

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} E(\boldsymbol{p}, y_j)\, q_j = \boldsymbol{E}_y(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{q}.$$

Es erhebt sich natürlich die Frage, inwieweit man für die gemischte Erweiterung den Wert des Spieles bestimmen kann.

Das Ziel des Spielers 1 liegt darin, den Erwartungswert $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ möglichst groß zu machen, wogegen der Spieler 2 bestrebt sein wird, ihn möglichst klein zu halten. Mit anderen Worten muß der 1. Spieler eine Strategie $\boldsymbol{p} \in P$ so wählen, daß $\min_{\boldsymbol{q} \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ möglichst groß wird, also

$$v_1 = \max_{\boldsymbol{p} \in P} \min_{\boldsymbol{q} \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

(Wegen der Abgeschlossenheit und Beschränktheit der Mengen P und Q nimmt die stetige Funktion $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ auf einer dieser Mengen stets ihr Maximum bzw. Minimum an. Vgl. Bd. 4, Satz 2.5.) Ebenso muß der 2. Spieler seine Strategie $\boldsymbol{q} \in Q$ so wählen, daß $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ möglichst klein wird, wobei er in Betracht ziehen muß, daß sein Gegner auf die Maximierung des Erwartungswertes orientiert. Es gilt demnach

$$v_2 = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Nunmehr sind wir in der Lage, den Hauptsatz der Theorie der Matrixspiele zu formulieren:

Satz 2.2 (*Hauptsatz für Matrixspiele*): *Für jedes Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ besitzt die zugehörige gemischte Erweiterung $\Gamma = \langle P, Q, E \rangle$ einen Wert, und für beide Spieler existieren optimale Strategien. Den Wert $v(\Gamma)$ des Spieles Γ erhält man durch die Gleichung $v_1 = v_2$, also*

$$v(\Gamma) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Der Hauptsatz für Matrixspiele besagt also, daß in jedem endlichen Zweipersonennullsummenspiel ein Paar gemischter Strategien $\boldsymbol{p}^* \in P$ und $\boldsymbol{q}^* \in Q$ existiert, so daß $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ Sattelpunkt von Γ ist, d. h.

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) \leqq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) \leqq E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}).$$

Beweis des Hauptsatzes. Der letzte Teil des Satzes, die Bestimmung des Wertes der gemischten Erweiterung Γ, ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Gleichgewichtspunktes und den entsprechenden Herleitungen wie in Abschnitt 2.2.

Es bleibt also zu zeigen, daß für jedes Matrixspiel die Gleichung

$$v(\Gamma) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

existiert. Die Existenz von $v_1 = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ und $v_2 = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ ist durch die Kompaktheit der Mengen P und Q sowie durch die Stetigkeit der Funktion $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ garantiert (vgl. Bd. 4, 2.5.). Offensichtlich gilt für alle $\boldsymbol{p} \in P$ und $\boldsymbol{q} \in Q$ die Ungleichung

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \leqq \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Daraus folgt unmittelbar, daß

$$\min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \leqq \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

für alle $\boldsymbol{p} \in P$ ist. Diese Ungleichung gilt wie gesagt für alle $\boldsymbol{p} \in P$, folglich auch für das $\boldsymbol{p} \in P$, für welches die linke Seite der Ungleichung maximal wird, d. h.

$$v_1 = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \leqq \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = v_2.$$

Gelingt es uns, die Umkehrung der letzten Ungleichung, also $v_2 \leqq v_1$ zu zeigen, dann ist der Hauptsatz der Matrixspiele vollständig bewiesen.

Nach Definition von v_2 gilt:

$$v_2 = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q})$$

mit $E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ für alle $\boldsymbol{q} \in Q$.

Wir berechnen zunächst $E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q})$. Die Vorschrift zur Bestimmung von $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$,

$$E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \max_{\boldsymbol{p}\in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}),$$

kann als lineares Optimierungsprogramm geschrieben werden, nämlich

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{p}_i E(x_i, \boldsymbol{q}) \to \max$$

unter den Nebenbedingungen $\boldsymbol{p} \in P$, d. h.

$$\boldsymbol{p} \in R^m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

$$p_i \geqq 0, \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Aus der Dualitätstheorie für lineare Optimierungsprobleme (vgl. Band 14, S. 74ff., insbesondere S. 79, Satz 1) folgt:

$$E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \min_{y\in R} y$$

mit $R = \{y | y \geqq E(x_i, \boldsymbol{q}), \quad i = 1, \dots, m\}$.

Aus dem dualen Optimierungsprogramm folgt unmittelbar

$$E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \max_{i=1}^{m} E(x_i, \boldsymbol{q}) = E(x_{i_0}, \boldsymbol{q}) \quad \text{für alle} \quad q \in Q.$$

Kehren wir zur Bestimmung von v_2 zurück:

$$v_2 = \min_{q\in Q} E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \min_{q\in Q} E(x_{i_0}, \boldsymbol{q})$$

kann man wieder als lineares Optimierungsprogramm aufschreiben und über das duale Problem lösen:

$$E(x_{i_0}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} q_j F(x_{i_0}, y_j) \to \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\boldsymbol{q} \in R^n, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

$$q_j \geqq 0, \quad (j = 1, \dots, n);$$

als duales Problem erhalten wir

$$v_2 = \max_{z\in S} z$$

mit $S = \{z | z \leqq F(x_{i_0}, y_j), \quad j = 1, \dots, n\}$,

und als Lösung folgt

$$v_2 = \min_{j=1}^{n} F(x_{i_0}, y_j) = F(x_{i_0}, y_{j0}).$$

Wir betrachten $E(x_{i_0}, \boldsymbol{q})$ für alle $\boldsymbol{q} \in Q$:

$$E(x_{i_0}, \boldsymbol{q}) = \sum_{j=1}^{n} q_j F(x_{i_0}, y_j) \geqq F(x_{i_0}, y_{j_0}) \sum_{j=1}^{n} q_j .$$

Da $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ ist, gilt

$$v_2 = F(x_{i_0}, y_{j_0}) \leqq E(x_{i_0}, \boldsymbol{q}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{q} \in Q .$$

Somit gilt auch

$$v_2 \leqq \min_{q \in Q} E(x_{i_0}, \boldsymbol{q}), \text{ und wir erhalten}$$

$$v_2 \leqq \max_{i=1}^{m} \min_{q \in Q} E(x_i, \boldsymbol{q}) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = v_1 .$$

Aus der gleichzeitigen Richtigkeit der Beziehungen $v_1 \geqq v_2$ und $v_1 \leqq v_2$ folgt, daß $v_1 = v_2$ ist, und der Hauptsatz für Matrixspiele ist bewiesen.

Sehr interessant ist in diesem Zusammenhang die Bestimmung des Wertes des sogenannten symmetrischen Matrixspieles, denn wie wir sehen werden, läßt sich jedes Matrixspiel auf ein symmetrisches Matrixspiel zurückführen.

Definition 2.4: *Ein Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ heißt* **symmetrisch**, *wenn die Gewinnmatrix schiefsymmetrisch ist, d. h. $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$.*

Aus der Symmetrieeigenschaft der Gewinnmatrix folgt, daß sowohl die Strategiemenge X des Spielers 1 als auch die Strategiemenge Y des Spielers 2 n Elemente enthält, also

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad Y = \{y_1, \ldots, y_n\} .$$

Für die gemischte Erweiterung $\Gamma = \langle P, Q, E \rangle$ gilt dann:

$$P = \{\boldsymbol{p} \in R^n \mid \boldsymbol{p} \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\},$$

$$Q = \{\boldsymbol{q} \in R^n \mid \boldsymbol{q} \geqq 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\},$$

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i F_{ij} q_j = \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q} \\ &= (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q})' = \boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p} . \end{aligned}$$

Es sei $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ mit $\boldsymbol{p}^* \in P$, $\boldsymbol{q}^* \in Q$ Sattelpunkt, d. h.

$$v(\Gamma) = E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*) = \boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^*$$

(die Existenz des Sattelpunktes ist nach dem Hauptsatz über Matrixspiele gesichert), dann gilt nach dem Sattelpunktkriterium

$$\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^* \leqq \boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^* \leqq \boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}$$

bzw.

$$(\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^*)' \leqq (\boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^*)' \leqq (\boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q})' .$$

Durch Umformen erhält man:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{p} &\leqq \boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{p}^* \leqq \boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{p}^*,\\
-\boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p} &\leqq -\boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^* \leqq -\boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^*,\\
\boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p} &\geqq \boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^* \geqq \boldsymbol{q}' \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^*.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung besagt, daß man für die Gleichgewichtssituation $(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*)$ den Wert $v(\Gamma) = \boldsymbol{q}^{*\prime}\boldsymbol{F}\boldsymbol{p}^*$ erhält,

$$
\begin{aligned}
v(\Gamma) &= \boldsymbol{q}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^* = (\boldsymbol{q}^* \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}^*)'\\
&= \boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{q}^* = -\boldsymbol{p}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{q}^* = -v(\Gamma).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt unmittelbar $v(\Gamma) = 0$. Zusammenfassend läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 2.3: *In jedem symmetrischen Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ ist der Wert seiner gemischten Erweiterung $\Gamma = \langle P, Q, E \rangle$ stets Null, d. h.*

$$v(\Gamma) = 0.$$

Betrachtet man ein beliebiges Spiel G mit positiver Gewinnmatrix $\boldsymbol{F}$ (d. h., alle Elemente der Gewinnmatrix sind positiv), so kann man durch verschiedene Verfahren eine Symmetrisierung erreichen, etwa indem wir ein neues Spiel mit der Gewinnmatrix

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{F}' & 0 & -\boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_m' & \boldsymbol{I}_n' & 0 \end{bmatrix} = [b_{ij}]_{m+n+1,\, m+n+1},
$$

konstruieren, wobei $\boldsymbol{I}_K = [\mathbf{1}]_{K,1}$ ist. Die Voraussetzung $\boldsymbol{F} > 0$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil man aus der Äquivalenzrelation von Spielen stets ein äquivalentes Spiel mit obiger Bedingung erhalten kann.

2.4. Lösung von Matrixspielen mit Hilfe der linearen Optimierung

Nachdem wir uns eingehend über Existenzfragen für Gleichgewichtspunkte in Matrixspielen beschäftigt haben, gehen wir jetzt zu den Lösungsmethoden über, d. h., wir untersuchen die Frage, wie man die optimalen gemischten Strategien bei Matrixspielen ermitteln kann.

Es gibt hierfür verschiedene Möglichkeiten, etwa algebraische Verfahren, Lösungsverfahren mit Hilfe von Differentialgleichungen, Iterationsverfahren, Simulationsverfahren (vgl. Band 20, S. 54), Verfahren der linearen Optimierung. Wir wollen uns nur mit den letzteren Verfahren beschäftigen; denn einmal würde die Behandlung aller Verfahren den Rahmen dieses Lehrbuches sprengen, zum anderen kann man aus den Lösungsverfahren mit Hilfe der linearen Optimierung gewisse Verallgemeinerungen zwischen der Spieltheorie und der Theorie der konvexen Optimierung herleiten.

Ausgangspunkt ist die Sattelpunktrelation

$$v(\Gamma) = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}).$$

Beim Beweis des Hauptsatzes für Matrixspiele erhielten wir folgende Beziehung:

$$E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max_{i=1}^{m} E(x_i, \boldsymbol{q}) \quad \text{für alle } \boldsymbol{q} \in Q.$$

Genauso läßt sich zeigen, daß

$$E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) = \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{j=1}^{n} E(\boldsymbol{p}, y_j) \quad \text{für alle } \boldsymbol{p} \in P$$

gilt.

