

# MATHEMATIK

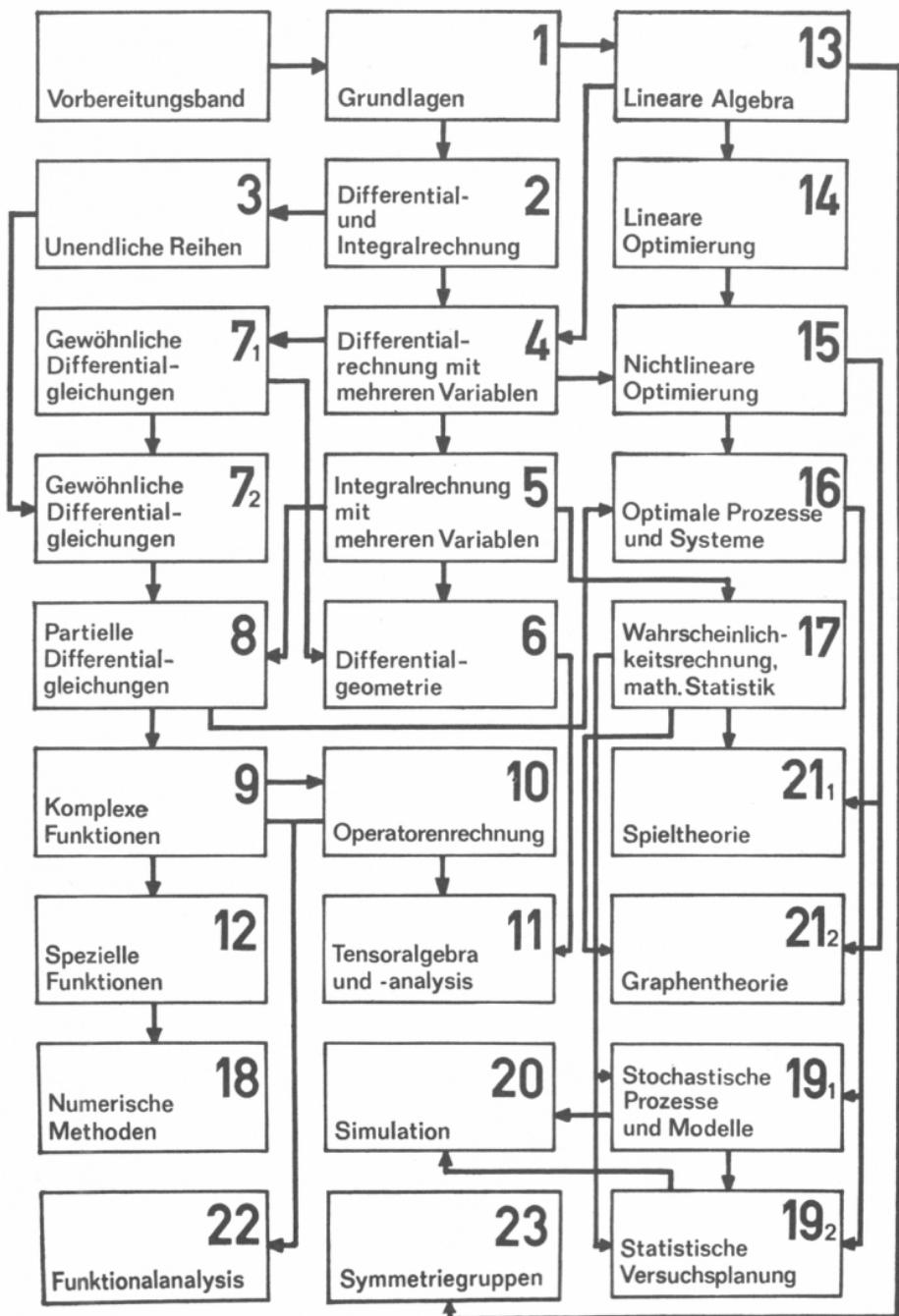
FÜR INGENIEURE  
NATURWISSENSCHAFTLER  
ÖKONOMEN  
LANDWIRTE

21/2

BIESS

Graphentheorie

# Abhängigkeitsgraph



MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,  
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 21/2

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg  
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden  
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

---

PROF. DR. G. BIESS

# Graphentheorie

3., NEU BEARBEITETE AUFLAGE



BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

1988

Verantwortlicher Herausgeber:

Dr. rer. nat. habil. Horst Erfurth, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg

Autor:

Dr. sc. Günter Bieß, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Carl Schorlemmer“ Leuna-Merseburg

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, September 1987

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der 1. Auflage 1976.

Bieß, Günter:

Graphentheorie / G. Bieß. –

3. Aufl. – Leipzig: BSB Teubner, 1988. –

72 S.: 27 Abb.

(Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte; 21/2)

NE: GT

ISBN 3-322-00471-6

Math. Ing. Nat.wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 21/2

ISSN 0138-1318

© BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1976

3. Auflage

VLN 294-375/54/88 · LSV 1084

Lektor: Jürgen Weiß

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig,

Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit – III/18/97

Bestell Nr. 665 800 0

00600

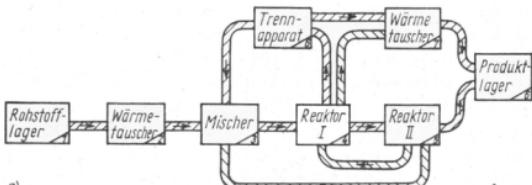
# Inhalt

1.	Grundbegriffe der Graphentheorie . . . . .	4
1.1.	Einführende Beispiele . . . . .	4
1.2.	Ungerichtete und gerichtete Graphen . . . . .	7
1.3.	Folgen adjazenter Kanten und Bögen . . . . .	11
1.4.	Arten des Zusammenhangs von Graphen . . . . .	15
1.5.	Bäume und Gerüste . . . . .	18
1.6.	Ströme und Spannungen . . . . .	21
2.	Die Beschreibung von Graphen mittels Matrizen . . . . .	31
2.1.	Adjazenzmatrizen . . . . .	31
2.2.	Inzidenzmatrizen . . . . .	35
2.3.	Fundamentalmatrizen . . . . .	36
3.	Probleme der Bestimmung von Bahnen . . . . .	39
3.1.	Das einfache Bahnproblem . . . . .	39
3.2.	Das Problem der kürzesten Bahn . . . . .	41
3.3.	Längste und kritische Bahnen . . . . .	45
4.	Probleme der Bestimmung von Gerüsten . . . . .	52
4.1.	Die Anzahl der Gerüste eines Graphen . . . . .	52
4.2.	Das Problem des Minimalgerüstes . . . . .	53
5.	Probleme der Bestimmung von Strömen . . . . .	57
5.1.	Das Maximalstromproblem . . . . .	57
5.2.	Transportprobleme . . . . .	63
6.	Zur rechentechnischen Realisierung von Graphenalgorithmen . . . . .	66
	Literatur . . . . .	68
	Namen- und Sachregister . . . . .	69

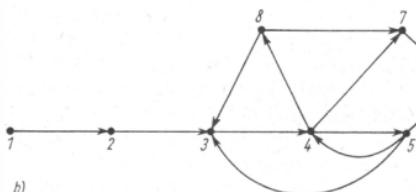
# 1. Grundbegriffe der Graphentheorie

## 1.1. Einführende Beispiele

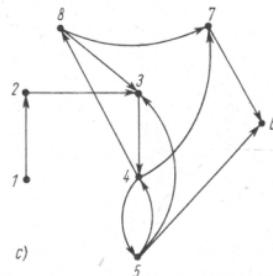
Viele Objekte und Vorgänge in den verschiedensten Bereichen der Natur und Gesellschaft besitzen den Charakter eines Systems, d. h., sie setzen sich aus einer Anzahl von Bestandteilen, Elementen zusammen, die in gewisser Weise miteinander gekoppelt sind. Sollen an einem solchen System Untersuchungen durchgeführt werden, so wird es oft zweckmäßig sein, daß wir uns den Gegenstand der Betrachtung zunächst durch ein graphisches Schema veranschaulichen. Wir werden die Systemelemente etwa durch Punkte, Kästchen, technische Symbole u. ä. darstellen und die Kopplungen durch Verbindungslien zwischen den entsprechenden Elementen zum Ausdruck bringen. Auf diese Weise wird deutlich sichtbar, welche Struktur das System besitzt, d. h., welche Bestandteile es enthält und in welcher Weise diese miteinander in Beziehung stehen. Ein solches graphisches Schema wird uns helfen, Struktureigenschaften des Systems zu untersuchen, etwa die Frage zu klären, welche Konsequenzen die Zerstörung einer bestimmten Kopplung hat, welches die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Elementen ist usw. ....



a)



b)



c)

Bild 1.1. Technologisches Schema einer Chemieanlage

Wir wollen jetzt einige Beispiele für derartige Schemata betrachten. Im Bild 1.1a ist das Blockdiagramm eines (fiktiven) chemisch-technologischen Prozesses dargestellt. Die Elemente sind in diesem Fall bestimmte technische Apparate (Reaktoren, Wärmeübertrager, Stofftrennanlagen usw.), und ihre Kopplung wird durch Rohrleitungen realisiert. Wenn wir uns lediglich für die Struktur des Systems, d. h. für die Art der Zusammenschaltung interessieren, so können wir von der konkreten technischen Bedeutung der Elemente absehen und das Schema zur Form des Bildes 1.1b vereinfachen.

Das Bild 1.1b stellt den sogenannten Graphen des betrachteten Systems dar. Er besteht aus acht Knotenpunkten (den Systemelementen entsprechend) und zwölf gerichteten Verbindungslien (den Kopplungen der Elemente entsprechend), die als Bögen bezeichnet werden. (Eine ungerichtete Verbindungsline nennt man dagegen eine Kante.) Die Verbindungslien haben wir mit einem Richtungssinn versehen. Das ist im vorliegenden Beispiel offenbar zweckmäßig, denn die Kopplung zweier Elemente ist hier nicht symmetrisch (z. B. fließt der Rohstoffstrom von Knotenpunkt 1 zum

Knotenpunkt 2, und nicht umgekehrt). Es leuchtet ein, daß es für einen gegebenen Graphen verschiedene Möglichkeiten der zeichnerischen Darstellung gibt. Wir müssen lediglich darauf achten, daß die Verbindungen zwischen den Knotenpunkten richtig wiedergegeben sind. So stellt Bild 1.1c denselben Graphen dar wie Bild 1.1b, denn die kombinatorische Struktur stimmt in beiden Schemata überein.

Mit Hilfe des Graphen können wir nun Eigenschaften der Systemstruktur untersuchen. Beispielsweise erkennt man am Bild 1.1 deutlich die im technologischen Prozeß vorhandenen drei Rückkoppelungsschleifen des Materialstromes, sie sind durch die Knotenpunktfolgen  $(3, 4, 8, 3)$ ,  $(3, 4, 5, 3)$  und  $(4, 5, 4)$  gegeben. Eine andere Struktureigenschaft, die man sofort sieht, ist z. B. folgende: Streicht man den Bogen  $(2, 3)$ , so geht der „Zusammenhang“ des Graphen verloren (eine Havarie in dieser Rohrleitung unterbricht den Produktionsprozeß!). Löschen wir dagegen die Verbindung  $(8, 3)$ , so ist dies nicht der Fall (die Produktion kann in einem gewissen Umfang aufrechterhalten werden).

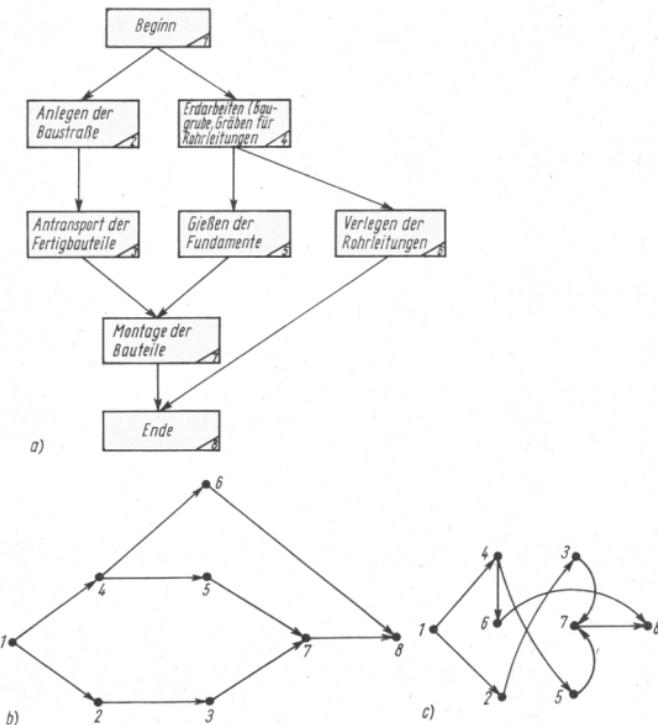


Bild 1.2. Ablaufplan für den Prozeß „Bau eines Hauses“

Betrachten wir ein zweites Beispiel: Bild 1.2a zeigt den (stark vereinfachten) Ablaufplan für den Prozeß „Bau eines Hauses“. Die Elemente des Schemas sind diesmal Teilvorgänge („Aktivitäten“) eines in der Zeit ablaufenden Gesamtprozesses. Ein Verbindungspfeil von der Aktivität  $i$  zur Aktivität  $j$  wurde dann gezeichnet, wenn mit der Abarbeitung von  $j$  erst begonnen werden kann, nachdem  $i$  abgeschlossen ist (enden mehrere Pfeile in  $j$ , so müssen alle „Vorgänger“-Aktivitäten beendet sein, ehe der Teilvorgang  $j$  beginnen kann!).

Auch hier können wir zur vereinfachten Form, Bild 1.2b, übergehen, wenn es uns lediglich um eine Untersuchung der Struktur des Prozesses zu tun ist. Die Verbindungslien des so entstehenden

Graphen sind wieder gerichtet (sie sind also Bögen), denn die Reihenfolge der jeweils verbundenen Knotenpunkte (d. h. die zeitliche Aufeinanderfolge der zugehörigen Teilvorgänge) ist ja für die Beschreibung des Prozesses wesentlich. Wieder gibt es viele äquivalente zeichnerische Darstellungen des Graphen. So stellt Bild 1.2.c denselben Graphen dar wie Bild 1.2.b, denn die Relationen zwischen den Knotenpunkten stimmen in beiden Schemata überein.

Die Untersuchung von Ablaufplänen dieser Art bildet ein praktisch sehr wichtiges Anwendungsbereich der Graphentheorie. Wir werden später unter dem Stichwort „Netzplantechnik“ darauf zurückkommen.

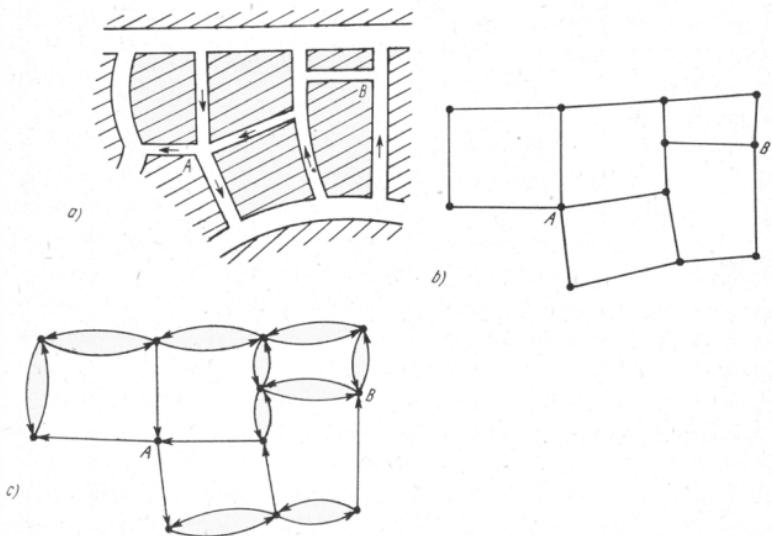


Bild 1.3. Straßennetze

Als drittes Beispiel stellt Bild 1.3.a den Ausschnitt eines Stadtplanes dar. Das Straßennetz läßt Kreuzungen und Einmündungen erkennen, die wir als Elemente des Systems auffassen können. Die Straßen selbst bilden dann die Verbindungen zwischen den Elementen. Einbahnstraßen sind durch einen Pfeil gekennzeichnet, die übrigen Straßen dürfen in beiden Richtungen befahren werden.

Bei der Umzeichnung des Schemas zu einem Graphen werden wir davon ausgehen, welche Untersuchungen mit seiner Hilfe durchgeführt werden sollen. Besteht die Aufgabe z. B. darin, alle Wege zu suchen, auf denen ein Fußgänger vom Punkt *A* zum Punkt *B* gelangen kann, so genügt die einfache Form des Bildes 1.3.b, in welcher die Verbindungen zwischen den Knotenpunkten ungerichtet dargestellt sind. Tatsächlich wäre eine Orientierung der Verbindungen nicht sinnvoll, da alle Straßen zu Fuß in beiden Richtungen passiert werden können. Anders verhält es sich, wenn die Bewegung mittels Auto von *A* nach *B* zu untersuchen ist. Für die Einbahnstraßen ist dann eine Richtung auszzeichnen, und diese werden wir den entsprechenden Bögen zuordnen. Wenn man folgerichtig die in beiden Richtungen befahrbaren Straßen durch ein Bogenpaar darstellt, so entsteht der Graph des Bildes 1.3.c.

Wir sehen an diesem Beispiel, daß je nach Art der Fragestellung in manchen Fällen ein „gerichteter“, in anderen Fällen ein „ungerichteter“ Graph für die Untersuchungen zweckmäßig ist.

Der Leser wird nach diesen einführenden Beispielen schon eine Vorstellung von dem gewonnenen haben, was man als einen **Graphen** bezeichnet. Zwei Mengen bilden seine Bestandteile: Die Menge der **Knotenpunkte** (zeichnerisch dargestellt durch Punkte) und die

Menge der *Bögen* oder *Kanten* (zeichnerisch dargestellt durch gerichtete bzw. ungerichtete Verbindungslien); jedem Bogen und jeder Kante entspricht eindeutig ein geordnetes bzw. ungeordnetes Paar von Knotenpunkten. Es leuchtet ein, daß Graphen sehr gut geeignet sind, um die Struktur von Systemen zu beschreiben. Indem wir ein reales System durch einen Graphen abbilden, abstrahieren wir von der konkreten Bedeutung und den inneren Eigenschaften der Systemelemente. Durch den Graphen wird lediglich die Art der Verknüpfung dieser Elemente, eben die Systemstruktur, erfaßt. Ein Gegenstand der Graphentheorie ist es nun, die derartigen Strukturen innewohnenden Gesetzmäßigkeiten zu erforschen und Verfahren zur Durchführung von Strukturuntersuchungen zu entwickeln. Es ist kein Zufall, daß die Graphentheorie in den letzten Jahren eine starke Entwicklung genommen hat. Die zunehmende Komplexität der gesellschaftlichen und technologischen Prozesse und das Streben nach einer möglichst effektiven Gestaltung dieser Prozesse erfordern die Verwendung entsprechend umfassender mathematischer Modelle. Wenn anhand komplexerer Modelle nach günstigen Lösungsvarianten gesucht wird, so gehören dazu auch Fragen der optimalen Ausnutzung vorhandener Prozeßstrukturen und der Synthese optimaler Konfigurationen für neu aufzubauende Prozesse. Dies sind Probleme, die graphentheoretische Untersuchungen herausfordern. Zweifellos wird die praktische Bedeutung der Graphentheorie in den kommenden Jahren weiter ansteigen. In dem Maße, wie sich auch Nichtmathematiker mit ihren Begriffen, Untersuchungsmethoden und theoretischen Ergebnissen bekannt machen, werden sich viele neue Anwendungsmöglichkeiten zeigen. Andererseits werden praktische Fragestellungen Anstöße zum weiteren Ausbau der Theorie geben.

In den folgenden Abschnitten wird eine Einführung in die Theorie der endlichen Graphen gegeben. Wir werden uns dabei um eine möglichst anschauliche Darstellungsweise bemühen und den Gesichtspunkt der Anwendung in den Vordergrund stellen. Diesem Konzept entspricht es, wenn Beweisführungen nur in geringem Umfang aufgenommen werden. Vorwiegend werden gerichtete Graphen behandelt, da diesen in den Anwendungen wohl die größere Bedeutung zukommt. Im übrigen lassen sich viele Ergebnisse unverändert oder in leicht erkennbarer Modifikation auch auf ungerichtete Graphen anwenden.

Im Abschnitt 1. dieser Einführung werden wichtige Grundbegriffe und Sätze zusammengestellt. Der zweite Abschnitt behandelt Möglichkeiten, Graphen durch Matrizen zu beschreiben. In den Abschnitten 3. bis 5. wird dann eine Reihe von „Standardproblemen“ der Graphentheorie besprochen, denen aktuelle praktische Aufgabenstellungen entsprechen. Schließlich behandelt Abschnitt 6. einige Fragen des Aufwandes bei der rechen-technischen Realisierung graphentheoretischer Algorithmen.

## 1.2. Ungerichtete und gerichtete Graphen

Wie durch die Beispiele des Abschnittes 1.1. nahegelegt wurde, definieren wir einen Graphen als Zusammenfassung zweier Mengen:

**Definition 1.1:** Ein Graph  $G$  besteht aus einer Menge  $X$  (deren Elemente Knotenpunkte genannt werden) und einer Menge  $U$ , wobei jedem Element  $u \in U$  in eindeutiger Weise ein geordnetes oder ungeordnetes Paar von (nicht notwendig verschiedenen) Knotenpunkten  $x, y \in X$  zugeordnet ist. D. 1.1

Ist jedem  $u \in U$  ein geordnetes Paar von Knotenpunkten zugeordnet, so heißt der Graph gerichtet, und wir schreiben

$$G = (X, U).$$

Die Elemente von  $U$  werden in diesem Fall als **Bögen** bezeichnet.

Ist jedem  $u \in U$  ein ungeordnetes Paar von Knotenpunkten zugeordnet, so heißt der Graph ungerichtet, und wir schreiben

$$G = [X, U].$$

Die Elemente von  $U$  bezeichnen wir dann als **Kanten**.

Wie wir sehen, ist diese Definition an keine geometrische Darstellung gebunden<sup>1)</sup>. Es liegt aber natürlich nahe, einen Graphen  $G$  dadurch zeichnerisch zu veranschaulichen, daß wir seine Knotenpunkte durch Punkte, seine Bögen bzw. Kanten durch gerichtete bzw. ungerichtete Verbindungslien darstellen, wie wir das in den früheren Beispielen schon getan haben. Die so entstehenden Schemata sind also genaugenommen als geometrische Bilder eines abstrakten Graphen aufzufassen. Wir werden aber in unserer Darstellungsweise den Graphen mit seinem geometrischen Bild identifizieren.

Die allgemeine Definition 1.1 läßt zu, daß den Elementen  $u$  eines Graphens teils gerichtete, teils ungerichtete Paare von Knotenpunkten zugeordnet sind. Solche **gemischten** Graphen werden wir aber im folgenden nicht betrachten.

Wir werden uns weiter auf **endliche** Graphen beschränken, das sind solche, bei denen sowohl die Menge  $X$  als auch die Menge  $U$  nur je endlich viele Elemente umfaßt (die Anzahl der Elemente von  $X$  bzw.  $U$  werden wir mit  $|X|$  bzw.  $|U|$  bezeichnen).

In Ergänzung zur Definition 1.1 führen wir nun noch einige Bezeichnungen ein, die im Zusammenhang mit Graphen üblich sind.

- Die einem Element  $u \in U$  zugeordneten Knotenpunkte  $x, y$  heißen **Endpunkte** von  $u$ .
- Ist  $x = y$ , so wird der betreffende Bogen (bzw. die Kante)  $u$  als **Schlinge** bezeichnet, vgl. Bild 1.4.
- Zwei Knotenpunkte  $x, y$  heißen **adjazent** (oder benachbart), wenn sie Endpunkte ein und desselben Elementes  $u \in U$  sind. Ist insbesondere  $u$  ein von  $x$  nach  $y$  führender Bogen, so wird  $x$  als „Vorgänger von  $y$ “, und  $y$  als „Nachfolger von  $x$ “ bezeichnet.
- Zwei Elemente  $u, v \in U$  heißen adjazent, wenn sie einen Endpunkt gemeinsam haben.

Tabelle 1.1: Weitere Beispiele für Systeme und Prozesse, deren Struktur durch einen Graphen beschrieben werden kann

System/Prozeß	Knotenpunkte	Bögen bzw. Kanten
Wasserleitungsnetz	Zapfstellen, Vorratstanks	Rohrleitungen
Versorgungssystem	Erzeuger und Verbraucher	Transportwege
Leitungssystem eines Kombinates	Direktionen, Abteilungen	Informationswege
Strukturformel eines chemischen Stoffes	Atome	Chemische Bindungen
Elektrische Schaltung	Spannungsquellen, Widerstände, Schalter, ...	Stromwege

<sup>1)</sup> Im Sinne der Algebra ist  $G$  ein algebraisches System, bestehend aus einer (nichtleeren) Menge  $X$  und einer auf  $X$  erklärten binären Relation  $U$ . Die Graphentheorie befaßt sich dann mit der Untersuchung struktureller Eigenschaften von  $G$  in Abhängigkeit von der Art der Relation  $U$ . Man kann die Graphentheorie deshalb auch als eine Teildisziplin der Algebra auffassen und „rein algebraisch“ ohne Verwendung geometrischer Anschauungshilfen entwickeln.

- Ein Bogen (bzw. eine Kante)  $u$  heißt mit dem Knotenpunkt  $x$  **inzident**, wenn  $x$  ein Endpunkt von  $u$  ist. Falls  $u$  ein Bogen ist, der bei  $x$  beginnt und bei  $y$  endet, so nennt man  $u$  „mit  $x$  nach außen inzident“ und „mit  $y$  nach innen inzident“, vgl. Bild 1.4.
- Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge der Knotenpunktmenge von  $G$ , so heißt ein Element  $u \in U$  mit  $A$  inzident, wenn einer der Endpunkte zu  $A$  gehört, der andere nicht. Die Menge aller mit  $A$  inzidenten Bögen wird mit  $\omega(A)$  bezeichnet. Handelt es sich speziell um einen gerichteten Graphen, so bedeutet  $\omega^+(A)$  die Menge aller mit  $A$  nach außen inzidenten (d.h. aus  $A$  herausführenden) Bögen,  $\omega^-(A)$  die Menge der mit  $A$  nach innen inzidenten (d.h. nach  $A$  hineinführenden) Bögen. Es gilt dann

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A). \quad (1.1)$$

Im besonderen kann die Menge  $A$  auch nur aus einem einzigen Knotenpunkt  $x$  bestehen. Dann heißt die Anzahl der mit  $x$  inzidenten Bögen  $|\omega(x)|$  die **Valenz** von  $x$  (Schlingen werden dabei doppelt gezählt).

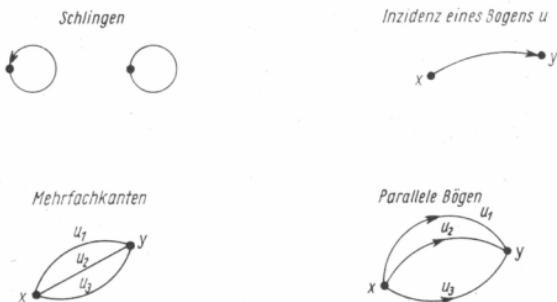


Bild 1.4. Kanten und Bögen

In der Definition 1.1 wird nicht ausgeschlossen, daß verschiedenen Elementen von  $U$  (etwa  $u_1$  und  $u_2$ ) dasselbe Paar  $x, y$  von Knotenpunkten zugeordnet ist. Handelt es sich bei  $u_1$  und  $u_2$  um Kanten mit denselben Endpunkten, so spricht man von **mehreren Kanten**. Sind  $u_1$  und  $u_2$  Bögen, die beide von  $x$  nach  $y$  führen, so heißen sie **parallele Bögen**, vgl. Bild 1.4. (Parallele Bögen liegen aber nicht vor, wenn  $x \neq y$  ist und  $u_1$  von  $x$  nach  $y$ , dagegen  $u_2$  von  $y$  nach  $x$  führt!)

Ein Graph, der weder Schlingen noch mehrfache Kanten (bzw. parallele Bögen) enthält, wird als **schlichter Graph** bezeichnet. In einem schlichten Graphen ist demnach die Zuordnung von Elementen  $u \in U$  und den ihnen entsprechenden Knotenpunktpaaren  $x, y \in X$  eineindeutig. Wir können deshalb in diesem Fall die Elemente  $u$  einfach durch Angabe des Paares ihrer Endpunkte beschreiben. Ist  $u$  eine Kante, die  $x$  und  $y$  verbindet, so schreiben wir unter Verwendung eckiger Klammern

$$u = [x, y] \quad \text{oder} \quad u = [y, x].$$

Ist dagegen  $u$  ein von  $x$  nach  $y$  gerichteter Bogen, so verwenden wir runde Klammern und schreiben<sup>1)</sup>

$$u = (x, y).$$

<sup>1)</sup> Die Schreibweise ist in der Literatur nicht einheitlich. Andere Autoren bezeichnen gerade umgekehrt mit () die Kanten und mit [] die Bögen.

Wenn also im folgenden diese Schreibweise verwendet wird, so ist stets  $x \neq y$  vorausgesetzt, und es handelt sich um einen schlichten Graphen, auch wenn dies nicht ausdrücklich vermerkt wird.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in praktischen Anwendungen auftretende Schlingen, Mehrfachkanten oder parallele Bögen ggf. durch Einfügen fiktiver Knotenpunkte leicht beseitigt werden können. Die Beschränkung bestimmter Algorithmen auf schlichte Graphen stellt deshalb praktisch keine Einschränkung ihres Anwendungsbereiches dar.

Bei vielen Überlegungen ist es notwendig, aus  $G$  durch Streichen eines Teiles der Knotenpunkte oder Bögen bzw. Kanten einen anderen Graphen  $G'$  herzustellen. In Hinblick hierauf führen wir jetzt noch folgende Bezeichnungen ein:

**D. 1.2 Definition 1.2:**  $G' = (X', U')$  heißt ein **Untergraph** von  $G = (X, U)$ , wenn  $X' \subseteq X$  und  $U' \subseteq U$  gilt.  $G^* = (X^*, U^*)$  heißt der von  $X^*$  erzeugte (aufgespannte) **Untergraph** von  $G$ , wenn  $X^* \subseteq X$  gilt, und  $U^*$  genau alle die Elemente von  $U$  enthält, die in  $G$  Knotenpunkte der Menge  $X^*$  verbinden.

Bei ungerichteten Graphen sind die Bezeichnungen analog.

Ist beispielsweise  $X$  die Menge aller Städte,  $U$  die Menge aller Bahnlinien (zwischen Nachbarbahnhöfen) innerhalb der DDR, dann stellt  $G = [X, U]$  das Eisenbahnnetz der DDR dar. Zeichnet man in einer Landkarte nur die elektrifizierten Linien ein, so entsteht ein Untergraph von  $G$ . (Bahnhöfen, die an keiner elektrifizierten Strecke liegen, entsprechen dabei „isolierte Knotenpunkte“). Die Karte der Reichsbahndirektion Halle ist der von der Menge der zugehörigen Bahnhöfe erzeugte Untergraph von  $G$ .