Aus der Sattelpunktrelation erhalten wir dann

$$\begin{aligned} v(\Gamma) &= \max_{p \in P} \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \\ &= \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}^*) = \max_{i=1}^{m} E(x_i, \boldsymbol{q}^*) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} v(\Gamma) &= \min_{q \in Q} \max_{p \in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \\ &= \min_{q \in Q} E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}) = \min_{j=1}^{n} E(\boldsymbol{p}^*, y_j). \end{aligned}$$

Setzen wir $E(x_i, \boldsymbol{q}^*) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{q}_j^* F_{ij}$

und $E(\boldsymbol{p}^*, y_j) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{p}_i^* F_{ij}$,

so folgt aus den obigen Beziehungen:

$$v(\Gamma) = \max_{i=1}^{m} E(x_i, \boldsymbol{q}^*) = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_j^* F_{ij} \geqq \sum_{j=1}^{n} q_j^* F_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m);$$

$$v(\Gamma) = \min_{j=1}^{n} E(\boldsymbol{p}^*, y_j) = \min_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i^* F_{ij} \leqq \sum_{i=1}^{m} p_i^* F_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

und wir erhalten eine andere Sattelpunktrelation, nämlich

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} q_j^* \leqq v(\Gamma) \leqq \sum_{i=1}^{m} p_i^* F_{ij} \qquad \begin{matrix} (i = 1, \ldots, m) \\ (j = 1, \ldots, n). \end{matrix}$$

Aus dieser Sattelpunktrelation läßt sich leicht ein zugehöriges lineares Optimierungsproblem herleiten, mit dessen Hilfe man die optimalen Strategien $\boldsymbol{p}^* \in P$ und $\boldsymbol{q}^* \in Q$ ermitteln kann. Gegeben sei ein Matrixspiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ mit positiver Gewinnmatrix F, d. h. $F > 0$. Wegen der Äquivalenzbeziehung zwischen Matrixspielen ist diese Bedingung keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Dann gilt für die gemischte Erweiterung $\Gamma = \langle P, Q, E\rangle$, daß der Erwartungswert $E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}' \cdot F \cdot \boldsymbol{q} > 0$ für alle $\boldsymbol{p} \in P$, $\boldsymbol{q} \in Q$ ist, und folglich ist auch $v(\Gamma) > 0$. Die optimalen gemischten Strategien des Spielers 1 $\boldsymbol{p}^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)' \in P$ und des Spielers 2 $\boldsymbol{q}^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)' \in Q$ bestimmt man aus den folgenden Ungleichungssystemen:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* F_{ij} \geqq v(\Gamma) \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$p_i^* \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} q_j^* \leqq v(\Gamma) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$q_j^* \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} q_j^* = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Der Leser wird leicht erkennen, daß diese Ungleichungssysteme sofort aus der Sattelpunktrelation und aus der Definition der Mengen P und Q folgen. Ist $v(\Gamma) > 0$, d. h., besitzt das Spiel eine positive Gewinnmatrix, so kann man beide Ungleichungssysteme durch den Wert des Spieles dividieren, ohne daß die Ungleichungen sich verändern. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{v(\Gamma)} F_{ij} \geqq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{p_i^*}{v(\Gamma)} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i^*}{v(\Gamma)} = \frac{1}{v(\Gamma)} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} \frac{q_j^*}{v(\Gamma)} \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\frac{q_j^*}{v(\Gamma)} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j^*}{v(\Gamma)} = \frac{1}{v(\Gamma)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Das Ziel des 1. Spielers besteht in der Maximierung des Wertes des Spieles, das des 2. Spielers in der Minimierung. Setzen wir

$$\frac{p_i^*}{v(\Gamma)} = u_i \quad \text{und} \quad \frac{q_i^*}{v(\Gamma)} = w_i$$

und berücksichtigen wir, daß der Wert des Spieles $v(\Gamma)$ im Nenner erscheint, so erhalten wir zur Bestimmung der optimalen Strategien folgende lineare Optimierungsprogramme:

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{v(\Gamma)} \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i F_{ij} \geqq 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$u_i \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

und

$$Z_2 = \sum_{j=1}^{n} w_j = \frac{1}{v(\Gamma)} \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij} w_j \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$w_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Diese beiden linearen Optimierungsaufgaben sind offenbar dual zueinander und können mit dem Simplexverfahren leicht gelöst werden. Wegen der Dualität genügt es, eine dieser Aufgaben zu lösen, die Lösung der dualen Aufgabe kann man dann sofort aus dem erhaltenen Simplexendtableau ablesen.

Hat man die Werte u_i $(i = 1, \ldots, m)$ und w_j $(j = 1, \ldots, n)$ bestimmt, so erhält man ohne viel Aufwand den Wert des Spieles $v(\Gamma)$ und die optimalen gemischten Strategien $\boldsymbol{p}^* \in P$ und $\boldsymbol{q}^* \in Q$.

Beispiel: Zur Bestimmung der optimalen gemischten Strategien diene das Knobelspiel Papier–Schere–Stein $G = \langle X, Y, F \rangle$ als Beispiel. Die Gewinnmatrix $\boldsymbol{F}$ hatte folgendes Aussehen:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für dieses Spiel gilt die Voraussetzung $\boldsymbol{F} > 0$ nicht.

Deshalb müssen wir, damit das Verfahren anwendbar ist, ein zu G äquivalentes Spiel G_1 konstruieren. Nach der Äquivalenzdefinition gilt

$$F'_{ij} = aF_{ij} + b,$$

wobei $a > 0$, b beliebige reelle Zahlen sind. Ist $a = 1$ und $b = 2$, so erhält man für das Spiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ die Gewinnmatrix

$$\boldsymbol{F}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da $\boldsymbol{F}' > 0$ ist, gilt für das Spiel G_1:

$$Z_1 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{v(\Gamma_1)} \to \min$$

unter den Bedingungen

$$2u_1 + 3u_2 + u_3 \geqq 1,$$

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 \geqq 1,$$

$$3u_1 + u_2 + 2u_3 \geqq 1,$$

$$u_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

und

$$Z_2 = w_1 + w_2 + w_3 = \frac{1}{v(\Gamma_1)} \to \max$$

mit den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
2w_1 + w_2 + 3w_3 &\leqq 1, \\
3w_1 + 2w_2 + w_3 &\leqq 1, \\
w_1 + 3w_2 + 2w_3 &\leqq 1, \\
w_i &\geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}
$$

Wir lösen das 2. Problem mit Hilfe der Simplexmethode:

①	w_1	w_2	w_3	
w_4	2	1	3	1
w_5	3	2	1	1 ←
w_6	1	3	2	1
Z	−1	−1	−1	0
	↑			

②	w_5	w_2	w_3	
w_4	$-^2/_3$	$-^1/_3$	$^7/_3$	$^1/_3$ ←
w_1	$^1/_3$	$^2/_3$	$^1/_3$	$^1/_3$
w_6	$-^1/_3$	$^7/_3$	$^5/_3$	$^2/_3$
Z	$^1/_3$	$-^1/_3$	$-^2/_3$	$^1/_3$
			↑	

③	w_5	w_2	w_4	
w_3	$-^2/_7$	$-^1/_7$	$^3/_7$	$^1/_7$
w_1	$^3/_7$	$^5/_7$	$-^1/_7$	$^2/_7$
w_6	$^1/_7$	$^{18}/_7$	$-^5/_7$	$^3/_7$ ←
Z	$^1/_j$	$-^3/_7$	$^2/_7$	$^3/_7$
		↑		

④	w_5	w_6	w_4	
w_3	$-^5/_{18}$	$^1/_{18}$	$^7/_{18}$	$^1/_6$
w_1	$^7/_{18}$	$-^5/_{18}$	$^1/_{18}$	$^1/_6$
w_2	$^1/_{18}$	$^7/_{18}$	$-^5/_{18}$	$^1/_6$
Z	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_6$	$^1/_2$

Aus dem 4. Tableau (Endtableau) erhält man die Lösungen w_i $(i = 1, 2, 3)$ und wegen der Dualität gleichzeitig die Lösungen u_i $(i = 1, 2, 3)$ der beiden linearen Optimierungsprobleme:

$$w_1 = w_2 = w_3 = {}^1/_6, \qquad u_1 = u_2 = u_3 = {}^1/_6.$$

Des weiteren kann man den Wert des Spieles G_1 ablesen:

$$\frac{1}{v(\Gamma_1)} = \frac{1}{2}, \qquad v(\Gamma_1) = 2.$$

Die optimalen Strategien $\boldsymbol{p}^* \in P$, $\boldsymbol{q}^* \in Q$ für G_1 ermittelt man aus den Beziehungen

$$\frac{p_i^*}{v(\Gamma_1)} = u_i, \qquad \frac{q_j^*}{v(\Gamma_1)} = w_j,$$

und man erhält

$$p_i^* = 2 \cdot {}^1/_6 = {}^1/_3 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad q_j^* = 2 \cdot {}^1/_6 = {}^1/_3 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Somit sind $\boldsymbol{p}^* = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3) \in P$ und $\boldsymbol{q}^* = ({}^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3) \in Q$ die optimalen Strategien in Spiel G_1, und wegen der Äquivalenz der Spiele G und G_1 sind sie auch optimal in G.

In Worte gefaßt bedeutet das, daß im Knobelspiel Papier–Schere–Stein beide Spieler jede der möglichen Strategien rein zufällig gleich oft anwenden müssen, um zum optimalen Gewinn zu kommen.

Den optimalen Gewinn, also den Wert des Spieles G, erhält man aus $v(\Gamma_1)$ wie folgt:

$$E'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F'_{ij} q_j \quad \text{mit} \quad F'_{ij} = aF_{ij} + b, \qquad a, b \text{ reelle Zahlen } (a > 0).$$

Dann ist

$$E'(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i(aF_{ij} + b)\, q_j$$

$$= a\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i F_{ij} q_j + b\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j$$

$$= aE(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + b,$$

und aus dem Gleichgewichtskriterium erhält man

$$v(\Gamma_1) = av(\Gamma) + b.$$

In unserem Beispiel ist $a = 1$, $b = 2$:

$$2 = v(\Gamma_1) = v(\Gamma) + 2$$

oder

$$v(\Gamma) = 0.$$

Dieses Ergebnis war natürlich zu erwarten, weil das Knobelspiel Papier–Schere–Stein ein symmetrisches Matrixspiel ist, und wir haben früher gezeigt, daß für jedes symmetrische Matrixspiel der Wert $v(\Gamma) = 0$ ist.

2.5. Verallgemeinerung

2.5.1. Unendliche Spiele

Nachdem eingehend endliche Zweipersonennullsummenspiele, also Matrixspiele untersucht wurden, erhebt sich zwangsläufig die Frage nach Verallgemeinerungen in der Hinsicht, daß man einmal die Einschränkung der Endlichkeit der Strategiemengen fallenläßt und zum anderen mehr als zwei Spieler zuläßt. Wegen der Kompliziertheit der Thematik würde eine intensive Behandlung und Analyse dieser Typen von Spielen den Rahmen dieses Lehrbuches sprengen; deshalb soll ein kurzer Abriß genügen.

Wir betrachten zunächst das antagonistische Spiel $G = \langle X, Y, F \rangle$, wobei die Strategiemengen X und Y unendliche Mengen sind. Natürlich wird auch in diesem Spiel die optimale Verhaltensweise der Spieler durch die Gleichgewichtssituation gekennzeichnet, d. h., jeder Spieler ist bestrebt, eine Strategie $x^* \in X$, $y^* \in Y$ zu finden, daß

$$F(x, y^*) \leqq F(x^*, y^*) \leqq F(x^*, y)$$

gilt. Genauso wie im Endlichen gibt es Spiele, wo dieser Sattelpunkt nicht existiert. Wir betrachten hierzu folgendes einfache Beispiel:

$$X = Y = (0, 1) \quad \text{und} \quad F(x, y) = x + y.$$

Aus der Sattelpunktrelation folgt, daß $x^* = 1$, $y^* = 0$ ist. Diese Werte sind jedoch nicht gestattet, da die Strategiemengen X, Y offene Mengen sind. Der 1. Spieler müßte also eine Strategie nahe 1 wählen, der zweite nahe 0, etwa

$$x_\varepsilon = 1 - \varepsilon, \qquad y_\varepsilon = \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Daraus resultiert der Begriff des ε-Sattelpunktes.

Definition 2.5: *Wenn für ein $\varepsilon > 0$ ein Strategiepaar $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ mit $x_\varepsilon \in X$, $y_\varepsilon \in Y$ existiert, so daß die Ungleichung*

$$F(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \leqq F(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqq F(x_\varepsilon, y) + \varepsilon$$

erfüllt wird, so heißt dieses Paar **ε-Gleichgewichtssituation** *oder* **ε-Sattelpunkt.**

Existiert ein ε-Sattelpunkt ($\varepsilon > 0$), so gilt stets

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(x, y) = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(x, y).$$

Auch bei den unendlichen antagonistischen Spielen existieren Sattelpunkte im allgemeinen nur im Bereich der gemischten Strategien. Zu diesem Zweck betrachten wir die Klasse der wohlbeschränkten oder präkompakten Spiele.

Definition 2.6: *R sei ein metrischer Raum mit der Metrik ϱ. Existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz R_ε in R, so heißt der Raum R* **wohlbeschränkt** *oder* **präkompakt.**

Dabei verstehen wir unter einem **ε-Netz** *R_ε: für alle $r \in R$ existiert ein $r_\varepsilon \in R_\varepsilon$, so daß $\varrho(r_\varepsilon, r) < \varepsilon$ gilt.*

Im unendlichen Spiel $G = \langle X, Y, F\rangle$ gelte für die Metrik ϱ_1 in X und ϱ_2 in Y folgende Definition (der **natürlichen Metrik** oder **Metrik von Helley**):

$$\varrho_1(x', x'') = \sup_{y\in Y} |F(x', y) - F(x'', y)| \quad x', x'' \in X,$$

$$\varrho_2(y', y'') = \sup_{x\in X} |F(x, y') - F(x, y'')| \quad y', y'' \in Y.$$

Dann läßt sich ein wohlbeschränktes Spiel wie folgt formulieren.

Definition 2.7: *Das Spiel G heißt* **wohlbeschränkt** *oder* **präkompakt**, *wenn in der natürlichen Metrik die Strategienräume X, Y wohlbeschränkt sind.*

Ohne Beweis sei folgender wichtiger Satz angegeben.

Hauptsatz (*von Wald*): *Ein wohlbeschränktes Spiel G hat für beliebiges $\varepsilon > 0$ stets einen ε-Sattelpunkt, und die ε-optimalen Strategien sind eine Mischung von endlich vielen reinen Strategien, d. h.*

$$\boldsymbol{p}_\varepsilon = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_\varepsilon = \begin{bmatrix} y_1, \ldots, y_n \\ q_1, \ldots, q_n \end{bmatrix}.$$

Der Ausdruck $\boldsymbol{p}_\varepsilon = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ p_1, \ldots, p_m \end{bmatrix}$ bedeutet, daß die ε-optimale Strategie sich aus den m reinen Strategien $x_1, \ldots, x_m$ zusammensetzt, wobei x_1 mit der Wahrscheinlichkeit $p_1, \ldots, x_m$ mit der Wahrscheinlichkeit p_m auftritt.

Weiterhin gelten folgende **Sätze:**

1. *In einem unendlichen Zweipersonennullsummenspiel hat der Spieler 1 eine reine optimale Strategie, wenn die Gleichung*

$$v = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y)$$

gilt, und analog hat Spieler 2 eine reine optimale Strategie, wenn

$$v = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y)$$

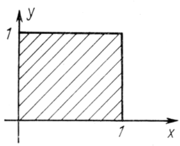
gilt.

2. *Existiert eine gemischte Strategie $\boldsymbol{p}^* \in P$ und gilt $E(\boldsymbol{p}^*, y) \geqq v$ für alle $y \in Y$, so ist $\boldsymbol{p}^*$ optimal.*
Entsprechendes gilt für $\boldsymbol{q}^* \in Q$: Wenn $E(x, \boldsymbol{q}^*) \leqq v$ für alle $x \in X$ ist, so ist $\boldsymbol{q}^*$ optimal.

Wir wollen noch kurz eine spezielle Klasse von unendlichen antagonistischen Spielen streifen, die relativ leicht zu analysieren ist, die sog. Spiele über dem Einheitsquadrat.

Definition 2.8: *Ein Spiel $G = \langle X, Y, F \rangle$ mit $X = Y = [0, 1]$ nennt man ein* **Spiel über dem Einheitsquadrat.**

In einem solchen Spiel sind alle Situationen über dem Einheitsquadrat darstellbar:



Diese Einschränkung der Strategieräume ist nicht sehr stark, denn jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ läßt sich auf das Intervall $[0, 1]$ transformieren.

Die gemischten Strategien sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen über dem Intervall $[0, 1]$. Genauer versteht man unter der gemischten Strategie des Spielers 1 das Wahrscheinlichkeitsmaß $p(x) \geqq 0$, $x \in X$, mit $p[0, 1] = 1$. Entsprechendes gilt für den 2. Spieler: $q(y) \geqq 0$, $y \in Y$, mit $q[0, 1] = 1$. Der Gewinn des 1. Spielers stellt sich dann als Erwartungswert dar:

$$E(p, y) = \int_0^1 F(x, y)\, \mathrm{d}p(x),$$

$$E(x, q) = \int_0^1 F(x, y)\, \mathrm{d}q(y),$$

$$E(p, q) = \int_0^1 \int_0^1 F(x, y)\, \mathrm{d}p(x)\, \mathrm{d}q(y).$$

Ein Spiel über dem Einheitsquadrat heißt **stetig**, wenn die Gewinnfunktion sowohl in $x \in X$ als auch in $y \in Y$ stetig ist. Für die gemischten Strategien kann man dann folgern:

$F(x, y)$ ist bei beliebigen festen $x \in X$ stetig in y,

$F(x, y)$ ist bei beliebigen festen $y \in Y$ stetig in x.

Für stetige Spiele über dem Einheitsquadrat gilt der folgende **Hauptsatz:** *Jedes stetige Spiel über dem Einheitsquadrat hat einen Wert, und die Spieler besitzen optimale Strategien.*

Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses Spiel wohlbeschränkt ist, und folglich existieren nach dem Satz von Wald ε-optimale Strategien für beliebig kleine $\varepsilon > 0$, d. h., es gilt

$$v = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

Die Bestimmung der optimalen Strategien für Spiele über dem Einheitsquadrat kann sehr kompliziert, wenn nicht unmöglich sein. Im allgemeinen gelingt sie nur bei einer sehr kleinen Klasse von Spielen, den konvexen Spielen.

Definition 2.9: *Das unendliche antagonistische Spiel auf dem Einheitsquadrat* $G = \langle X, Y, F \rangle$ *heißt* **konvex**, *wenn die Gewinnfunktion* $F(x, y)$ *für beliebiges festes* $x_0 \in X$ *in* y *konvex ist, d. h.*

$$F(x_0, \lambda y' + (1 - \lambda) y'') \leqq \lambda F(x_0, y') + (1 - \lambda) F(x_0, y''),$$

$$y', y'' \in Y = [0, 1], \qquad \lambda \in [0, 1].$$

Wenn $f(y)$ eine konvexe Funktion ist, so kann man folgende Eigenschaften beweisen:

1. $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(y_i)$

   mit $\lambda_i \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$

2. $f\left(\int_0^1 y \,\mathrm{d}q(y)\right) \leqq \int_0^1 f(y) \,\mathrm{d}q(y)$

   ($q(y)$ ist das oben definierte Wahrscheinlichkeitsmaß).

Wenn $\varphi(x, y)$ konvex in $y \in Y$ ist und $p(x)$ eine Verteilung über $x \in [0, 1]$, dann ist $\int_0^1 \varphi(x, y) \,\mathrm{d}p(x) = f(y)$ ebenfalls konvex.

Wir betrachten wieder das konvexe Spiel G. Der Spieler 2 habe die optimale gemischte Strategie $q^*(y) \in Q$.

Dann gilt für die mathematische Erwartung y^* der Zufallsgröße $y \in Y$

$$y^* = \int_0^1 y \,\mathrm{d}q^*(y).$$

Für die Gewinnfunktion $F(x, y^*)$ erhält man aus den Eigenschaften der konvexen Funktionen bzw. aus der mathematischen Erwartung y^* folgenden Ausdruck:

$$F(x, y^*) = F(x, \int_0^1 y \, dq^*(y)) \leqq \int_0^1 F(x, y) \, dq^*(y) = E(x, q^*) \leqq v .$$

Damit ist auch $y^* \in Y$ optimal, d. h., im konvexen Spiel hat der 2. Spieler stets eine optimale reine Strategie.

Im folgenden sei die Gewinnfunktion $F(x, y)$ für ein festes $x \in X$ nach y differenzierbar. Dann gelten folgende Sätze:

Satz 2.4: *G sei ein konvexes Spiel über dem Einheitsquadrat, und die optimale reine Strategie $y^* \in Y$ des Spielers 2 sowie der Wert v seien schon bekannt. Wenn $y^* > 0$ ist, so existiert ein $x' \in X$ mit $F(x', y^*) = v$, und dabei ist*

$$\left. \frac{\partial F(x', y)}{\partial y} \right|_{y=y^*} \leqq 0 .$$

Satz 2.5: *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 2.4 sei $y^* < 1$. Dann gibt es ein $x'' \in X$ mit $v = F(x'', y^*)$, so daß*

$$\left. \frac{\partial F(x'', y)}{\partial y} \right|_{y=y^*} \geqq 0$$

ist.

Für $0 < y^* < 1$ gelten beide Sätze gleichzeitig. Daraus resultiert der Hauptsatz für konvexe Spiele.

Hauptsatz (*für konvexe Spiele*): *$G = \langle X, Y, F \rangle$ sei ein konvexes Spiel, wobei $F(x, y)$ eine nach y differenzierbare Funktion ist. Die optimale reine Strategie $y^* \in Y$ des Spielers 2 und der Wert des Spieles v seien bekannt. Dann gilt:*

a) für $y^* = 0$ hat der 1. Spieler die reine optimale Strategie $x^* = x''$ (siehe Satz 2.5),
b) für $y^* = 1$ hat der 1. Spieler die reine optimale Strategie $x^* = x'$ (siehe Satz 2.4),
c) für $0 < y^* < 1$ hat der 1. Spieler die gemischte optimale Strategie $p^* \in P$ mit

$$p^* = \begin{bmatrix} x' & x'' \\ \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix},$$

wobei α die Wurzel der Gleichung

$$\alpha \left. \frac{\partial F(x', y)}{\partial y} \right|_{y=y^*} + (1 - \alpha) \left. \frac{\partial F(x'', y)}{\partial y} \right|_{y=y^*} = f(\alpha) = 0$$

ist.

Wenn man auf diese Weise ein unendliches Zweipersonennullsummenspiel lösen will, müssen folgende Schritte durchgeführt werden:

1. Es muß sich um ein konvexes Spiel handeln (prüfen!).
2. Man berechnet aus $v = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$ die optimale Strategie $y^* \in Y$ des Spielers 2.
3. Berechnung von $v = F(x, y^*)$.

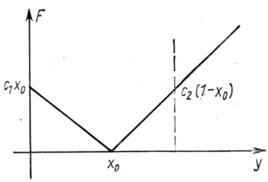
4. Es sind solche Strategien x', x'' des Spielers 1 zu finden, für die die 1. Ableitung der Gewinnfunktion nach y an der Stelle $y = y^*$ verschiedene Vorzeichen hat.
5. Aus $\alpha \left.\frac{\partial F(x', y)}{\partial y}\right|_{y=y^*} + (1 - \alpha) \left.\frac{\partial F(x'', y)}{\partial y}\right|_{y=y^*} = 0$ ist α zu ermitteln, d. h. die gemischte optimale Strategie des Spielers 1.

Als Beispiel für die Bestimmung der Lösung eines konvexen Spieles sei eine Variante des Angriff-Verteidigungsspiels (siehe Abschn. 1.1) angeführt. Der Verteidiger, bei uns Spieler 2, beherrsche 2 Objekte. Ein Angreifer (Spieler 1) will mindestens eines dieser Objekte erobern. Beide Spieler haben 1 Einheit zum Erreichen ihres Zieles zur Verfügung. Die Aufteilung dieser Einheit in 2 Teileinheiten die entsprechend zur Eroberung (Verteidigung) der Objekte 1 bzw. 2 eingesetzt werden sollen, ist die jeweilige Strategie der Spieler. Der 1. Spieler verteilt seine Einheit so, daß der Teil x für den Kampf um das Objekt 1 und der Teil $1 - x$ für den Kampf um das Objekt 2 eingesetzt wird ($0 \leqq x \leqq 1$). Der 2. Spieler setzt die Teileinheit y zur Verteidigung des Objektes 1 und die Teileinheit $1 - y$ zur Verteidigung des Objektes 2 ein. Als Sieger geht derjenige hervor, dessen Teileinheit stärker ist, d. h., für $x > y$ hat der Angreifer das Objekt 1 errungen. Somit ergibt sich für die Gewinnfunktion der folgende Ausdruck:

$$F(x, y) = \begin{cases} c_1(x - y) & \text{für } x \geqq y \qquad (c_1 > 0), \\ c_2(y - x) & \text{für } x \leqq y \qquad (c_2 > 0) \end{cases}$$

(c_1, c_2 sind Gewichte, die die Wichtigkeit der Objekte charakterisieren). Zur Bestimmung der Lösung dieses Spieles gehen wir nach den oben angegebenen Schritten vor.

1. Wir prüfen, ob es sich um ein konvexes Spiel handelt. Dazu ist zu zeigen, daß für ein beliebiges festes $x = x_0$ die Gewinnfunktion $F(x_0, y)$ in y konvex ist. Das stößt oft auf Schwierigkeiten derart, daß entweder die Gewinnfunktion nicht analytisch gegeben oder nicht stetig differenzierbar (wie in diesem Beispiel) ist. Deshalb analysiert man, wenn es möglich ist, diese Eigenschaft auf graphischem Wege.



Offensichtlich ist $F(x_0, y)$ für beliebiges $x = x_0$ in y konvex.

2. Wir berechnen

$$v = \min_y \max_x F(x, y).$$

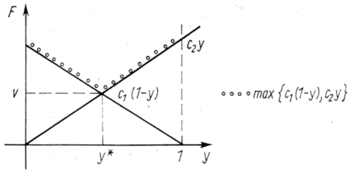
Dazu betrachten wir zunächst

$$\max_x F(x, y) = \max \{\max_{x \geqq y} c_1(x - y), \max_{x \leqq y} c_2(y - x)\} = \max \{c_1(1 - y), c_2 y\}.$$

Daraus folgt

$$v = \min_y \max_x F(x, y) = \min_y \max \{c_1(1 - y), c_2 y\}.$$

v ermittelt man am einfachsten aus folgender praktischen Darstellung:



Danach gilt

$$c_1(1 - y) = c_2 y \quad \text{bzw.} \quad y = y^* = \frac{c_1}{c_1 + c_2}.$$

Damit ist die optimale Strategie y^* des Spielers 2 bestimmt.