Wir führen noch Bezeichnungen für einige durch eine spezielle Struktur ausgezeichnete Graphen ein.  $G = (X, U)$  sei ein schlichter gerichteter Graph. Er heißt dann

– **symmetrisch**, wenn gilt:

$$(x, y) \in U \rightarrow (y, x) \in U,$$

d. h., wenn adjazente Knotenpunkte stets in beiden Richtungen verbunden sind,

– **antisymmetrisch**, wenn gilt:

$$(x, y) \in U \rightarrow (y, x) \notin U,$$

d. h., wenn adjazente Knotenpunkte stets nur in einer Richtung verbunden sind,

– **vollständig**, wenn gilt:

$$(x, y) \in U \rightarrow (y, x) \in U,$$

d. h., wenn jedes Paar von Knotenpunkten mindestens in einer Richtung verbunden ist. Der Begriff der Vollständigkeit wird auch bei schlichten ungerichteten Graphen verwendet. Er verlangt für diese, daß je zwei verschiedene Knotenpunkte durch eine Kante verbunden sind.

**Beispiel 1.1:** Wir betrachten den in Bild 1.5 gezeichneten schlichten Graphen  $G = (X, U)$  mit  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $U = \{u_1, \dots, u_6\}$ .  $G$  ist weder symmetrisch (z. B. ist kein Bogen von  $b$  nach  $a$  vorhanden), noch antisymmetrisch (die Knotenpunkte  $a, c$  sind in beiden Richtungen verbunden), noch vollständig (es gibt keinen Bogen zwischen  $a$  und  $d$ ). Der von  $X^* = \{b, c, d\}$  erzeugte Untergraph  $G^* = (X^*, U^*)$  mit  $U^* = \{u_4, u_5, u_6\}$  ist dagegen antisymmetrisch und vollständig. Als Mengen mit  $X^*$  nach außen bzw. nach innen inzidenter Bögen erkennen wir:

$$\omega^+(X^*) = \{u_3\}, \quad \omega^-(X^*) = \{u_1, u_2\}.$$

**Planar** wird ein Graph dann genannt, wenn er in einer Ebene so gezeichnet werden kann, daß sich keine Bögen bzw. Kanten überschneiden. So ist der in Bild 1.5 gezeigte Graph planar. Aber auch Bild 1.2c stellt einen planaren Graphen dar, denn er kann ja kreuzungsfrei gezeichnet werden, wie aus Bild 1.2b ersichtlich ist.

Auf die besonderen Eigenschaften planarer Graphen können wir im vorliegenden Buch nicht näher eingehen (vgl. hierzu etwa [1], [2], [11]). Wir weisen nur darauf hin, daß praktische Anwendungen dieser Klasse von Graphen z. B. im Zusammenhang mit der Herstellung gedruckter Schaltungen auftreten. Eine theoretische Fragestellung aus dem Bereich der planaren Graphen ist das sogenannte **Vierfarbenproblem**. Man versteht darunter die Frage, ob vier Farben ausreichen, um die Gebiete jedes eine mögliche Landkarte darstellenden „ebenen“ Graphen (die Länder jeder politischen Landkarte) so zu färben, daß je zwei Gebiete, die eine Randkante gemeinsam haben, verschiedenen Farben erhalten.

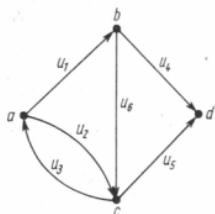


Bild 1.5. Zu Beispiel 1.1

### 1.3. Folgen adjazenter Kanten und Bögen

Wenn wir die Struktureigenschaften eines realen Systems anhand seines Graphen untersuchen, dann werden oft Fragen folgender Art auftreten: *Ist es möglich, von einem gegebenen Knotenpunkt  $a$  über eine Folge zusammenhängender Kanten oder Bögen zu einem anderen gegebenen Knotenpunkt  $b$  zu gelangen (ist  $b$  von  $a$  aus „erreichbar“), welche ist bei mehreren Möglichkeiten die kürzeste Verbindung zwischen  $a$  und  $b$ , usw.* Wir wollen deshalb einige wichtige Begriffe definieren, die zur graphentheoretischen Formulierung und Behandlung derartiger Fragen geeignet sind.

**Definition 1.3:**  $G = [X, U]$  sei ein ungerichteter Graph. Als **Kantenfolge** wird jede Folge

D. 1.3

$$\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (1.2)$$

von Elementen aus  $U$  bezeichnet, in der für  $i = 2, 3, \dots, k-1$  gilt, daß  $u_i$  einen Endpunkt mit  $u_{i-1}$ , den anderen mit  $u_{i+1}$  gemeinsam hat.  $k$  heißt dann die **Länge**  $l(\mu)$  der Kantenfolge  $\mu$ . Ein **Kantenzug** (einfache Kantenfolge) liegt vor, wenn in  $\mu$  keine Kante mehrmals vorkommt. Ein **Weg** (elementare Kantenfolge) ist ein Kantenzug, der keinen Knotenpunkt mehrmals enthält.

Wenn  $G$  ein schlichter Graph ist, so kann  $\mu$  auch durch die Folge der Knotenpunkte eindeutig charakterisiert werden:

$$\mu = (x_0, x_1, \dots, x_k). \quad (1.3)$$

Eine Kantenfolge heißt **offen**, wenn  $x_0 \neq x_k$ , **geschlossen**, wenn  $x_0 = x_k$  gilt. Ein geschlossener Kantenzug wird auch als **Kreis** bezeichnet.

Ein Kantenzug, der jede Kante von  $G$  genau einmal enthält, heißt eine **Eulersche Linie** des betr. Graphen. Wenn in  $G$  eine geschlossene Eulersche Linie existiert (bei zusammenhängenden Graphen ist dies genau dann der Fall, wenn jeder Knotenpunkt gerade Valenz hat), so nennt man  $G$  einen **Eulerschen Graphen**. Als **Hamiltonsche Linie** wird ein Weg bezeichnet, der jeden Knotenpunkt von  $G$  genau einmal enthält.

**Beispiel 1.2:** Im Bild 1.6 (die Kanten sind einfach durch Zahlen bezeichnet) stellt  $\mu^{(1)} = (1, 3, 2, 1, 5)$  eine die Knotenpunkte  $x_1$  und  $x_3$  verbindende Kantenfolge der Länge 5 dar. Sie ist kein Kantenzug, da die Kante 1 zweimal vorkommt.  $\mu^{(2)} = (5, 4, 8, 6, 2, 1, 3, 7)$  ist eine offene Eulersche Linie (eine geschlossene existiert nicht).  $\mu^{(3)} = (1, 4, 8, 6, 2)$  ist ein **Hamiltonscher Kreis**.

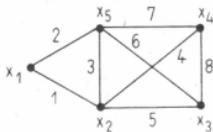


Bild 1.6. Zu Beispiel 1.2

Die nächste Definition stellt analoge Begriffsbildungen für gerichtete Graphen zusammen.

**D. 1.4 Definition 1.4:** Es sei  $G = (X, U)$  ein gerichteter Graph. Eine Folge von Bögen aus  $U$

$$\mu = (u_1, u_2, \dots, u_k) \quad (1.4)$$

heißt **Kette**, wenn für  $i = 2, 3, \dots, k-1$  gilt, daß  $u_i$  einen Endpunkt mit  $u_{i-1}$ , den anderen mit  $u_{i+1}$  gemeinsam hat.  $k = l(\mu)$  ist die **Länge** von  $\mu$ . Als eine **Bahn** wird  $\mu$  dann bezeichnet, wenn der Endknotenpunkt von  $u_i$  gleich dem Anfangspunkt des Folgebogens  $u_{i+1}$  ist ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ), d. h., wenn beim Durchlaufen der Folge alle beteiligten Bögen im Sinne ihrer Orientierung durchlaufen werden. Kommt in  $\mu$  kein Bogen mehrfach vor, so heißt die Kette bzw. Bahn **einfach**. Eine einfache Kette, die geschlossen ist, wird als **Zyklus** bezeichnet. Eine einfache geschlossene Bahn (bei der also der Endpunkt von  $u_k$  mit dem Anfangspunkt von  $u_1$  zusammenfällt) heißt ein **Kreis**. Schließlich heißt  $\mu$  **elementar**, wenn kein Knotenpunkt mehrfach enthalten ist.

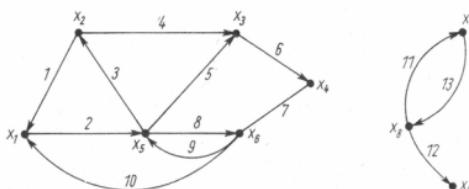


Bild 1.7. Zu Beispiel 1.3

**Beispiel 1.3:** Wir demonstrieren diese Begriffe an dem in Bild 1.7 dargestellten Graphen: Die Bogenfolge  $\mu^{(1)} = (2, 3, 4, 5, 8)$  z. B. stellt eine einfache Kette der Länge 5 dar, die  $x_1$  mit  $x_6$  verbindet. Sie ist nicht elementar, denn der Knotenpunkt  $x_5$  wird zweimal durchlaufen.  $\mu^{(2)} = (4, 5, 8, 9, 3)$  ist ein nichtelementarer Zyklus, dagegen ist der Zyklus  $\mu^{(3)} = (4, 5, 3)$  elementar. Bei  $\mu^{(4)} = (2, 3, 4, 6)$  han-

deutet es sich um eine elementare Bahn der Länge 4, die von  $x_1$  nach  $x_4$  führt. Der Graph enthält vier verschiedene Elementarkreise, nämlich

$$\mu^{(5)} = (8, 9); \quad \mu^{(6)} = (2, 8, 10); \quad \mu^{(7)} = (2, 3, 1); \quad \mu^{(8)} = (11, 13).$$

Auch  $\mu^{(9)} = (2, 8, 9, 3, 1)$  stellt einen Kreis dar, der aber nicht elementar ist, da  $x_5$  zweimal durchlaufen wird.

Einfache Ketten und Bahnen, insbesondere also Zyklen und Kreise, lassen sich auf folgende Weise durch Vektoren darstellen.  $G = (X, U)$  mit  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  sei gegeben, d.h., die Bögen seien durchnumeriert. Wenn wir jeder einfachen Kette

$$\mu = (u_i, u_j, \dots, u_q) \quad (1.5)$$

den durch die Aufeinanderfolge der Bögen von links nach rechts festgelegten Durchlaufsinn zuordnen, dann können wir die an  $\mu$  beteiligten Bögen in zwei Teilmengen zerlegen. Es sei  $\mu^+$  die Menge der im Durchlaufsinn gerichteten,  $\mu^-$  die Menge der entgegen dem Durchlaufsinn gerichteten Bögen. Wir ordnen nun  $\mu$  einen  $m$ -dimensionalen Vektor<sup>1)</sup>

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mu^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \quad (1.6)$$

durch folgende Vorschrift zu:

$$\mu_i = \begin{cases} +1, & \text{falls } u_i \in \mu^+, \\ -1, & \text{falls } u_i \in \mu^-, \\ 0 & \text{sonst (d. h. falls } u_i \text{ in } \mu \text{ nicht vorkommt).} \end{cases} \quad (1.7)$$

Bei der Vektordarstellung erkennen wir das Vorliegen einer Bahn also daran, daß alle von Null verschiedenen Koordinaten dasselbe Vorzeichen haben. Oft wird die einfache Kette  $\mu$  mit ihrem Vektor  $\mu$  identifiziert. Wenn beispielsweise von einer Summe mehrerer Zyklen gesprochen wird, so ist die Summe der den Zyklen zugeordneten Vektoren gemeint. In diesem Sinne ist auch folgender Satz zu verstehen.

**Satz 1.1:** *Jeder Zyklus  $\mu$  ist darstellbar als Summe von Elementarkzyklen, die paarweise keinen Bogen gemeinsam haben.* S. 1.1

Der Beweis ist einfach: Man durchlaufe  $\mu$ , dargestellt in der Form (1.5) beginnend mit  $u_i$ . Jedesmal, wenn man zu einem Knotenpunkt zurückkommt, bildet die dazwischen liegende Teilfolge einen elementaren Zyklus. Je zwei so erhaltene Elementarkzyklen können auch keinen Bogen gemeinsam haben, weil  $\mu$  eine einfache Kette ist. Daß die Vektorsumme der Elementarkzyklen  $\mu$  ergibt, folgt unmittelbar aus der Vorschrift (1.7).

Auf analoge Weise ist eine Vektordarstellung für Kantenzüge  $\mu$  in ungerichteten Graphen möglich. Natürlich ist dann eine Zerlegung von  $\mu$  in Teilmengen  $\mu^+$  und  $\mu^-$  nicht durchführbar, und an die Stelle von (1.7) tritt folgende Vorschrift zur Bildung des Vektors  $\mu$ :

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } u_i \in \mu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.8)$$

<sup>1)</sup> „T“ bezeichnet die Transposition, d.h. den Übergang von einem Spaltenvektor zu einem Zeilenvektor.

Satz 1.1 legt folgende Vermutung nahe. Es wird möglich sein, eine Teilmenge  $B$  aus der Menge der Elementarzyklen eines Graphen  $G$  so auszuwählen, daß mittels der Elemente von  $B$  alle Zyklen von  $G$  durch Summenbildung darstellbar sind, während keine echte Teilmenge von  $B$  diese Eigenschaft hat. Diese Überlegungen führen zum Begriff der Zyklenbasis. Um ihn zu formulieren, übernehmen wir zunächst den aus der linearen Algebra [9] bekannten Begriff der linearen Unabhängigkeit: Die Zyklen  $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(k)}$  eines Graphen heißen unabhängig, wenn gilt

$$r_1 \mu^{(1)} + r_2 \mu^{(2)} + \dots + r_k \mu^{(k)} = 0 \rightarrow r_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.9)$$

**D. 1.5 Definition 1.5:** Eine Menge  $B = \{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(k)}\}$  von Zyklen eines Graphen  $G = (X, U)$  heißt Zyklenbasis von  $G$ , wenn es sich bei den  $\mu^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) um unabhängige Elementarzyklen handelt und wenn jeder Zyklenvektor  $\mu$  von  $G$  mittels reeller Zahlen  $r_i$  in der Form

$$\mu = \sum_{i=1}^k r_i \mu^{(i)} \quad (1.10)$$

darstellbar ist.  $k = k(G)$  gibt dann die Dimension der Zyklenbasis an und wird auch zyklomatische Zahl des Graphen genannt.

Im allgemeinen gibt es durchaus mehrere Möglichkeiten, für  $G$  eine Zyklenbasis zusammenzustellen. Eindeutig bestimmt ist aber deren Dimension  $k(G)$ . Um über den Zahlenwert von  $k(G)$  eine Aussage machen zu können, benötigen wir noch folgenden Begriff:

**D. 1.6 Definition 1.6:** Es sei  $G = (X, U)$  bzw.  $G = [X, U]$ . Jede Teilmenge  $K \subset X$ , die aus einem Element  $a \in X$  und allen weiteren Knotenpunkten besteht, die mit  $a$  durch eine elementare Kette bzw. einen Weg verbunden sind, wird als eine Komponente von  $G$  bezeichnet.

Der in Bild 1.7 dargestellte Graph enthält zwei Komponenten, nämlich

$$K_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad K_2 = \{x_7, x_8, x_9\}.$$

Dagegen besitzen die Graphen der Bilder 1.1 bis 1.3, 1.5, 1.6 nur jeweils eine Komponente, nämlich ihre volle Knotenpunktmenge.

Für die Dimension einer Zyklenbasis gilt nun folgender

**S. 1.2 Satz 1.2:**  $G = (X, U)$  besitze  $n$  Knotenpunkte,  $m$  Bögen und  $p$  Komponenten. Dann ist

$$k(G) = m - n + p. \quad (1.11)$$

Der Beweis dieses wichtigen Satzes wird hier nicht geführt (siehe z. B. [1]). Wir wollen ihn aber an einem Beispiel erläutern.

**Beispiel 1.4:** Der in Bild 1.7 gezeigte Graph hat  $n = 9$  Knotenpunkte,  $m = 13$  Bögen und  $p = 2$  Komponenten. Jede Zyklenbasis besitzt daher die Dimension

$$k = m - n + p = 6.$$

Beispielsweise sind die Elementarzyklen

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= (1, 2, 3), & \mu^{(4)} &= (2, 8, 10) \\ \mu^{(2)} &= (3, 4, 5), & \mu^{(5)} &= (5, 6, 7, 8) \\ \mu^{(3)} &= (8, 9), & \mu^{(6)} &= (11, 13) \end{aligned} \quad (1.12)$$

unabhängig, denn jeder enthält einen Bogen, der in den übrigen fünf nicht vorkommt. Sie bilden deshalb eine Basis. Eine andere Zyklenbasis erhalten wir, wenn wir in (1.12)  $\mu^{(1)}$  durch  $\mu^{(7)} = (1, 2, 5, 4)$

ersetzen. Wie der Leser durch Bilden der zugehörigen Vektoren selbst nachprüfe, kann z. B. der Zyklus  $\mu = (1, 4, 5, 8, 10)$  mittels der Basis (1.12) folgendermaßen als Linearkombination dargestellt werden:

$$\mu = -\mu^{(1)} + \mu^{(2)} + \mu^{(4)}.$$

Im Abschnitt 1.5. werden wir eine Methode kennenlernen, mit der man systematisch Zyklenbasen bilden kann.

Möglichkeiten, wie wir sie hier für die Darstellung von Zyklen erläutert haben, gibt es in analoger Weise auch für geschlossene Kantenzüge in ungerichteten Graphen, die man dort durch Kreisbasen darstellen kann. Wir gehen darauf nicht näher ein. Überhaupt wollen wir uns von jetzt an im wesentlichen auf die Behandlung gerichteter Graphen beschränken, da diese in den Anwendungen der Graphentheorie auf praktische Problemstellungen, wie wir sie im Auge haben, die größere Bedeutung zukommt.

## 1.4. Arten des Zusammenhanges von Graphen

Wenn wir etwa die Bilder 1.5 und 1.7 vergleichen, so liegt es nahe, den ersten dieser Graphen als „zusammenhängend“, den zweiten als nicht zusammenhängend zu bezeichnen. Wir legen diese Eigenschaft jetzt exakt in einer Definition fest.

**Definition 1.7:** Ein Graph  $G = (X, U)$  bzw.  $G = [X, U]$  heißt **zusammenhängend**, wenn je D. 1.7 zwei Knotenpunkte aus  $X$  durch eine elementare Kette bzw. einen Weg verbunden sind.

Ein Vergleich mit Definition 1.6 zeigt folgendes: Jeder zusammenhängende Graph hat genau eine Komponente. Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so besitzt  $G$  mindestens zwei Komponenten.

In Hinblick auf praktische Anwendungen ist die Eigenschaft des Zusammenhanges z. B. dann wichtig, wenn  $G$  ein Versorgungsnetz, Verkehrsnetz oder ein System zur Informationsübertragung darstellt. Ein Fehlen des Zusammenhanges würde dann nämlich bedeuten, daß zwischen bestimmten Stellen (Knotenpunkten) des betreffenden Netzes keine Verbindung möglich ist. Von diesem Gesichtspunkt aus ist offenbar auch die Frage interessant, welche Konsequenzen es für die gegenseitige „Erreichbarkeit“ der Knotenpunkte hat, wenn in einem zusammenhängenden Graphen einzelne Elemente weggelassen werden (Ausfall von Knotenpunkten, Bögen oder Kanten von  $G$  durch „Havarie“ in dem durch  $G$  beschriebenen System). Um solche Eigenschaften der „Verwundbarkeit“ von Graphen beschreiben zu können, führen wir weitere Bezeichnungen ein.

Als **Lösung** (Streichung) eines Knotenpunktes  $x \in X$  verstehen wir die Entfernung von  $x$  und allen mit  $x$  inzidenten Bögen bzw. Kanten aus  $G$ . Der verbleibende Restgraph wird mit

$$G' = G - \{x\} \tag{1.13}$$

bezeichnet. Lösung eines Bogens bzw. einer Kante  $u$  bedeutet entsprechend, daß wir das Element  $u$  aus  $U$  entfernen. Für den Restgraphen wird

$$G' = G - \{u\} \tag{1.14}$$

geschrieben.  $G + \{u\}$  bedeutet entsprechend das Hinzufügen eines Bogens  $u$  zu  $G$ .

Der Knotenpunkt  $x \in X$  heißt eine **Artikulation** (Zerfällungspunkt) von  $G$ , wenn  $G - \{x\}$  mehr Komponenten besitzt als  $G$ .

$G$  heißt **p-fach zusammenhängend** (bezüglich der Knotenpunkte bzw. der Bögen oder Kanten), wenn  $G$  zusammenhängend ist und der Zusammenhang erst dann verlorengeht,

wenn mindestens  $p$  Elemente (Knotenpunkte bzw. Bögen oder Kanten) gelöscht werden. Anschaulich ausgedrückt ist ein System um so weniger „verwundbar“ (störanfällig), je größer die Zahl  $p$  im zugehörigen Graphen ist.

*Beispiel 1.5:* Der Graph  $G$  im Bild 1.5 ist zusammenhängend. Er enthält keine Artikulationen. Sein Zusammenhang bezüglich der Knotenpunkte ist 2fach, denn Lösung von  $b, c$  ergibt

$$G' = G - \{b, c\} = (X', U'); \quad X' = \{a, d\}, \quad U' = \emptyset,$$

d.h. einen aus zwei Komponenten bestehenden „Punktgraphen“. Bezuglich der Bögen liegt ebenfalls ein 2facher Zusammenhang vor (Lösung von  $u_4$  und  $u_5$ ).

Der in Bild 1.1 dargestellte Graph besitzt Artikulationen, nämlich die Knotenpunkte 2 und 3.

Im Falle von gerichteten Graphen werden noch andere Arten des Zusammenhangs unterschieden:

**D. 1.8 Definition 1.8:**  $G = (X, U)$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn je zwei Knotenpunkte  $x, y$  aus  $X$  durch eine von  $x$  nach  $y$  führende elementare Bahn verbunden sind.

In einem stark zusammenhängenden Graphen gibt es also zu je zwei Knotenpunkten  $a, b$  sowohl eine von  $a$  nach  $b$  führende als auch eine von  $b$  nach  $a$  führende elementare Bahn. Jeder stark zusammenhängende Graph ist auch zusammenhängend, aber nicht umgekehrt. Eine entsprechende Modifikation der Definition 1.6 stellt der Begriff der starken Komponente dar.

**D. 1.9 Definition 1.9:** Jede Teilmenge  $S \subset X$  von Knotenpunkten eines Graphen  $G = (X, U)$ , die aus einem Element  $a \in S$  und allen weiteren Knotenpunkten besteht, die mit  $a$  in beiden Richtungen durch je eine elementare Bahn verbunden sind, heißt eine **starke Komponente** von  $G$ .

Starke Komponenten sind, mit anderen Worten, Knotenpunktmenge, die maximale stark zusammenhängende Untergraphen von  $G$  aufspannen. Wenn  $G$  stark zusammenhängend ist, so besitzt der Graph genau eine starke Komponente, nämlich  $S = X$ . Es ist zu beachten, daß zusammenhängende Graphen zwar stets nur eine Komponente im Sinne der Definition 1.6 haben, im allgemeinen aber durchaus mehrere starke Komponenten besitzen können. So liegen z. B. im Bild 1.1 fünf starke Komponenten vor, nämlich

$$S_1 = \{1\}; \quad S_2 = \{2\}; \quad S_3 = \{3, 4, 5, 8\}; \quad S_4 = \{7\}; \quad S_5 = \{6\}.$$

Aus der Sicht des dem Graphen zugrunde liegenden realen Systems umfaßt eine starke Komponente jeweils alle Systemelemente, die durch Rückkopplungen miteinander verbunden sind. Nehmen wir an, daß im mathematischen Modell des Systems jedem Element eine Modellgleichung zugeordnet ist, die die „Ausgangsströme“  $x_A$  als Funktion der „Eingangsströme“  $x_E$  zu berechnen gestattet, vgl. Bild 1.8,

$$x_A^{(i)} = f^{(i)}(x_E^{(1)}, \dots, x_E^{(k)}); \quad i = 1, \dots, l. \quad (1.15)$$

Die Modellgleichungen aller einer starken Komponente angehörenden Knotenpunkte sind dann bezüglich der Eingangs- und Ausgangsvariablen miteinander gekoppelt und können deshalb nicht einfach nacheinander, sondern nur gemeinsam (bzw. iterativ) durchgerechnet werden. Hier wird ein Anwendungsfeld der Graphentheorie im Zusammenhang mit der Simulation und Optimierung komplexer Systeme und der in diesen ablaufenden Prozesse sichtbar. Bei der rechentechnischen Durchführung solcher Simulationen geht man meist so vor, daß für die Modelle der einzelnen Systemstufen (Knotenpunkte) Unterprogramme ausgearbeitet werden, aus denen dann das Gesamtpro-

gramm zusammengebaut werden kann. Hierbei ist es natürlich notwendig (von Hand oder automatisch) eine Reihenfolge festzulegen, in der die beteiligten Unterprogramme nacheinander zum Einsatz kommen müssen. Die Ermittlung einer möglichen Berechnungsreihenfolge kann anhand des dem System zugehörigen Graphen vorgenommen werden. Da es i. allg. viele Möglichkeiten gibt, kann sogar nach einer optimalen Variante gesucht werden, die einen minimalen Rechenzeitbedarf für die Simulation erwarten lässt. Eine Teilaufgabe bei dieser Strukturanalyse ist die Bestimmung aller starken Komponenten, da diese – wie gesagt – die Gruppen von Systemelementen liefern, die jeweils nur gemeinsam, etwa mittels eines Iterationsprozesses, berechnet werden können. Genaueres zu diesem Anwendungsbereich findet der Leser z. B. in [4], [10].

Eine Mittelstellung zwischen dem einfachen und dem starken Zusammenhang von gerichteten Graphen nimmt der quasistarken Zusammenhang ein. Diese Eigenschaft bedeutet folgendes:

**Definition 1.10:**  $G = (X, U)$  heißt **quasistark zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Knotenpunkten  $a, b \in X$  ein Element  $z \in X$  gibt, so daß von  $z$  aus elementare Bahnen nach  $a$  und nach  $b$  vorhanden sind. D. 1.10

In dieser Definition wird nicht ausgeschlossen, daß  $z$  mit  $a$  oder  $b$  identisch ist (im Falle  $z = a$  führt eine „Bahn der Länge Null“ von  $z$  nach  $a$ ). Es gilt folgende Implikation:

*Starker Zusammenhang  $\rightarrow$  quasistarker Zusammenhang  $\rightarrow$  Zusammenhang.*

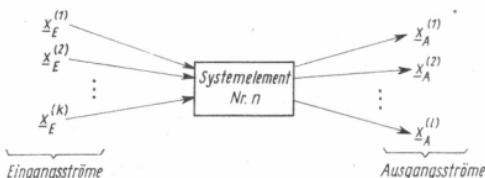


Bild 1.8. Eingangs- und Ausgangsströme eines Systemelements

**Beispiel 1.6:** Der Graph  $G_1$  in Bild 1.9 ist stark zusammenhängend.  $G_2$  besitzt quasistarken Zusammenhang, denn für die Knotenpunktpaare  $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$  ist gemäß Definition 1.10 jeweils  $z = c$  geeignet. Dagegen ist  $G_3$  nicht stark zusammenhängend, denn es führt z. B. keine Bahn von  $b$  nach  $c$ . Der Graph  $G_3$  schließlich ist zwar zusammenhängend, hat aber keinen quasistarken (und erst recht keinen starken) Zusammenhang, denn zu  $c, b$  gibt es keinen Knotenpunkt  $z$  der in Definition 1.10 geforderten Eigenschaft.

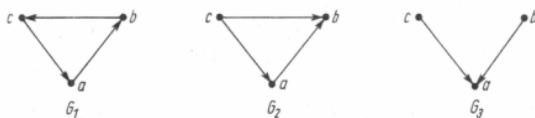


Bild 1.9. Zu Beispiel 1.6

In enger Beziehung mit der Eigenschaft des quasistarken Zusammenhangs steht der Begriff des Zentrums eines Graphen.

- D. 1.11 Definition 1.11:** Ein Knotenpunkt  $z \in X$  heißt **Zentrum** des Graphen  $G = (X, U)$ , wenn von  $z$  aus zu jedem Knotenpunkt von  $G$  je (mindestens) eine elementare Bahn führt.

Ein Vergleich mit Definition 1.8 läßt erkennen, daß für einen stark zusammenhängenden Graphen jeder Knotenpunkt ein Zentrum ist. Dagegen sichert Zusammenhang schlechthin nicht die Existenz eines Zentrums, wie  $G_3$  in Bild 1.9 zeigt. Vielmehr gilt folgender Satz:

- S. 1.3 Satz 1.3:** Der Graph  $G = (X, U)$  besitzt genau dann ein Zentrum, wenn er quasistark zusammenhängend ist.

## 1.5. Bäume und Gerüste

Oft besitzen die Strukturschemata realer Systeme eine Form, wie sie in Bild 1.10 angedeutet ist, d. h., sie bilden reine Verzweigungsnetze ohne Kreise bzw. Zyklen. Beispiele aus der Praxis sind Verteilungsnetze für Wasser oder elektrischen Strom, Leitungsstrukturen in Kombinaten, Stammbäume, Telefonnetze, Kanalsysteme usw. Wegen des häufigen Auftreten derartiger Graphen ist es angebracht, ihre besonderen Eigenschaften zu untersuchen. Zunächst führen wir eine spezielle Bezeichnung für diesen Graphentyp ein.

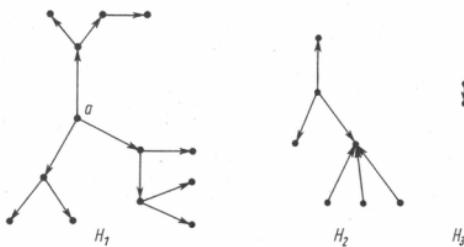


Bild 1.10. Bäume

- D. 1.12 Definition 1.12:** Ein zusammenhängender Graph  $H = (X, U)$  bzw.  $H = [X, U]$  mit mindestens einem Knotenpunkt, der keine Zyklen bzw. Kreise enthält, heißt ein **Baum**. Ist  $H$  nicht zusammenhängend und bildet für jede seiner Komponenten der aufgespannte Untergraph einen Baum, so wird  $H$  als **Wald** bezeichnet.

In Bild 1.10 stellen die Graphen  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  Bäume dar. Der durch Vereinigung entstehende Graph

$$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

ist ein Wald.

Knotenpunkte eines Baumes, mit denen genau ein Bogen (bzw. eine Kante) inzident ist, heißen **hängende Knotenpunkte**. Es gilt der anschaulich einleuchtende

- S. 1.4 Satz 1.4:** Jeder Baum mit mehr als einem Knotenpunkt besitzt mindestens zwei hängende Knotenpunkte.

Im nun folgenden Satz sind verschiedene Möglichkeiten zusammengestellt, einen Baum durch Eigenschaften zu charakterisieren. Wir formulieren sie für den Fall eines gerichteten Baumes. Ersetzt man die Worte Bogen, Zyklus, elementare Kette durch Kante, Kreis, Weg, so ergeben sich die entsprechenden Aussagen für ungerichtete Bäume.

**Satz 1.5:** *Dafür, daß ein Graph  $H = (X, U)$  mit  $n \geq 1$  Knotenpunkten ein Baum ist, sind folgende Eigenschaften äquivalent:* S. 1.5

- (1)  *$H$  ist zusammenhängend und zyklenfrei.*
- (2)  *$H$  ist zyklenfrei und besitzt genau  $n - 1$  Bögen.*
- (3)  *$H$  ist zusammenhängend und hat genau  $n - 1$  Bögen.*
- (4)  *$H$  ist zyklenfrei. Fügt man aber zwischen zwei beliebigen Knotenpunkten einen Bogen hinzu, so enthält der entstehende Graph genau einen Zyklus.*
- (5)  *$H$  ist zusammenhängend. Löscht man aber einen beliebigen Bogen, so ist der entstehende Graph nicht mehr zusammenhängend.*
- (6) *Jedes Knotenpunktpaar von  $H$  ist durch genau eine elementare Kette verbunden.*

Im Fall  $n = 1$  sind die Aussagen (5) und (6) nicht sinnvoll. Die oben genannten Eigenschaften lassen sich leicht auseinander herleiten. Beispielsweise besagen die in (1) genannten Eigenschaften:

$$p = 1, \quad k(G) = 0. \quad (1.16)$$

Wegen Satz 1.2 folgt dann  $m - n + 1 = 0$ , d. h.,  $m = n - 1$  und damit (2). Aus (2) wiederum, d. h. aus

$$k(G) = 0, \quad m = n - 1, \quad (1.17)$$

folgt wegen  $k(G) = m - n + p$

$$p = n - m = n - (n - 1) = 1, \quad (1.18)$$

d. h. die Eigenschaft (3) usw. Einen vollständigen Beweis findet der Leser z. B. in [1].

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Graphen  $G$ . Wenn  $G$  selbst kein Baum ist, so gibt es aber Untergraphen, die diese Eigenschaft besitzen. Von besonderer Bedeutung sind derartige Untergraphen dann, wenn sie alle Knotenpunkte von  $G$  erfassen.

**Definition 1.13:** *Ein alle Knotenpunkte erfassender Untergraph  $H$  von  $G$ , der ein Baum ist, wird als Gerüst des Graphen  $G$  bezeichnet.* D. 1.13

Betrachten wir beispielsweise den in Bild 1.5 dargestellten Graphen, so bildet  $H_1 = (X, U_1)$  mit  $X = \{a, b, c, d\}$  und  $U_1 = \{u_1, u_4, u_6\}$  ein Gerüst. Ein anderes ist  $H_2 = (X, U_2)$  mit  $U_2 = \{u_2, u_4, u_5\}$ . Der Leser findet leicht noch weitere Gerüste. Es erhebt sich die Frage, wie  $G$  beschaffen sein muß, damit ein Gerüst existiert. Es gilt:

**Satz 1.6:** *Der Graph  $G$  besitzt genau dann ein Gerüst, wenn er zusammenhängend ist.*

S. 1.6

**Beweis:** Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so gilt das natürlich auch für jeden alle Knotenpunkte von  $G$  enthaltenden Untergraphen. Also ist der Zusammenhang notwendig für die Existenz eines Gerüstes. Daß diese Eigenschaft auch hinreichend ist, zeigt folgende Betrachtung, die zugleich einen Algorithmus zur Bestimmung eines Gerüstes darstellt.  $G$  sei ein zusammenhängender Graph. Wir suchen nach einem Bogen, den man löschen kann, ohne daß der Zusammenhang verlorengeht. Wenn es keinen gibt, so ist nach Satz 1.5, Eigenschaft (5),  $G$  selbst ein Baum. Existiert ein solcher Bogen, so löschen wir ihn. Im entstehenden Restgraphen  $G'$  suchen wir wieder nach einem Bogen, dessen Löschung den Zusammenhang nicht zerstört. Gibt es keinen, so stellt der Teilgraph  $G'$  ein Gerüst von  $G$

dar. Andernfalls gelangen wir zu einem neuen Graphen  $G''$ , an dem wir die Prozedur wiederholen. Da  $G$  nur endlich viele Bögen hat, finden wir mit Sicherheit ein Gerüst von  $G$ . Der Satz ist damit bewiesen.

In Definition 1.6 haben wir erklärt, was unter einer Zyklenbasis eines Graphen  $G = (X, U)$  zu verstehen ist. Die Konstruktion einer solchen Basis kann mit Hilfe eines Gerüstes von  $G$  leicht ausgeführt werden.

**S. 1.7 Satz 1.7:**  $G = (X, U)$  sei ein zusammenhängender Graph und  $H = (X, V)$ , ( $V \subset U$ ) sei ein Gerüst von  $G$ . Dann gilt für jeden Bogen  $u \in U - V$ : Wird  $u$  zu  $H$  hinzugefügt, so enthält  $H' = H + \{u\}$  genau einen Elementarzyklus  $\mu^{(u)}$ . Die Menge aller so erzeugbaren Zyklen bildet eine Zyklenbasis von  $G$ .

*Beweis:*  $U - V$  ist die Menge der Bögen, die wir in  $G$  löschen müssen, um das Gerüst  $H$  zu erhalten. Ist  $U = V$ , so ist nichts zu beweisen. Es sei also  $V$  eine echte Teilmenge von  $U$ , und sei  $u \in U - V$ . Da  $H$  ein Baum ist, enthält  $H + \{u\}$  nach Satz 1.5 (Eigenschaft (4)) genau einen Zyklus, der dann nach Satz 1.1 auch elementar ist. Wenn  $|X| = n$  die Anzahl der Knotenpunkte von  $G$  und  $|U| = m$  die Zahl der Bögen von  $G$  ist, so folgt aus Satz 1.5 (Eigenschaft (3)):  $|V| = n - 1$ , und weiter:  $|U - V| = m - |V| = m - n + 1$ . Wir erhalten also auf die oben beschriebene Weise genau  $k(G)$  Elementarzyklen, wobei  $k(G)$  die Dimension einer Zyklenbasis von  $G$  ist, vgl. Satz 1.2. Diese  $m - n + 1$  Zyklen sind auch unabhängig, denn jeder enthält einen Bogen (nämlich den zu  $H$  jeweils hinzugefügten), der in allen übrigen Zyklen nicht vorkommt. Sie bilden deshalb tatsächlich eine Zyklenbasis von  $G$ .

*Beispiel 1.7:* Im Bild 1.11 sind durch die stark gezeichneten Bögen zwei verschiedene Gerüste des Graphen der Abb. 1.5 dargestellt. Im Beispiel a ist also  $U - V_a = \{u_2, u_3, u_5\}$  die Menge der aus  $G$  gelöschten Bögen. Wegen  $k(G) = m - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$  gehören zu einer Basis drei Zyklen. Diese erhält man nach Satz 1.7 folgendermaßen: Bei Hinzunahme des Bogens  $u_2$  zum Gerüst entsteht der Zyklus  $\mu^{(2)} = (u_2, u_6, u_1)$ . Mit  $u_3$  erhält man den Zyklus  $\mu^{(3)} = (u_3, u_1, u_6)$  und mit  $u_5$  schließlich  $\mu^{(5)} = (u_5, u_4, u_6)$ . Auf ganz analoge Weise ergibt sich mittels des im Beispiel b verwendeten Gerüstes eine andere Zyklenbasis mit den Elementen

$$\mu^{(1)} = (u_1, u_4, u_5, u_2); \quad \mu^{(3)} = (u_3, u_2); \quad \mu^{(6)} = (u_6, u_5, u_4).$$

Wenn  $G$  nicht zusammenhängend ist, dann können wir den Satz 1.7 auf jede Komponente von  $G$  anwenden und erhalten so ebenfalls eine Zyklenbasis des Graphen.

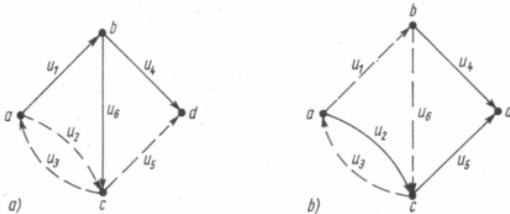


Bild 1.11. Zu Beispiel 1.7

**D. 1.14 Definition 1.14:** Ein Baum, der ein Zentrum besitzt, heißt ein Büschel.

Den Begriff „Zentrum“ hatten wir in Definition 1.11 erklärt. In Bild 1.10 stellt  $H_1$  ein Büschel mit dem Knotenpunkt  $a$  als Zentrum dar. Dagegen ist der Baum  $H_2$  kein Büschel,

denn dieser Graph enthält kein Zentrum. Wir wollen nun in einem zu 1.5 analogen Satz verschiedene Eigenschaften eines Büschels zusammenstellen (eine Beweisführung findet der Leser in [1].)

**Satz 1.8:** *Dafür, daß ein Graph  $H = (X, U)$  mit  $n \geq 1$  Knotenpunkten ein Büschel ist, sind folgende Eigenschaften äquivalent:* S. 1.8

- (1)  *$H$  ist ein Baum mit einem Zentrum.*
- (2)  *$H$  ist quasistark zusammenhängend und zyklenfrei.*
- (3)  *$H$  ist quasistark zusammenhängend und besitzt genau  $n - 1$  Bögen.*
- (4)  *$H$  enthält einen Knotenpunkt  $a_1$ , von dem aus je genau eine Bahn zu jedem anderen Knotenpunkt führt.*
- (5)  *$H$  ist quasistark zusammenhängend. Löscht man aber einen beliebigen Bogen, so besitzt der entstehende Graph diese Eigenschaften nicht mehr.*
- (6)  *$H$  ist zusammenhängend, und es gibt in  $H$  einen Knotenpunkt  $a_1$ , in dem kein Bogen endet, während in allen übrigen Knotenpunkten genau ein Bogen endet, d. h.*

$$|\omega^-(a_1)| = 0; \quad |\omega^-(a_j)| = 1, \quad j \neq 1. \quad (1.19)$$

Wir stellen noch die Frage, unter welchen Bedingungen ein Graph  $G$  ein Büschel als Gerüst besitzt. Es gilt

**Satz 1.9:** *Der Graph  $G = (X, U)$  besitzt genau dann ein Büschel als Gerüst, wenn er quasistark zusammenhängend ist.* S. 1.9

Der Beweis verläuft ganz analog wie bei Satz 1.6.

**Beispiel 1.8:** Der Graph in Bild 1.5 ist quasistark zusammenhängend, er enthält die Zentren  $a, b, c$ . Nach Satz 1.9 muß sich also ein Büschel als Gerüst finden lassen. Tatsächlich ist das Gerüst  $H = (X, V)$  mit  $V = \{u_1, u_2, u_4\}$  ein Büschel, wobei der Knotenpunkt  $a$  das Zentrum ist.

## 1.6. Ströme und Spannungen

Die bisherigen Definitionen und Sätze sagen im wesentlichen nur etwas über die *Struktur* eines Graphen bzw. des durch den Graphen abgebildeten realen Systems aus. Wir werden jetzt andere Begriffe einführen, mit deren Hilfe man *Vorgänge* beschreiben kann, die in einem solchen System ablaufen oder auch *Zustände*, in denen sich das System befindet. Dadurch eröffnen sich der Graphentheorie viele praktische Anwendungen.

Betrachten wir beispielsweise den Fall, daß  $G = (X, U)$  ein elektrisches Netzwerk darstellt. Den Knotenpunkten entsprechen dann die Verzweigungspunkte der Stromleitungen, den Bögen die Leiterabschnitte selbst (mit den darin befindlichen Widerständen, Spannungsquellen usw.).  $G$  stellt zunächst nur die Struktur des Netzes dar. Wenn wir darüber hinaus eine im Netzwerk vorhandene Stromverteilung beschreiben wollen, so müssen wir offenbar jedem Bogen noch die dort vorhandene Stromstärke zuordnen. Eine andere Möglichkeit, elektrische Vorgänge im Netz zu beschreiben, wäre die, daß wir für jeden Bogen des Graphen den dort vorhandenen Spannungsabfall angeben oder daß wir jedem Knotenpunkt den zugehörigen Potentialwert zuordnen.

Ganz entsprechend wäre zu verfahren, wenn  $G$  etwa ein Rohrleitungssystem zur Verteilung von Wasser, Gas oder Dampf abbildet. Zur Beschreibung des im Netz stattfindenden Transportvorganges kommen wir, wenn wir den Bögen von  $G$  die zugehörigen Durchflußmengen pro Zeiteinheit zuordnen (oder die Druckabfälle in den Rohrleitungsschnitten).

Ein weiteres Beispiel ist die Beschreibung des Verkehrsflusses in einem Straßennetz  $G$ . Hier könnte man zu jedem Bogen die Anzahl der Fahrzeuge angeben, welche pro Zeiteinheit den entsprechenden Straßenabschnitt (im Sinne einer festgelegten Richtung) passieren. Der Leser wird leicht viele weitere Beispiele finden, bei denen es darum geht, einen im System ablaufenden Vorgang zu beschreiben. Wie uns die Beispiele zeigen, gelingt dies dadurch, daß wir den Bögen (oder Knotenpunkten) des Graphen geeignete Zahlen zuordnen. In einem solchen Fall spricht man dann ganz allgemein von einem **bogenbewerteten bzw. knotenbewerteten Graphen**. Von dieser Möglichkeit machen wir im folgenden Gebrauch. Wir wollen uns dabei auf die Betrachtung gerichteter zusammenhängender Graphen beschränken.

**D. 1.15 Definition 1.15:**  $G = (X, U)$  sei ein zusammenhängender Graph,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Ist jedem Bogen  $u_i$  eine reelle Zahl  $\varphi_i$  zugeordnet, so wird der Vektor

$$\varphi^T = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_m) \quad (1.20)$$

als ein **Fluß auf dem Graphen  $G$**  bezeichnet.

Beispielsweise kann  $\varphi$  einen realen Strömungsvorgang widerspiegeln, wobei  $\varphi_i$  die Menge ist, die den Bogen  $u_i$  in der Zeiteinheit durchfließt. Wenn ein solcher Fall vorliegt und  $\varphi_i > 0$  gilt, so deuten wir dies als einen Fluß in Richtung des Bogens  $u_i$ , entsprechend entgegen der Bogenrichtung, wenn  $\varphi_i < 0$  ist.

Nun sei  $A \subset X$  eine Teilmenge der Knotenpunkte. Wir führen dann folgende Bezeichnungen ein:

$$\Phi^+(A) = \sum_{u_i \in w^+(A)} \varphi_i, \quad \Phi^-(A) = \sum_{u_i \in w^-(A)} \varphi_i, \quad (1.21)$$

$$\Phi(A) = \Phi^+(A) - \Phi^-(A). \quad (1.22)$$

Dabei ist (vgl. Formel 1.1 und Bild 1.12)  $w^+(A)$  bzw.  $w^-(A)$  die Menge der mit  $A$  nach außen bzw. innen inzidenten Bögen. Wenn wir uns  $\varphi$  als einen Materialfluß vorstellen und um die Knotenpunkte  $A$  einen „Bilanzkreis“ gezogen denken, dann bedeutet  $\Phi^+(A)$  anschaulich die Menge, welche insgesamt über die aus  $A$  herausführenden Bögen pro Zeiteinheit nach außen abströmt. Entsprechend stellt  $\Phi^-(A)$  die Stoffmenge dar, welche über die in  $A$  hineinführenden Bögen in den Bilanzkreis pro Zeiteinheit hineinströmt. Schließlich gibt  $\Phi(A)$  an, wieviel insgesamt aus dem Bilanzkreis pro Zeiteinheit ausströmt (Genauer: mehr ausströmt als hineinfließt). Natürlich können wir eine solche „Mengenbilanz“ auch für einen einzelnen Knotenpunkt  $x \in X$  aufstellen.

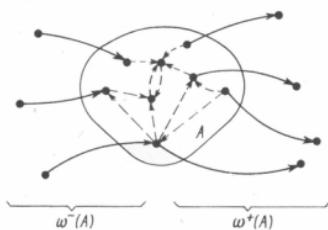


Bild 1.12. Zu den Formeln (1.21) und (1.22)

**S. 1.10 Satz 1.10:** Für jede Teilmenge  $A \subset X$  von Knotenpunkten gilt

$$\Phi(A) = \sum_{x \in A} \Phi(x). \quad (1.23)$$

*Beweis:* Durch Anwenden von (1.22), (1.21) auf  $\Phi(x)$  können wir zunächst schreiben

$$\sum_{x \in A} \Phi(x) = \sum_{x \in A} [\Phi^+(x) - \Phi^-(x)] = \sum_{x \in A} \left[ \sum_{u_i \in \omega^+(x)} \varphi_i - \sum_{u_i \in \omega^-(x)} \varphi_i \right]. \quad (1.24)$$

Nun kann die Bogenmenge  $\omega^+(x)$  zerlegt werden in eine Teilmenge  $\omega_1^+(x)$ , deren Elemente zu  $\omega^+(A)$  gehören und eine zweite  $\omega_2^+(x)$ , deren Bögen in Knotenpunkten von  $A$  enden. Entsprechend ist eine Zerlegung  $\omega^-(x) = \omega_1^-(x) \cup \omega_2^-(x)$  möglich, wobei  $\omega_1^-(x)$  die Bögen enthält, die auch zu  $\omega^-(A)$  gehören, während die Bögen von  $\omega_2^-(x)$  ihren Anfangspunkt in  $A$  haben. Damit wird aus (1.24)

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} \Phi(x) &= \sum_{x \in A} \left[ \sum_{u_i \in \omega_1^+(x)} \varphi_i + \sum_{u_i \in \omega_2^+(x)} \varphi_i - \sum_{u_i \in \omega_1^-(x)} \varphi_i - \sum_{u_i \in \omega_2^-(x)} \varphi_i \right] \\ &= \left[ \sum_{x \in A} \sum_{u_i \in \omega_1^+(x)} \varphi_i - \sum_{x \in A} \sum_{u_i \in \omega_1^-(x)} \varphi_i \right] \\ &\quad + \left[ \sum_{x \in A} \sum_{u_i \in \omega_2^+(x)} \varphi_i - \sum_{x \in A} \sum_{u_i \in \omega_2^-(x)} \varphi_i \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

In der ersten Doppelsumme wird gerade über alle Bögen von  $\omega^+(A)$ , in der zweiten über alle Bögen von  $\omega^-(A)$  summiert. In der dritten und vierten Doppelsumme wird jeweils über alle Bögen des von  $A$  aufgespannten Untergraphen von  $G$  summiert, deshalb heben sich die Beträge paarweise weg. Also reduziert sich (1.25) auf

$$\sum_{x \in A} \Phi(x) = \sum_{u_i \in \omega^+(A)} \varphi_i - \sum_{u_i \in \omega^-(A)} \varphi_i = \Phi^+(A) - \Phi^-(A) = \Phi(A). \quad (1.26)$$

Eine interessante Aussage liefert der damit bewiesene Satz 1.10 im Spezialfall  $A = X$ .

**Satz 1.11:** Für jeden Fluß  $\varphi$  auf einem Graphen  $G = (X, U)$  gilt

S. 1.11

$$\Phi(X) = \sum_{x \in X} \Phi(x) = 0. \quad (1.27)$$

*Beweis:* Nach (1.22) ist  $\Phi(X) = \Phi^+(X) - \Phi^-(X)$ . Wegen  $\omega^+(X) = \omega^-(X) = \emptyset$  ergibt sich aus (1.21)  $\Phi^+(X) = \Phi^-(X) = 0$ , und mit (1.23) folgt schließlich (1.27).

Anschaulich besagt (1.27), wenn wir  $\varphi$  als Materialfluß deuten, daß für jeden Fluß auf  $G$  der „Satz von der Erhaltung der Menge“ gilt; der durch  $\varphi$  beschriebene Strömungsvorgang ist so beschaffen, daß alles, was durch irgendwelche „Quellen“ in die Bögen des Graphen hineinfließt, durch gewisse „Senken“ auch wieder abfließt. Entsprechend dieser Deutungsmöglichkeit sind noch folgende Bezeichnungen üblich: Wenn für ein  $x \in X$  gilt  $\Phi(x) > 0$ , so heißt dieser Knotenpunkt eine **Quelle** des Flusses mit der **Ergiebigkeit**  $\Phi(x)$ . Im Fall  $\Phi(x) < 0$  liegt in  $x$  eine **Senke** von  $\varphi$  mit dem **Verbrauch**  $|\Phi(x)|$  vor. Wenn  $\Phi(x) = 0$  gilt, so wird  $x$  als **Durchgangsknoten** des Flusses bezeichnet. Besitzt der Fluß  $\varphi$  genau eine Quelle  $\bar{a}$  und eine Senke  $\bar{b}$ , so spricht man auch von einem **Fluß von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$** . Für diesen gilt dann gemäß (1.27):

$$\Phi(\bar{a}) = -\Phi(\bar{b}),$$

d. h., die Ergiebigkeit der Quelle ist ebensogroß wie der Verbrauch der Senke.  $\Phi(\bar{a})$  wird dann als **Wert** des Flusses bezeichnet.

**D. 1.16 Definition 1.16:** Gilt für einen Fluß  $\varphi$  auf  $G = (X, U)$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in X, \quad (1.28)$$

so heißt  $\varphi$  ein Strom auf dem Graphen  $G$ .

Ein Strom besitzt demnach weder Quellen noch Senken, sondern nur Durchgangsknoten. Wir können (1.28) mit Hilfe von (1.21), (1.22) auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{u_i \in \omega^+(x)} \varphi_i = \sum_{u_i \in \omega^-(x)} \varphi_i \quad \text{für alle } x \in X. \quad (1.29)$$

Diese Knotenpunktregel besagt anschaulich, daß bei Strömen der „Satz von der Erhaltung der Menge“ für jeden Knoten einzeln gilt, d. h., alles, was dem Knotenpunkt zufließt, strömt auch wieder weg. Stellt insbesondere  $G$  ein elektrisches Netzwerk dar, so ist (1.29) mit der Kirchhoff'schen Knotenregel identisch.

Interessant und für die Anwendungen wichtig ist die Möglichkeit, daß wir die Behandlung von Problemen, bei denen Quellen und Senken auftreten, in jedem Fall zurückführen können auf die Untersuchung äquivalenter Stromprobleme. Dies gelingt durch den Übergang zu einem geeignet erweiterten Graphen, wie folgende Überlegung zeigt.

Gegeben sei ein Fluß  $\varphi$  auf  $G = (X, U)$  mit den Quellen  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_q$  (Ergiebigkeit  $\Phi(\bar{a}_j)$ ;  $j = 1, \dots, q$ ) und den Senken  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_s$  (Verbrauch  $|\Phi(\bar{b}_k)|$ ;  $k = 1, \dots, s$ ). In Bild 1.13 ist  $G$  durch die strichpunktierte Kurve abgegrenzt. Wir konstruieren nun einen erweiterten Graphen  $G^* = (X^*, U^*)$ , indem wir zwei Knotenpunkte  $\bar{a}, \bar{b}$  zu  $X$  hinzufügen und  $U$  durch die Bögen

$$\begin{aligned} &(\bar{a}, \bar{a}_j); \quad j = 1, \dots, q, \\ &(\bar{b}_k, \bar{b}); \quad k = 1, \dots, s, \end{aligned} \quad (1.30)$$

ergänzen. Auf  $G^*$  wird nun folgender Fluß  $\varphi^*$  betrachtet

$$\varphi^*(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{für } u \in U, \\ \Phi(\bar{a}_j) & \text{für } u = (\bar{a}, \bar{a}_j); \quad j = 1, \dots, q, \\ -\Phi(\bar{b}_k) & \text{für } u = (\bar{b}_k, \bar{b}); \quad k = 1, \dots, s. \end{cases} \quad (1.31)$$

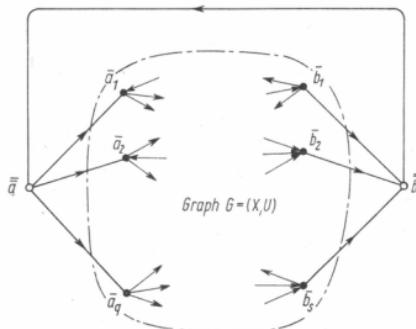


Bild 1.13. Überführung von Flußproblemen in Stromprobleme

Für  $\varphi^*$  sind dann die  $\bar{a}_j$  und  $\bar{b}_k$  zu Durchgangsknoten geworden, und dieser Fluß besitzt auf  $G^*$  nur die eine Quelle  $\bar{a}$  mit der Ergiebigkeit

$$\Phi^*(\tilde{a}) = \sum_{j=1}^q \Phi(\tilde{a}_j) \quad (1.32)$$

und nur die eine Senke  $\tilde{b}$  mit dem Verbrauch  $|\Phi^*(\tilde{b})| = \Phi^*(\tilde{a})$ .

In einem zweiten Schritt können wir nun sogar zu einem Strom übergehen, indem wir nämlich zu  $G^*$  noch den Rückkehrbogen  $(\tilde{b}, \tilde{a})$  hinzufügen und auf dem so entstehenden Graphen  $G^{**}$  den Fluß  $\varphi^{**}$  mit

$$\varphi^{**}(u) = \begin{cases} \varphi^*(u) & \text{für } u \in U^*, \\ \Phi^*(\tilde{a}) & \text{für } u = (\tilde{b}, \tilde{a}) \end{cases} \quad (1.33)$$

betrachten.  $\varphi^{**}$  ist tatsächlich ein Strom auf  $G^{**}$ , denn auch in  $\tilde{a}$  und  $\tilde{b}$  gilt jetzt die Knotenpunktregel (1.29).

Graphen mit einer Struktur wie  $G^{**}$  werden oft als Transportnetze bezeichnet;  $\tilde{a}$  heißt dann der Eingangsknoten,  $\tilde{b}$  der Ausgangsknoten. Die Bögen  $(\tilde{a}, \tilde{q}_j)$  werden Eingangsbögen,  $(\tilde{b}_k, \tilde{b})$  Ausgangsbögen und  $(\tilde{b}, \tilde{a})$  wird, wie schon erwähnt, Rückkehrbogen des Netzwerks genannt. Ströme auf Transportnetzen werden uns im Abschnitt 5. noch näher beschäftigen.

Da Ströme auf Graphen in den Anwendungen eine besonders wichtige Rolle spielen, wollen wir noch einige weitere Eigenschaften besprechen. So gilt

**Satz 1.12:** Die Menge  $\Phi(G)$  aller Ströme auf einem gegebenen Graphen  $G$  bildet einen linearen Vektorraum über der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Insbesondere gilt also: Aus  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in \Phi(G)$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  folgt S. 1.12

$$\varphi = c_1 \varphi^{(1)} + c_2 \varphi^{(2)} \in \Phi(G). \quad (1.34)$$

*Beweis:* Ist  $x$  ein beliebiger Knotenpunkt, so gilt nach (1.21), (1.22)

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{u_i \in w^+(x)} \varphi_i - \sum_{u_i \in w^-(x)} \varphi_i \\ &= c_1 \left[ \sum_{w^+(x)} \varphi_i^{(1)} - \sum_{w^-(x)} \varphi_i^{(1)} \right] + c_2 \left[ \sum_{w^+(x)} \varphi_i^{(2)} - \sum_{w^-(x)} \varphi_i^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Da  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$  nach Voraussetzung Stromvektoren sind, verschwinden gemäß (1.29) beide eckigen Klammern, d. h., es gilt  $\Phi(x) = 0$ . Die übrigen, einen linearen Vektorraum kennzeichnenden Eigenschaften [9] ergeben sich aus der Tatsache, daß  $\Phi(G)$  jedenfalls ein Unterraum des  $m$ -dimensionalen reellen Vektorraumes ist.

Zur Beantwortung der Frage, welches die Dimension von  $\Phi(G)$  ist und wie man eine Basis des Raumes erhält, führt folgende Überlegung:

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß jeder Zyklenvektor  $\mu$  ein Strom ist [vgl. die Formeln (1.6), (1.7)]. Durch (1.7) ist jedem Bogen eine reelle Zahl zugeordnet. Außerdem erfüllt  $\mu$  für jedes  $x \in X$  die Knotenpunktregel (1.29). Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst einen Elementarzyklus. Ist nun  $x$  ein beliebiger Knotenpunkt, so sind zwei Fälle möglich: Entweder die Bogenfolge  $\mu$  führt nicht durch  $x$ , oder sie geht dort hindurch. Im ersten Fall ist keiner der Bögen von  $\mu$  mit  $x$  inzident, d.h., in (1.29) sind wegen (1.7) beide Summen Null. Im zweiten Fall sind genau zwei Bögen von  $\mu$  mit  $x$  inzident, wobei die in Tabelle 1.2 gezeigten Lagebeziehungen möglich sind. Bei jeder Variante ist aber, unabhängig von der Festlegung des Durchlaufsinnes von  $\mu$ , die Knotenpunktregel (1.29) in  $x$  erfüllt. Wenn der Zyklus nicht elementar ist, so kann er nach Satz 1.1 als Summe elementarer Zyklen dargestellt werden, und deshalb ist wegen Satz 1.12 auch dann die Stromeigenschaft gewährleistet.

Tabelle 1.2: Mit  $x$  inzidente Bögen eines Elementarzyklus  $\mu$ 

Mögliche Fälle	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sum_{w^-(x)} \mu_i$	$\sum_{w^+(x)} \mu_i$
	1	1	1	1
	1	-1	0	$1 + (-1)$
	-1	-1	-1	-1
	-1	1	$(-1) + 1$	0

Durchlaufsinne:

Die Definition 1.16 zeigt, daß nicht alle  $m$  Komponenten eines Stromes  $\varphi$  willkürlich festgelegt werden können, denn es müssen ja die Knotenpunktregeln (1.29) eingehalten werden. Deshalb erhebt sich die Frage, durch welche Vorgaben ein Strom auf einem gegebenen Graphen eindeutig bestimmt ist. Hierüber gibt der folgende Satz Auskunft.