3. Wir berechnen v:

$$v = c_2 y^* = c_1(1 - y^*) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

4. Ermittlung der Strategien x', x'' des Spielers 1:
Ausgangspunkt ist der Wert des Spieles

$$v = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = F(x, y^*) = \begin{cases} c_1(x - y^*) & \text{für } x \geqq y^*, \\ c_2(y^* - x) & \text{für } x \leqq y^*. \end{cases}$$

Für $x \geqq y^*$ gilt

$$c_1\left(x - \frac{c_1}{c_1 + c_2}\right) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

d. h. $x = 1$.
Analog folgt für $x \leqq y^*$

$$c_2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} - x = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

d. h. $x = 0$. Bilden wir jetzt die 1. Ableitungen

$$\left.\frac{\partial F(x = 1, y)}{\partial y}\right|_{y = y^*} = \left.\frac{\partial c_1(1 - y)}{\partial y}\right|_{y = y^*} = -c_1 < 0,$$

$$\left.\frac{\partial F(x = 0, y)}{\partial y}\right|_{y = y^*} = \left.\frac{\partial c_2 y}{\partial y}\right|_{y = y^*} = c_2 > 0,$$

so erhalten wir

$$x' = 1, \qquad x'' = 0.$$

5. Wir ermitteln aus der Gleichung

$$\alpha \left.\frac{\partial F(x', y)}{\partial y}\right|_{y = y^*} + (1 - \alpha) \left.\frac{\partial F(x'', y)}{\partial y}\right|_{y = y^*} = 0$$

das α, d. h., für unser Beispiel gilt

$$\alpha c_2 + (1 - \alpha)(-c_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{c_2}{c_1 + c_2}.$$

Daraus ergibt sich, daß der 1. Spieler eine gemischte optimale Strategie hat:

$$p^* = \begin{bmatrix} x' = 1 & x'' = 0 \\ \dfrac{c_2}{c_1 + c_2} & \dfrac{c_1}{c_1 + c_2} \end{bmatrix}.$$

Wir kommen zu folgenden optimalen Ergebnissen: Der Verteidiger verteidigt das Objekt 1 mit einer Stärke von $y = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}$ Einheiten und entsprechend das Objekt 2 mit einer Stärke von

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

Einheiten. Der Angreifer wechselt seine Strategie. Das Objekt 1 greift er mit der ganzen Einheit mit Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

und das Objekt 2 mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit

$$\frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

überhaupt nicht an.

2.5.2. n-Personen-Nullsummenspiele

Wir wollen noch kurz einige Bemerkungen zur umfangreichen Theorie der n-Personenspiele machen.

Früher wurde schon der Begriff des nichtkooperativen Spiels eingeführt, jedoch mathematisch abstrakt und für den Praktiker nicht geeignet. Deshalb eine andere Definition:

Definition 2.10: *Ein n-Personenspiel heißt* **nichtkooperativ**, *wenn keinerlei Absprachen über Verhaltensmaßregeln im Spiel oder über die Verteilung des Gewinns zwischen den Spielern vorliegen; sonst spricht man von einem* **kooperativen** *Spiel.*

Für das nichtkooperative n-Personenspiel

$$G = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I} \rangle$$

gilt bezüglich der Gleichgewichtssituationen der Spieler der folgende Satz:

Satz (*von Nash*): *Jedes nichtkooperative endliche n-Personenspiel hat eine Gleichgewichtssituation in gemischten Strategien.*

Der Satz von Nash ist offenbar eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes für Matrixspiele. Allgemein lassen sich diese Gleichgewichtssituationen sehr schwer bestimmen, es ist bisher nur für bestimmte Drei- und Vierpersonenspiele gelungen.

Führt man die Verallgemeinerung in der Richtung fort, daß wir ein nichtkooperatives n-Personenspiel mit $n \to \infty$ betrachten, so gilt folgender Satz:

Satz 2.6: *Das Spiel* $G = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle$ *mit* $|I| = \infty$ *besitzt keine Gleichgewichtssituation.*

In den Anwendungen sind die kooperativen Spiele die wichtigeren. Wir betrachten ein n-Personenspiel, bei dem Koalitionsabsprachen möglich sind, und bezeichnen mit

$I \;= \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Spieler insgesamt,

K die Menge der Spieler, die sich zu einer Koalition zusammengetan haben ($K \subset I$),

$v(K)$ den Gewinn der Koalition K.

Gehen wir von einem nichtkooperativen endlichen n-Personenspiel $G = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{F_i\}_{i\in I}\rangle$ aus und nehmen wir an, daß sich k Spieler zu einer Koalition K zusammenschließen, $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, so muß man damit rechnen, daß die übrigen Spieler eine Gegenkoalition $I\backslash K$ bilden und im Endeffekt sich nur noch zwei „Koalitionsspieler" gegenüberstehen. Auf diese Art und Weise entsteht für jede Koalition K ein antagonistisches Spiel, wegen der Endlichkeit sogar ein Matrixspiel, das wir mit G_K bezeichnen wollen.

Ist $K = \{i_1, \ldots, i_k\}$, so ist $S_K = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$ mit $s_{i_1} \in S_{i_1}, \ldots, s_{i_k} \in S_{i_k}$ eine Strategie der Koalition K (des Spielers K), und die Menge aller Strategien von K bezeichnen wir mit γ_K.

Genauso gilt für die Koalition $I\backslash K$:

$I\backslash K \;= \{j_1, \ldots, j_l\}, \qquad l + k = n,$

$S_{I\backslash K} = \{s_{j_1}, \ldots, s_{j_l}\}$ mit $s_{j_1} \in S_{j_1}, \ldots, s_{j_l} \in S_{j_l}$ ist eine Strategie von $I\backslash K$,

$\gamma_{I\backslash K}$ ist die Strategiemenge des Spielers $I\backslash K$.

Wie für alle Matrixspiele interessiert auch hier der Begriff der gemischten Erweiterung. Unter der gemischten Strategie der Koalition K (der Koalition $I\backslash K$) versteht man die Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Strategiemenge γ_K bzw. $\gamma_{I\backslash K}$, etwa p_K bzw. $q_{I\backslash K}$. Für die Gewinnfunktion F des Spieles G_K gilt:

$$F(S_k, S_{I\backslash K}) = F(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}, s_{j_1}, \ldots, s_{j_l}) = F(s) = \sum_{i\in K} F_i(s),$$

wobei $F_i(s)$ die Gewinnfunktion des Koalitionspartners i ($i \in k$) bei der Situation $s \in S$ im Spiel G ist. Gewinnt die Koalition K den Betrag $F(s) = \sum_{i\in K} F_i(s)$, so erhält die Koalition $I\backslash K$ den Betrag $-\sum_{i\in K} F_i(s)$.

Für jede beliebige Koalition K entsteht demnach aus dem Spiel $G = \langle I, \{S_i\}_{i\in I} \{F_i\}_{i\in I}\rangle$ das Matrixspiel $G_K = \langle \gamma_K, \gamma_{I\backslash K}, F(s)\rangle$, und da für Matrixspiele die Ermittlung der Lösung recht einfach erfolgt, wollen wir das für die weiteren Betrachtungen zur Ermittlung der optimalen Strategie ausnutzen.

Definition 2.11: *Wenn das Spiel G für eine beliebige Koalition K* ($K \subset I$) *einen Wert hat, der von K abhängt, so heißt dieser Wert die* **charakteristische Funktion** *des Spiels G.*

Bezeichnet man den Wert des Spieles G mit $v(K)$, so gelten folgende Eigenschaften:

1. $v(\emptyset) = 0$,
2. $K_1, K_2, \ldots, K_r \in I$ mit $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist
$$v(K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_r) \geqq v(K_1) + v(K_2) + \ldots + v(K_r),$$
3. Ist G ein Konstantsummenspiel mit der Gewinnsumme c, so ist $v(I) = c$, und es gilt für jede Koalition $K \subset I$: $v(K) + v(I \backslash K) = v(I)$.

Definition 2.12: *Die charakteristische Funktion v heißt* **additiv**, *wenn $v(K \cup L) = v(K) + v(L)$ mit $K \cap L = \emptyset$ ist.*

Notwendig und hinreichend für die Additivität der Funktion v ist, daß

$$\sum_{i \in I} v(i) = v(I)$$

ist. Kooperative Spiele mit additiver charakteristischer Funktion heißen **unwesentliche** Spiele (unwesentlich deshalb, weil die Koalitionsbildung nicht zu einem Mehrgewinn führt), alle anderen heißen **wesentlich** (vgl. das Bsp. S. 38).

Definition 2.13: *Die charakteristischen Funktionen v und v' heißen* **strategisch äquivalent**, $v \sim v'$, *wenn für ein beliebiges $k > 0$ reelle Zahlen c_i $(i \in I)$ existieren, so daß*

$$v(K) = kv'(K) + \sum_{i \in K} c_i$$

ist.

Sind nichtkooperative Spiele G und G' strategisch äquivalent, so sind auch die entsprechenden charakteristischen Funktionen strategisch äquivalent.

Aus dem bisher Gesagten folgt, daß die Koalition K sich den Gewinn $v(K)$ sichern kann, wobei stets $v(K) \leqq v(I)$ ist. Die Spieler insgesamt bekommen den Gewinn $v(I)$, und es bleibt die Frage offen, wie dieser Gesamtgewinn unter den n Spielern zu verteilen ist. Bezeichnen wir das kooperative Spiel G mit $G = \langle I, v \rangle$, so gilt:

Definition 2.14: *Unter einer* **Verteilung** *im Spiel $G = \langle I, v \rangle$ verstehen wir einen n-dimensionalen reellen Vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ mit*

1. $p_i \geqq v(i), \qquad i \in I$
   ($v(i)$ ist der Wert des Spielers $i \in I$, den er sich in jedem Falle selbst sichern kann, ohne Teil einer Koalition zu sein),
2. $\sum_{i \in I} p_i = v(I)$.

Da die Verteilung im Spiel $G = \langle I, v \rangle$ nicht eindeutig ist, ist natürlich jeder Spieler bestrebt, über gewisse Vorzugsrelationen die für ihn günstigste Verteilung zu ermitteln.

Definition 2.15: *Eine Verteilung $\boldsymbol{p}$* **dominiert** *bezüglich der Verteilung $\boldsymbol{q}$ in der Koalition K, $\boldsymbol{p} \succ_K \boldsymbol{q}$, wenn*

1. $\sum_{i \in K} p_i \leqq v(K)$,
2. $p_i > q_i, \qquad i \in K$,

gilt.

Daraus resultiert der *von Neumann-Morgensternsche Lösungsbegriff.*

Definition 2.16: *Eine Lösung des Spieles $G = \langle I, v \rangle$ ist eine Menge $\mathfrak{L}$ von Verteilungen von G mit den Eigenschaften:*

1) *Zu jeder Verteilung $\boldsymbol{p} \notin \mathfrak{L}$ existiert eine Verteilung $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{L}$, so daß $\boldsymbol{q} \succ \boldsymbol{p}$.*
2) *Keine Verteilung aus $\mathfrak{L}$ dominiert bezüglich einer anderen Verteilung aus $\mathfrak{L}$.*

Zur Bestimmung der Lösung des Spiels $G = \langle I, v \rangle$ ist folgender Satz von Bedeutung:

Satz 2.7: *Zu jedem wesentlichen Spiel $G = \langle I, v \rangle$ gibt es genau ein strategisch äquivalentes Spiel $G' = \langle I, v' \rangle$, für dessen charakteristische Funktion gilt*

$$v'(i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{und} \quad v'(I) = 1.$$

Wir sprechen von der **0-1-reduzierten** Form eines kooperativen Spieles. Mit Hilfe der 0-1-reduzierten Form (strategischen Äquivalenz) ist es möglich, die Lösung eines kooperativen Spieles G anzugeben.

Wir betrachten ein 2-Personenspiel:

$$v'(1) = 0, \qquad v'(2) = 0, \qquad v'(I) = v'(\{1, 2\}) = 1.$$

Daraus folgt sofort, daß jedes 2-Personen-Konstantsummenspiel ein unwesentliches ist, denn aus $v'(1) + v'(2) = v'(1, 2) = c$ ergibt sich $v'(2) = v'(\{1, 2\}) - v'(1) = 1 - 0 = 1$, was nach Satz 2.7 unmöglich ist. Unwesentliche Konstantsummenspiele lassen sich wie Matrixspiele lösen.

Für ein 3-Personenspiel gilt: $v'(1) = v'(2) = v'(3) = 0$, $v'(\{1, 2\}) = v'(\{1, 3\}) = v'(\{2, 3\}) = 1$ (wegen $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 2, 3\}) - v(3) = 1 - 0 = 1$, usw.), $v'(I) = v'(\{1, 2, 3\}) = 1$, d. h., für 3-Personen-Konstantsummenspiele existiert eine Klasse von wesentlichen Spielen, und für diese gilt

Satz 2.8: *$G = \langle I, v \rangle$ sei ein 3-Personen-Konstantsummenspiel, für dessen 0-1-reduzierte Form die charakteristische Funktion v' die oben angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es die folgenden Lösungen:*

$$L_0 = \{(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)\}$$

bzw.

$$L_i^{(c)} = \text{Menge aller Verteilungen } (p_1, p_2, p_3) \text{ mit } p_i = c, \text{ wobei } 0 \leqq c < \tfrac{1}{2} \ (i = 1, 2, 3) \text{ ist.}$$

v. Neumann-Morgenstern bestimmten zuerst sämtliche Lösungen für die allgemeinen Dreipersonenspiele sowie für gewisse Klassen von 4-Personenspielen. Die Theorie der kooperativen Spiele entwickelte sich zur Theorie der Dominanzrelationen. Eine allgemeine Lösungsmethode existiert nicht.