**S. 1.13 Satz 1.13:**  $G = (X, U)$  sei zusammenhängend,  $H = (X, V)$  sei ein Gerüst von  $G$ , und  $U - V = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  seien die Bögen außerhalb des Gerüstes. Schließlich sei  $\{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(k)}\}$  die gemäß Satz 1.7 mit Hilfe der Bögen von  $U - V$  gebildete Zyklensbasis von  $G$  (wobei der Durchlaufsinne von  $\mu^{(i)}$  jeweils durch den diesen Zyklus schließenden Bogen  $u_i$  festgelegt werde). Dann ist ein Strom  $\varphi^T = (\varphi_1 \dots \varphi_m)$  durch seine Komponenten  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  auf den Bögen von  $U - V$  eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\varphi = \varphi_1 \mu^{(1)} + \varphi_2 \mu^{(2)} + \dots + \varphi_k \mu^{(k)}. \quad (1.35)$$

*Beweis:* Da Zyklenvektoren Ströme sind, ist nach Satz 1.12 auch der in (1.35) gebildete Vektor  $\varphi$  ein Strom. Wegen

$$\mu_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst; } \end{cases} \quad j = 1, \dots, k; \quad i = 1, \dots, k,$$

hat  $\varphi$  auf den Bögen von  $U - V$  auch die dort vorgegebenen Komponenten. Daß  $\varphi$  durch die Vorgaben  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  eindeutig bestimmt ist, wird durch die Vektorraumeigenschaft von  $\Phi(G)$  gesichert.

Satz 1.13 besagt, daß der Freiheitsgrad eines Stromes durch die zyklomatische Zahl  $k(G)$  des Graphen bestimmt ist. Von den  $m$  Komponenten eines Stromvektors  $\varphi$  können wir  $k = m - n + 1$  willkürlich vorgeben, die übrigen  $n - 1$  sind dann durch die Knotenpunktregeln (1.29) eindeutig festgelegt. Dabei dürfen aber diese Vorgaben nicht für irgendwelche Bögen des Graphen erfolgen, sondern für diejenigen außerhalb eines Gerüstes von  $G$ .  $k(G)$  gibt demnach die Dimension des Vektorraumes  $\Phi(G)$  an, und Zyklensbasen bilden Basisysteme dieses Raumes. (1.35) gibt an, wie wir mit Hilfe der Vorgabewerte (und der zum Gerüst gehörigen Zyklensbasis) den Gesamtvektor ausrechnen können.

Wenn  $G$  speziell ein Baum ist, so gilt  $k(G) = 0$ , d. h., hier kann keine Komponente eines Stromvektors frei gewählt werden. Auf Bäumen ist nämlich nur der Nullstrom  $\varphi = 0$  möglich, der Leser möge dies mittels des Satzes 1.4 selbst nachweisen. Wenn  $G$  nicht zusammenhängend ist, so gilt Satz 1.13 für jeden durch eine Komponente von  $G$  aufgespannten Untergraphen sinngemäß.

*Beispiel 1.9:* Der im strichpunktuierten Gebiet des Bildes 1.14 enthaltene Graph  $G$  stelle das Kühlwasersernetz eines Chemiebetriebes dar. In den Rohrleitungen sollen nun Meßgeräte installiert werden, so

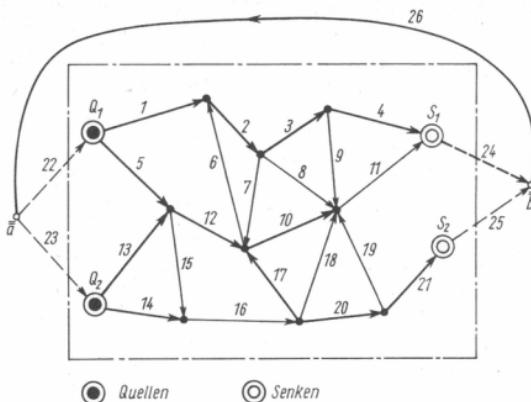


Bild 1.14. Stromverteilung in einem Kühlwassernetz (zu Beispiel 1.9)

daß man aus deren Durchflußmessungen einen vollständigen Überblick über die Stromverteilung im Netz erhält. Dabei sollen aber nicht mehr Geräte eingesetzt werden, als unbedingt nötig ist. Zu lösen sind die Fragen, wie viele Geräte notwendig sind, auf welchen Bögen sie eingebaut werden müssen und wie sich aus den Messungen die vollständige Stromverteilung errechnen läßt.

Im Netz  $G$  kommen zwei Quellen ( $Q_1, Q_2$ ), und zwei Senken ( $S_1, S_2$ ) vor. Um die Aufgabenstellung als Stromproblem behandeln zu können, gehen wir entsprechend den Formeln (1.30) bis (1.33) durch Hinzufügen der Knotenpunkte  $\bar{a}, \bar{b}$  und der Bögen 22 bis 26 zu einem Transportnetz  $G^{**}$  über. Dieses enthält dann 15 Knoten und 26 Bögen. Damit gilt  $k(G) = 26 - 15 + 1 = 12$ , und die erste Frage kann beantwortet werden: Es sind 12 Meßgeräte notwendig. Um festzulegen, wo diese einzubauen sind, müssen wir ein Gerüst in  $G^{**}$  konstruieren. Hierfür gibt es natürlich sehr viele Möglichkeiten. Für welche man sich entscheidet, wird im praktischen Fall auch von technologischen Gesichtspunkten abhängen (leichte Zugänglichkeit der Meßstelle usw.). Wenn wir annehmen, daß das stark ausgezeichnete Gerüst gewählt wurde, dann sind die Messungen auf den Bögen

$$\begin{array}{c} 6, 7, 8, 9, 11, 15 \\ 16, 18, 19, 22, 23, 25 \end{array}$$

vorzunehmen (auf 22, 23 wird die Ergiebigkeit der Quellen, auf 25 der Verbrauch der Senke  $S_2$  gemessen; bei den übrigen Bögen handelt es sich um Durchflußmessungen). Damit ist auch die zweite Frage beantwortet.

Um noch Formeln zur Berechnung der Durchflußmengen auf den zum Gerüst gehörigen Bögen zu erhalten, bestimmen wir die zugehörige Zyklenbasis. Unter Verwendung des Satzes 1.7 ergeben sich die zwölf zur Basis gehörigen Vektoren  $\mu^{(6)}, \dots, \mu^{(25)}$ . Beispielsweise haben von  $\mu^{(6)}$  die Komponenten 5, 12, 6 den Wert 1, Komponente 1 hat den Wert -1, die übrigen sind Null (entsprechend dem durch Bogen 6 geschlossenen Zyklus in Bild 1.14). Aus (1.35) erhalten wir dann die gesuchten Formeln:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_9 - \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \varphi_{25} \\ \varphi_2 &= \varphi_7 + \varphi_8 + \varphi_9 - \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \varphi_{25} \\ \varphi_3 &= \varphi_9 - \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \varphi_{25} \\ \varphi_4 &= -\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \varphi_{25} \\ \varphi_5 &= \varphi_6 - \varphi_7 - \varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{11} - \varphi_{23} + \varphi_{25} \\ \varphi_{10} &= -\varphi_8 - \varphi_9 + \varphi_{11} - \varphi_{18} - \varphi_{19} \\ &\vdots \\ \varphi_{26} &= \varphi_{22} + \varphi_{23} \end{aligned}$$

Die fehlenden Formeln ergänze der Leser selbst.

Fragestellungen, die den im Beispiel 1.9 behandelten ähnlich sind, treten natürlich auch für andersartige Strömungsvorgänge auf, etwa im Zusammenhang mit Dampf- und Gasnetzen, mit Verkehrsströmen, elektrischen Strömen usw. Vom Anwendungsgebiet der elektrischen Netzwerke wurde auch der Begriff der Spannung in die Graphentheorie übernommen:

**D. 1.17 Definition 1.17:** Ist jedem Bogen  $u_i$  eines zusammenhängenden Graphen  $G = (X, U)$  mit  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  eine reelle Zahl  $\vartheta_i$  zugeordnet, so daß für jeden Elementarzyklus  $\mu$  von  $G$  gilt

$$\sum_{u_i \in \mu^+} \vartheta_i = \sum_{u_i \in \mu^-} \vartheta_i, \quad (1.36)$$

so heißt der Vektor  $\vartheta^T = (\vartheta_1 \dots \vartheta_m)$  eine Spannung auf dem Graphen  $G$ .

In (1.36) bedeutet  $\mu^+$  bzw.  $\mu^-$  die Menge der im Durchlaufsinn bzw. entgegen dem Durchlaufsinn des Zyklus gerichteten Bögen von  $\mu$  (vgl. Formel (1.7)). Zu einer anschaulichen Deutung der Spannungsregel (1.36) kommen wir, wenn wir die Schreibweise

$$\sum_{u_i \in \mu^+} \vartheta_i + \sum_{u_i \in \mu^-} (-\vartheta_i) = 0 \quad (1.37)$$

verwenden und uns  $G$  als ein elektrisches Netzwerk vorstellen.  $\mu$  entspricht dann einer Leiterschleife. Der im Durchlaufsinn gezählte Spannungsabfall längs eines Leiterstückes (Bogens) ist dann  $\vartheta_i$ , falls der Bogen im Durchlaufsinn gerichtet ist, und  $-\vartheta_i$  andernfalls. (1.37) besagt dann, daß die Umlaufspannung längs jeder Leiterschleife Null sein muß, und dies ist ein bekanntes Gesetz der Elektrostatik (*Kirchhoffsche Spannungsregel*).

Ein anderer Anwendungsfall ergibt sich z. B., wenn  $G$  das Rohrleitungssystem einer Flüssigkeits- oder Gasströmung darstellt. Dann kann eine Spannung  $\vartheta$  verwendet werden, um die Druckverteilung im System zu beschreiben,  $\vartheta_i$  bedeutet in diesem Fall den Druckabfall längs des Bogens  $u_i$ .

In Analogie zu (1.34) gilt für Spannungen:

**S. 1.14 Satz 1.14:** Die Menge  $\Theta(G)$  aller Spannungen auf einem gegebenen Graphen  $G$  bildet einen linearen Vektorraum über der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Insbesondere gilt:

Aus  $\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)} \in \Theta(G)$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  folgt

$$\vartheta = c_1 \vartheta^{(1)} + c_2 \vartheta^{(2)} \in \Theta(G). \quad (1.38)$$

Der Beweis verläuft analog wie bei Satz 1.12. Satz 1.14 entspricht dem aus der Theorie der elektrischen Netzwerke bekannten Gesetz der Überlagerung von Spannungen. Ebenfalls aus der Elektrizitätslehre bekannt ist die Möglichkeit, Spannungsfelder durch eine Potentialfunktion  $F(\mathbf{r})$  zu beschreiben ( $\mathbf{r}$  der Ortsvektor). Die Spannung zwischen zwei Punkten  $\mathbf{r}^{(1)}$  und  $\mathbf{r}^{(2)}$  ergibt sich dabei als Potentialdifferenz

$$V = F(\mathbf{r}^{(2)}) - F(\mathbf{r}^{(1)}).$$

Eine analoge Darstellungsmöglichkeit gilt für Spannungen auf Graphen:

**S. 1.15 Satz 1.15:** Ein Vektor  $\vartheta^T = (\vartheta_1 \dots \vartheta_m)$  ist genau dann eine Spannung auf  $G = (X, U)$ , wenn eine auf der Menge  $X$  der Knotenpunkte definierte reellwertige Potentialfunktion  $t(x)$ ,  $x \in X$  existiert, so daß gilt

$$\vartheta_i = t(\text{Endpunkt des Bogens } u_i) - t(\text{Anfangspunkt von } u_i) \quad \text{für alle } u_i \in U. \quad (1.39)$$

Den Beweis findet der Leser z. B. in [1]. Aus (1.39) ergibt sich, daß jedem Potential eindeutig eine Spannung zugeordnet ist. Andererseits ist bei gegebener Spannung das zuge-

hörige Potential nicht eindeutig (sondern nur bis auf eine additive Konstante) festgelegt. Für einen beliebigen Knotenpunkt kann der Potentialwert vorgeschrieben werden.

Wir wollen als nächstes eine spezielle Sorte von Spannungsvektoren betrachten. Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge von Knotenpunkten eines Graphen  $G = (X, U)$ , so haben wir mit

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$$

die Menge der mit  $A$  inzidenten Bögen bezeichnet, vgl. (1.1). Falls diese Menge nicht leer ist, wird  $\omega(A)$  auch der von  $A$  erzeugte **Kozyklus** von  $G$  genannt. Jedem Kozyklus  $\omega(A)$  kann nun auf folgende Weise ein Vektor

$$\omega(A)^T = (\omega_1 \dots \omega_m) \quad (1.40)$$

zugeordnet werden:

$$\omega_i = \begin{cases} +1, & \text{falls } u_i \in \omega^+(A), \\ -1, & \text{falls } u_i \in \omega^-(A), \\ 0 & \text{sonst (d. h. falls } u_i \notin \omega(A)). \end{cases} \quad (1.41)$$

Kozyklenvektoren haben die Eigenschaft von Spannungen, wie folgende Überlegung zeigt. Wir können durch die Vorschrift

$$t(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \in A, \\ 1, & \text{falls } a \notin A, \end{cases}$$

ein Potential auf  $G$  festlegen. Für die zugehörige Spannung ergibt sich dann gemäß (1.39):

$$\vartheta_i = \begin{cases} +1, & \text{falls } u_i \in \omega^+(A), \\ -1, & \text{falls } u_i \in \omega^-(A), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.42)$$

und der Vergleich mit (1.41) zeigt, daß dies genau der Kozyklenvektor  $\omega(A)$  ist.

Aus der Definition 1.17 ist zu ersehen, daß wegen der Bedingungen (1.36) nicht alle  $m$  Komponenten eines Spannungsvektors  $\vartheta$  willkürlich festgelegt werden können. Deshalb tritt, ebenso wie früher bei den Strömen, die Frage auf, durch welche Vorgaben eine Spannung eindeutig bestimmt ist. Die Antwort liefert der folgende (zu Satz 1.13 analoge)

**Satz 1.16:**  $G = (X, U)$  sei zusammenhängend,  $H = (X, V)$  sei ein Gerüst von  $G$ . Dann ist eine **S. 1.16** Spannung  $\vartheta$  auf  $G$  eindeutig festgelegt, wenn man ihre Komponenten für alle Bögen von  $V$  vor- schreibt.

Von den  $m$  Komponenten eines Spannungsvektors sind demnach  $n - 1$  Komponenten frei wählbar. Werden diese für die Bögen eines Gerüstes vorgegeben, dann sind die übrigen Spannungskomponenten auf Grund der Spannungsregeln eindeutig bestimmt. Analog zu (1.35) kann der vollständige Spannungsvektor mit Hilfe einer **Kozyklenbasis** (deren Dimension  $l(G) = n - 1$  als **kozyklomatische Zahl** von  $G$  bezeichnet wird und die Dimension des Vektorraumes  $\Theta(G)$  angibt) berechnet werden. Näheres hierzu findet der Leser in [1], wo auch der Beweis des Satzes 1.16 geführt wird.

Eine wichtige Eigenschaft von Strömen und Spannungen gibt der folgende Satz an:

**Satz 1.17:** Für jeden gegebenen Graphen  $G$  sind die Vektorräume  $\Phi(G)$  und  $\Theta(G)$  orthogonal **S. 1.17** zueinander.

*Beweis:* Es seien  $\varphi \in \Phi(G)$  und  $\vartheta \in \Theta(G)$ . Für  $\vartheta$  gilt dann die Spannungsregel (1.37):

$$0 = \sum_{u_i \in \mu} \vartheta_i + \sum_{u_i \in \mu} (-1) \vartheta_i = \sum_{i=1}^m \mu_i \vartheta_i = \langle \mu, \vartheta \rangle. \quad (1.43)$$

Dabei ist  $\mu$  ein beliebiger Elementarzyklus und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bedeutet das Skalarprodukt<sup>1)</sup>. Die Umformungsmöglichkeit in (1.43) zu einer Summe über alle  $m$  Bögen ergibt sich wegen der Definition (1.7) von Zyklenvektoren. Nun kann wegen (1.35) der Strom  $\varphi$  mittels einer Zyklenbasis in der Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \varphi_i \mu^{(i)} \quad (1.44)$$

dargestellt werden. Damit folgt weiter

$$\langle \varphi, \vartheta \rangle = \sum_{i=1}^k \varphi_i \langle \mu^{(i)}, \vartheta \rangle = 0, \quad (1.45)$$

weil (1.43) für jeden Elementarzyklus  $\mu^{(i)}$  gilt. Also ist jeder Strom zu jeder Spannung von  $G$  orthogonal.

<sup>1)</sup> Das Skalarprodukt  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  der Vektoren  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$  und  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$  ist bekanntlich definiert durch die Gleichung

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

## 2. Die Beschreibung von Graphen mittels Matrizen

Nachdem wir im ersten Abschnitt grundlegende Begriffe und Sätze der Graphentheorie bereitgestellt haben, wollen wir uns in den folgenden Abschnitten mit einer Reihe von Problemen befassen, die im Zusammenhang mit Aufgabenstellungen der Praxis auftreten, und wir werden Algorithmen angeben, die zur Lösung dieser Probleme geeignet sind. Dabei wird sich zeigen, daß bei der Behandlung umfangreicher Graphen eine Durchführung der Algorithmen „von Hand“ wegen des hohen rechnerischen Aufwandes nicht möglich ist; man muß die Hilfsmittel der elektronischen Datenverarbeitung einsetzen. Für die rechentechnische Realisierung graphentheoretischer Algorithmen benötigen wir eine Form der Beschreibung von Graphen, die für die Eingabe und Speicherung in Rechenautomaten geeignet ist. Hier bietet sich als eine Möglichkeit an, Graphen durch Matrizen darzustellen, denn deren rechentechnische Behandlung bereitet keine Schwierigkeiten, solange das Format der Matrizen nicht zu groß ist. (Dann allerdings treten Speicherplatzprobleme auf, und man muß sich nach anderen Codierungsformen umsehen.) Wir wollen im folgenden verschiedene mögliche Matrixdarstellungen für Graphen besprechen. Dabei werden wir uns auf die Behandlung gerichteter Graphen beschränken. Außerdem wird, wenn nicht besonders vermerkt, das Fehlen von Schlingen und parallelen Bögen vorausgesetzt (schlichte Graphen). Im weiteren werden wir stets annehmen, daß die Knotenpunkte und Bögen des Graphen  $G = (X, U)$  durchnumeriert sind:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \quad U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}. \quad (2.1)$$

### 2.1. Adjazenzmatrizen

**Definition 2.1:** Als Adjazenzmatrix  $A(G) = (a_{ij})$  des Graphen  $G = (X, U)$  wird die **D. 2.1** ( $n, n$ )-Matrix mit den Elementen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (x_i, x_j) \in U, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

bezeichnet.

Da wir Schlichtheit voraussetzen, stehen in der Hauptdiagonale von  $A$  Nullen. Die Summen der Zeilen- bzw. Spaltenelemente haben folgende Bedeutung:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = |\omega^+(x_i)|, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = |\omega^-(x_j)|, \quad (2.3)$$

die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente von  $A$  ergibt die Anzahl der Bögen von  $G$ .

**Beispiel 2.1:** Für den links stehenden Teilgraphen des Bildes 1.7 (6 Knotenpunkte) lautet die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Durch  $A(G)$  wird die Struktur des Graphen, d.h. die Art, wie die vorhandenen Knotenpunkte durch Bögen miteinander verbunden sind, vollständig beschrieben. Deshalb müssen sich im Prinzip alle Eigenschaften des Graphen aus  $A$  selbst, oder nach geeigneten Umformungen der Matrix, ablesen lassen. Hierfür bringen wir jetzt einige Beispiele.

**S. 2.1 Satz 2.1:** Für die  $k$ -te Potenz  $A^k = (a_{ij}^{(k)})$  der Adjazenzmatrix gilt ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$a_{ij}^{(k)} = \text{Anzahl der Bahnen mit der Länge } k \text{ in } G, \text{ die vom Knotenpunkt } x_i \text{ zum Knotenpunkt } x_j \text{ führen.} \quad (2.5)$$

Wir führen den *Beweis* durch vollständige Induktion. Für  $k = 1$  ist der Satz richtig, denn laut (2.2) bedeutet  $a_{ij} = 1$ , daß ein Bogen  $(x_i, x_j)$  vorhanden ist, d.h., daß genau eine Bahn der Länge 1 von  $x_i$  nach  $x_j$  führt und  $a_{ij} = 0$  bedeutet, daß keine Bahn der Länge 1 von  $x_i$  nach  $x_j$  führt. Angenommen, (2.5) gilt für  $k$ . Wir bilden dann  $A^{k+1} = A^k \cdot A$  und betrachten

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k)} a_{sj}. \quad (2.6)$$

Aus  $a_{is}^{(k)} a_{sj} \neq 0$  folgt  $a_{is}^{(k)} \neq 0$  und  $a_{sj} = 1$ . Nun gibt  $a_{is}^{(k)}$  die Anzahl der Bahnen der Länge  $k$  von  $x_i$  nach  $x_s$  an, und  $a_{sj} = 1$  bedeutet die Existenz des Bogens  $(x_s, x_j)$ . Also liefert  $a_{is}^{(k)} a_{sj}$  die Anzahl der Bahnen der Länge  $k+1$ , die von  $x_i$  über  $x_s$  als vorletzten Knotenpunkt nach  $x_j$  führen. Folglich ergibt die Summation in (2.6) tatsächlich die Anzahl aller Bahnen mit der Länge  $k+1$  von  $x_i$  nach  $x_j$ .

Wenn insbesondere  $a_{ii}^{(k)} \neq 0$  ist, so zeigt dies an, daß durch den Knotenpunkt  $x_i$  ein Kreis geht. Die Anzahl der Kreise kann aus dem Wert von  $a_{ii}^{(k)}$  allerdings i. allg. nicht abgelesen werden, da in  $A^k$  auch alle nicht-einfachen Bahnen mitgezählt werden.

Bilden wir die Summe  $B_s$  der Einheitsmatrix und der ersten  $s$  Potenzen der Adjazenzmatrix,

$$B_s = \sum_{k=0}^s A^k = (b_{ij}^{(s)}), \quad (2.7)$$

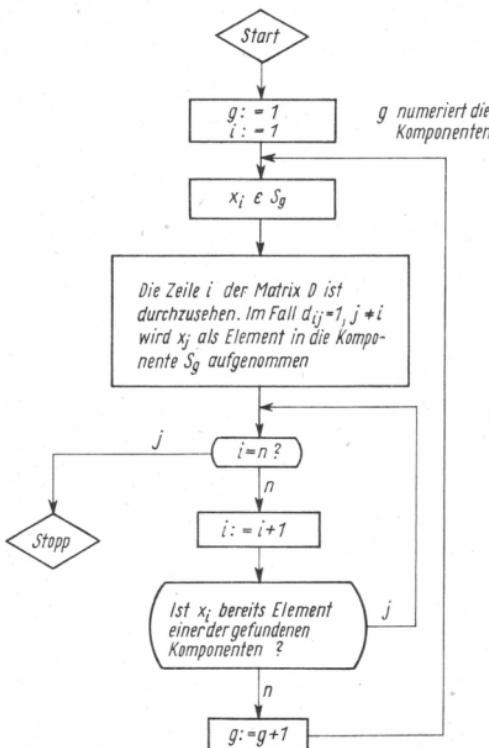
so gibt  $b_{ij}^{(s)}$  die Anzahl der von  $x_i$  nach  $x_j$  führenden Bahnen an, deren Länge kleiner oder gleich  $s$  ist (wobei durch Einbeziehung der Einheitsmatrix  $A^0$  die Bahnen der „Länge Null“ von  $x_i$  nach  $x_j$  mitgezählt werden). Bei vielen Untersuchungen wird es weniger interessieren, wie viele Bahnen zwischen den Knotenpunkten vorhanden sind und welche Länge sie haben, sondern es wird um die Frage gehen, ob  $x_j$  von  $x_i$  aus überhaupt auf einer Bahn erreichbar ist. Zu derartigen Aussagen können wir folgendermaßen gelangen: Wir ordnen  $B_s$  eine Matrix  $C_s$  zu gemäß der Vorschrift

$$c_{ij}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } b_{ij}^{(s)} \neq 0; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

$c_{ij}^{(s)} = 1$  bedeutet dann, daß eine Bahn der Länge kleiner oder gleich  $s$  von  $x_i$  nach  $x_j$  existiert, im Fall  $c_{ij}^{(s)} = 0$  ist dies dagegen nicht der Fall. Bilden wir nun  $B_s$ ,  $C_s$  der Reihe nach für  $s = 1, 2, \dots$ , so gilt

**S. 2.2 Satz 2.2:** Aus  $C_{s+1} = C_s$  folgt  $C_{s+k} = C$  für alle  $k > 1$ .

*Beweis:* Angenommen, es ist  $C_{s+1} = C_s$ , aber  $C_{s+2} \neq C_{s+1}$ . Dann gibt es mindestens ein Indexpaar  $i, j$  mit  $c_{ij}^{(s+2)} = 1$  und  $c_{ij}^{(s+1)} = 0$ . Im Graphen ist dann eine Bahn  $\mu$  der Länge  $s+2$  von  $x_i$  nach  $x_j$  vorhanden. Wenn deren vorletzter Knotenpunkt  $x_l$  ist, so gibt es auch eine Bahn  $\mu'$  der Länge  $s+1$  von  $x_i$  nach  $x_l$  und eine Bahn  $\mu''$  der Länge 1 von  $x_l$  nach  $x_j$ .

Bild 2.1. Algorithmus zur Ermittlung der starken Komponenten eines Graphen  $G = (X, U)$ 

Hieraus folgt  $c_{ii}^{(s+1)} = 1$  und wegen  $C_{s+1} = C_s$  weiter  $c_{ii}^{(s)} = 1$ . Das letzte bedeutet die Existenz einer Bahn  $\mu'''$  mit einer Länge kleiner oder gleich  $s$  von  $x_i$  nach  $x_i$ . Durch Aneinandersetzen von  $\mu'''$ ,  $\mu''$  entsteht dann eine Bahn der Länge kleiner oder gleich  $s+1$  von  $x_i$  nach  $x_j$ , woraus  $c_{ij}^{(s+1)} = 1$  folgt. Dies ergibt aber einen Widerspruch zu der oben getroffenen Annahme. Der Fall  $C_{s+1} = C_s$  tritt spätestens für  $s = m$  ein ( $m$  ist die Anzahl der Bögen des Graphen).

Wir können  $C$  als **Erreichbarkeitsmatrix** bezeichnen. Ihre Elemente geben an, ob  $x_j$  von  $x_i$  aus über eine Bahn erreichbar ist ( $c_{ij} = 1$ ) oder nicht ( $c_{ij} = 0$ ). Insbesondere kann aus  $C$  abgelesen werden, ob zwei Knotenpunkte in beiden Richtungen durch eine Bahn verbunden sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $c_{ij} = c_{ji} = 1$  gilt. Wir erhalten deshalb weiter die Möglichkeit, die starken Komponenten des Graphen zu bestimmen, vgl. Definition 1.9. Zu diesem Zweck bilden wir mittels  $C$  die symmetrische Matrix  $D = (d_{ij})$ :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } c_{ij} = c_{ji} = 1; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Im Falle  $d_{ij} = 1$  sind die Knotenpunkte  $x_i$ ,  $x_j$  in beiden Richtungen durch eine Bahn verbunden, gehören also zur selben starken Komponente. Wenn dagegen  $d_{ij} = 0$  gilt, so ist

von den Elementen  $c_{ij}$ ,  $c_{ji}$  mindestens eines Null, d. h., die Knotenpunkte gehören verschiedenen starken Komponenten an. Mit dem in Bild 2.1 als Ablaufplan beschriebenen Algorithmus können die starken Komponenten des Graphen explizit ermittelt werden.

*Beispiel 2.2:* Durch Potenzieren der zu Bild 1.7 gehörenden Adjazenzmatrix (2.4) erhalten wir

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Summation gemäß (2.7) und Anwendung der Vorschrift (2.8) ergibt sich weiter

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Leser überzeuge sich durch Hinzunahme der vierten Potenz, daß  $\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_3$  gilt, d.h.,  $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}$  stellt bereits die Erreichbarkeitsmatrix dar.

Beispielsweise besagt  $b_{33}^{(3)} = 3$ , daß im linken Teilgraphen des Bildes 1.7 drei Bahnen mit einer Länge kleiner oder gleich 3 von  $x_5$  nach  $x_3$  führen. Es sind dies die Bogenfolgen

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= (5), & \text{entsprechend } a_{53} = 1, \\ \mu^{(2)} &= (3, 4), & \text{entsprechend } a_{33}^{(2)} = 1, \\ \mu^{(3)} &= (8, 9, 5), & \text{entsprechend } a_{53}^{(3)} = 1. \end{aligned}$$

Die nach der Vorschrift (2.9) gebildete Matrix  $\mathbf{D}$  hat im Beispiel folgende Form:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Abarbeitung des in Bild 2.1 dargestellten Algorithmus erhalten wir die drei starken Komponenten des Graphen:  $S_1 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ ;  $S_2 = \{x_3\}$ ;  $S_3 = \{x_4\}$ .

Bei Strukturuntersuchungen in Netzwerken wird oft die Frage auftreten, welches die kürzeste Verbindung zwischen zwei Knotenpunkten ist. Wir führen zu diesem Zweck den Begriff der Entfernung zweier Knotenpunkte ein.

**D.2.2 Definition 2.2:** Als Entfernung  $e_{ij}$  des Knotenpunktes  $x_j$  vom Knotenpunkt  $x_i$  wird erklärt ( $i, j = 1, \dots, n$ )

$$e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_i = x_j \text{ ist,} \\ l, & \text{falls } x_i \neq x_j \text{ ist, mindestens eine Bahn vom Knotenpunkt} \\ & x_i \text{ zum Knotenpunkt } x_j \text{ existiert und } l \text{ die Länge einer} \\ & \text{kürzesten Bahn von } x_i \text{ nach } x_j \text{ bezeichnet,} \\ \infty, & \text{falls } x_i \neq x_j \text{ ist und keine Bahn von } x_i \text{ nach } x_j \text{ führt.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Die  $(n, n)$ -Matrix  $E = (e_{ij})$  wird als Entfernungsmatrix des Graphen bezeichnet.

Verfahren für die Berechnung von  $E$ , ausgehend von der Adjazenzmatrix  $A$ , findet der Leser z. B. in [8].

## 2.2. Inzidenzmatrizen

Anstelle der Adjazenzmatrix wird zur Beschreibung von Graphen häufig auch eine andere Matrixdarstellung verwendet:

**Definition 2.3:** Als Inzidenzmatrix  $S(G) = (s_{ij})$  des  $n$  Knotenpunkte und  $m$  Bögen enthalten- D. 2.3  
den Graphen  $G = (X, U)$  bezeichnen wir die  $(n, m)$ -Matrix mit den Elementen

$$s_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{falls } x_i \text{ Anfangspunkt des Bogens } u_j; \\ -1, & \text{falls } x_i \text{ Endpunkt des Bogens } u_j; \\ 0, & \text{falls } u_j \text{ nicht mit } x_i \text{ inzidiert; } \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Die Spalten von  $S$  entsprechen also den Bögen, die Zeilen den Knotenpunkten des Graphen. In jeder Spalte stehen genau ein Element  $+1$ , genau ein Element  $-1$  und sonst Nullen. In jeder Zeile  $i$  gibt die Anzahl der Elemente  $+1$  an, wieviel Bögen vom betreffenden Knotenpunkt wegführen, d. h., sie ist gleich  $|w^+(x_i)|$ . Entsprechend ist die Anzahl der  $(-1)$ -Elemente der Zeile  $i$  gleich  $|w^-(x_i)|$ .

Ein Vergleich mit (1.40/41) zeigt, daß der  $i$ -te Zeilenvektor von  $S$  gerade den Vektor des vom Knotenpunkt  $x_i$  erzeugten Kozyklus darstellt. Die Anzahl der in der Zeile  $i$  stehenden von Null verschiedenen Elementen ist die Valenz des Knotenpunktes  $x_i$ .

**Beispiel 2.3:** Für den linken Teilgraphen des Bildes 1.7 ergibt sich als Inzidenzmatrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Inzidenzmatrix kann überprüft werden, ob ein vorgelegter Vektor  $\varphi$  die Eigenschaften eines Stromes (vgl. Def. 1.16) besitzt, dies zeigt der folgende Satz:

**Satz 2.3:** Ein Vektor  $\varphi^T = (\varphi_1 \dots \varphi_m)$  ist genau dann ein Strom auf  $G$ , wenn er die Bedingung

S. 2.3

$$S \cdot \varphi = 0 \quad (2.12)$$

erfüllt.

**Beweis:** Gilt (2.12), so folgt

$$(S\varphi)_i = \sum_{j=1}^m s_{ij} \varphi_j = \sum_{u_j \in w^+(x_i)} 1 \cdot \varphi_j + \sum_{u_j \in w^-(x_i)} (-1) \cdot \varphi_j = 0; \quad (2.13)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Knotenpunktregel (1.29), d. h.,  $\varphi$  ist dann ein Strom. Wenn andererseits  $\varphi$  einen Strom darstellt, so gilt (2.13) und damit auch (2.12).

Aus Satz 1.17 ergibt sich übrigens in Verbindung mit (2.12), daß jeder Zeilenvektor der Inzidenzmatrix die Eigenschaft einer Spannung auf  $G$  besitzt. Weiterhin gilt

**S. 2.4 Satz 2.4:** Ein Vektor  $\vartheta^T = (\vartheta_1 \dots \vartheta_m)$  ist genau dann eine Spannung auf  $G$ , wenn es einen Vektor  $t^T = (t_1 \dots t_n)$  gibt, so daß gilt

$$\vartheta = -S^T \cdot t. \quad (2.14)$$

Zum *Beweis* nehmen wir an, daß ein derartiger Vektor  $t$  existiert. Dann folgt

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= - \sum_{j=1}^n s_{ji} t_j \\ &= t \text{ (Endpunkt des Bogens } u_i) - t \text{ (Anfangspunkt des Bogens } u_i); \\ i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nach Satz 1.15 ist dann  $\vartheta$  eine Spannung,  $t$  ein zugehöriges Potential. Wenn zum anderen  $\vartheta$  eine Spannung darstellt, so bezeichne  $t$  ein zugehöriges Potential. Dann ist (2.15) erfüllt und damit auch (2.14).

Aus den angeführten Sätzen wird verständlich, daß die Matrix  $S$  besonders zur Formulierung von Strom- und Spannungsproblemen geeignet ist. Dies ist auch der Grund für die Einführung von „verallgemeinerten Inzidenzmatrizen“. So nennt man jede  $(n, m)$ -Matrix, welche keine Nullzeilen und in jeder Spalte mindestens ein und höchstens zwei von Null verschiedene Elemente (nicht notwendig +1 oder -1) hat. So kann die Matrix in Bild 2.2a als Beschreibung des gemischten Graphen von Bild 2.2b verwendet werden, dessen Kanten und Bögen noch durch die  $H$ -Elemente „Bewertungen“ an den betr. Knotenpunkten zugeordnet sind. Mit Hilfe verallgemeinerter Inzidenzmatrizen lassen sich dann auch verallgemeinerte Strom- und Spannungsprobleme (d. h. allgemeinere Flußprobleme) mathematisch beschreiben. Der interessierte Leser sei auf [7], [1] verwiesen.

a)  $H = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

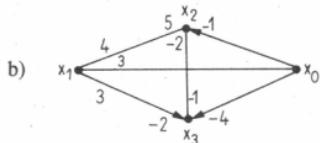


Bild 2.2. Verallgemeinerte Inzidenzmatrizen

*Bemerkung:* Den Zeilen von  $H$  entsprechen die Knotenpunkte  $x_1, x_2, x_3$ . Jede Spalte entspricht einem Bogen (bei zwei von Null verschiedenen Elementen oder nur einem negativen) bzw. einer Kante (zwei gleichsignierte oder nur ein positives Element). Der Zusatzknotenpunkt  $x_0$  faßt die 1-Element-Spalten zusammen.

## 2.3. Fundamentalmatrizen

Gemäß Satz 1.2 enthält eine Zyklenbasis  $k(G) = m - n + 1$  Zyklenvektoren (wir nehmen an, daß  $G$  zusammenhängend ist, d. h.,  $p = 1$ ):

$$\mu^{(i)T} = (\mu_{1i}, \dots, \mu_{mi}); \quad i = 1, \dots, k.$$

Wenn wir diese Vektoren als Spalten einer Matrix zusammenstellen, so entsteht die zur Basis gehörende Fundamentalmatrix. Wir wollen weiter den Satz 1.7 heranziehen, der sagt, wie man unter Zuhilfenahme eines Gerüstes von  $G$  eine Basis konstruieren kann.

**Definition 2.4:**  $G = (X, U)$  sei ein zusammenhängender Graph,  $H = (X, V)$  ein Gerüst von  $G$ . **D. 2.4**  $\{u_1, \dots, u_k\}$  seien die Bögen von  $U - V$ , und  $\{\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}\}$  mit

$$\mu^{(j)T} = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{mj}); \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.16)$$

die durch diese Bögen (gemäß Satz 1.7) erzeugte Zyklensbasis. Wir bezeichnen dann die  $(m, k)$ -Matrix

$$F = (\mu_{ij}) \quad (2.17)$$

als die zur Basis (zum Gerüst  $H$ ) gehörende Fundamentalmatrix von  $G$ .

**Beispiel 2.4:** Für den im Bild 2.3 dargestellten Graphen mit  $m = 7$  Bögen und  $n = 5$  Knotenpunkten bildet der Untergraph

$$H = (X, V); \quad X = \{x_1, \dots, x_5\}, \quad V = \{u_4, u_5, u_6, u_7\}$$

ein Gerüst. Durch die außerhalb von  $H$  liegenden Bögen  $u_1, u_2, u_3$  werden die Zyklen

$$\mu^{(1)} = (u_1, u_4), \quad \mu^{(2)} = (u_2, u_6), \quad \mu^{(3)} = (u_3, u_6, u_5, u_7)$$

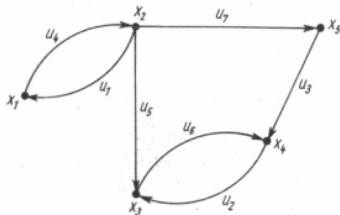


Bild 2.3. Zu Beispiel 2.4

bestimmt, und diese bilden eine Basis von  $G$ . Wenn wir die Zyklen gemäß (1.7) und unter Beachtung der in Satz 1.13 vereinbarten Festlegung des Durchlaufsinnes durch ihre Vektoren darstellen, so entsteht die Fundamentalmatrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Bei der in Definition 2.4 verwendeten Numerierung der Bögen setzt sich  $F$  zusammen aus einer Einheitsmatrix  $E$  des Formats  $(k, k)$  und einer weiteren Teilmatrix  $\bar{F}$  des Formats  $(m - k, k)$ :

$$F = \begin{pmatrix} E \\ \bar{F} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Mittels  $F$  lässt sich eine zu Satz 2.3 analoge Aussage formulieren:

**S. 2.5 Satz 2.5:** Ein Vektor  $\vartheta = (\vartheta_1 \dots \vartheta_m)^T$  ist genau dann eine Spannung auf  $G$ , wenn er die Bedingung

$$\mathbf{F}^T \cdot \vartheta = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

erfüllt.

*Beweis:* Wenn  $\vartheta$  (2.20) genügt, so gilt

$$0 = \sum_{j=1}^m (\mathbf{F}^T)_{ij} \vartheta_j = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \vartheta_j = \langle \boldsymbol{\mu}^{(i)}, \vartheta \rangle = \sum_{\mathbf{u}_j \in \boldsymbol{\mu}^{(i)_+}} \vartheta_j - \sum_{\mathbf{u}_j \in \boldsymbol{\mu}^{(i)_-}} \vartheta_j, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.21)$$

Nach (1.37) heißt dies aber nichts anderes, als daß für jeden Elementarzyklus der Basis die Spannungsregel erfüllt ist. Nun sei  $\boldsymbol{\mu}$  ein beliebiger elementarer Zyklus. Gemäß (1.10) gilt für diesen die Darstellung

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^k r_i \boldsymbol{\mu}^{(i)},$$

und es folgt weiter

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \vartheta \rangle = \sum_{i=1}^k r_i \langle \boldsymbol{\mu}^{(i)}, \vartheta \rangle = 0.$$

Nach Definition 1.17 ist folglich  $\vartheta$  ein Spannungsvektor. Ist andererseits bekannt, daß es sich bei  $\vartheta$  um eine Spannung auf  $G$  handelt, so erfüllt der Vektor die Spannungsregeln (2.21) und deshalb auch die Beziehung (2.20).

Im Abschnitt 1. haben wir den Satz 1.13 bewiesen. Dieser besagt, daß ein Strom auf  $G$  eindeutig bestimmt ist, wenn wir seine Komponenten auf den Bögen außerhalb eines Gerüstes des Graphen vorgeben. Dabei gibt die Formel (1.35) an, wie der vollständige Stromvektor von diesen Vorgaben  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  aus mit Hilfe der zum Gerüst gehörenden Zyklusbasis berechnet werden kann. Wenn wir die  $k$  Komponenten zu einem Vektor zusammenfassen,

$$\boldsymbol{\varphi}' = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

dann läßt sich (1.35) unter Verwendung der Fundamentalmatrix  $\mathbf{F}$  ersichtlich auch folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}'. \quad (2.23)$$

Eine entsprechende Formel kann für die Berechnung von Spannungsvektoren angegeben werden. Nach Satz 1.16 ist eine Spannung  $\vartheta$  durch ihre Komponenten auf den Bögen eines Gerüstes eindeutig bestimmt. Wenn wir die in Definition 2.4 angenommene Bogennumerierung verwenden, so sind dies die Komponenten  $\vartheta_{k+1}, \dots, \vartheta_m$ . Mit

$$\boldsymbol{\vartheta}' = \begin{pmatrix} \vartheta_{k+1} \\ \vdots \\ \vartheta_m \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

und (2.19) kann der vollständige Spannungsvektor durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{F}}^T \\ \mathbf{E}^* \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\vartheta}' \quad (2.25)$$

berechnet werden. Dabei ist  $\mathbf{E}^*$  eine Einheitsmatrix des Formates  $(m-k, m-k)$ .

### 3. Probleme der Bestimmung von Bahnen

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten grundlegende Begriffe und Beschreibungsarten von Graphen zusammengestellt wurden, wollen wir nun dazu übergehen, eine Reihe von praktisch relevanten Problemen der Graphentheorie zu formulieren und geeignete Lösungsverfahren anzugeben.

Bei einer ersten Gruppe derartiger „Standardprobleme“ geht es um die Bestimmung von Bahnen. Die praktische Bedeutung solcher Aufgabenstellungen liegt auf der Hand. Beispielsweise wird es oft notwendig sein, die „kürzeste“ oder die „billigste“ Verbindung von einem Knotenpunkt  $\bar{a}$  zu einem anderen Knotenpunkt  $\bar{b}$  zu ermitteln. In anderen Fällen wird es genügen, irgendeine Bahn zu bestimmen, auf der man von  $\bar{a}$  aus nach  $\bar{b}$  gelangen kann. Mit dieser zuletzt genannten Aufgabenstellung wollen wir beginnen.

#### 3.1. Das einfache Bahnproblem

*Aufgabenstellung:* Gegeben sind ein Graph  $G = (X, U)$  und zwei seiner Knotenpunkte  $\bar{a}, \bar{b} \in X; \bar{a} \neq \bar{b}$ . Gesucht wird eine von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  führende (elementare) Bahn.

Es kann natürlich vorkommen, daß gar keine Bahn von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  führt, d. h., daß die Aufgabe nicht lösbar ist. Existieren jedoch derartige Bahnen, so soll eine davon ermittelt werden.

Daß wir in obiger Problemstellung einen gerichteten Graphen voraussetzen, bedeutet praktisch keine Einschränkung. Wenn nämlich ein Verbindungsweg zwischen zwei gegebenen Knotenpunkten eines ungerichteten Graphen zu bestimmen ist, so können wir diese Aufgabe stets auf die oben formulierte zurückführen, indem wir jede Kante durch ein Paar entgegengesetzter Bögen ersetzen.

Fragestellungen, die sich als einfaches Bahnproblem formulieren lassen, sind z. B. die sog. „Ein-Mann-Spiele“. Darunter wird folgende Problematik verstanden: Von einem gegebenen Anfangszustand  $\bar{a}$  aus soll über eine Folge möglicher Zwischenzustände ein gewünschter Endzustand  $\bar{b}$  erreicht werden. Wenn wir die möglichen Zustände als Knotenpunkte eines Graphen, die erlaubten Übergänge zwischen den Zuständen als Bögen darstellen, so besteht die Aufgabe darin, eine Bahn von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  zu suchen. Beispiele für derartige Spiele sind das Labyrinth (in einem gegebenen System von sich verzweigenden Gängen wird ein Weg von einem Punkt  $\bar{a}$  zum Ausgang  $\bar{b}$  des Labyrinths gesucht; Knotenpunkte sind hier die Verzweigungs- und Endpunkte von Gängen, jeder Gang selbst wäre durch zwei entgegengesetzte gerichtete Bögen darzustellen), und das bekannte Problem „Wolf, Ziege, Kohlkopf“ (siehe Beispiel 3.1).

Natürlich gibt es auch ernsthafte Beispiele für das Bahnproblem, wir wollen einige andeuten:

- $G$  stelle ein Netz zur Informationsübermittlung dar, z. B. einen Alarmierungsplan. Eine Nachricht soll von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  geleitet werden. Auf welchem Weg ist das möglich?
- $G$  bilde ein System von chemischen Stoffen ab, die auseinander (direkt oder über Zwischenprodukte) erzeugt werden können. Auf welchem Wege, d. h. über welche Zwischenprodukte, kann ein Stoff  $\bar{b}$ , ausgehend von einem Stoff  $\bar{a}$ , hergestellt werden?
- $G$  beschreibe ein Verbundnetz zur Verteilung von Energie oder Material (Elektroenergie, Dampf, Heizgas, Wasser usw.). Durch Havarie fällt ein Teil des Netzes aus (Lösung der entsprechenden Bögen). Gesucht wird eine Möglichkeit, um im Restgraphen den Verbraucher  $\bar{b}$  von  $\bar{a}$  aus zu beliefern.

Wir wollen jetzt ein von Trémaux [1] angegebenes Verfahren zur Lösung des einfachen Bahnproblems beschreiben.

## Algorithmus von Trémaux

Man führe von  $\bar{a}$  ausgehend in  $G$  einen Suchprozeß unter Verwendung der folgenden vier Regeln durch:

- (1) Zunächst wird von  $\bar{a}$  aus soweit wie möglich eine beliebige Bahn verfolgt. Jeder dabei durchlaufene Bogen wird durch ein Kreuz markiert.
- (2) Gelangt man zu einem Knotenpunkt, von dem kein Bogen wegführt (Ende einer „Sackgasse“), so geht man über den Anfangsbogen zurück und markiert ihn durch ein zweites Kreuz.
- (3) Kommt man beim Vorwärtsschreiten zu einem schon vorher angetroffenen Knotenpunkt, so wird wie bei Regel (2) verfahren.
- (4) Kommt man beim Rückwärtsschreiten über einen Bogen [aufgrund von Regel (2) bzw. (3)] zu dessen Anfangspunkt  $a$  zurück, so wird folgendermaßen weiter verfahren:  
Falls von  $a$  ein noch nicht benutzter Bogen wegführt, so geht man über diesen weiter voran.  
Falls ein solcher nicht vorhanden ist, so geht man über den in  $a$  endenden Bogen, der das erstmal dorthin geführt hat (der demzufolge mit einem Kreuz markiert ist), weiter zurück.

Der Suchprozeß wird abgebrochen, wenn man in  $\bar{b}$  ankommt (dann ist eine Lösung gefunden), oder wenn er gemäß den vier Regeln nicht mehr fortgesetzt werden kann (dann ist die Aufgabe nicht lösbar, d.h., es existiert in  $G$  keine Bahn von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$ ).

Den *Beweis* für die Wirksamkeit des Algorithmus führen wir hier nicht, der Leser findet ihn z.B. in [1]. Es sei nur noch auf folgendes hingewiesen: Wenn  $\bar{b}$  erreicht wird, so kann die Bahn als Folge einfach angekreuzter Bögen im Graphen abgelesen werden (alle übrigen Bögen tragen dann entweder kein oder zwei Kreuze). Wenn keine Lösung existiert, dann bricht der Suchprozeß in  $\bar{a}$  ab. Alle durchlaufenen Bögen sind dann zweifach angekreuzt, die übrigen gar nicht. Wir erläutern das Verfahren jetzt an einem Beispiel.

*Beispiel 3.1:* Das Problem „Wolf, Ziege, Kohlkopf“. Ein Wolf ( $W$ ), eine Ziege ( $Z$ ) und ein Kohlkopf ( $K$ ) befinden sich zusammen mit dem Fährmann ( $F$ ) am Ufer eines Flusses und sollen übersetzt werden. Das Boot des Fährmannes ist aber so klein, daß er immer nur einen von ihnen mitnehmen kann. Verständlicherweise kann der Fährmann Wolf und Ziege, Ziege und Kohlkopf nicht ohne Aufsicht allein lassen. Wie muß er das Übersetzen durchführen, damit alle drei Passagiere wohlbehalten das andere Ufer erreichen?

Um diese Aufgabe durch einen Graphen darzustellen, suchen wir zunächst aus allen denkbaren Konfigurationen am Ausgangsufer [vgl. (3.1)] die „erlaubten Zustände“ heraus. Es sind dies die in (3.1) nicht durchgestrichenen Konfigurationen.

(Beachte:  $FW$  muß gestrichen werden, da ja dann  $Z$  mit  $K$  am anderen Ufer allein sind, analoge Überlegungen führen zur Streichung von  $FK$  und  $F$ ;  $\emptyset$  ist die leere Menge, d.h. der gewünschte Endzustand, bei dem sich alle am anderen Ufer befinden).

FWZK:  
 FWZ. FWK. FZK. ~~FKZ~~:  
~~FK~~ FZ. ~~FK~~ ~~DZ~~. WK. ~~DK~~:  
~~K~~ W. Z. K:  
~~Ø~~.

(3.1)

Wir stellen nun die 10 erlaubten Zustände als Knotenpunkte dar und ziehen einen Bogen immer dann, wenn der Übergang von einem Zustand zu einem anderen ohne Gefahr möglich ist. Der Leser prüfe selbst nach, daß dies den in Bild 3.1 dargestellten Graphen ( $n = 10$ ,  $m = 20$ ) ergibt. Das Problem besteht nun darin, eine Bahn zu finden, die vom Anfangszustand  $\bar{a}$  ( $\sim FWZK$ ) zum verlangten

Endzustand  $\bar{b}$  ( $\sim 0$ ) führt. Die Anwendung des Algorithmus von Trémaux liefert eine der beiden existierenden Bahnen:

$$FWZK \rightarrow WK \rightarrow FWK \rightarrow W \rightarrow FWZ \rightarrow Z \rightarrow FZ \rightarrow \emptyset; \\ FWZK \rightarrow WK \rightarrow FWK \rightarrow K \rightarrow FZK \rightarrow Z \rightarrow FZ \rightarrow \emptyset.$$

Im Bild 3.1 ist ein möglicher Verlauf des Suchprozesses durch die Kreuz-Markierungen beschrieben, dieser ergibt die erste der Lösungsvarianten.

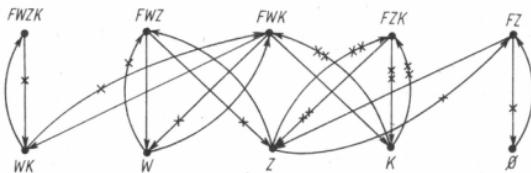


Bild 3.1. Zum Problem „Wolf, Ziege, Kohlkopf“

Hingewiesen sei noch auf folgende Merkmale des Algorithmus von Trémaux, die bei Graphenalgorithmen nicht selten zu beobachten sind: Das Lösungsverfahren ist durch verbale Regeln beschrieben und stellt einen schrittweise arbeitenden Suchprozeß mit Markierungsvorschriften dar (Ankreuzen von Bögen; in anderen Fällen werden Färbungsvorschriften verwendet). Diese Techniken spiegeln sich dann natürlich auch in der rechentechnischen Realisierung wider, z. B. schon in der für die Beschreibung des Graphen gewählten Codierung (vgl. Abschnitt 6.).

### 3.2. Das Problem der kürzesten Bahn

**Aufgabenstellung:** Gegeben sind ein Graph  $G = (X, U)$  und zwei seiner Knotenpunkte  $\bar{a}, \bar{b} \in X; \bar{a} \neq \bar{b}$ . Die Bögen des Graphen sind mit nichtnegativen reellen Zahlen („Kosten“) bewertet

$$c(u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U. \quad (3.2)$$

Gesucht wird aus der Menge  $M(\bar{a}, \bar{b})$  aller von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  führenden Bahnen eine Bahn  $\mu^*$  mit minimaler Kostensumme

$$k(\bar{a}, \bar{b}) = \min_{\mu \in M(\bar{a}, \bar{b})} \left\{ \sum_{u \in \mu} c(u) \right\}. \quad (3.3)$$

Falls  $M(\bar{a}, \bar{b}) \neq \emptyset$  ist, existiert eine Lösung. Sie muß nicht immer eindeutig bestimmt sein, denn es kann ja durchaus mehrere Bahnen mit der gleichen Kostensumme geben.

Das Problem des kürzesten Weges tritt in der Praxis in vielfältiger Weise auf, da ja die Bewertungen der Bögen die verschiedenste Bedeutung haben können. Wir zählen einige Beispiele auf:

- Die Knotenpunkte von  $G$  können Ortschaften, die Bögen entsprechende Verkehrswwege zwischen den Ortschaften,  $c(u)$  die zugehörigen Kilometerentfernnungen bedeuten. Gesucht ist dann der kürzeste Reiseweg von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$ .
  - $G$  sei ein Transportnetz,  $c(u)$  bedeute die beim Transport der Mengeneinheit einer Ware über den Bogen  $u$  entstehenden Kosten. Dann wird der billigste Transportweg von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  gesucht.
  - $G$  stelle ein Informationsnetz dar,  $c(u)$  die Zeit, die zur Weiterleitung einer Nachricht

über den Bogen  $u$  erforderlich ist. Zu bestimmen ist der schnellste Informationsweg von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$ .

- G beschreibe ein System von Produkten, die direkt oder indirekt auseinander hergestellt werden können. Ein Bogen  $u = (x, y)$  bedeutet, daß  $y$  unmittelbar aus  $x$  erzeugbar ist.  $c(u)$  soll die Herstellungskosten pro Mengeneinheit angeben. Das Problem des kürzesten Weges entspricht in diesem Fall der Aufgabe, das billigste Produktionsverfahren für den Stoff  $\bar{b}$ , ausgehend vom Rohstoff  $\bar{a}$ , zu suchen.

Es gibt eine ganze Reihe von Algorithmen, die eine explizite Ermittlung von kürzesten Bahnen erlauben. Einen wollen wir nun beschreiben.

### Algorithmus von Dantzig

Von  $\bar{a}$  ausgehend werden schrittweise die Kostensummen zu anderen Knotenpunkten des Graphen bestimmt. Der Prozeß verläuft in folgenden Schritten:

- (1) Setze

$$t(\bar{a}) = 0; \quad A_1 = \{\bar{a}\}. \quad (3.4)$$

- (2) Betrachte die Menge  $\omega^+(A_1)$  der mit  $A_1$  nach außen inzidenten Bögen von G. Ermittle

$$\min_{u \in \omega^+(A_1)} \{t(\bar{a}) + c(u)\} = t(\bar{a}) + c^*. \quad (3.5)$$

Es seien

$$(\bar{a}, b'_q), \quad (\bar{a}, b''_q), \dots \quad (3.6)$$

die Bögen aus  $\omega^+(A_1)$ , die in (3.5) den Minimalwert liefern, für die also gilt:

$$c(\bar{a}, b'_q) = c(\bar{a}, b''_q) = \dots = c^*.$$

Alle diese Knotenpunktpaare (3.6) werden notiert.

Setze

$$t(b'_q) = t(b''_q) = \dots = t(\bar{a}) + c^*$$

$$A_2 = A_1 \cup \{b'_q, b''_q, \dots\}. \quad (3.7)$$

⋮

- (r) Betrachte die Menge  $\omega^+(A_{r-1})$  der mit  $A_{r-1}$  nach außen inzidenten Bögen von G. Ermittle  $(a_j$  der Anfangspunkt des Bogens  $u)$

$$\min_{u \in \omega^+(A_{r-1})} \{t(a_j) + c(u)\} = t^* + c^*. \quad (3.8)$$

Es seien

$$(a'_q, b'_q), \quad (a''_q, b''_q), \dots \quad (3.9)$$

die Bögen aus  $\omega^+(A_{r-1})$ , die das Minimum hervorrufen, für die also gilt:

$$t(a'_q) + c(a'_q, b'_q) = t(a''_q) + c(a''_q, b''_q) = \dots = t^* + c^*. \quad (3.10)$$

Notiere alle Paare (3.9) und setze

$$t(b'_q) = t(b''_q) = \dots = t^* + c^*, \quad (3.11)$$

$$A_r = A_{r-1} \cup \{b'_q, b''_q, \dots\}.$$

Dieser Schritt wird der Reihe nach für  $r = 3, 4, \dots$  ausgeführt.

Der Prozeß bricht ab, wenn  $\bar{b}$  in eine Menge  $A_r$  einbezogen werden konnte, oder wenn  $\omega^+(A_r) = \emptyset$ ,  $\bar{b} \notin A_r$  eintritt. In letzterem Fall hat das Problem keine Lösung, es existiert keine Bahn von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$ . Im Fall  $\bar{b} \in A_r$  ist  $t(\bar{b})$  die gesuchte minimale Kostensumme  $k(\bar{a}, \bar{b})$ . Eine zugehörige kürzeste Bahn  $\mu^*$  erhält man dadurch, daß von  $b_q = \bar{b}$  ausgehend aus den notierten Paaren  $(a_q, b_q)$  jeweils die Vorgänger aufgesucht und so schrittweise bis zum Anfangspunkt  $\bar{a}$  zurückgegangen wird.

Wir weisen noch auf folgende Eigenschaften dieses Algorithmus hin: Wenn wir von  $\bar{b}$  aus mit Hilfe der notierten Paare alle Möglichkeiten verfolgen, die uns schrittweise nach  $\bar{a}$  zurückführen, so erhalten wir tatsächlich alle Lösungen des Problems, d. h. alle von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  verlaufenden kürzesten Wege. Darüber hinaus stehen nach Abbruch des Prozesses weitere Informationen zur Verfügung: Für alle Knotenpunkte  $a_q \in A_r$  gibt  $t(a_q)$  die minimale Kostensumme von  $\bar{a}$  aus an. Außerdem kann man für jedes  $a_q \in A_r$  auch alle kürzesten Wege von  $\bar{a}$  aus explizit ermitteln, indem man, wie oben beschrieben, schrittweise über die notierten Paare von  $a_q$  bis  $\bar{a}$  zurückschreitet.

Der *Beweis* zum Dantzig-Algorithmus ist z. B. in [1], [11] ausgeführt. Dort findet der Leser auch andere Verfahren zur Lösung des Problems des kürzesten Weges und weitere Hinweise auf die sehr umfangreiche Literatur zu diesem Aufgabentyp. Wir demonstrieren den Ablauf des Verfahrens von Dantzig zum Abschluß noch an einem Beispiel:

**Beispiel 3.2:** Destillative Zerlegung eines 4-Stoffgemisches. Eine Flüssigkeit bestehe aus den Komponenten  $A, B, C, D$  (in dieser Reihenfolge nach steigenden Siedepunkten geordnet). Leitet man das Gemisch einer Rektifikationskolonne (vgl. Bild 3.2 a) zu, so erfolgt dort die Zerlegung in ein leichter siedendes „Kopfprodukt“ und ein schwersiedendes „Sumpfprodukt“. Zwischen welchen Komponenten der „Schnitt“ erfolgt, kann durch Wahl der technischen Parameter bestimmt werden, z. B.  $A/BCD$  oder  $AB/CD$  usw. Um eine vollständige Zerlegung zu erreichen, müssen drei Schnitte geführt, d. h. drei Kolonnen verwendet werden. Es gibt dafür fünf Schaltungsvarianten; zwei sind in Bild 3.2 c dargestellt. (Bemerkung: Bei 10-Stoffgemischen gibt es bereits 4862 Varianten!) Jeder Trennschritt ist mit bestimmten Kosten verbunden. Gesucht wird die optimale Schaltungsvariante, welche möglichst geringe Gesamtkosten verursacht. Als graphentheoretisches Modell zeichnen wir alle möglichen Trennungszustände als Knotenpunkte (es gibt solche mit 0, 1, 2, 3 Schnitten), die möglichen Übergänge (Trennschritte) als Bögen, vgl. Bild 3.2 b. Als Bogenbewertung dieses „Zustandsgraphen“ werden die Kosten für die Trennschritte verwendet (hier fiktive Zahlen). Gesucht werden kürzeste Bahnen vom Ausgangszustand ( $ABCD$ ) zum Endzustand ( $A/B/C/D$ ). Durch Abarbeiten des Algorithmus von Dantzig erhalten wir der Reihe nach:

1. Schritt:  $t(\bar{a}) = 0$ ;  $A_1 = \{\bar{a}\}$ .

2. Schritt:  $\omega^+(A_1) = \{(\bar{a}, x_1), (\bar{a}, x_2), (\bar{a}, x_3)\}$ ;  
 $\min \{0 + 1, 0 + 2, 0 + 3\} = 1$ .

Wir notieren den Bogen  $(\bar{a}, x_1)$  und setzen  $t(x_1) = 1$ ,  $A_2 = \{\bar{a}, x_1\}$ .

3. Schritt:  $\omega^+(A_2) = \{(x_1, x_4), (x_1, x_5), (\bar{a}, x_2), (\bar{a}, x_3)\}$ ;  
 $\min \{1 + 2, 1 + 3, 0 + 2, 0 + 3\} = 2$ .

Notiere:  $(\bar{a}, x_2)$ . Setze:  $t(x_2) = 2$ ,  $A_3 = \{\bar{a}, x_1, x_2\}$ .

4. Schritt:  $\omega^+(A_3) = \{(x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_4), (x_2, x_6), (\bar{a}, x_3)\}$ ;  
 $\min \{1 + 2, 1 + 3, 2 + 2, 2 + 1, 0 + 3\} = 3$ .