3. Statistische Spiele

3.1. Problemstellung

Statistische Spiele (wir wollen nur endliche Spiele betrachten) sind modifizierte Formen von Zweipersonennullsummenspielen. Bei antagonistischen Spielen, insbesondere bei Matrixspielen, kann man relativ leicht mit Hilfe des Minimax-Theorems (siehe Hauptsatz für Matrixspiele) die optimalen Verhaltensweisen der Spieler im Spiel bestimmen. Dieses Minimax-Theorem läßt sich, wie wir später sehen werden, nicht nur in Fällen direkter Interessenkonflikte zwischen zwei Spielern verwenden, sondern auch in solchen Fällen, in denen Entscheidungen angesichts von Ungewißheiten gefällt werden müssen. Eine optimale Entscheidungsfindung unter Ungewißheit ist der Hauptinhalt der statistischen Spiele. Ausführlicher heißt das: Ein Mensch soll eine Entscheidung fällen, also ein Element aus einer bestimmten Menge Y (das ist die Menge seiner möglichen Handlungsweisen) auswählen, wobei er über den wahren Zustand, dem er sich gegenübersieht, im ungewissen ist. Er weiß lediglich, daß dieser Zustand ein Element einer gewissen Menge X (wir werden diese Menge als Menge der möglichen Zustände der Natur bezeichnen) ist, sowie daß jede seiner Handlungsweisen $y \in Y$ für jeden Zustand $x \in X$ der Natur zu einer bestimmten Konsequenz für ihn führt.

Es besteht also eine Konfliktsituation zwischen Mensch und einem fiktiven Gegner, der sogenannten „Natur". Läßt sich die vom Zustand der Natur und den Handlungsweisen des Menschen abhängige Konsequenz als Gewinnfunktion darstellen, so ist es vernünftig, diese Problematik als Spiel zu formulieren, genauer als antagonistisches Spiel $G = \langle X, Y, F \rangle$.

Es ist natürlich hierbei zu bedenken, daß man die Natur nicht ohne weiteres als rationalen Gegner auffassen kann, dessen Ziel es ist, die Gewinnfunktion F zu maximieren und damit dem Menschen den größtmöglichen Schaden zuzufügen. Trotzdem hat es sich als sinnvoll erwiesen, das Minimax-Prinzip als ein mögliches Prinzip des rationalen Verhaltens für den Menschen zu benutzen, gerade weil durch die Annahme, daß die Natur als rationaler Gegner auftritt, das Risiko einer Fehlentscheidung minimal wird. Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß mehrere Autoren das Minimax-Kriterium als „pessimistisches Kriterium" ablehnen und durch subjektive Faktoren die Zustände der Natur abzubilden versuchen, jedoch ist kein Beweis erbracht, daß diese Kriterien realistischer sind als das Minimax-Kriterium.

Spiele, die die Konfliktsituation Natur–Mensch beschreiben, heißen **Spiele gegen die Natur** oder **statistische Spiele.** Bevor wir zur Analyse statistischer Spiele kommen, werden einige notwendige mathematische Begriffe eingeführt. Gegeben sei eine Funktion φ, die auf dem Produktraum $X \times Y$ definiert ist. Dann wollen wir unter der Funktion φ_y für jedes $y \in Y$ eine Funktion verstehen, die auf X definiert ist, so daß

$$\varphi_y(x) = \varphi(x, y) \quad \text{für alle } x \in X$$

ist.

Definition 3.1: *Gegeben seien die Funktionen φ und f, wobei die obige Definition von φ bezüglich f erhalten bleibt und $f(z)$ für alle $z \in Z$ definiert ist. Dann versteht man unter der* **Komposition** *der Funktionen φ und f, geschrieben $\varphi \circ f$, die Funktion h, so daß für alle $z \in Z$*

$$h(z) = \varphi[f(z)]$$

gilt.

Definition 3.2: *Unter einer Teilung des Raumes Z verstehen wir eine Zerlegung der Menge Z in gegenseitig disjunkte Teilmengen Z_i, deren Vereinigung die Menge Z ist. Eine Teilung wird durch das Symbol S gekennzeichnet und die Menge aller Teilungen durch $\mathfrak{S}$.*

Eine Funktion f, die auf Z definiert ist, bestimmt eine Teilung S_f von Mengen Z_i mit

$$Z_i = \{z \mid f(z) = i\}.$$

3.2. Stichprobenraum, Strategienraum der Natur und des Statistikers

Grundlage jedes statistischen Spiels ist der sogenannte Stichprobenraum, der alle möglichen Ergebnisse eines Experimentes beschreibt. Der Stichprobenraum dient dem Statistiker (Mensch) als Informationsmenge über die Zustände der Natur, d. h., der Statistiker erhält durch Experimentieren die Möglichkeit, die Natur „auszuspionieren“, und die Art und Weise dieses Spionierens bestimmt grundlegend die Strategie des Statistikers.

Z sei der Raum aller möglichen Ergebnisse eines Experiments und N ein Parameterraum; dann können wir auf dem kartesischen Produkt $Z \times N$ eine Funktion p definieren, die für ein festes $n \in N$, wir schreiben dafür p_n, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Z ist, d. h., p_n ist als nichtnegative Funktion auf Z erklärt mit $p_n(z) = 0$ für $z \notin Z$ und $\sum_{z \in Z} p_n(z) = 1$.

Die Menge N kann man als Indexmenge für die Klasse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über Z interpretieren.

Wir kommen nun zur mathematisch-formalen Definition des Stichprobenraums.

Definition 3.3: *Es seien Z und N zwei nichtleere Mengen, und p sei eine auf $Z \times N$ definierte Funktion, so daß p_n für ein festes $n \in N$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Z ist. Dann heißt das Tripel*

$$R = (Z, N, p)$$

Stichprobenraum.

In der Theorie der statistischen Spiele stellt das Element $n \in N$ eine **reine Strategie der Natur** dar. Demnach ist die Menge N die Strategiemenge der Natur und entspricht der Strategiemenge X im allgemeinen Zweipersonennullsummenspiel. Wir nennen die Elemente $n \in N$ auch Zustände der Natur. Für einen beliebigen Zustand der Natur $n \in N$ kann man aus der im Stichprobenraum definierten Wahrscheinlichkeitsverteilung p die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß im Experiment das Ergebnis z erreicht wird. Es gilt:

$$p_n(z) = p(z/n), \qquad n \in N.$$

Wir fassen also die Wahrscheinlichkeit p_n als bedingte Wahrscheinlichkeit auf, d. h., wir setzen voraus, daß das Ergebnis des Experimentes $z \in Z$ erst dann eintritt, wenn die Natur bereits den Zustand n angenommen hat. Damit ist auch vom Standpunkt des Praktikers ein vernünftiges Herangehen bei der Bestimmung der Informationsmenge gewährleistet.

Ein wenig komplizierter ist die Struktur des Raumes der reinen Strategien für den Statistiker. Wir wollen im weiteren nur den Fall behandeln, daß der Stichprobenraum R aus einem **einmaligen** Experiment resultiert (auch aus ökonomischen Gründen vernünftig!). Ein solches Experiment setzt sich allgemein aus einer endlichen Anzahl von Teilexperimenten zusammen, und das Ergebnis dieser Teilexperimente bestimmt einen endlichdimensionalen Vektor, der, wie wir später sehen werden, einen entscheidenden Einfluß auf die Handlungsweise des Statistikers hat. Dem Statistiker steht eine gewisse Klasse A von möglichen **Aktionen** zur Verfügung, aus der er angesichts des ihm unbekannten Zustandes der Natur ein Element zu wählen hat (eine Entscheidung zu treffen hat). Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß dieser Raum nicht immer der Raum der reinen Strategien des Statistikers sein muß, denn man kann sich gut vorstellen, daß die Anzahl der Strategien des Statistikers ungeheuer wächst, wenn er jedem Ergebnis im Experiment einen Punkt $a \in A$ zuordnet. Deshalb ist es sinnvoll, die Strategie als Funktion von $z \in Z$ zu definieren, und wir kommen zu dem Begriff der Entscheidungsfunktion.

Definition 3.4: *Es sei $R = (Z, N, p)$ ein Stichprobenraum und A ein beliebiger Raum von Aktionen. Dann heißt eine Funktion d, die auf Z definiert ist und Z auf A abbildet, eine* **Entscheidungsfunktion.** *Die Menge D aller Entscheidungsfunktionen ist die Menge der reinen Strategien für den Statistiker.*

Mit Hilfe der Entscheidungsfunktion $d \in D$ läßt sich eine Teilung von Z in disjunkte Teilmengen erreichen, d. h., die Funktion $d(z)$ bestimmt die Teilung S_d von Mengen $\mathfrak{M}_a$ mit

$$\mathfrak{M}_a = \{z \mid d(z) = a\}, \qquad \bigcup_{a \in A} \mathfrak{M}_a = Z.$$

Das bedeutet wiederum, daß ein Ergebnis im Experiment in eine der Mengen $\mathfrak{M}_a$ $(a \in A)$ fallen muß, und fällt es in die Menge $\mathfrak{M}_a$, so wählt der Statistiker die Aktion a.

Kommen wir nun zur Definition eines statistischen Spiels mit einmaligem Experiment. Bekannt sind die Strategiemengen der beiden Spieler, N und D. Bleibt nur noch eine Art Gewinnfunktion zu bestimmen.

Definition 3.5: *R sei der Stichprobenraum und A ein beliebiger Aktionenraum. Eine beschränkte numerische Funktion L, die auf der Produktmenge $N \times A$ definiert ist, heißt* **Verlustfunktion** *und wird durch den Ausdruck*

$$L = L(n, a), \qquad (n, a) \in N \times A,$$

dargestellt.

Da wir es mit einem Entscheidungsproblem unter Ungewißheit zu tun haben – wir kennen nur die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_n(z)$ für das Auftreten des Ergebnisses z im Experiment, wenn die Natur den Zustand n angenommen hat –, müssen wir den mittleren Verlust ermitteln, d. h., wir müssen den Erwartungswert für die Verlustfunktion L bezüglich der Verteilung p_n bestimmen. Die so bestimmte Funktion heißt Risikofunktion und ist wie folgt definiert.

Definition 3.6: *Gegeben sind der Stichprobenraum $R = (Z, N, p)$, der Aktionenraum A, die Strategiemenge des Statistikers D und die auf $N \times A$ definierte Verlustfunktion L. Dann versteht man unter einer auf $N \times D$ definierten Risikofunktion den Ausdruck*

$$\varrho(n, d) = \sum_{z \in Z} L(n, d(z))\, p_n(z).$$

Die Risikofunktion ϱ ist das Äquivalent zur Gewinnfunktion F im Zweipersonennullsummenspiel, und somit gilt für ein statistisches Spiel

Definition 3.7: *Es seien $R = (Z, N, p)$ der Stichprobenraum, A ein Aktionenraum, D die Klasse der Entscheidungsfunktionen und ϱ die Risikofunktion. Dann heißt das Spiel $G = \langle N, D, \varrho \rangle$* **statistisches Spiel.**

3.3. Gemischte Strategien im statistischen Spiel

Ausgehend vom statistischen Spiel $G = \langle N, D, \varrho \rangle$ erhält man die gemischte Erweiterung $\Gamma = \langle \Theta, \vartheta, \bar{\varrho} \rangle$ genauso wie in einem allgemeinen Zweipersonennullsummenspiel. Θ ist wieder der Raum der gemischten Strategien der Natur, in statistischen Spielen nennt man ihn den Raum der a-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die Zustände der Natur, ϑ ist der Raum der gemischten Strategien für den Statistiker, und $\bar{\varrho}$ ist die mathematische Erwartung des Risikos ϱ bezüglich einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Θ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus ϑ.

Da der Raum der a-priori-Verteilung mitunter schwierig zu ermitteln ist, geht man den Umweg über die a-posteriori-Verteilung. Wir betrachten den Stichprobenraum $R = (Z, N, p)$. Die Menge Z der Ergebnisse eines Experimentes läßt sich mittels einer Teilung S_f in disjunkte Teilmengen zerlegen. Die Teilmenge S nennen wir Ereignis des Stichprobenraums, und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses S ist gegeben durch

$$P_n(S) = \sum_{z \in S} p_n(z).$$

Zur Bestimmung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung und des a-posteriori-Risikos benötigt man den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und der bedingten Erwartung (vgl. Band 17, Abschn. 2.2.3.1., S. 29, und Abschn. 2.3.7.3., S. 87).

Definition 3.8: *S sei ein Ereignis im Stichprobenraum $R = (Z, N, p)$ und $f(z)$ eine über Z definierte Zufallsvariable. Für irgendein $n \in N$ heißt der Ausdruck*

$$E_n(f/S) = \sum_{z \in S} \frac{f(z)\, p_n(z)}{P_n(S)}$$

die **bedingte Erwartung** *von f bei gegebenen S und n, wobei*

$$\sum_{z \in S} |f(z)|\, p_n(z) < \infty$$

sein muß.