Notiere:  $(x_1, x_4)$ ,  $(x_2, x_6)$ ,  $(\bar{a}, x_3)$ .

Setze:  $t(x_4) = t(x_5) = t(x_6) = 3$ ;  $A_4 = \{\bar{a}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$ .

5. Schritt:  $\omega^+(A_4) = \{(x_4, \bar{b}), (x_1, x_5), (x_3, x_5), (x_6, \bar{b})\}$ ;  
 $\min \{3 + 3, 1 + 3, 3 + 2, 3 + 2\} = 4$ .

Notiere:  $(x_1, x_5)$ . Setze:  $t(x_5) = 4$ ;  $A_5 = \{\bar{a}, x_1, \dots, x_6\}$ .

6. Schritt:  $\omega^+(A_5) = \{(x_4, \bar{b}), (x_5, \bar{b}), (x_6, \bar{b})\}$ ;  
 $\min \{3 + 3, 4 + 1, 3 + 2\} = 5$ .

Notiere:  $(x_5, \bar{b})$ ,  $(x_6, \bar{b})$ . Setze:  $t(\bar{b}) = 5$ .

Abbruch, weil  $\bar{b}$  einbezogen wurde. Als minimale Kostensumme haben wir  $t(\bar{b}) = 5$  erhalten. Als Vorgänger von  $\bar{b}$  lesen wir aus den im 6. Schritt notierten Bögen  $x_5$  und  $x_6$  ab. Wir verfolgen zunächst

die erste Möglichkeit weiter. Vorgänger von  $x_5$  ist (siehe Schritt 5) der Knotenpunkt  $x_1$ , dessen Vorgänger wiederum  $\bar{a}$  (siehe Schritt 2). Damit haben wir eine erste kürzeste Bahn gefunden:

$$\bar{a} \rightarrow x_1 \rightarrow x_5 \rightarrow \bar{b}.$$

Beim Verfolgen der zweiten Möglichkeit, d. h. Rückwärtsgehen von  $x_6$  aus, erhalten wir als zweite kürzeste Bahn

$$\bar{a} \rightarrow x_2 \rightarrow x_6 \rightarrow \bar{b}.$$

Die diesen beiden Bahnen (Folgen von Trennschritten!) entsprechenden optimalen Kolonnenschaltungen sind im Bild 3.2 c dargestellt.

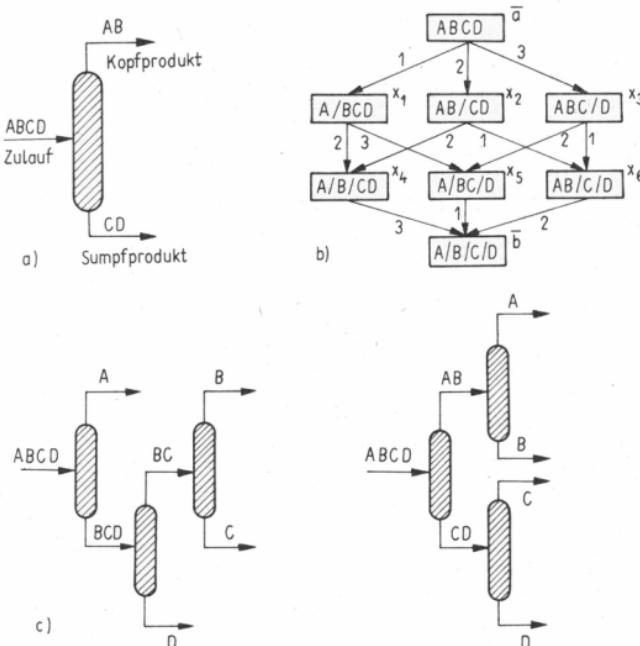


Bild 3.2. Zu Beispiel 3.2

In der Aufgabenstellung (3.2), (3.3) wird die Bewertung der Bögen ausdrücklich als nichtnegativ vorausgesetzt. Wenn negative Bewertungen zugelassen sind, d. h., wenn anstelle von (3.2)

$$c(u) \geqq 0 \quad \text{für alle } u \in U \quad (3.12)$$

steht, so spricht man vom **verallgemeinerten Problem** der kürzesten Bahn. Dabei wird noch vorausgesetzt, daß der Graph  $G$  keine Kreise mit einer negativen Bewertungssumme enthält. Diese Einschränkung ist sinnvoll. Wenn nämlich ein solcher Kreis vorhanden ist und wenn in  $G$  eine Bahn von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  existiert, die mit dem Kreis einen Knotenpunkt  $x$  gemeinsam hat, dann liefert (3.3) als minimale Kostensumme  $-\infty$  (man gehe von  $\bar{a}$  aus bis  $x$  und durchlaufe dann den Kreis beliebig oft), d. h., es existiert dann kein endliches Minimum.

Falls tatsächlich negative Bewertungen vorkommen, so liefert der Algorithmus von Dantzig im allgemeinen *nicht* die kürzeste Bahn, wie folgendes Beispiel zeigt, vgl. Bild 3.3a. Angenommen,  $t(a_i)$  ist bereits bestimmt. Dann würde der Algorithmus im folgenden Schritt gemäß (3.8) den Bogen  $(a_i, a_k)$  auswählen und  $t(a_k) = t(a_i) + 5$  festlegen, obwohl über die Bahn  $a_i, a_j, a_k$  eine kürzere Verbindung nach  $a_k$  vorhanden ist.

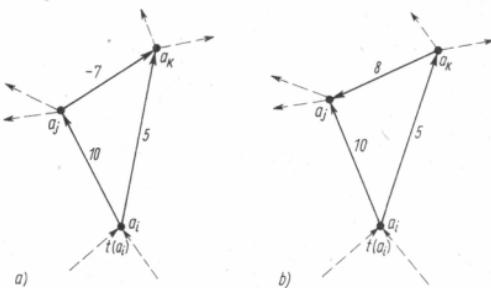


Bild 3.3. Zur Anwendbarkeit des Algorithmus von Dantzig

Lösungsverfahren für das verallgemeinerte Problem werden in [1], [11] beschrieben, wir gehen hier nicht darauf ein.

### 3.3. Längste und kritische Bahnen

Bei anderen praktischen Aufgabenstellungen geht es darum, nicht die kürzesten, sondern die längsten Bahnen zwischen zwei Knotenpunkten  $\bar{a}, \bar{b}$  eines bewerteten Graphen zu bestimmen.

*Problem der längsten Bahn:* Gegeben ist ein Graph  $G = (X, U)$ , dessen Bögen mit reellen Zahlen

$$c(u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U \quad (3.13)$$

bewertet sind, sowie zwei Knotenpunkte  $\bar{a}, \bar{b} \in X; \bar{a} \neq \bar{b}$ . Gesucht sind aus der Menge  $M(\bar{a}, \bar{b})$  aller von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  führenden Bahnen diejenigen mit **maximaler Kostensumme**:

$$l(\bar{a}, \bar{b}) = \max_{\mu \in M(\bar{a}, \bar{b})} \left\{ \sum_{u \in \mu} c(u) \right\}. \quad (3.14)$$

Einschränkung:  $G$  enthalte keine Kreise mit einer positiven Bewertungssumme.

Die zuletzt vorgenommene Einschränkung verhindert, daß Bahnen beliebig großer Länge auftreten.

Wir könnten zunächst vermuten, daß für den Fall nichtnegativer Bewertungen der Algorithmus von Dantzig auch zur Bestimmung längster Bahnen geeignet ist, wenn man nur in (3.5) und (3.8) „min“ durch „max“ ersetzt. Diese Vermutung bestätigt sich jedoch *nicht*, wie folgendes Beispiel zeigt, vgl. Bild 3.3b: Wenn  $t(a_i)$  festgelegt ist, so würde der in der angegebenen Weise abgeänderte Algorithmus im nächsten Schritt den Bogen  $(a_i, a_j)$  auswählen und dem Knotenpunkt  $a_j$  als maximale Kostensumme  $t(a_i) + 10$  zuweisen. Aber es gibt über die Bahn  $a_i, a_k, a_j$  eine längere Verbindung von  $a_i$  nach  $a_j$ .

Zur Lösung des Problems der längsten Bahn kann folgendermaßen verfahren werden. Offenbar ist (3.14) äquivalent mit der Aufgabe

$$\min_{\mu \in M(d, b)} \left\{ \sum_{u \in \mu} (-c(u)) \right\}. \quad (3.15)$$

Indem wir also zu neuen Bewertungen

$$c'(u) = -c(u) \quad \text{für alle } u \in U \quad (3.16)$$

übergehen, haben wir die Aufgabe (3.14) in ein verallgemeinertes Problem des kürzesten Weges übergeführt (beachte, daß der neu bewertete Graph keine Kreise mit negativer Bewertungssumme enthält!). Wenn dessen Lösung die Kostensummen  $t'(a_i)$  ergeben hat, so erhalten wir mit

$$t(a_i) = -t'(a_i) \quad (3.17)$$

die gesuchten maximalen Kostensummen des Problems der längsten Bahn.

Die Bestimmung längster Bahnen bildet einen wesentlichen Bestandteil moderner Methoden zur Planung und operativen Lenkung von Projekten und Prozessen, die unter der Bezeichnung **Netzplantechnik** bekannt sind. Worum es in diesem Anwendungsgebiet der Graphentheorie geht, erläutern wir zunächst an einem einfachen Beispiel.

Wir betrachten einen in der Zeit ablaufenden Prozeß, der aus einer Reihe von Teilvergängen  $a_i$  mit der Zeitdauer  $d_i$  besteht. Als Beispiel wählen wir (stark vereinfacht) den Prozeß „Bau eines Hauses“. Die Teilvergänge („Aktivitäten“) und die zugehörigen Zeitdauern sind in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Dabei haben wir zu den realen Vorgängen die beiden fiktiven Aktivitäten „Beginn“ und „Ende“ des Gesamtprozesses hinzugefügt,

Tabelle 3.1: Aktivitätenliste zum Prozeß „Bau eines Hauses“

Aktivitäten $a_i$	Bedeutung	Zeitdauer $d_i$
$a_1$	Beginn	0
$a_2$	Anlegen der Baustraße	6
$a_3$	Antransport der Fertigbauteile	4
$a_4$	Erdarbeiten (Baugruben, Gräben für Rohrleitungen)	5
$a_5$	Gießen der Fundamente	10
$a_6$	Verlegen der Rohrleitungen	32
$a_7$	Montage der Bauteile	30
$a_8$	Ende	0

denen natürlich die Zeitdauer Null zuzuordnen ist. Offenbar können die Teilvergänge nicht in beliebiger Reihenfolge oder gleichzeitig ablaufen, sondern es müssen bestimmte Aktivitäten abgeschlossen sein, ehe mit anderen begonnen werden kann (z. B. setzt die Montage der Fertigbauteile voraus, daß ihr Antransport erfolgt ist und daß die Fundamente fertiggestellt sind). Es ist also eine bestimmte logische Aufeinanderfolge der Aktivitäten beim Ablauf des Gesamtprozesses zu beachten. Diese logische Aufeinanderfolge und gegenseitige Bedingtheit der Vorgänge können wir nun durch einen Graphen darstellen, den **Netzplan** des Prozesses. Dabei können wir zwischen zwei Arten der Darstellung wählen, die in der Praxis gleichberechtigt verwendet werden.

### 1. Möglichkeit: Aktivitätsorientierter Netzplan, Vorgangsknotennetz.

Die Aktivitäten werden als Knotenpunkte dargestellt. Durch die Bögen wird die logische Auseinanderfolge der Aktivitäten zum Ausdruck gebracht, d. h., ein Bogen ( $a_i, a_j$ ) wird gezogen, wenn  $a_j$  beginnen kann, sobald  $a_i$  abgeschlossen ist. In unserem Beispiel führt dies zu dem in Bild 1.2a gezeichneten Netzplan. (Bei Vorgangsknotennetzen ist es üblich, die Knotenpunkte durch rechteckige Kästchen darzustellen.)

### 2. Möglichkeit: Ereignisorientierter Netzplan, Vorgangspfeilnetz.

Die Aktivitäten werden durch Bögen dargestellt. Ihre logische Auseinanderfolge wird durch die Knotenpunkte, bei dieser Darstellungart Ereignisse genannt, beschrieben. Zu diesem Zweck werden die Knotenpunkte  $E_i$  so festgelegt, daß folgende Regel eingehalten wird:

Alle von  $E_i$  wegführenden Aktivitäten (Bogenmenge  $\omega^+(E_i)$ ) können begonnen werden, sobald alle in  $E_i$  endenden Aktivitäten (Bogenmenge  $\omega^-(E_i)$ ) abgeschlossen sind.

In unserem Beispiel kommen wir so zu dem in Bild 3.4a gezeichneten Netzplan. (Bei Vorgangspfeilnetzen werden die Knotenpunkte meist durch Kreise dargestellt.)

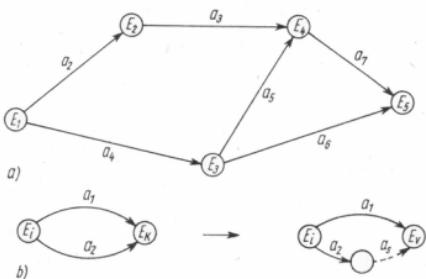


Bild 3.4. Ereignisorientierter Netzplan

Es leuchtet ein, daß der Übergang von der einen zur anderen Darstellungsart keine Schwierigkeiten macht. Wir beschränken uns im folgenden auf die Betrachtung von Vorgangsknotennetzen.

Für das Aufstellen eines Netzplanes gibt es kein Verfahren, das man rezeptmäßig anwenden könnte. Vielmehr ist es notwendig, in jedem konkreten Fall den zu modellierenden Prozeß genau zu durchdenken, um die logische Reihenfolge und gegenseitige Bedingtheit der einzelnen Aktivitäten zu erkennen. Wir können aber einige Eigenschaften angeben, die der fertige Netzplan aufweisen muß. Dabei handelt es sich zum Teil um Vereinbarungen, deren Einhaltung bei den noch zu besprechenden Berechnungsverfahren vorausgesetzt wird, zum Teil sind es Eigenschaften, deren Nichtvorhandensein darauf hinweist, daß bei der Aufstellung des Netzplanes logische Fehler unterlaufen sind.

- Der Netzplan muß genau einen Eingang (Knotenpunkt, von dem nur Bögen wegführen) und einen Ausgang (Knotenpunkt, zu dem nur Bögen hinführen) haben. Bei uns sind dies die fiktiven Aktivitäten „Beginn“ und „Ende“. In jedem anderen Knotenpunkt beginnt und endet mindestens je ein Bogen.
- Im Netzplan dürfen keine Kreise vorkommen. Das ist logisch; denn ein Kreis würde bedeuten, daß gewisse Aktivitäten abgeschlossen sein müssen, ehe sie beginnen können.
- Zwei Knotenpunkte dürfen jeweils nur durch einen Bogen verbunden sein (keine parallelen Bögen). Bei Vorgangsknotennetzen haben parallele Bögen tatsächlich keinen

Sinn, denn der zweite würde nichts anderes besagen als der erste. In Vorgangspfeilnetzen können parallele Bögen zunächst durchaus vorkommen. Man beseitigt sie durch Einführung einer „Scheinaktivität“  $a_s$  mit der Zeitdauer Null, vgl. Bild 3.4b.

- Jeder Knotenpunkt ist vom Eingang her auf einer Bahn erreichbar.

Die Aufstellung des Netzplanes, auch als *Ablaufplanung* bezeichnet, stellt die erste Phase der Netzplantechnik dar. Sicher ist der fertige Netzplan für sich allein schon ein wertvolles praktisches Hilfsmittel, denn er gibt dem für die Planung und Durchführung des Prozesses Verantwortlichen die nötige Übersicht. Der eigentliche Nutzen zeigt sich jedoch erst in der zweiten Phase, der sogenannten *Terminplanung*. Zunächst sagt ja der Netzplan noch nichts darüber aus, wie der modellierte Prozeß im einzelnen zeitlich ablaufen soll, d. h. zu welchen konkreten Terminen die verschiedenen Aktivitäten zu beginnen und zu enden haben. Solche Terminfestlegungen sind aber für den Leiter von größter praktischer Wichtigkeit, denn von ihnen hängt ab, zu welchen Zeitpunkten die entsprechenden Arbeitskräfte, Transportmittel und Baustoffe bereitzustellen sind, welche Verträge dementsprechend mit den Zulieferbetrieben und Nachauftragnehmern abzuschließen sind und vieles andere. Tatsächlich sind ja zunächst beliebig viele Varianten für den terminlichen Ablauf des Prozesses denkbar. Wir werden natürlich an der Realisierung einer optimalen Variante interessiert sein, und dies wird meist heißen, einen solchen Terminplan zu bestimmen, bei dessen Einhaltung der Gesamtprozeß in möglichst kurzer Zeit abgeschlossen wird. Diese Zielstellung einer optimalen Terminplanung wird als *Problem des kritischen Weges* bezeichnet, das wir in Verallgemeinerung unseres Beispiels folgendermaßen formulieren können:

*Problem des kritischen Weges:* Gegeben ist ein Netzplan  $G = (X, U)$ . Den Knotenpunkten  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$  entsprechen die Aktivitäten eines realen Prozesses, insbesondere stellt  $a_1$  den Eingang,  $a_n$  den Ausgang des Netzplanes dar. Für jede Aktivität ist eine Zeitdauer

$$d_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

gegeben. Mit

$$t(a_i); \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

wird der Zeitpunkt des Beginns der Aktivität  $a_i$  bezeichnet. Gesucht ist eine Terminplanung (3.19), bei welcher der Prozeß in möglichst kurzer Zeit abgeschlossen ist, d. h.

$$t(a_n) - t(a_1) = \min! \quad (3.20)$$

Aus graphentheoretischer Sicht können wir diese Aufgabenstellung in verschiedener Weise interpretieren. Die Zuordnung von Werten  $t(a_i)$  zu den Knotenpunkten kann als ein Potential auf  $G$  aufgefaßt werden (vgl. Satz 1.15). Es leuchtet ein, daß wir dieses durch die Festlegung  $t(a_1) = 0$  normieren können (eine spätere Umrechnung auf Kalendertermine macht offenbar keine Schwierigkeiten). Wenn  $a_j$  eine Aktivität ist, die unmittelbar an  $a_i$  anschließt, d. h., wenn im Netzplan ein Bogen  $(a_i, a_j)$  vorhanden ist, so muß der Anfangstermin von  $a_j$  mindestens um die Zeitdauer  $d_i$  später liegen als  $t(a_i)$ . Deshalb können wir das Problem des kritischen Weges folgendermaßen als Aufgabe zur Bestimmung eines Potentials auf  $G$  formulieren:

$$t(a_n) - t(a_1) = \min!$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} t(a_j) - t(a_i) &\geq d_i \quad \text{für alle } (a_i, a_j) \in U, \\ t(a_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Aufgabe als Problem zur Bestimmung einer

längsten Bahn aufzufassen. Wir ordnen jedem Bogen  $(a_i, a_j)$  die Zeitdauer  $d_i$  als Bewertung zu und betrachten eine beliebige Bahn  $\mu$  von  $a_1$  nach  $a_n$ . Dann kann die gesuchte minimale Zeit für den Abschluß des Gesamtprozesses jedenfalls nicht kleiner sein als die Länge von  $\mu$ , denn es müssen ja alle auf  $\mu$  liegenden Aktivitäten vollständig abgearbeitet werden. Dies gilt für jede Bahn von  $a_1$  nach  $a_n$ , insbesondere auch für die längste Bahn  $\mu^*$ . Wenn wir nun  $\mu^*$  bestimmen und Anfangstermine  $t^*(a_i)$  so festlegen, daß

$$t^*(a_n) - t^*(a_1) = t^*(a_n) = \sum_{u \in \mu^*} d_i \quad (3.22)$$

eingehalten wird, dann bekommen wir eine optimale Terminplanung, wie sie im Problem des kritischen Weges gefordert ist. Jetzt wird auch die Bezeichnung „kritischer Weg“ für  $\mu^*$  verständlich. Jede Überschreitung von Terminen der auf  $\mu^*$  liegenden Aktivitäten führt dazu, daß der frühestmögliche Termin  $t^*(a_n)$  für den Abschluß des Gesamtprozesses überschritten wird. Wenn die Zielstellung der Prozeßdurchführung in minimaler Zeit eingehalten werden soll, so muß das besondere Augenmerk der Verantwortlichen den auf  $\mu^*$  liegenden „kritischen Aktivitäten“ gelten.

Wie wir sehen, kann also die Aufgabe des kritischen Weges prinzipiell als Problem der längsten Bahn bzw. über die Umformung (3.15) bis (3.17) als verallgemeinertes Problem der kürzesten Bahn behandelt werden. Unter Ausnutzung der schon genannten besonderen Struktureigenschaften von Netzplänen könnten aber spezielle Algorithmen entwickelt werden, die leichter zur Lösung führen. Einen wollen wir kurz beschreiben:

## Die Methode CPM

Der Name dieses Verfahrens stellt eine Abkürzung von Critical Path Method dar. Es umfaßt im wesentlichen zwei Arbeitsabschnitte.

### (1) Vorwärtsrechnung

(diese liefert frühestmögliche Anfangs- und Endtermine für die Aktivitäten). Im Zusammenhang mit dem Netzplan  $G = (X, U)$  verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$V(a_j) = \{a_i \mid (a_i, a_j) \in U\}$  die Menge aller Vorgänger eines Knotenpunktes  $a_j$ ;

$d_j$  die Zeitdauer der Aktivität  $a_j$ ;

$FAT(a_j)$  der frühestmögliche Anfangstermin von  $a_j$ ;

$FET(a_j)$  der frühestmögliche Endtermin von  $a_j$ .

Dann gilt offensichtlich:

$$FAT(a_j) = \max_{b \in V(a_j)} \{FET(b)\}, \quad (3.23)$$

$$FET(a_j) = FAT(a_j) + d_j. \quad (3.24)$$

Für die Aktivität  $a_1$  (Beginn) mit  $V(a_1) = \emptyset$  wird gesetzt

$$FAT(a_1) = 0. \quad (3.25)$$

Da in  $G$  keine Kreise vorkommen, kann mit den Formeln (3.23) bis (3.25) „vom Eingang  $a_1$  zum Ausgang  $a_n$ “ durch den Netzplan hindurchgerechnet werden. Die Mindestdauer des Gesamtprozesses ergibt sich zu

$$L = \max_{b \in X} \{FET(b)\} = FET(a_n). \quad (3.26)$$

$L$  heißt auch „Dauer des Netzplanes“ oder „Länge des kritischen Weges“.

## (2) Rückwärtsrechnung

(diese ergibt „spätestzulässige“ Anfangs- und Endtermine für die Aktivitäten in folgendem Sinne: Wann muß spätestens mit der Abarbeitung einer Aktivität begonnen werden, damit die minimale Dauer  $L$  des Gesamtprozesses eingehalten wird?). Mit den Bezeichnungen

$N(a_j) = \{a_i \mid (a_j, a_i) \in U\}$  die Menge aller Nachfolger von  $a_j$ ,

$SET(a_j)$  der spätestzulässige Endtermin von  $a_j$ ,

$SAT(a_j)$  der spätestzulässige Anfangstermin von  $a_j$ ,

gilt

$$SET(a_j) = \min_{b \in N(a_j)} \{SAT(b)\}, \quad (3.27)$$

$$SAT(a_j) = SET(a_j) - d_j \quad (3.28)$$

und speziell für die Aktivität  $a_n$  (Ende) mit  $N(a_n) = \emptyset$

$$SET(a_n) = L. \quad (3.29)$$

Von (3.29) ausgehend, wird mit abwechselnder Verwendung der Formeln (3.27), (3.28) „vom Ausgang  $a_n$  zum Eingang  $a_1$ “ durch den Netzplan  $G$  hindurchgerechnet.

*Beispiel 3.3:* Wir demonstrieren den Ablauf des Algorithmus am Beispiel des Prozesses „Bau eines Hauses“ (vgl. Bild 1.2a und Tabelle 3.2).

Bei der Vorwärtsrechnung ergibt sich, von (3.25) ausgehend, mit (3.24) zunächst  $FET(a_1) = 0$ , dann weiter:

$$FAT(a_2) = \max_{V(a_2)} \{FET(b)\} = FET(a_1) = 0; \quad FET(a_2) = 0 + 6,$$

$$FAT(a_3) = \max_{V(a_3)} \{FET(b)\} = 6; \quad FET(a_3) = 6 + 4$$

usw. Als Länge des kritischen Weges erhalten wir

$$L = FET(a_8) = 45.$$

Tabelle 3.2: Terminberechnung mit der Methode CPM

$a_j$	$d_j$	$V(a_j)$	$N(a_j)$	$FAT$	$FET$	$SAT$	$SET$		$GP$
$a_1$ Beginn	0	—	$a_2, a_4$	0	0	0	0	(kritisch)	0
$a_2$ Bastraße	6	$a_1$	$a_3$	0	6	5	11		5
$a_3$ Antransport	4	$a_2$	$a_7$	6	10	11	15		5
$a_4$ Erdarbeiten	5	$a_1$	$a_5, a_6$	0	5	0	5	kritisch	0
$a_5$ Fundamente	10	$a_4$	$a_7$	5	15	5	15	kritisch	0
$a_6$ Rohrleitungen	32	$a_4$	$a_8$	5	37	13	45		8
$a_7$ Montage	30	$a_3, a_5$	$a_8$	15	45	15	45	kritisch	0
$a_8$ Ende	0	$a_6, a_7$	—	45	45	45	45	(kritisch)	0

Entsprechend verläuft die Rückwärtsrechnung. Die kritischen Aktivitäten erkennen wir daran, daß bei ihnen

$$FAT(a_j) = SAT(a_j) \quad \text{und} \quad FET(a_j) = SET(a_j)$$

gilt, d. h., daß bei diesen Teillvorgängen keinerlei Spielräume hinsichtlich der frühestmöglichen und spätestzulässigen Termine vorhanden sind. Bei allen nichtkritischen Aktivitäten gibt es dagegen derartige Spielräume. Beispielsweise kann der Antransport der Bauteile frühestens nach 6 Tagen beginnen. Aber auch, wenn wir ihn erst nach 11 Tagen beginnen lassen, ist er am 15. Tag noch rechtzeitig abgeschlossen, denn erst dann ist eine Montage der Fertigbauteile möglich. Innerhalb dieser Frist

von 5 Tagen kann der Beginn des Arbeitsvorganges „Antransport“ verschoben werden, ohne daß der Endtermin des Gesamtprozesses gefährdet wird. Solche Spielräume des zeitlichen Ablaufes werden auch als Pufferzeiten bezeichnet.

Wir konnten hier nur die Grundzüge der Netzplantechnik behandeln. Der interessierte Leser findet Einzelheiten z. B. in [3], [6], [13]. Neuerdings werden zunehmend Netzpläne modelle komplizierterer Art untersucht, bei denen außer den Nebenbedingungen der logischen Auseinanderfolge von Aktivitäten noch Restriktionen anderer Art erfaßt sind, z. B. Beschränkungen für die zur Erledigung der Aktivitäten erforderlichen Ressourcen (Arbeitskräfte, Transportmittel ...).

## 4. Probleme der Bestimmung von Gerüsten

Daß der Bestimmung von Gerüsten (vgl. Definition 1.13) große theoretische und praktische Bedeutung zukommt, zeigte sich u. a. bei der Konstruktion von Zyklenbasen (Satz 1.7) und bei der Berechnung von Strömen und Spannungen (Sätze 1.13 und 1.16). Wir wollen jetzt einige weitere Problemstellungen behandeln, die im Zusammenhang mit Gerüsten auftreten.

### 4.1. Die Anzahl der Gerüste eines Graphen

Zunächst wenden wir uns der Frage zu, wieviel verschiedene Gerüste ein gegebener ungerichteter Graph  $G = [X, U]$  besitzt. (Die im folgenden formulierten Aussagen lassen sich auf gerichtete Graphen übertragen, wenn man bei diesen von den Bogenrichtungen abstieht, d. h. die Bögen als Kanten interpretiert.)

Für den Fall, daß  $G$  ein vollständiger Graph ist, bei dem also je zwei Knotenpunkte durch genau eine Kante verbunden sind (die Anzahl der Kanten ist dann  $m = n \cdot (n - 1)/2$ ), gilt

**S. 4.1 Satz 4.1 (Satz von Cayley):** *In einem vollständigen Graphen  $G = [X, U]$  mit  $n$  Knotenpunkten ( $n \geq 1$ ) gibt es  $n^{n-2}$  verschiedene Gerüste.*

Den Beweis findet der Leser z. B. in [11]. Dieser Satz besagt auch, daß man  $n$  nummerierte Knotenpunkte auf  $n^{n-2}$  verschiedene Weise mit Kanten zu einem Baum verbinden kann. Um einen entsprechenden Satz für beliebige Graphen formulieren zu können, bedarf es einiger Vorbereitungen. Der zu betrachtende Graph  $G = [X, U]$  besitze  $n$  Knotenpunkte  $x_1, \dots, x_n$ . Er kann Schlingen und mehrfache Kanten enthalten. Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$g_{ij}$  = Anzahl der Kanten von  $G$ , die  $x_i$  mit  $x_j$  verbinden, (4.1)  
 $i, j = 1, \dots, n; \quad i \neq j$ ,

und bilden die  $(n, n)$ -Matrix  $\Gamma = (\gamma_{ik})$  mit

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{ij}, & \text{falls } i = k \\ -g_{ik}, & \text{falls } i \neq k \end{cases}; \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

$\Gamma$  wird als **Admittanzmatrix** von  $G$  bezeichnet. Dann gilt folgender

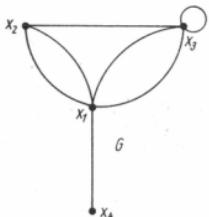
**S. 4.2 Satz 4.2 (Satz von Kirchhoff-Trent):** *Es sei  $G = [X, U]$  ein Graph mit  $n$  Knotenpunkten. Die Anzahl der verschiedenen Gerüste von  $G$  ist gleich der Determinante  $\det \Gamma_i$ , wobei die Matrix  $\Gamma_i$  aus der Admittanzmatrix  $\Gamma$  von  $G$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $i$ -ten Spalte entsteht ( $i$  eine beliebige der Zahlen  $1, \dots, n$ ).*

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß der Zahlenwert von  $\det \Gamma_i$  unabhängig von der speziellen Wahl von  $i$  ist. Auch für diesen Satz wollen wir hier keinen Beweis führen (siehe z. B. in [11]). Ein Beispiel soll jedoch die Anwendung erläutern.

*Beispiel 4.1:* In Bild 4.1 ist ein Graph mit seiner Admittanzmatrix  $\Gamma$  dargestellt. Für die Anwendung des Satzes 4.2 wählen wir etwa  $i = 2$ . Dann ergibt sich

$$\det \Gamma_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

d.h., der Graph besitzt 8 verschiedene Gerüste. Sie sind in Bild 4.1 zusammengestellt.



$$\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gerüste:

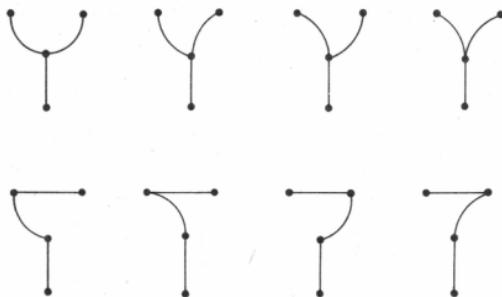


Bild 4.1. Zu Beispiel 4.1

Es sind verschiedene Algorithmen entwickelt worden, mit denen alle Gerüste eines gegebenen Graphen explizit bestimmt werden können. Näheres hierfür findet der Leser z.B. in [2].

## 4.2. Das Problem des Minimalgerüstes

*Aufgabenstellung:* Gegeben sei ein schlichter, zusammenhängender Graph  $G = [X, U]$ , dessen Kanten mit reellen Zahlen (Kosten)

$$c(u) \geq 0 \quad \text{für alle } u \in U \tag{4.3}$$

bewertet sind. Gesucht wird aus der Menge  $M$  aller Gerüste von  $G$  ein **Minimalgerüst**  $H = [X, V]$  gemäß der Forderung

$$\sum_{u \in V} c(u) = \min_M \tag{4.4}$$

Diese Problemstellung ist natürlich auch im Zusammenhang mit gerichteten Graphen sinnvoll, wenn wir dort die Richtungen der Bögen außer acht lassen können.

Wegen Satz 1.6 besitzt die Aufgabe jedenfalls eine Lösung. Hinsichtlich der Eindeutigkeit gilt

**S. 4.3 Satz 4.3:** *Wenn die Bewertungen der Kanten paarweise verschieden sind, so gibt es in  $G$  genau ein Minimalgerüst.*

Es fällt nicht schwer, praktische Aufgabenstellungen zu benennen, die auf das Problem des Minimalgerüstes führen. Stellen wir uns beispielsweise vor, daß  $n$  gegebene Orte durch ein neu anzulegendes Informations- oder Transportnetz miteinander verbunden werden sollen (Telefonnetz, Netz zur Datenfernübertragung, Straßennetz, Verbundsystem zur Übertragung von Elektroenergie usw.). Dabei sind folgende Bedingungen einzuhalten:

- (1) Jeder Ort muß von jedem anderen aus erreichbar sein (direkt oder über Zwischenorte), d. h., das Netz muß zusammenhängend sein.
- (2) Verzweigungspunkte sollen nur in den Orten selbst liegen.
- (3) Unter allen denkbaren die  $n$  Ortschaften verbindenden Netzen ist eine optimale Variante gesucht, die minimale Baukosten verursacht.

Die zuletzt genannte Forderung besagt, daß das gesuchte Netz jedenfalls keine geschlossenen Kantenfolgen (keine Kreise, Zyklen) enthalten darf; denn sonst wären ja überflüssige Kanten vorhanden, und man hätte keine Realisierung mit minimalen Kosten. In der Sprache der Graphentheorie ausgedrückt, bedeuten die Forderungen (1) und (3) gemäß Definition 1.12, daß das gesuchte Netz ein Baum sein soll. Um ihn zu finden, werden wir die Orte als Knotenpunkte aufzeichnen, jedes Knotenpunktpaar durch eine Kante verbinden und dieser die jeweiligen Baukosten (für eine Direktverbindung) als Bewertung zuordnen. In dem so entstehenden vollständigen Graphen  $G$  ist der gesuchte Baum als Gerüst mit minimaler Kostensumme eingebettet. Wir haben also für  $G$  das Problem des Minimalgerüstes vorliegen. Zur Lösung des Minimalgerüst-Problems sind verschiedene Algorithmen entwickelt worden, einen davon wollen wir jetzt beschreiben (den Beweis findet der Leser z. B. in [1]). Hinweise auf andere Algorithmen und weitere Literatur zu dieser Problematik siehe z. B. [2], [11].

### Algorithmus von Kruskal

- (1) Suche in  $U$  die „billigste“ Kante, d. h. diejenige mit der kleinsten Bewertung. Dies sei  $v_1 \in U$ . Setze  $V_1 = \{v_1\}$ . (Falls mehrere Kanten die gleiche kleinste Bewertungszahl haben, wird willkürlich eine davon als  $v_1$  ausgewählt.)
- (i) Suche unter den Kanten aus  $U - V_{i-1}$ , durch deren Hinzunahme zum Untergraphen  $[X, V_{i-1}]$  kein Kreis entsteht, die billigste. (Falls es mehrere gibt, wird willkürlich eine davon ausgewählt.) Dies sei  $v_i \in U - V_{i-1}$ . Setze  $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ ,  $i = 2, 3, \dots$

Der Prozeß bricht ab, falls sich zu  $V_i$  keine Kante aus  $U - V_i$  mehr hinzufügen läßt, ohne daß ein Kreis entsteht, oder falls  $U - V_i = \emptyset$  ist. Dann bildet  $H = [X, V_i]$  ein Minimalgerüst.

*Beispiel 4.2:* Zwischen den Orten  $a_1, \dots, a_6$  (vgl. Bild 4.2) soll ein Informationsnetz neu installiert werden. Gesucht wird ein Netz mit minimalen Baukosten. Um alle Verbindmöglichkeiten zur Konkurrenz zuzulassen, zeichnen wir zunächst den vollständigen Graphen  $G$ . Dieser enthält ( $\#$ ) = 15 Kanten. Die Bewertungen der Kanten  $[a_i, a_j]$  (veranschlagte Baukosten der Direktverbindungen) sind in der Tabelle 4.1 zusammengestellt. Das Zustandekommen dieser Zahlen haben wir uns folgendermaßen vorzustellen: Durch die Geländebedingungen wird für jede Direktverbindung ein günstiger Verlauf festgelegt sein (Ausnutzung vorhandener Brücken, Umgehung von Sümpfen und

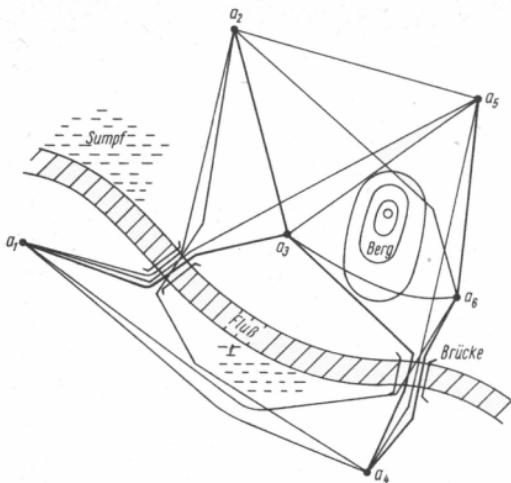


Bild 4.2. Problem des Minimalgerüstes (zu Beispiel 4.2)

Bergen usw.). Zu jeder Verbindung können dann unter Berücksichtigung der km-Entfernungen, der Bodenverhältnisse usw. die Teilkosten für Erdarbeiten, Kabel, Isolierungsmaßnahmen und aus diesen schließlich die Gesamtkosten je Direktverbindung ermittelt werden. Dabei ist noch zu bemerken, daß für die in der Aufgabenstellung geforderte Entscheidungsfindung i. allg. relativ grobe Schätzwerte für die Kosten ausreichen werden.

Tabelle 4.1: (Zu Beispiel 4.2) Bewertung der Kanten

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	—	1 307,2	683,4	850,0	1 790,8	1 409,7
$a_2$		—	490,0	1 040,3	860,0	1 000,0
$a_3$			—	561,0	840,0	864,0
$a_4$				—	1 309,8	673,2
$a_5$					—	620,0
$a_6$						—

Wir können nun den Algorithmus von Kruskal anwenden. Als Kante mit der kleinsten Bewertung entnehmen wir aus Tabelle 4.1

$$v_1 = [a_2, a_3]; \quad c(v_1) = 490; \quad V_1 = \{v_1\}.$$

Entsprechend ergibt sich als billigste Kante aus  $U - V_1$ :

$$v_2 = [a_3, a_4]; \quad c(v_2) = 561; \quad V_2 = \{v_1, v_2\}.$$

Im dritten Schritt erhalten wir

$$v_3 = [a_5, a_6]; \quad c(v_3) = 620; \quad V_3 = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Weiter ergibt sich

$$v_4 = [a_4, a_6]; \quad c(v_4) = 673,2; \quad V_4 = \{v_1, \dots, v_4\},$$

$$v_5 = [a_1, a_3]; \quad c(v_5) = 683,4; \quad V_5 = \{v_1, \dots, v_5\}.$$

Danach bricht das Verfahren ab, da die Hinzunahme jeder Kante aus  $U - V_5$  einen Kreis liefert. Der Abbruch nach 5 Schritten ist klar, denn nach Satz 1.5 muß ja das gesuchte Gerüst  $n - 1 = 6 - 1$  Kan-ten enthalten.

Im Bild 4.2 ist das ermittelte Minimalgerüst stark gezeichnet. Für seine Realisierung sind Bauko-sten in Höhe von 3027,6 TM zu veranschlagen. Die Lösung ist in unserem Beispiel eindeutig, vgl. Satz 4.3.

Verschiedene mit dem Minimalgerüst-Problem verwandte Aufgabenstellungen sind ebenfalls praktisch bedeutsam. Dafür seien noch zwei Beispiele angeführt.

*Steiner-Weber-Problem:*  $n$  gegebene Orte sollen durch ein möglichst billiges Netz ver-bunden werden. Im Gegensatz zum Minimalgerüst-Problem dürfen Verzweigungen auch außerhalb der Ortschaften liegen. Das gesuchte Netz ist jedenfalls ein Baum. Dieser ent-hält zwei Sorten von Knotenpunkten:  $n$  Festpunkte (deren Lage vorgegeben ist) sowie „Steinerpunkte“ (deren Lage zu ermitteln ist).

*Manhattan-Problem:* Im gegebenen zusammenhängenden Graphen  $G = [X, U]$  mit der Bewertung  $C(u) \geq 0$ ,  $u \in U$ , seien die Elemente einer Teilmenge  $A \subset X$ ,  $|A| = s$ ,  $|X| = n$ ,  $s < n$  markiert. Gesucht wird ein Untergraph  $H = (Y, V)$  von  $G$ , der folgende Bedingungen erfüllt:

$$H \text{ ist ein Baum, } Y \supseteq A, \quad \sum_{u \in V} C(u) = \min! \quad (4.5)$$

Hier wird also ein die Teilmenge  $A$  verbindendes Netz gesucht, wobei aber auch Orte au-ßerhalb  $A$  einbezogen werden können, wenn dies der Kostenminimierung dienlich ist.

## 5. Probleme der Bestimmung von Strömen

Im Abschnitt 1.6. haben wir gesehen, daß es durch die Einführung von Flüssen und Strömen auf Graphen möglich wird, Vorgänge zu beschreiben, die in realen Systemen (deren Struktur der Graph  $G$  darstellt) ablaufen. In diesem Zusammenhang (im Anschluß an Formel (1.33)) wurde auch der Begriff „Transportnetz“ genannt. Wir wollen diesen Begriff jetzt genau festlegen und anschließend einige für praktische Anwendungen wichtige Aufgaben zur Bestimmung von Strömen auf Transportnetzen besprechen.

**Definition 5.1:** Ein Graph  $G = (X, U)$  mit  $X = \{\bar{a}, a_1, \dots, a_n, \bar{b}\}$  und  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  werde **D. 5.1** als Transportnetz bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(a) \quad (\bar{b}, \bar{a}) = u_1 \in U, \quad (5.1)$$

$$(b) \quad \omega^+(\bar{b}) = \{u_1\}, \quad \omega^-(\bar{a}) = \{u_1\}. \quad (5.2)$$

(c) Es liegt eine Bewertung der Bögen (mit Ausnahme des Bogens  $u_1 = (\bar{b}, \bar{a})$ ) mit reellen Zahlen vor:

$$c_i \geq 0 \text{ für alle } u_i \in U - \{u_1\}. \quad (5.3)$$

Man nennt dann  $\bar{a}$  bzw.  $\bar{b}$  den Eingang bzw. den Ausgang des Transportnetzes,  $\omega^+(\bar{a})$  bzw.  $\omega^-(\bar{b})$  die Menge der Eingangs- bzw. die Menge der Ausgangsbögen,  $u_1$  den Rückkehrbogen und  $c_i$  die Kapazität des Bogens  $u_i$ .

Die speziell bei Transportnetzen vorhandene Struktur wird im Bild 1.13 dargestellt (der Eingang ist dort mit  $\bar{a}$ , der Ausgang mit  $\bar{b}$  bezeichnet). Der durch die strichpunktuierte Linie abgegrenzte Untergraph des Netzes enthält, in unserer jetzigen Bezeichnung, die Mengen

$$X' = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad U' = U - \omega^+(\bar{a}) - \omega^-(\bar{b}) - \{u_1\}. \quad (5.4)$$

### 5.1. Das Maximalstromproblem

**Aufgabenstellung:** Gegeben ist ein Transportnetz  $G = (X, U)$  mit nichtnegativen Kapazitäten. Gesucht wird ein Strom  $\varphi$  auf  $G$ , der folgenden Bedingungen genügt:

$$(1) \quad 0 \leq \varphi_i \leq c_i \quad \text{für alle } u_i \in U - \{u_1\}, \quad (5.5)$$

$$(2) \quad \varphi_1 = \varphi(u_1) = \max! \quad (5.6)$$

Beim Maximalstromproblem handelt es sich also um eine Optimierungsaufgabe. Jeder Strom, der (5.5) erfüllt, heißt zulässig. Jeder zulässige Strom, der auch noch (5.6) erfüllt, heißt Maximalstrom, das zugehörige  $\varphi_{1\max}$  wird als Wert des Maximalstromes bezeichnet.

Als Beispiel für eine praktische Aufgabenstellung, die auf diesen Problemtyp führt, besprechen wir ein Verteilungsproblem.

**Beispiel 5.1:** Ein bestimmtes Produkt wird an den Orten  $a_1, a_2, \dots, a_k$  in den (gegebenen) Mengen  $s_1, s_2, \dots, s_k$  erzeugt. An den Orten  $a'_{k+1}, a'_{k+2}, \dots, a'_n$  besteht ein Bedarf für dieses Produkt. Die Bedarfsmengen  $d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_n$  seien ebenfalls bekannt. Zwischen den Erzeuger- und Verbraucherorten ist ein Netz von Transportverbindungen vorhanden, d.h. eine gewisse Menge direkter Verbindungen der Art  $a_i \rightarrow a_j, a'_i \rightarrow a_j, a_i \rightarrow a'_j, a'_i \rightarrow a'_j$ . Dabei sei es aber so, daß über diese Verbindungen nicht beliebig viel transportiert werden kann. Die größtmögliche von  $a$  direkt nach  $b$  transportierbare

Menge werde mit  $c(a, b)$  bezeichnet, und diese „Durchlaßkapazitäten“ seien für alle Verbindungen des Netzes bekannt. Nun besteht folgende Aufgabe: Die erzeugte Produktmenge soll im Rahmen der vorhandenen Transportmöglichkeiten so verteilt werden, daß der Gesamtbedarf auf der Verbraucherseite soweit wie möglich gedeckt wird. Wenn

$$\sum_{i=1}^k s_i < \sum_{j=k+1}^n d_j$$

gilt, ist eine volle Befriedigung des Bedarfes natürlich nicht möglich. Aber auch im Falle  $\sum s_i \geq \sum d_j$  kann es wegen der beschränkten Kapazität der Transportwege sein, daß eine vollständige Deckung des Bedarfs nicht zu erreichen ist. Um einen möglichst großen Teil des Bedarfes zu decken, kommt es darauf an, die Transportmöglichkeiten optimal auszunutzen.

Um diese Problemstellung mathematisch zu modellieren, werden wir die Orte als Knotenpunkte, die direkten Verbindungen  $a \rightarrow b$  als Bögen  $(a, b)$  eines Graphen darstellen. vgl. Bild 5.1. Den Bögen ordnen wir die Durchlaßkapazitäten  $c(a, b)$  als Bewertungen zu. Wir ergänzen den Graphen durch

- einen Knotenpunkt  $\bar{a}$  und Eingangsbögen  $(\bar{a}, a_i)$  mit Bewertungen  $c(\bar{a}, a_i) = s_i$ ;  $i = 1, \dots, k$ ,
- einen Knotenpunkt  $\bar{b}$  und Ausgangsbögen  $(a'_j, \bar{b})$  mit Bewertungen  $c(a'_j, \bar{b}) = d_j$ ;  $j = k+1, \dots, n$ ,
- einen Rückkehrbogen  $(\bar{b}, \bar{a})$ .

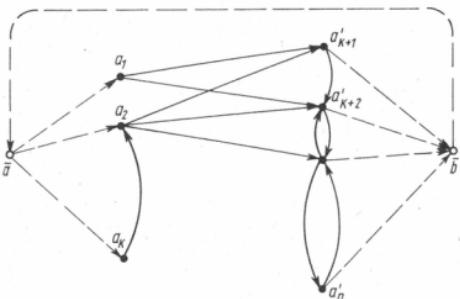


Bild 5.1. Transportnetz (zu Beispiel 5.1)

Dadurch erhalten wir ein Transportnetz  $G = (X, U)$  im Sinne der Definition 5.1. Wir betrachten jetzt einen Strom  $\varphi$  auf  $G$  und deuten  $\varphi(a, b)$  als Produktmenge, die über den Bogen  $(a, b)$  transportiert wird. Wegen der Durchlaßbeschränkungen muß für jeden zwei Orte verbindenden Bogen gelten

$$0 \leq \varphi(a, b) \leq c(a, b). \quad (5.7)$$

Aber auch für die Ausgangsbögen  $(a'_j, \bar{b})$  ist (5.7) zu fordern (mit  $c(a'_j, \bar{b}) = d_j$ ). Auf Grund der Knotenpunktregel gibt nämlich  $\varphi(a'_j, \bar{b})$  die Produktmenge an, die insgesamt beim Verbraucher  $a'_j$  ankommt (oder genauer: wieviel dort mehr ankommt als weggeht), und diese muß vernünftigerweise zwischen Null und dem Bedarf  $d_j$  liegen. Für Eingangsbögen  $(\bar{a}, a_i)$  besagt (5.7) schließlich (mit  $c(\bar{a}, a_i) = s_i$ ), daß die vom Erzeuger  $a_i$  weg transportierte Menge nicht größer sein kann als der Vorrat  $s_i$ . Also muß (5.7) für alle Bögen von  $G$ , außer dem Rückkehrbogen  $(\bar{b}, \bar{a})$  erfüllt werden. Die auf der Verbraucherseite insgesamt ankommende Produktmenge beträgt

$$\sum_{j=k+1}^n \varphi(a'_j, \bar{b}).$$

Wegen der in  $\bar{b}$  gültigen Knotenpunktregel ist diese gleich  $\varphi(\bar{b}, \bar{a})$ , d.h. der Stromkomponente auf dem Rückkehrbogen. Da das Optimierungsziel darin besteht, einen möglichst großen Teil des Gesamtbedarfs zu decken, besteht die Forderung

$$\varphi(\bar{b}, \bar{a}) = \sum_{j=k+1}^n \varphi(a'_j, \bar{b}) = \max! \quad (5.8)$$

Also liegt mit (5.7), (5.8) ein Maximalstromproblem vor.

Wir haben bei diesem Beispiel angenommen, daß im Transportnetz nur Erzeuger- und Verbraucherorte vorkommen. Die Problematik kann aber dahingehend verallgemeinert werden, daß zwischen den  $a_i$  und  $a'_j$  Orte ins Netz einbezogen sind, die weder Erzeuger noch Verbraucher repräsentieren, sondern „Zwischenlager“ oder „Umladestationen“ darstellen. Das Maximalstromproblem erfaßt also auch „mehrstufige“ Verteilungsprobleme. Eine ganze Reihe weiterer praktischer Aufgabenstellungen, die sich auf ein Maximalstromproblem zurückführen lassen, findet der Leser in [1]. Wir formulieren jetzt ein Lösungsverfahren.

### Algorithmus von Ford und Fulkerson

- (1) Wähle einen beliebigen zulässigen Strom  $\varphi$  [d. h. einen solchen, der (5.5) erfüllt] als Ausgangslösung. (Zum Beispiel den Nullstrom  $\varphi = 0$ .)
- (2) Führe von  $\bar{a}$  aus einen Markierungsprozeß nach folgenden Regeln aus:
  - α) Markiere den Eingang  $\bar{a}$ .
  - β) Wenn  $a_i$  bereits markiert wurde,  $a_j$  aber noch nicht: Markiere  $a_j$  mit dem Kennzeichen  $(i)$ , wenn
    - entweder  $(a_i, a_j) \in U$  und  $\varphi(a_i, a_j) < c(a_i, a_j)$  gilt (d. h., wenn ein Teil der Kapazität des Bogens  $(a_i, a_j)$  nicht in Anspruch genommen wird; Markierung „in Bogenrichtung“)
    - oder  $(a_j, a_i) \in U$  und  $\varphi(a_j, a_i) > 0$  gilt (d. h., wenn ein Teil der Kapazität des Bogens  $(a_j, a_i)$  in Anspruch genommen wird; Markierung „entgegen Bogenrichtung“).<sup>1)</sup>
  - γ) Der Markierungsprozeß wird beendet, wenn entweder  $\bar{b}$  markiert werden konnte oder wenn eine Markierung weiterer Knotenpunkte mittels der Regeln α, β nicht mehr möglich ist.
- (3) Wurde  $\bar{b}$  markiert? Wenn nein:  $\varphi$  ist ein Maximalstrom. Ende des Algorithmus. Wenn ja: Fahre mit Schritt (4) des Algorithmus fort.
- (4) Suche eine Kette  $\mu$  von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$ , auf der nur markierte Knotenpunkte liegen, wobei beim Durchlaufen der Kette von  $\bar{a}$  nach  $\bar{b}$  jeder folgende Knotenpunkt vom vorhergehenden aus markiert wurde. (Wenn wir die Kette als Folge von Knotenpunkten darstellen:

$$\mu = (a_{i_0} \equiv \bar{a}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}} \equiv \bar{b}), \quad (5.9)$$

dann muß bei  $a_{i_r}$  das Kennzeichen  $(i_{r-1})$  stehen,  $r = 1, \dots, k+1$ . Eine solche Kette gibt es jedenfalls, da ja  $\bar{b}$  markiert werden konnte.)

- (5) Aufteilung der Bögen von  $\mu$  in die Teilmenge  $\mu^+$  (diejenigen Bögen enthaltend, die „in Bogenrichtung“ markiert wurden, für die also  $\varphi < c$  gilt) und die Teilmenge  $\mu^-$  (die „entgegen der Bogenrichtung“ markierten Bögen enthaltend, für die  $\varphi > 0$  gilt). Berechne:

$$\varepsilon_1 = \min_{u \in \mu^+} [c(u) - \varphi(u)]; \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} \min_{u \in \mu^-} [\varphi(u)], & \text{falls } \mu^- \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } \mu^- = \emptyset; \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\varepsilon = \min [\varepsilon_1, \varepsilon_2]. \quad (5.12)$$

<sup>1)</sup> Das Kennzeichen  $(i)$  bei  $a_j$  gibt also die Nummer desjenigen Knotenpunktes an, von dem aus die Markierung von  $a_j$  möglich war!

(6) Bilde mit  $\varepsilon$  einen „besseren“ Stromvektor  $\varphi'$  gemäß

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u) + \varepsilon & \text{für alle } u \in \mu^+, \\ \varphi(u) - \varepsilon & \text{für alle } u \in \mu^-, \\ \varphi(u) + \varepsilon & \text{für } u = (\bar{b}, \bar{a}), \\ \varphi(u) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.13)$$

(7) Lösche die Markierungen, verwende  $\varphi'$  als neue Ausgangslösung  $\varphi$  und setze das Verfahren mit Schritt (2) fort.

Den *Beweis* für die Wirksamkeit dieses Algorithmus führen wir hier nicht (siehe z. B. [1]). Wir wollen uns lediglich klarmachen, daß mit (5.13) tatsächlich ein besserer Stromvektor gefunden wird. Durch die Art der Bestimmung von  $\varepsilon$  ist garantiert, daß der neue Vektor  $\varphi'$  die Nebenbedingungen (5.5) erfüllt. Daß  $\varphi'$  wieder ein Strom ist, sehen wir folgendermaßen ein: Für Bögen, die mit nicht auf der Kette  $\mu$  liegenden Knotenpunkten  $a$  inzident sind, gilt  $\varphi'(u) = \varphi(u)$ . Da  $\varphi$  ein Strom ist, gilt bei solchen  $a$  die Knotenpunktregel auch für  $\varphi'$ . Wir betrachten jetzt einen auf  $\mu$  liegenden Knotenpunkt  $a_i$ , vgl. Bild 5.2.

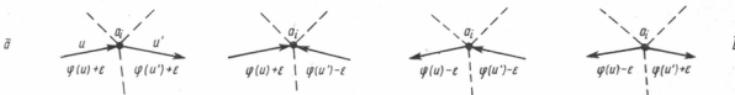


Bild 5.2. Zum Algorithmus von Ford und Fulkerson

Für die zu  $\mu$  gehörenden, mit  $a_i$  inzidenten Bögen  $u, u'$  sind die vier in Bild 5.2 gezeichneten Lagebeziehungen möglich. An den Bögen sind die gemäß (5.13) gebildeten neuen Komponenten  $\varphi'$  angeschrieben. Da für die alten Größen  $\varphi$  die Knotenpunktregel erfüllt war, gilt dies ertüchtig in allen Fällen auch für die neuen Größen  $\varphi'$ . Also ist  $\varphi'$  tatsächlich ein Strom. Schließlich besagt (5.13) wegen  $\varphi'(\bar{b}, \bar{a}) = \varphi(\bar{b}, \bar{a}) + \varepsilon$  und  $\varepsilon > 0$ , daß der neue Strom auf dem Rückkehrbogen einen größeren Wert hat als der alte, d. h., wir haben eine Verbesserung in Richtung auf den Maximalwert erreicht.

Bemerkenswert ist noch folgendes: Häufig tritt das Maximalstromproblem in der speziellen Form auf, daß die Kapazitäten  $c_i$  (nichtnegative) ganze Zahlen sind und daß ein Strom mit ganzzahligen Komponenten gesucht wird. Die Aufgabenstellung (5.5), (5.6) ist dann also durch die Zusatzbedingung

$$\varphi_i \text{ ganzzahlig} \quad \text{für alle } u_i \in U \quad (5.14)$$

modifiziert. Der Algorithmus von Ford und Fulkerson ist ungeändert auch für die Lösung derartiger ganzzahliger Maximalstromprobleme geeignet, wenn im Schritt (1) als Ausgangslösung ein Strom  $\varphi$  mit ganzzahligen Komponenten gewählt wird. Die Formeln (5.10) bis (5.12) liefern dann nämlich ein ganzzahliges  $\varepsilon$ , und deshalb besitzt gemäß (5.13) auch jeder verbesserte Strom  $\varphi'$  wieder die Eigenschaft der Ganzzahligkeit.

Ein *verallgemeinertes Maximalstromproblem* liegt vor, wenn anstelle von (5.5) die allgemeinere Bedingung

$$b_i \leq \varphi_i \leq c_i \quad \text{für alle } u_i \in U - \{u_1\} \quad (5.15)$$

besteht, wobei die Zahlen  $b_i, c_i$  auch negativ sein können. Der Algorithmus von Ford und Fulkerson kann mit geringfügigen Änderungen auch für die Lösung dieses Problemtypes eingesetzt werden. Schwieriger als beim einfachen Maximalstromproblem ist dann aber i. allg. die Bestimmung einer Ausgangslösung. Näheres hierzu findet der Leser in [1].

**Beispiel 5.2:** An eine Gruppe von 6 Studenten  $S_1, \dots, S_6$  sollen Themen für die Diplomarbeit vergeben werden. Es liegt eine Liste mit 6 Arbeitsthemen  $T_1, \dots, T_6$  vor. Jeder Student hat Themen ausgewählt, an deren Bearbeitung er interessiert ist. Wie muß man die Verteilung vornehmen, damit möglichst viele Studenten ein gewünschtes Thema erhalten?

Im Bild 5.3 sind die Studenten und Themen durch Knotenpunkte dargestellt. Ein Bogen  $(S_i, T_j)$  bedeutet, daß  $S_i$  am Thema  $T_j$  interessiert ist. Wir ordnen jedem Bogen die Kapazität  $c(S_i, T_j) = 1$  zu. Der Graph wurde durch Eingangs- und Ausgangsbögen ergänzt, jedem ist ebenfalls die Kapazität 1 zugeschrieben:  $c(\bar{a}, S_i) = 1$  besagt, daß dem Studenten höchstens ein Wunschthema zugewiesen werden darf, entsprechend sorgt  $c(T_j, \bar{b}) = 1$  dafür, daß jedes Thema höchstens einmal vergeben wird.

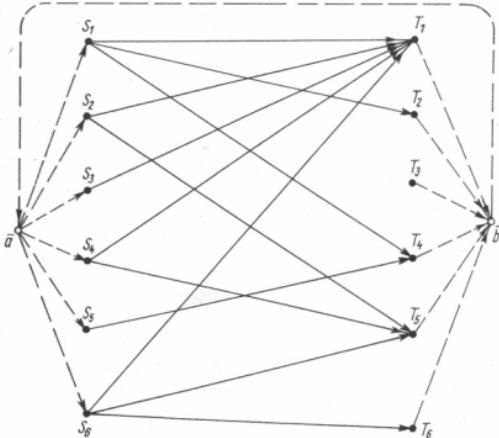


Bild 5.3. Zu Beispiel 5.2

Betrachtet wird ein Strom  $\varphi$  auf  $G = (X, U)$ , dessen Komponentenwerte wir folgendermaßen deuten

$$\varphi(S_i, T_j) = \begin{cases} 1 & S_i \text{ bekommt das Thema } T_j, \\ 0 & S_i \text{ bekommt } T_j \text{ nicht.} \end{cases}$$

Damit liegt das folgende ganzzahlige Maximalstromproblem vor: Zu bestimmen ist ein Strom  $\varphi$  auf  $G$ , der folgende Bedingungen erfüllt

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(u) \leq 1, \text{ ganzzahlig} & \quad \text{für alle } u \in U - \{u_1\}, \\ \varphi(\bar{b}, \bar{a}) = \max! & \end{aligned}$$

In Tabelle 5.1 wird ein möglicher Ablauf des Ford-Fulkerson-Algorithmus bei der Anwendung auf dieses Beispiel beschrieben. Es wird vom Anfangsstrom  $\varphi = 0$  ausgegangen. Dann ergibt sich die Lösung in fünf Durchläufen, die der Leser nachvollziehen möge. Es wurde so verfahren, daß in jedem Durchlauf der Schritt (2) des Algorithmus soweit ausgeführt wurde, bis keine weiteren Knotenpunkte mehr markiert werden können. (Praktisch kann man Schritt (2) schon dann beenden, wenn  $\bar{b}$  markiert ist.)