Definition 3.9: *Im Stichprobenraum $R = (Z, N, \mathbf{p})$ hat für irgendeine Teilung aus $\mathfrak{S}$ die Zufallsvariable $h(z) = \varphi \circ f$ (Komposition der Zufallsvariablen f und φ) für alle $z \in S \in \mathfrak{S}$ den konstanten Wert*

$$h(z) = E_n(f/S) = E_n(f/\mathfrak{S}).$$

Definition 3.10: *Es sei g eine Zufallsvariable in R. Durch g seien die Mengen $\mathfrak{M}_a = \{z \mid g(z) = a\}$ in Form einer Teilung S_g bestimmt. Für ein festes $n \in N$ heißt die Zufallsvariable $E_n(f/S_g) = E_n(f/g)$* **bedingter Erwartungswert** *von f bei gegebenem g.*

Kommen wir wieder zum Spiel $G = \langle N, D, \varrho \rangle$ mit der gemischten Erweiterung $\Gamma = \langle \Theta, \vartheta, \bar{\varrho} \rangle$. Gegeben sei eine a-priori-Verteilung $\xi \in \Theta$. Gesucht wird eine Verteilung

q_ξ über $Z \times N$, die für das Ereignis $Z \times \{n\}$, $n \in N$, die Wahrscheinlichkeit $\xi(n)$ und für das bedingte Ereignis $\{z\} \times N/Z \times \{n\}$, $z \in Z$, die Wahrscheinlichkeit $\boldsymbol{p}\,(z/n)$ hat. (Das Ereignis $\{z\} \times N$ wird unter der Bedingung betrachtet, daß das Ereignis $Z \times \{n\}$ bereits eingetreten ist.) Anders ausgedrückt, wir suchen einen Stichprobenraum $R' = (Z \times N, \Theta, \varrho)$, der die Eigenschaft hat, daß

(1) $Q_\xi(Z \times \{n\}) = \xi(n)$
für alle $z \in Z$, $n \in N$ und $\xi \in \Theta$ ist und

(2) für $\xi(n) > 0$
$Q_\xi(\{z\} \times N/z \times \{n\}) = p(z/n)$ gilt,

wobei für irgendein Ereignis $S \subset Z \times N$

$$Q_\xi(S) = \sum_{(z,n)\in S} q_\xi(z, n)$$

ist.

Es seien $S \subset Z' = Z \times N$ und $Q_\xi(S) > 0$. Für eine auf Z' definierte Zufallsvariable f gilt nach Definition

$$E_\xi(f/S) = \frac{\sum\limits_{z'\in S} f(z')\, q_\xi(z')}{Q_\xi(S)}.$$

Für $f(z') = 1$ mit einem bestimmten $z' \in Z \times N$ (für alle anderen z' ist $f(z') = 0$) erhält man für das Ereignis $S = \{z\} \times N$:

$$\begin{aligned} E_\xi(f/S) &= \frac{\sum\limits_{z'\in S} f(z')\, q_\xi(z')}{Q_\xi(S)} \\ &= \frac{\sum\limits_{(z,i)\in\{z\}\times N} f(z, i)\, q_\xi(z, i)}{\sum\limits_{(z,i)\in\{z\}\times N} q_\xi(z, i)} \\ &= \frac{q_\xi(z, n)}{\sum\limits_{i\in N} q_\xi(z, i)}. \end{aligned}$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$q_\xi(z, n) = p(z/n)\, \xi(n),$$

und wir erhalten

$$E_\xi(f/S) = \frac{p(z/n)\, \xi(n)}{\sum\limits_{i\in N} p(z/i)\, \xi(i)} = \xi_z(n).$$

$\xi_z(n)$ ist die bekannte a-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung (Bayessche Formel).

Nun sei $f(z') = L(n, d(z))$ mit $d \in D$ und $S \in \{z\} \times N$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} E_\xi(f/S) &= \frac{\sum\limits_{n\in N} L(n, d(z))\, p(z/n)\, \xi(n)}{\sum\limits_{n\in N} p(z/n)\, \xi(n)} \\ &= \sum_{n\in N} L(n, d(z))\, \xi_z(n) = r_z(d). \end{aligned}$$

$r_z(d)$ heißt **bedingte** oder **a-posteriori**-Risikofunktion. Wir wollen noch einige Bemerkungen zum Raum der gemischten Strategien des Statistikers machen:

Definition 3.11: *Es seien $R = (Z, N, p)$ der Stichprobenraum, A ein beliebiger Aktionenraum und ϑ eine Klasse von Funktionen δ, die auf $A \times Z$ definiert sind, so daß δ_z für jedes $z \in Z$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über A ist. Dann ist ϑ der* **Raum der gemischten Strategien** *für den Statistiker.*

Aus der Definition folgt sofort, daß beim Eintreten des Ergebnisses $z \in Z$ der Statistiker die Aktion $a \in A$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\delta_z(a) = \delta(a/z)$$

wählt, wobei diese seine gemischte Strategie wieder sinnvollerweise als bedingte Wahrscheinlichkeit interpretiert wird. Die Risikofunktion $\bar{\varrho}$ ist dann folgendermaßen definiert.

Definition 3.12: *Gegeben seien wieder der Stichprobenraum R, der Aktionenraum A, der Raum der gemischten Strategien des Statistikers ϑ und die Verlustfunktion L. Unter der (zufälligen) Risikofunktion $\bar{\varrho}$, die auf $N \times \vartheta$ definiert ist, versteht man den Ausdruck*

$$\bar{\varrho}(n, \delta) = \sum_{a \in A} L(n, a)\, E_n(\delta(a/z)) = \sum_{a \in A} \sum_{z \in Z} L(n, a)\, \delta(a/z)\, p(z/n)$$

mit $\delta \in \vartheta$.

Analog äßt sich die Risikofunktion $\bar{\varrho}$ auf $\Theta \times \vartheta$ definieren.

Zur Lösung des statistischen Spiels läßt sich das Minimax-Kriterium verwenden, jedoch etwas abgewandelt. Wir betrachten das Spiel $G = \langle N, D, \varrho \rangle$ und die dazugehörige gemischte Erweiterung $\Gamma = \langle \Theta, \vartheta, \bar{\varrho} \rangle$. Angenommen, der Statistiker wählt die gemischte Strategie $\delta \in \vartheta$. Dann gibt es nur die Alternative: entweder keine andere Strategie ist besser als δ, d. h., es existiert kein $\delta^* \in \vartheta$ mit $\bar{\varrho}(n, \delta^*) < \varrho(n, \delta)$ für $n \in N$, oder es existiert eine solche. Im 1. Falle bezeichnet man die Strategie δ als **zulässig**, sie muß jedoch nicht unbedingt Verwendung finden, sofern es noch gleichwertige gibt. Im 2. Falle würde δ klar fallengelassen. Daraus resultiert folgendes vernünftige Auswahlprinzip.

Definition 3.13: *Es sei $G = \langle N, D, \varrho \rangle$ ein statistisches Spiel und $\Gamma = \langle \Theta, \vartheta, \delta \rangle$ die gemischte Erweiterung. Existiert für alle $n \in N$ ($\xi \in \Theta$) keine andere gemischte Strategie $\delta \in \vartheta$, die besser ist als $\delta^* \in \vartheta$, d. h., gibt es kein δ mit $\bar{\varrho}(n, \delta) < \bar{\varrho}(n, \delta^*)$, so nennt man δ^* eine* **zulässige Strategie.**

Alle zulässigen Strategien bilden für die möglichen Zustände die **Klasse C der zulässigen Strategien.**

Definition 3.14: *Die Klasse C von zulässigen Entscheidungsfunktionen $\delta \in \vartheta$ heißt* **vollständig**, *wenn man für ein δ, das nicht zu C gehört, ein Element $\delta^* \in C$ finden kann mit*

$$\bar{\varrho}(n, \delta^*) < \bar{\varrho}(n, \delta).$$

Um die vollständige Menge der zulässigen Lösungen zu erhalten, fordern wir als Entscheidungsregel, daß das Risiko $\bar{\varrho}$ bezüglich $\delta \in \vartheta$ zu einem Minimum wird, d. h.

$$\bar{\varrho}(n, \delta^*) = \min_{\delta \in \vartheta} \bar{\varrho}(n, \delta) \quad \text{für alle } n \in N.$$

Diese Entscheidungsregel ging auch unter dem Namen **Bayessches Lösungskriterium** in die Literatur ein.

Zwischen dem Minimax-Kriterium der Matrixspiele und der Bayesschen Lösungsformel besteht ein enger Zusammenhang. Betrachten wir ein Matrixspiel $G = \langle X, Y, F\rangle$ mit zugehöriger gemischter Erweiterung $\Gamma = \langle P, Q, E\rangle$, so gilt nach dem Hauptsatz für Matrixspiele

$$v(\Gamma) = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} E(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = E(\boldsymbol{p}^*, \boldsymbol{q}^*).$$

Auf das statistische Spiel angewendet (wir betrachten nur endliche statistische Spiele), erhält man demnach

$$v(\Gamma) = \max_{\xi\in\Theta} \min_{\delta\in\vartheta} \bar{\varrho}(\xi, \delta) = \min_{\delta\in\vartheta} \max_{\xi\in\Theta} \bar{\varrho}(\xi, \delta) = \bar{\varrho}(\xi^*, \delta^*).$$

Ist ξ^* eine bekannte a-priori-Verteilung über die Zustände der Natur (natürlich kann diese Verteilung durch eine a-posteriori-Verteilung ξ_z^* ersetzt werden!), die statistisch ermittelt wurde und als für den Statistiker ungünstig interpretiert wird, so gilt

$$\min_{\delta\in\vartheta} \bar{\varrho}(\xi^*, \delta) \geqq \min_{\delta\in\vartheta} \bar{\varrho}(\xi, \delta)$$

oder

$$\min_{\delta\in\vartheta} \bar{\varrho}(\xi^*, \delta) = \max_{\xi\in\Theta} \min_{\delta\in\vartheta} \bar{\varrho}(\xi, \delta) = \min_{\delta\in\vartheta} \max_{\xi\in\Theta} \bar{\varrho}(\xi, \delta),$$

d. h., Minimax-Lösung und Bayes-Lösung sind äquivalent.

Es wurde schon zu Anfang dieses Kapitels bemerkt, daß das Minimax-Kriterium ein übertrieben vorsichtiges Kriterium ist, und zwar dadurch, daß man die Natur als rationalen Gegner auffaßt, dessen Ziel auf maximalen Schaden des Spielers (Statistikers) gerichtet ist. Diese übertriebene Vorsichtigkeit wird durch das Bayes-Kriterium ausgemerzt, indem $\xi^* \in \Theta$ statistisch ermittelt wird. Es gibt noch eine Reihe anderer Kriterien, die auf verschiedene Arten versuchen, den Mangel des Minimax-Kriteriums auszugleichen, etwa das Maximax-Kriterium, das Hurwicz-α-Kriterium, das Laplace-Kriterium und verschiedene Ableitungen dieser. Jedoch soll auf diese Kriterien im einzelnen nicht eingegangen werden.

Zusammenfassend sei noch einmal der Zusammenhang zwischen Matrixspiel und endlichem statistischem Spiel mit einmaligem Experiment angegeben:

Matrixspiel	Statistisches Spiel
Spieler 1	Natur
Spieler 2	Statistiker
reine Strategie x des Spielers 1	Auswahl des wahren Elementes n durch die Natur
Menge X der reinen Strategien für Spieler 1	Menge N der Zustände der Natur
reine Strategie y des Spielers 2	Auswahl einer Entscheidungsfunktion d durch den Statistiker
Menge Y der reinen Strategien für Spieler 2	Menge D aller möglichen Entscheidungsfunktionen d

Matrixspiel	Statistisches Spiel
Gewinnfunktion $F(x, y)$	Risikofunktion $\varrho(n, d)$
Gemischte Strategie $\boldsymbol{p}$ des Spielers 1	a priori (a posteriori) Verteilung ξ (ξ_z) über N
Gemischte Strategie $\boldsymbol{q}$ des Spielers 2	Wahrscheinlichkeitsmaß δ
Minimax-Kriterium	z. B. Bayes-Kriterium

Beispiel: Als Beispiel für ein statistisches Spiel diene ein Modell aus der Verkehrsplanung. Gegeben sei ein öffentliches Personennahverkehrsnetz mit n Linien, das von m Bussen befahren werden soll. Es ist vorausgesetzt, daß die Linienführung unvereinbar sein soll. Gefragt wird nach der Anzahl der Busse, die eingesetzt werden muß, damit die Bedürfnisse der Bevölkerung befriedigt werden und dem Betrieb ein maximaler Nutzen entsteht.

Zunächst bestimmen wir den Stichprobenraum: Wir betrachten einen bestimmten Zeitraum T. Dann kann eine Linie zu einem Zeitpunkt $t \in T$ entweder von keinem, einem oder mehreren Bussen bedient werden. Wir sagen dafür: Die Linie wird nullfach, einfach ... oder s-fach bedient. Bei n Linien gibt es demnach $(s + 1)^n$ mögliche Ergebnisse, d. h., Z besteht aus $(s + 1)^n$ Elementen. Das Eintreten jedes Ereignisses ist für einen beliebigen Zeitpunkt $t \in T$ zufallsbedingt. Die Elementarereignisse der Menge Z bezeichnen wir mit $Z_i^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \dots, s$). Dabei bedeutet $Z_i^{(\nu)}$, daß die i-te Linie zur Zeit $t \in T$ ν Busse benötigt ($\nu = 0, 1, \dots, s$). Die Ereignisse $Z_i^{(\nu)}$ ($i = 1, \dots, n$) bilden für jedes $i = 1, \dots, n$ ein vollständiges System. Die Elemente der Menge Z kann man aus den Elementarereignissen $Z_i^{(\nu)}$ bestimmen. Für das Ereignis, daß genau die ersten k_0 Linien keinen Bus, die nächsten k_1 Linien einen Bus, ..., und schließlich die letzten k_s Linien s Busse benötigen, kann man dann schreiben:

$$z = Z_1^{(0)} \dots Z_{k_0}^{(0)} Z_{k_0+1}^{(1)} \dots Z_{k_0+k_1}^{(1)} \dots Z_{k_0+\dots+k_{s-1}+1}^{(s)} \dots Z_{k_0+\dots+k_s}^{(s)} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{s} k_i = n.$$

Um alle möglichen Ereignisse darstellen zu können, wird ein „Exponent" eingeführt, der für alle i einen Wert der Menge $M = \{0, 1, \dots, s\}$ annehmen kann und die Eigenschaft hat, für einen bestimmten Wert aus M nur das Elementarereignis stehenzulassen, welches als oberen Index den gleichen Wert aufweist.

Es gilt also:

$$Z_i^{(0)l_i} Z_i^{(1)l_i} \dots Z_i^{(s)l_i} = \begin{cases} Z_i^{(0)} & \text{für } l_i = 0, \\ Z_i^{(1)} & \text{für } l_i = 1, \\ \vdots & \\ Z_i^{(s)} & \text{für } l_i = s. \end{cases}$$

Dann läßt sich die Menge Z wie folgt darstellen:

$$Z = \{Z_1^{(0)l_1} \dots Z_1^{(s)l_1} \dots Z_n^{(0)l_n} \dots Z_n^{(s)l_n}\},$$

wobei $\sum_{i=1}^{n} l_i = l = 0, 1, \dots, n_s$ und $l_i \in M$ ist. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Elemente der Menge Z mit $z_l^{(i)}$, $Z = \{z_l^{(i)}\}$, wobei l die benötigten Fahrzeuge auf den Linien bezeichnet, $\sum_{i=1}^{n} l_i = l$, und i ein Element aus den möglichen Kombinationen von den Linien, die insgesamt l Busse benötigen, zu der Gesamtzahl n der Linien ist.

Die Menge N, die Strategiemenge der Natur, besteht aus den nichtnegativen ganzen Zahlen von 0 bis ns:

$$N = \{j\} \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots, n \cdot s.$$

Die Natur befindet sich im Zustand j, wenn j Autobusse benötigt werden. Die Elemente der Menge N kann man ebenfalls auf die Elementarereignisse $Z_i^{(v)}$ zurückführen. Es gilt

$$N = \{N = j\} = \{\sum_{l_1 + \ldots + l_n = j} [Z_1^{(0)l_1} \ldots Z_1^{(s)l_1} \ldots Z_n^{(0)l_n} \ldots Z_n^{(s)l_n}]\} \quad \text{mit } j \in \{0, 1, \ldots, ns\}.$$

Der wahre Zustand der Natur ist uns unbekannt. Eine a-priori-Verteilung über die Zustände der Natur kann man wiederum aus den Ergebnissen des Experiments bestimmen. Ist $p_i^{(v)} = P(Z_i^{(v)})$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Elementarereignisses $Z_i^{(v)}$, so erhält man aus der eben angegebenen Form der Menge N durch einige Umformungen die gesuchte Verteilung:

$$\xi_j = P(N = j) = \sum_{l_1 + \ldots + l_n = j} p_1^{(0)l_1} \ldots p_1^{(s)l_1} \ldots p_n^{(0)l_n} \ldots p_n^{(s)l_n}, \, j \in \{0, \ldots, ns\}.$$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ξ wird als die für die Natur günstigste Verteilung angesehen und beim Bayes-Kriterium zugrunde gelegt.

Zur vollständigen Beschreibung des Stichprobenraumes $R = (Z, N, p)$ müssen wir noch die auf $Z \times N$ definierte Verteilung $p_j(z)$ ermitteln ($z \in Z, j \in N$). $p_j(z)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis $Z = z$ unter der Bedingung, daß die Natur bereits im Zustand j ist, eintritt, d. h.

$$p_j(z) = P(Z = z / N = j).$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt

$$p_j(z) = \frac{P(Z = z, N = j)}{P(N = j)}.$$

$P(N = j) = \xi_j$ ist bereits bekannt. Präzisieren wir das Element $z \in Z$, indem wir wie oben die Elemente von Z mit $z_l^{(i)}$ bezeichnen, so gilt

$$P(Z = z_l^{(i)}, N = j) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & \text{für} \sum_{i=1}^{n} l_i \neq l = j, \\ P(Z) = z_l^{(i)} & \text{für} \sum_{i=1}^{n} l_i = l = j. \end{cases}$$

Dann erhält man für die Wahrscheinlichkeit $p_j(z)$ den Ausdruck

$$p_j(z_l^{(i)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq j, \\ \dfrac{P(Z = z_l^{(i)})}{\xi_j} & \text{für } l = j. \end{cases}$$

Der Stichprobenraum $R = (Z, N, p)$ ist also vollständig beschrieben. Die Entscheidungsfunktion $d \in D$ des Statistikers hängt vom Ergebnis des Experimentes ab. Seine Aktionenmenge ist $A = \{0, 1, \ldots, ns\}$, d. h., der Statistiker kann von null bis ns eine bestimmte Anzahl von Bussen einsetzen. Erscheint im Experiment das Element $z_l^{(i)} \in Z$, so weiß der Statistiker, daß insgesamt l Busse benötigt werden, und er entscheidet sich für die Aktion $a = l \in \{0, 1, \ldots, ns\}$, d. h.

$$d(z_l^{(i)}) = a = l \quad \text{für alle möglichen Linienführungen } i.$$

Die Menge der gemischten Strategien des Statistikers besteht aus allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\delta(d = l) \quad \text{für} \quad l \in \{0, 1, \ldots, ns\}.$$

Um die Verlustfunktion ermitteln zu können, benötigen wir die Kenntnis über den Wert W, der von einem Kraftomnibus in einem bestimmten Zeitraum T erarbeitet wird. Ohne auf ökonomische

Einzelheiten einzugehen, sei

$$W = c + v + g$$

mit

c: Kosten zur Beschaffung eines Busses, Instandhaltungskosten (etc.),

v: Arbeitslohn für das Fahrpersonal,

g: Gewinn beim Einsatz eines Busses.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wollen wir annehmen, daß jeder eingesetzte Bus den gleichen Wert schafft. Für l eingesetzte Busse gilt dann

$$W_l = lW.$$

Angenommen, der Zustand der Natur sei j und der Statistiker entscheidet sich für den Einsatz von l Fahrzeugen, $d(z_l^{(i)}) = l$. Der Selbstkostenpreis für diese l Fahrzeuge ist dann

$$S_l = l(c + v).$$

Für $l \geqq j$ erzeugen die l eingesetzten Busse keinen größeren Gewinn als j eingesetzte Busse, also nur einen Gewinn von jg Einheiten, und wir erhalten für den Wert W_{lj} den Ausdruck

$$W_{l_j} = l(c + v) + jg = d(z_l^{(i)})\,[c + v] + jg.$$

Ist $\overline{W}_j$ der wahre Wert, so erhalten wir

$$L = W_{lj} - \overline{W}_j.$$

Es sei $d(z_l^{(i)}) = l \leqq j$. Das bedeutet, wir setzen weniger bzw. gleich viel Fahrzeuge ein, wie benötigt werden, und erhalten für den Wert $\overline{W}_j$:

$$\overline{W}_j = d(z_l^{(i)})\,W = lW \quad \text{für alle } i.$$

Die Verlustfunktion ist dann

$$\begin{aligned} L(j, d(z_l^{(i)})) &= W_{l_j} - \overline{W}_j \\ &= d(z_l^{(i)})\,[c + v] + jg \\ &\quad - d(z_l^{(i)})\,[c + v + g] \\ &= (j - d(z_l^{(i)}))\,g. \end{aligned}$$

Für $d(z_l^{(i)}) = l \geqq j$ gilt

$$\overline{W}_j = jW,$$

da l Busse dieselbe Arbeit leisten wie j, und wir erhalten

$$\begin{aligned} L(j, d(z_l^{(i)})) &= W_{l_j} - \overline{W}_j \\ &= d(z_l^{(i)})\,[c + v] + jg - j(c + v + g) \\ &= (d(z_l^{(i)}) - j)\,(c + v). \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß für $d(z_l^{(i)}) = l = j$

$$L(j, d(z_l^{(i)})) = 0$$

ist.

Da die Strategiemengen der Natur und des Statistikers endlich sind, kann man eine Verlustmatrix aufstellen:

$$L = [L_{jd}]_{ns,ns} \quad \text{mit} \quad L_{jd} = L(j, d(z_l^{(i)})).$$

Die Risikofunktion erhält man aus der bekannten Definition

$$\varrho(j, d) = \sum_{z_l^{(i)} \in Z} L(j, d(z_l^{(i)}))\, p_j(z_l^{(i)}),$$

indem man für

$$p_j(z_l^{(i)}) = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq j, \\ \dfrac{P(z_l^{(i)})}{\xi_j} & \text{für } l = j \end{cases}$$

setzt. Ist $Q_l = \{z_l^{(i)} \mid d(z_l^{(i)}) = l\}$, so gilt

$$\varrho(j, d) = \sum_{z_l^{(i)} \in Q_j} L(j, d(z_l^{(i)})) = l\, \frac{P(z_l^{(i)})}{\xi_j}.$$

Im allgemeinen entscheidet der Statistiker unter Ungewißheit, d. h., er weiß nicht, welches Ergebnis zur Zeit t gerade eintritt. Mit anderen Worten

$$d(z_l^{(i)}) = d \quad \text{für} \quad z_l^{(i)} \in Z,$$

und somit gilt für die Risikofunktion

$$\varrho(j, d) = L(j, d) \sum_{z_l^{(i)} \in Q_j} \frac{P(z_l^{(i)})}{\xi_j} = L(j, d).$$

Zur Bestimmung der optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung $\delta(d) \in \vartheta$, betrachten wir die Risikofunktion in Abhängigkeit von ξ und $\delta(d)$.

$$\bar{\varrho}(\xi, \delta) = \sum_{z_l^{(i)} \in Z} \sum_{j \in N} \varrho(j, d(z_l^{(i)}))\, \xi_j \delta(d(z_l^{(i)})).$$

In unserem Problem ist

$$d(z_l^{(i)}) = d \in \{0, 1, \ldots, ns\},$$

$$N = j \in \{0, 1, \ldots, ns\},$$

und es folgt

$$\bar{\varrho}(\xi, \delta) = \sum_{d=0}^{ns} \sum_{j=0}^{ns} \varrho(j, d)\, \xi_j \delta(d) = \sum_{d=0}^{ns} \sum_{j=0}^{ns} L(j, d)\, \xi_j \delta(d).$$

Nach dem Bayes-Kriterium erhalten wir folgendes lineare Optimierungsprogramm

$$\bar{\varrho}(\xi, \delta) \to \min$$

unter der Bedingung

$$\sum_{d=0}^{ns} \delta(d) = 1, \qquad \delta(d) \geqq 0.$$

Die Größen $\sum_{j=0}^{ns} L(j, d)\, \xi_j$ sind bekannt; wir bezeichnen sie mit

$$\nu(\xi, d) = \sum_{j=0}^{ns} L(j, d)\, \xi_j$$

und erhalten für die Risikofunktion

$$\bar{\varrho}(\xi, \delta) = \sum_{d=0}^{ns} \nu(\xi, d)\,\delta(d).$$

Aus der Theorie der linearen Optimierung läßt sich leicht die Lösung ermitteln. Die optimale Lösung lautet

$$\sum_{i=0}^{ns} \nu(\xi, i)\,\delta(i) = \nu(\xi, d^*)$$

mit

$$\nu(\xi, d^*) = \min_{i=0}^{ns} \{\nu(\xi, i)\} \quad \text{und} \quad \delta(d^*) = 1.$$

Der Statistiker entscheidet also mit der Wahrscheinlichkeit 1, d. h. mit Sicherheit den Einsatz von d^* Autobussen.

Wir betrachten zum Abschluß ein Verkehrsnetz mit 7 Linien:

Linie	1	2	3	4	5	6	7
Busabstand (min)	60	60	60	15	30	30	6
Länge (km)	18,4	15,4	11,2	5,8	6,0	7,2	10,8
Fahrzeit (min)	47,5	46,2	33,6	17,4	18,0	21,6	32,4

Hieraus kann man leicht die Wahrscheinlichkeiten $p_i^{(\nu)}$ errechnen:

$p_1^{(0)} = 0{,}2$	$p_5^{(0)} = 0{,}4$	$p_1^{(1)} = 0{,}8$	$p_5^{(1)} = 0{,}6$	$p_4^{(2)} = 0{,}2$
$p_2^{(0)} = 0{,}217$	$p_6^{(0)} = 0{,}267$	$p_2^{(1)} = 0{,}783$	$p_6^{(1)} = 0{,}733$	$p_7^{(5)} = 0{,}5$
$p_3^{(0)} = 0{,}433$	$p_7^{(0)} = 0$	$p_3^{(1)} = 0{,}567$	$p_7^{(1)} = 0$	$p_7^{(6)} = 0{,}5$
$p_4^{(0)} = 0$		$p_4^{(1)} = 0{,}8$		

alle anderen $p_i^{(\nu)} = 0$.

Daraus ermittelt man die Verteilung $\xi = \{\xi_j\}$ mit $j \in \{0, \ldots, 42\}$ $[n = 7,\ s = 6]$:

$$\begin{aligned}
\xi_0 = \ldots = \xi_5 &= 0 \\
\xi_6 &= 0{,}0008 \\
\xi_7 &= 0{,}0115 \\
\xi_8 &= 0{,}0666 \\
\xi_9 &= 0{,}1980 \\
\xi_{10} &= 0{,}3178 \\
\xi_{11} &= 0{,}2756 \\
\xi_{12} &= 0{,}1143 \\
\xi_{13} &= 0{,}0156 \\
\xi_{14} = \ldots = \xi_{42} &= 0
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{42} \xi_j = 1{,}0002 \text{ (durch Rundungsfehler)}$$

Sind $c + v = 2$ und $g = 1$, so können wir die Verlustmatrix aufschreiben. Wir betrachten allerdings nur den uns interessierenden Teil j, $d = 6, \ldots, 13$.

$j \backslash d$	0,…,6	7	8	9	10	11	12	13,…,42
0								
⋮								
6	0	2	4	6	8	10	12	14
7	1	0	2	4	6	8	10	12
8	2	1	0	2	4	6	8	10
9	3	2	1	0	2	4	6	8
10	4	3	2	1	0	2	4	6
11	5	4	3	2	1	0	2	4
12	6	5	4	3	2	1	0	2
13	7	6	5	4	3	2	1	0
⋮								
42								

Wir bestimmen jetzt

$$v(\xi,d) = \sum_{j=0}^{ns} L(j,d)\xi_j.$$

Aus der Verlustmatrix ist ersichtlich, daß $v(\xi, d)$ für $d = 0, \ldots, 5$ und $d = 14, \ldots, 42$ immer größer ist als der kleinste Wert für $d = 6, \ldots, 13$

$$v(\xi, 6) = 4{,}1829 \qquad v(\xi, 10) = 1{,}2888$$
$$v(\xi, 7) = 3{,}1851 \qquad v(\xi, 11) = 2{,}0727$$
$$v(\xi, 8) = 2{,}2218 \qquad v(\xi, 12) = 3{,}6834$$
$$v(\xi, 9) = 1{,}4583 \qquad v(\xi, 13) = 5{,}6370,$$

$$\min_{i=0}^{42} v(\xi, i) = v(\xi, d^*) = v(\xi, 10),$$

d. h. $d^* = 10$. Der Statistiker entscheidet sich also für den Einsatz von 10 Bussen. Sein durchschnittlicher Verlust beträgt $v(\xi, d^*) = 1{,}2888$ Einheiten.

3.4. Sequentialspiele

Statistische Spiele mit einmaligem Experiment sind eine sehr spezielle Klasse in der Theorie der statistischen Spiele. In der Praxis, z. B. in der Versuchsplanung, führt der Statistiker mehrere Versuche durch und entscheidet auf Grund der Information, ob das Experiment gestoppt werden soll und eine Entscheidung möglich ist oder ob weitere Beobachtungen durchgeführt werden müssen. Im allgemeinen ist die Frage der Weiterführung der Versuche eine Kostenfrage, und der Statistiker muß bei jeder Beobachtungsstufe erwägen, inwieweit eine weitere Beobachtung seine Informationsmenge verbessern kann. Ein statistisches Spiel mit Folgetestverfahren zur Ermittlung des Stichprobenraumes wollen wir als **Sequentialspiel** bezeichnen.

Um ein solches Spiel zu analysieren, stellen wir uns vor, daß wir die Anzahl der Versuche als einheitliches Experiment betrachten, d. h. also, unser Experiment besteht aus einer Serie von Teilexperimenten. Dabei müssen folgende Voraussetzungen beachtet werden:

1) Die Anzahl der möglichen Teilexperimente darf nicht eine gewisse vorgeschriebene ganze Zahl M überschreiten.
2) Die Folge, in der diese Versuche durchgeführt werden, wird vorher festgelegt und ist kein Element der Strategie des Statistikers.

Unter diesen Bedingungen hat der Stichprobenraum folgende Struktur: Z ist der Raum aller möglichen Ergebnisse im Experiment. Da sich das Experiment aus maximal M Teilexperimenten zusammensetzt, läßt sich jeder Punkt $z \in Z$ als m-Tupel $z = (z_1, \ldots, z_m)$ $(m \leqq M)$ darstellen. N sei der Raum der reinen Strategien der Natur und p_n eine auf $Z \times N$ definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung, so gilt für die Darstellung des Stichprobenraumes wieder das Tripel $R = (Z, N, p)$. $p_n(z)$ ist dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Zustand n der Natur im Experiment der Ergebnisvektor $z = (z_1, \ldots, z_m)$ erreicht wird.

Anhand dieser durch den Stichprobenraum erhaltenen Informationsmenge will der Statistiker seine Entscheidung treffen. Ist ein Folgetestplan T gegeben, so kann man irgendeine Entscheidungsfunktion d in eine Folge von Entscheidungsfunktionen d_j zerlegen, so daß für jedes j d_j die Folge $T_j \in T$ in einen Aktionenraum A abbildet. Dazu betrachten wir einen Punkt $z \in Z$. Diesen Punkt z können wir durch zwei Werte charakterisieren, nämlich durch eine ganze Zahl $j = 1, 2, \ldots, M$, die angibt, welche Koordinate von z gerade beobachtet wird, und durch ein Element $a \in A$, das besagt, welche Aktion der Statistiker durchführen würde, sobald die Testfolge j beendet ist. Haben die Punkte $z \in Z$, $z' \in Z$ die gleichen ersten j $(j = 1, \ldots, M)$ Koordinaten, so werden beide Punkte durch den Wert (j, a) charakterisiert. Dann läßt sich der Raum der sequenten Entscheidungsfunktionen wie folgt definieren:

Definition 3.15: *Es seien $R = (Z, N, p)$ der Stichprobenraum, $\mathfrak{J} = \{0, 1, \ldots, M\}$ eine Indexmenge, A ein Aktionenraum und T^* die Menge aller möglichen Folgetestpläne mit $T = (T_0, T_1, \ldots, T_m) \in T^*$ $(m \leqq M)$. D sei eine Klasse von Funktionen d, die auf $\mathfrak{J} \times Z$ definiert sind und $\mathfrak{J} \times Z$ auf A abbilden, $d(j, z) = a$, so daß für z, $z' \in Z$ mit $z_i = z_i'$ $(1 \leqq i \leqq j)$ $d(j, z) = d(j, z') = a$ gilt, dann nennt man den Produktraum $T^* \times D$ den* **Raum der sequenten Entscheidungsfunktionen.**

Aus dieser Definition folgt, daß die Elemente $(T, d) \in T^* \times D$ die reinen Strategien für den Statistiker im sequentiellen Spiel sind.

Als nächstes wollen wir die Risikofunktion bestimmen. Im Unterschied zu den gewöhnlichen statistischen Spielen muß man bei Sequentialspielen die Ausführungskosten jedes Teilexperimentes berücksichtigen.

Definition 3.16: *Es seien $R = (Z, N, p)$ wieder der Stichprobenraum und $\mathfrak{J} = \{0, 1, \ldots, M\}$ eine Indexmenge, so heißt eine auf $\mathfrak{J} \times Z$ definierte nichtnegative Funktion c, für die mit z, $z' \in Z$ und $z_i = z_i'$ $(i = 1, \ldots, j)$ $c(j, z) = c(j, z')$ gilt,* **Kostenfunktion.**

Oft wird die Kostenfunktion proportional der Anzahl der durchgeführten Versuche gesetzt, d. h. $c(j, z) = kj$ für alle $z \in Z$, wobei $k > 0$ eine reelle Konstante ist. Wir setzen der Einfachheit halber

$$c(j, z) = c_j(z).$$

Definition 3.17: *Es seien $R = (Z, N, p)$ der Stichprobenraum, A der Aktionenraum, $T^* \times D$ die Klasse der sequentiellen Entscheidungsfunktionen, L eine auf $N \times A$ definierte Verlustfunktion und c eine auf $\mathfrak{J} \times A$ ($\mathfrak{J} = \{0, 1, \ldots, M\}$) definierte Kostenfunktion. Dann ist die* **Risikofunktion** *ϱ, die auf $N \times T^* \times D$ definiert ist, gleich*

$$\varrho(n, T, d) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{z \in T_j} [c_j(z) + L(n, d(j, z))]\, q_n(z), \; r \in \mathfrak{J}.$$

Das Spiel $G = \langle N, T^* \times D, \varrho \rangle$ heißt **Sequentialspiel.**

Genauso wie bei statistischen Spielen mit einmaligem Experiment kann man die gemischte Erweiterung des Sequentialspieles G bestimmen. Als Entscheidungskriterium empfiehlt sich wieder das Bayes-Kriterium.

Literatur

[1] *Blackwell, D.*; *Girshick, M. A.*: Theory of Games and Statistical Decisions, New York 1954.

[2] *Burger, E.*: Einführung in die Theorie der Spiele, Berlin 1959.

[3] *Collatz, L.*; *Wetterling, W.*: Optimierungsaufgaben, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[4] *Dück, W.*; *Bliefernich, M.* (*Herausg.*): Spieltheorie in: Operationsforschung, Bd. 2, Kap. 13; Berlin 1971.

[5] *Golstein, E. G.*: Konvexe Optimierung, Berlin 1973.

[6] *Golstein, E. G.*: Dualitätstheorie und ihre Anwendung, Berlin 1975.

[7] *Klaus, G.*: Spieltheorie in philosophischer Sicht, Berlin 1968.

[8] *von Neumann, J.*: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen **100** (1928), S. 295–320.

[9] *von Neumann, J.*; *Morgenstern, O.*: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, 1. Aufl. 1944; deutsche Übersetzung: Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg–Wien 1961; russische Übersetzung: Teorija igr i ekonomitscheckoje powedenie, Moskau 1970.

[10] *Wentzel, J. S.*: Elemente der Spieltheorie, 5. Aufl. Leipzig 1976.

[11] *Worobjoff, N. N.*: Grundfragen der Spieltheorie und ihre praktische Bedeutung, Berlin 1967.

[12] *Worobjoff, N. N.*: Anwendung der Spieltheorie in den technischen Wissenschaften, Techn. Gemeinschaft 1969, Heft 6, S. 32–39, Heft 7, S. 32–38.

[13] *Worobjoff, N. N.*: Was ist Spieltheorie? Wissenschaft und Fortschritt **20**, 1970, S. 341–345.

[14] *Worobjoff, N. N.*: Entwicklung der Spieltheorie Berlin, 1975.

[15] *Wald, A.*: Statistical Decision Functions, New York 1950; russische Übersetzung in: Positionije igri, Moskau 1967.

Namen- und Sachregister

Prof. Dr. K.-H. ELSTER, Dr. R. REINHARDT, Ilmenau, Prof. D. M. SCHÄUBLE, Dr. G. DONATH, Halle

Einführung in die nichtlineare Optimierung

Band 63
299 Seiten mit 79 Abbildungen. Kartoniert 29,– M
Bestell-Nr. 665 791 3 Bestellwort: Elster, Nichtlin. Opt.

Inhalt

Grundlagen · Konvexität · Konjugierte Funktionen · Optimalitätskriterien · Dualitätstheorie · Lösungsverfahren

B. N. PŠENIČNYJ

Notwendige Optimalitätsbedingungen

Band 51
152 Seiten. Kartoniert 14,50 M
Bestell-Nr. 665 645 1 Bestellwort: Pšeničnyj, Optim. Bed.

Inhalt

Einführung · Elemente der Funktionalanalysis und konvexe Mengen · Eigenschaften konvexer Funktionale · Konvexe Optimierung im Banachraum · Quasidifferenzierbare Funktionale · Notwendige Optimalitätsbedingungen für allgemeine Optimierungsaufgaben · Notwendige Optimalitätsbedingungen für konkrete Aufgaben

Prof. Dr. A. GÖPFERT, Merseburg

Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen

Band 58
216 Seiten mit 21 Abbildungen. Kartoniert 19,50 M
Bestell-Nr. 665 679 3 Bestellwort: Göpfert, Optimierung

Inhalt

Einige Optimierungsaufgaben in Banachräumen · Funktionalanalytische Hilfsmittel · Allgemeine Dualitätstheorie konvexer Optimierungsaufgaben · Spezielle konvexe Optimierungsaufgaben · Abstiegsverfahren in normierten Räumen · Engpaßprozesse (Bottleneck-Prozesse)

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT, LEIPZIG