Im ersten Durchlauf erhalten wir gemäß Schritt (4) des Algorithmus die Kette  $\mu = (\bar{a}, S_1, T_1, \bar{b})$ , weiter im Schritt (5) die Aufteilung  $\mu^+ = \{(\bar{a}, S_1), (S_1, T_1), (T_1, \bar{b})\}$ ,  $\mu^- = \emptyset$  und  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \infty$ ,  $\varepsilon = 1$ . Nach (5.13) ergeben sich dann neue Stromkomponenten 1 für die Bögen von  $\mu^+$  und für den Rückkehrbogen  $(\bar{b}, \bar{a})$ .

Im zweiten Durchlauf ergibt sich die Kette  $\mu = (\bar{a}, S_2, T_1, S_1, T_2, \bar{b})$  mit  $\mu^+ = \{(\bar{a}, S_2), (S_2, T_1), (T_1, S_1), (S_1, T_2), (T_2, \bar{b})\}$ ,  $\mu^- = \{(S_1, T_1)\}$  und weiter  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ . Diesmal sind die Stromwerte auf den Bögen  $\mu^+$  und  $(\bar{b}, \bar{a})$  um 1 zu erhöhen, auf  $(S_1, T_1)$  um 1 zu erniedrigen. Die übrigen Durchläufe

rechne der Leser selbst nach. Er wird feststellen, daß im 6. Durchlauf der Ausgang  $\bar{b}$  nicht markiert werden kann, so daß die in der letzten Spalte von Tabelle 5.1 notierten Komponenten einen Maximalstrom darstellen. Im Ergebnis zeigt sich (was man in diesem einfachen Beispiel natürlich auch unmittelbar durch Probieren herausbekommen kann), daß maximal fünf von den sechs Themen wunschgemäß vergeben werden können:

$$T_1 \rightarrow S_2, \quad T_2 \rightarrow S_1, \quad T_4 \rightarrow S_5, \quad T_5 \rightarrow S_4, \quad T_6 \rightarrow S_6.$$

Die optimale Lösung ist hier allerdings nicht eindeutig bestimmt. Auch

$$T_1 \rightarrow S_3, \quad T_2 \rightarrow S_1, \quad T_4 \rightarrow S_5, \quad T_5 \rightarrow S_2, \quad T_6 \rightarrow S_6$$

stellt z. B. eine optimale Lösung dar.

Tabelle 5.1: Zu Beispiel 5.2

(Spalte  $M$  gibt an, welche Markierung der Endpunkt des jeweiligen Bogens nach Abschluß von Schritt (2) des Ford-Fulkerson-Algorithmus erhalten hat. In Spalte  $\varphi'$  sind die Komponenten des „besseren“ Stromvektors nach Abschluß von Schritt (6) vermerkt. Ein Stern hebt die im jeweiligen Durchlauf geänderten Werte hervor.)

Bogen	1. Durchlauf		2. Durchlauf		3. Durchlauf		4. Durchlauf		5. Durchlauf	
	$M$	$\varphi'$								
$(\bar{a}, S_1)$	$\bar{a}$	$1^*$	$T_1$	1	$T_2$	1	$T_2$	1	$T_2$	1
$(\bar{a}, S_2)$	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	$1^*$	$T_1$	1	$T_1$	1	$T_1$	1
$(\bar{a}, S_3)$	$\bar{a}$	0								
$(\bar{a}, S_4)$	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	$1^*$	$T_5$	1
$(\bar{a}, S_5)$	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	$1^*$	$T_4$	1	$T_4$	1
$(\bar{a}, S_6)$	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	0	$\bar{a}$	$1^*$
<hr/>										
$(S_1, T_1)$	$S_1$	$1^*$	$S_2$	$0^*$	$S_3$	0	$S_3$	0	$S_3$	0
$(S_1, T_2)$	$S_1$	0	$S_1$	$1^*$	$\bar{b}$	1	$\bar{b}$	1	$\bar{b}$	1
$(S_1, T_4)$	$S_1$	0	$S_5$	0	$S_5$	0	$\bar{b}$	0	$\bar{b}$	0
$(S_2, T_1)$	0			$1^*$		1		1		1
$(S_2, T_5)$	$S_2$	0	$S_2$	0	$S_4$	0	$S_4$	0	$S_6$	0
$(S_3, T_1)$	0			0		0		0		0
$(S_4, T_1)$	0			0		0		0		0
$(S_4, T_5)$	0			0		0		$1^*$		1
$(S_5, T_4)$	0			0		$1^*$		1		1
$(S_6, T_1)$	0			0		0		0		0
$(S_6, T_5)$	0			0		0		0		0
$(S_6, T_6)$	$S_6$	0	$S_6$	0	$S_6$	0	$S_6$	0	$S_6$	$1^*$
<hr/>										
$(T_1, \bar{b})$	$T_1$	$1^*$	$T_2$	1	$T_4$	1	$T_5$	1	$T_6$	1
$(T_2, \bar{b})$	0			$1^*$		1		1		1
$(T_3, \bar{b})$	0			0		0		0		0
$(T_4, \bar{b})$	0			0		$1^*$		1		1
$(T_5, \bar{b})$	0			0		0		$1^*$		1
$(T_6, \bar{b})$	0			0		0		0		$1^*$
<hr/>										
$(\bar{b}, \bar{a})$		$1^*$		$2^*$		$3^*$		$4^*$		$5^*$

## 5.2. Transportprobleme

Wir kommen zuletzt noch auf eine Aufgabe zu sprechen, die in der Graphentheorie als *eingeschränktes Transportproblem* oder Umladeproblem bezeichnet wird.

**Aufgabenstellung:** Gegeben sei ein Transportnetz  $G = (X, U)$ , entsprechend Definition 5.1. mit Kapazitäten

$$c(u_i) = \begin{cases} c_i > 0, & \text{falls } u_i \in \omega^+(\bar{a}), \\ c'_i > 0, & \text{falls } u_i \in \omega^-(\bar{b}), \\ \infty, & \text{falls } u_i \in U' = U - \omega^+(\bar{a}) - \omega^-(\bar{b}) - \{u_1\}, \end{cases} \quad (5.16)$$

wobei gilt

$$\sum_{u_i \in \omega^+(\bar{a})} c_i = \sum_{u_i \in \omega^-(\bar{b})} c'_i = \gamma. \quad (5.17)$$

Jedem Bogen  $u_i$  aus  $U'$  sei außerdem eine reelle Zahl  $l_i$  zugeordnet, und es sei vorausgesetzt, daß kein Knotenpunkt gleichzeitig Endpunkt eines Eingangsbogens und Anfangspunkt eines Ausgangsbogens ist. Gesucht wird ein Strom  $\varphi$  auf  $G$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad \varphi_i \geq 0 \quad \text{für alle } u_i \in U, \quad (5.18)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi_i &= c_i & \text{für alle } u_i \in \omega^+(\bar{a}), \\ \varphi_i &= c'_i & \text{für alle } u_i \in \omega^-(\bar{b}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$(3) \quad \sum_{u_i \in U'} l_i \varphi_i = \min! \quad (5.20)$$

Von der Benennung her ist zu vermuten, daß diese Aufgabe in Beziehung zu dem steht, was in der Theorie der linearen Optimierung als „Transportproblem“ bezeichnet wird [3], [12]. Tatsächlich können wir das eingeschränkte Transportproblem der Graphentheorie ohne weiteres in die Form einer linearen Optimierungsaufgabe (LO) umschreiben. Wenn wir nämlich zu den Formeln (5.18) bis (5.20) die Knotenpunktregeln (1.29) für die Variablen  $\varphi_i$  hinzunehmen (es ist ja ein Stromvektor  $\varphi$  gesucht!), so steht das äquivalente LO-Problem bereits da. Bezüglich der expliziten Form dieser Knotenpunktregeln sind vier Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Der Knotenpunkt  $a_i$  ist Endpunkt eines Eingangsbogens von  $G = (X, U)$ , vgl. Bild 5.4a. Dann gilt

$$\sum_{u_j \in \omega^+(a_i)} \varphi_j = \sum_{u_j \in \omega^-(a_i) - (\bar{a}, a_i)} \varphi_j + \varphi(\bar{a}, a_i)$$

oder, wenn wir wegen (5.19)  $\varphi(\bar{a}, a_i) = c_i$  setzen,

$$\sum_{u_j \in \omega^+(a_i)} \varphi_j - \sum_{u_j \in \omega^-(a_i) - (\bar{a}, a_i)} \varphi_j = c_i. \quad (5.21)$$

2. Fall: Der Knotenpunkt  $a_i$  ist Anfangspunkt eines Ausgangsbogens, vgl. Bild 5.4b. Dann gilt, wenn wir unter Verwendung von (5.19)  $\varphi(a_i, \bar{b}) = c'_i$  setzen:

$$\sum_{u_j \in \omega^-(a_i)} \varphi_j - \sum_{u_j \in \omega^+(a_i) - (a_i, \bar{b})} \varphi_j = c'_i. \quad (5.22)$$

3. Fall:  $a_i$  ist weder Endpunkt eines Eingangsbogens noch Anfangspunkt eines Ausgangs-

bogens. Die Knotenpunktregel lautet dann, vgl. Bild 5.4c:

$$\sum_{\omega^+(a_i)} \varphi_j - \sum_{\omega^-(a_i)} \varphi_j = 0. \quad (5.23)$$

4. Fall: Knotenpunktregel für  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$ , vgl. Bild 5.4d:

$$\varphi_1 - \sum_{\omega^+(\bar{a})} \varphi_j = \varphi_1 - \sum_{\omega^-(\bar{a})} c_j = 0 \quad (5.24)$$

bzw.

$$\varphi_1 - \sum_{\omega^-(\bar{b})} \varphi_j = \varphi_1 - \sum_{\omega^+(\bar{b})} c'_j = 0.$$

Wegen (5.17) reduzieren sich die beiden Bedingungen (5.24) auf

$$\varphi_1 = \gamma, \quad (5.25)$$

d. h., die Komponente  $\varphi_1$  ist bei vorliegender Aufgabenstellung gar keine Variable, sondern ein gegebener fester Zahlenwert.

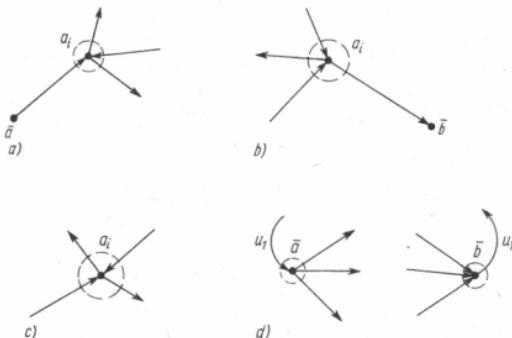


Bild 5.4. Zum eingeschränkten Transportproblem

In den Formeln (5.20), (5.21) bis (5.23), (5.18) haben wir das zum eingeschränkten Transportproblem äquivalente lineare Optimierungsproblem vor uns. In diesem treten  $|U'|$  Variable  $\varphi_i$  auf. Die zu den Eingangs- und Ausgangsbögen sowie zum Rückkehrbogen gehörenden Komponenten des Stromvektors konnten wir durch Berücksichtigung von (5.17) und (5.19) eliminieren.

Wir wollen nun die Beziehungen zum Transportproblem der linearen Optimierung untersuchen. Dort wird eine Menge  $a_1, a_2, \dots, a_k$  von Erzeugern ( $c_i$  die Produktion von  $a_i$ ) und eine Menge  $a'_{k+1}, \dots, a'_n$  von Verbrauchern betrachtet ( $c'_i$  der Bedarf von  $a'_i$ ). Beim einfachen Transportproblem wird angenommen, daß Produktion und Bedarf ausgeglichen sind:

$$\sum_{i=1}^k c_i = \sum_{j=k+1}^n c'_j = \gamma. \quad (5.26)$$

Zwischen den Produzenten und den Verbrauchern gibt es gewisse Transportverbindungen  $(a_i, a'_j)$ , die wir durch eine Menge von Indexpaaren  $E = \{(i, j)\}$  beschreiben können. Wir bezeichnen ferner mit  $l_{ij}$  die Kosten für den Transport der Mengeneinheit von  $a_i$  nach  $a'_j$

und mit  $x_{ij}$  die von  $a_i$  nach  $a'_j$  tatsächlich transportierte Produktmenge. Gesucht werden Optimalwerte für die  $x_{ij}$ , so daß die gesamten Transportkosten minimal ausfallen. Die mathematische Formulierung dieser Aufgabe ergibt folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\sum_{(i,j) \in E} l_{ij} x_{ij} = \min! \quad (5.27)$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_h x_{ih} = c_i; \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.28)$$

$$\sum_l x_{li} = c'_i; \quad i = k + 1, \dots, n. \quad (5.29)$$

Vorzeichenbedingungen:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } (i, j) \in E. \quad (5.30)$$

Durch Vergleich der Formeln (5.27) bis (5.30) mit (5.20), (5.21) bis (5.23), (5.18) können wir nun leicht feststellen, daß das einfache Transportproblem der linearen Optimierung (TLO) ein Spezialfall des eingeschränkten Transportproblems der Graphentheorie (ETG) ist. Der umfassendere Charakter der graphentheoretischen Aufgabe besteht in folgendem:

- Im ETG ist ein Transport zu den Erzeugern hin zugelassen (Vergleich der Formeln (5.28) und (5.21)). Praktisch kann dies so auftreten, daß die Produktion mehrerer Erzeuger zunächst bei einem von ihnen gesammelt wird, ehe der Versand an die Verbraucher erfolgt.
- Im ETG ist ein Transport von den Verbrauchern weg zugelassen (Vergleich der Formeln (5.29) und (5.22)). Auch dieser Fall tritt praktisch auf, wenn nämlich ein Verbraucher für mehrere andere als „Zwischenlager“ fungiert.
- Im TLO treten Formeln des Typs (5.23) nicht auf, d.h., es gibt dort keine Orte, die weder Erzeuger noch Verbraucher darstellen. Solche Knotenpunkte haben praktisch die Bedeutung von Zwischenlagern oder Umladestationen. Das ETG erfaßt also „mehrstufige Transportprobleme“, wie sie in der Praxis häufig auftreten.
- Im ETG können die den Bögen zugeordneten Zahlen  $l_i$  auch negativ sein.

Auf Lösungsverfahren für das eingeschränkte Transportproblem der Graphentheorie gehen wir hier nicht ein. Der Leser wird auf [1] verwiesen, wo auch noch weitere praktische Fragestellungen erläutert werden, die auf diesen Problemtyp führen.

## 6. Zur rechentechnischen Realisierung von Graphenalgorithmen

Bei der mathematischen Modellierung praktischer Probleme wird die Wahl auf ein graphentheoretisches Modell oft dann fallen, wenn bei der Arbeit mit dem Modell Strukturgeigenarten des realen Systems untersucht oder für den Rechengang ausgenutzt werden sollen. Diese Eigenschaften kommen in den Adjazenz- und Inzidenzbeziehungen zwischen den Elementen des Graphen direkt zum Ausdruck. Graphentheoretische Algorithmen haben deshalb oft die Form von Suchprozessen entlang von Bahnungen, in der Nachbarschaft von Knotenpunkten, über die Menge von Bögen usw. Für die Effektivität der rechentechnischen Realisierung ist es offenbar wichtig, daß man die für den nächsten Rechenschritt benötigten Größen „möglichst schnell bei der Hand hat“, d. h., daß man eine dem Algorithmus angepaßte Art der Codierung des Graphen auswählt.

Nur selten wird man Adjazenz- oder Inzidenzmatrizen direkt verwenden, da sie meist gering besetzt sind und unnötigen Speicherplatz verbrauchen. Oft wird eine Listenform zweckmäßig sein, z. B.:

- Für jeden Knotenpunkt Angabe der Nachfolger oder/und Vorgänger,
- Liste der Bögen durch jeweilige Angabe des Anfangs- und Endpunktes.

Da bei Aufgaben praktischen Formats der Modellumfang oft sehr groß wird, ist es für den Entwurf bzw. die Beurteilung von Algorithmen (z. B. für die Entscheidung, ob man sich mit Näherungsverfahren oder Heuristiken begnügt oder exakte Verfahren anstrebt) wünschenswert, für das vorliegende Problem bzw. den Algorithmus eine Möglichkeit zur Bewertung des Schwierigkeitsgrades bzw. Lösungsaufwandes zu haben. Solche Möglichkeiten bietet die Komplexitätstheorie, die sich als Teildisziplin der diskreten Mathematik entwickelt hat. Einige Grundgedanken sollen hier genannt werden.

Es sei  $P$  ein Problem<sup>1)</sup>,  $A$  ein Algorithmus zur Lösung von  $P$ ,  $B(d)$  ein Beispiel der Dimension  $d$  für das Problem ( $d$  charakterisiert den Umfang des Beispiels; z. B. kann dieser beim Minimalgerüstproblem, vgl. 4.2., durch die Anzahl der Knotenpunkte des Graphen beschrieben werden, d. h.  $d = n$ ). Mit  $\text{compl}(B(d), A, P)$  wollen wir die Anzahl elementarer Operationen (oder die dazu proportionale Rechenzeit) auf einem Computer bezeichnen, die benötigt wird, um das Beispiel  $B(d)$  des Problems  $P$  mittels des Algorithmus  $A$  zu lösen. Ist  $M(d)$  die Menge aller Beispiele  $B(d)$  gleichen Umfangs  $d$ , so gilt

$$\text{compl}(A, P) = \max_{B(d) \in M(d)} \{\text{compl}(B(d), A, P)\} \quad (6.1)$$

offenbar ein (von  $d$  abhängiges) Maß für den Aufwand des Algorithmus  $A$  an, denn (6.1) beschreibt ja die benötigte Rechenzeit für das ungünstigste Beispiel aus  $M(d)$ . Deshalb auch die Bezeichnung „worst-case-Komplexität“. Ist  $\alpha(P)$  die Menge aller (denkbaren) Algorithmen zur Lösung von  $P$ , so stellt

$$\text{compl}(P) = \min_{A \in \alpha(P)} \{\text{compl}(A, P)\} \quad (6.2)$$

ein Maß für die Schwierigkeit des Problems  $P$  dar. Auch  $\text{compl}(P)$  ist eine Funktion von  $d$ . Handelt es sich dabei um ein Polynom, so nennt man  $P$  bzw.  $A$  „polynomial“ und gibt als Komplexität die Ordnung des Polynoms an. Andernfalls heißen  $P$  bzw.  $A$  „exponentiell“. Man bezeichnet mit  $\mathcal{P}$  die Klasse aller polynomialen Probleme, d. h. aller Probleme, für die es einen polynomialen (deterministischen, d. h. in jedem Schnitt ein ein-

<sup>1)</sup> Die folgenden Begriffe der Komplexitätstheorie gelten genaugenommen nur für sog. Entscheidungsprobleme. Das sind solche, die als Lösung nur „ja“ oder „nein“ zulassen. Da es aber möglich ist, kombinatorischen Optimierungsproblemen äquivalente Entscheidungsprobleme zuzuordnen, werden diese Begriffe auch etwas unscharf allgemeiner angewendet.

deutiges Ergebnis liefernden) Algorithmus gibt (wenn er vielleicht auch noch nicht gefunden wurde!).

*Beispiel 6.1:* Algorithmus von Kruskal zur Lösung des Minimalgerüst-Problems, vgl. 4.2. Betrachtet wird ein Graph mit  $d = n$  Knotenpunkten, der (ungünstiger Fall!) vollständig ist, d. h.  $z = \frac{n}{2} \cdot (n - 1)$  Kanten besitzt. Die im ersten Schritt durchzuführende Suche einer „billigsten“ Kante erfordert, indem man die Kanten durchgeht,  $z - 1$  Vergleiche, d. h. eine zu dieser Zeit proportionale Rechenzeit  $a_1(z - 1)$ . Im zweiten Schritt (vgl. 4.2.) sind die restlichen  $z - 2$  Kanten daraufhin zu durchmustern, ob ihre Hinzunahme zu  $V_1$  einen Kreis bildet. Von denen, die das nicht tun, ist eine billigste Kante zu suchen. Dieser Vorgang erfordert (im ungünstigsten Falle, d. h., wenn keine der Kanten zu einem Kreis führt) einen Beitrag  $a_2(z - 2)$  zur Rechenzeit usw. Insgesamt gibt es  $n - 1$  solche Schritte, der letzte mit einem zu  $(z - n + 1)$  proportionalen Zeitbeitrag. Für die gesamte Rechenzeit folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i(z - i) &\leq a_{\max} \sum_{i=1}^{n-1} (z - i) = a_{\max} \cdot \frac{1}{2} [z(z - 1) - (z - n + 1)(z - n)] \\ &= \frac{a_{\max}}{4} \cdot [n^3 - 3n^2 + 2n]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Also ist das Minimalgerüst-Problem polynomial lösbar (es gehört zur Klasse  $\mathcal{P}$ ), und der so realisierte Algorithmus ist von der Ordnung  $n^3$  (die Ordnung kann durch Verfeinerung des Algorithmus noch reduziert werden). Polynomiale Algorithmen werden oft als „gute“ Algorithmen bezeichnet.

Wie kann man nun zwei Probleme,  $P, \bar{P}$  in ihrer Schwierigkeit vergleichen? Dabei hilft der Begriff der polynomiaalen Transformation. Man versteht darunter einen Algorithmus, der jedes Beispiel  $B$  von  $P$  mit polynomialem Aufwand in ein Beispiel  $\bar{B}$  von  $\bar{P}$  überführt, wobei aus der Lösung von  $\bar{B}$  dann auf diejenige von  $B$  geschlossen werden kann. Wenn  $P$  derart polynomial in  $\bar{P}$  überführbar ist, so schreibt man  $P \in \bar{P}$ . Offenbar ist dann  $P$  als ein Spezialfall von  $\bar{P}$  aufzufassen, und folglich besitzt das Problem  $\bar{P}$  mindestens die Schwierigkeit von  $P$ . Aus  $\bar{P} \in \mathcal{P}$  folgt natürlich  $P \in \mathcal{P}$ , aber nicht umgekehrt.

Die Komplexitätstheorie befasst sich weiter mit der Klassifizierung von Problemen, bei denen eine Zugehörigkeit zu  $\mathcal{P}$  bisher noch nicht nachgewiesen werden konnte. Ohne näher darauf einzugehen sei nur die Klasse  $\mathcal{NP}$  („ $\mathcal{NP}$ vollständige“ Probleme) erwähnt, in der die vom Aufwand her „schwierigsten“ Probleme zusammengefaßt sind. Bei ihnen erscheint es sehr unwahrscheinlich, jemals polynomiale Algorithmen zu finden. Umfangreiche Zusammenstellungen von Problemen, deren Zugehörigkeit zur Klasse  $\mathcal{NP}$  feststeht, findet man in der Literatur (siehe z. B. [5], [14]), wo auch Wege zum Nachweis dieser Eigenschaft beschrieben werden. Bei  $\mathcal{NP}$ vollständigen Problemen ist es angeraten, sich auf die Benutzung bzw. Entwicklung polynomialem Näherungsverfahren (z. B. beruhend auf der Greedy-Technik und ihren Varianten) oder sogar auf heuristische Verfahren zu beschränken. In vielen Fällen wird bei solchen Problemen das Branch-and-Bound-Prinzip [14] der Ansatzpunkt für die Entwicklung von Näherungsverfahren sein.

## Literatur

- [1] *Berge, C.; Ghouila-Houri, A.:* Programme, Spiele, Transportnetze. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1969.
- [2] *Dörfler, W.; Mühlbacher, J.:* Graphentheorie für Informatiker. Sammlung Göschen, Bd. 6016. Berlin – New York: Verlag Walter de Gruyter 1973.
- [3] *Dück, W. u. a.:* Mathematik für Ökonomen, Bd. 2. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1980.
- [4] *Fischer, H.; Piehler, J.:* Modellsysteme der Operationsforschung. Wissenschaftliche Taschenbücher, Bd. 145. Berlin: Akademie-Verlag 1974.
- [5] *Garey, M. R.; Johnson, D. S.:* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: Freeman 1979.
- [6] *Golenko, D. I.:* Statistische Methoden der Netzplantechnik. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972.
- [7] *Hässig, K.:* Graphentheoretische Methoden des Operations Research. Stuttgart: B. G. Teubner 1979.
- [8] *Henn, R.; Künzi, H. P.:* Einführung in die Unternehmensforschung, Bd. II. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag 1968.
- [9] *Manteuffel, K.; Seiffert, E.; Vettors, K.:* Lineare Algebra. 6. Aufl. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Bd. 13. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1987.
- [10] *Ostrowski, G. M.; Wolin, J. M.:* Methoden zur Optimierung komplexer verfahrenstechnischer Systeme. Berlin: Akademie-Verlag 1973.
- [11] *Sachs, H.:* Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I und II, Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970 und 1972.
- [12] *Seiffert, E.; Manteuffel, K.:* Lineare Optimierung. 4. Aufl. Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte, Bd. 14. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1988.
- [13] *Stempell, D. u. a.:* Handbuch der Netzplantechnik. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1970.
- [14] *Terno, J.:* Numerische Verfahren der diskreten Optimierung. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 36. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1981.

# Namen- und Sachregister

- Ablaufplanung 48
- Adjazenz 8
- Adjazenzmatrix 31
- Admittanzmatrix 52
- Aktivitäten, kritische 49
- aktivitätsorientierter Netzplan 47
- Algorithmus, polynomialer 66
  - von Dantzig 42
  - – Ford und Fulkerson 59
  - – Kruskal 54, 67
  - – Trémaux 40
- Artikulation 15
- Bahn 12, 32, 39
- Bahnproblem, einfaches 39
- Baum 18
- Bewertung auf Graphen 22
- Bögen 7
  - , inzidente 9
  - , Kapazität von 57
  - , Lösung von 15
  - , parallele 9
- Büschenel 20
- Cayley, Satz von 52
- CPM, Methode 49
- Dantzig, Algorithmus von 42
- Dimension einer Basis 14, 20
- Durchgangsknoten eines Flusses 23
- Durchlaufsinn 13
- einfache Kantenfolge 11
- einfaches Bahnproblem 39
- Eingangsbögen 57
- eingeschränktes Transportproblem 63
- Ein-Mann-Spiele 39
- elementare Kantenfolge 11
- Elementarzyklen 12, 20
- Endpunkte 8
- Entfernungsmatrix 35
- Entfernung zweier Knotenpunkte 34
- ereignisorientierter Netzplan 47
- Ereignisse 47
- Ergiebigkeit 23
- Erreichbarkeitsmatrix 33
- Eulersche Linie 12
- Eulerscher Graph 12
- Fluß auf einem Graphen 22
- Flusses, Quelle eines 23
  - , Senke eines 23
- Ford und Fulkerson, Algorithmus von 59
- Fundamentalmatrix 37
- ganzzahliges Maximalstromproblem 60
- gerichteter Graph 7
- Gerüst 19, 26, 29, 52
- geschlossene Kantenfolge 11
- Graph 7
  - , antisymmetrischer 10
  - , endlicher 8
  - , Eulerscher 12
  - , gemischter 8
  - , gerichteter 7
  - , planarer 11
  - , schlichter 9
  - , symmetrischer 10
  - , ungerichteter 8
  - , vollständiger 10, 52
  - , zusammenhängender 15
- hängende Knotenpunkte 18
- Hamiltonsche Linie 12
- Inzidenz 9
- Inzidenzmatrix 35
- , verallgemeinerte 36
- Kante 8
- Kantenfolge 11
  - , einfache 11
  - , elementare 11
  - , geschlossene 11
  - , Länge einer 11
  - , offene 11
- Kantenzug 11
- Kapazität eines Bogens 57
- Kette 12
- Kirchhoff'sche Knotenregel 24
  - Spannungsregel 28
- Kirchhoff-Trent, Satz von 52
- Knotenpunkte 7
  - , adjazente 8
  - , Entfernung zweier 34
  - , hängende 18
- Knotenpunktregel 24
- Kodierung eines Graphen 41
- Komplexität 66
- Komponente eines Graphen 14
  - , starke 16, 33
- Konstruktion einer Zyklensbasis 20
- Kozyklenbasis 29
- Kozyklenvektoren 29
- kozyklomatische Zahl 29
- Kozyklus 29, 35
- Kreis 11, 12
- kritische Aktivitäten 49

- kritischen Weges, Problem des 48
- kritischer Weg 49
- Kruskal, Algorithmus von 54, 67
- kürzesten Bahn, Problem der 41
  - –, verallgemeinertes Problem der 44
- Länge einer Kantenfolge 11
- längsten Bahn, Problem der 45
- Lösung eines Bogens 15
  - – Knotenpunktes 15
- Manhattanproblem 56
- Matrixdarstellungen für Graphen 31
- Maximalstromproblem 57
  - , ganzzahliges 60
  - , verallgemeinertes 60
  - mehrfache Kanten 11
  - mehrstufiges Transportproblem 65
    - Verteilungsproblem 59
  - Minimalgerüstproblem 53
- Nachfolger 8
- Netzplan 46
  - , aktivitätsorientierter 47
  - , ereignisorientierter 47
- Netzplantechnik 46
- NP-Vollständigkeit 67
- offene Kantenfolge 11
- Optimierung 41, 43, 48, 53, 57, 63
- Parallelbögen 9
- $p$ -facher Zusammenhang 15
- planarer Graph 11
- polynomialer Algorithmus 66
- Potentialfunktion 28, 36
- Problem der kürzesten Bahn 41
  - längsten Bahn 45
  - des kritischen Weges 48
    - – Maximalstroms 57
    - – Minimalgerüstes 53
  - Pufferzeiten 51
- quasistarker Zusammenhang 17, 21
- Quelle eines Flusses 23
- Rohrleitungssystem 27
- Satz von Cayley 52
  - – Kirchhoff-Trent 52
- schlichter Graph 9
- Schlinge 8
- Senke eines Flusses 23
- Skalarprodukt 30
- Spannung 28, 36, 38
  - , verallgemeinerte 36
- Spannungsregel 28
- starke Komponente 16, 33
- starker Zusammenhang 16
- Steinerpunkt 56
- Steiner-Weber-Problem 56
- Strom 24, 29, 35, 38
  - , verallgemeinerter 36
- Strukturanalyse 16
- symmetrischer Graph 10
- Terminplanung 48
- Transformation, polynomiale 67
- Transportnetz 23, 57
- Transportproblem 63
  - , eingeschränktes 63
  - , mehrstufiges 65
- Trémaux, Algorithmus von 40
- Umladeproblem 63
- ungerichteter Graph 8
- Untergraph 10
- Valenz 9, 35
- Vektorraum 25, 28
- verallgemeinertes Maximalstromproblem 60
  - Problem der kürzesten Bahn 44
- Verteilungsproblem 57
  - , mehrstufiges 59
- Vierfarbenproblem 11
- vollständiger Graph 10, 52
- Vorgänger 8
- Vorgangsknotennetz 47
- Vorgangspfeilnetz 47
- Wald 18
- Weg 11
  - , kritischer 49
- Zentrum 18, 20
- Zerfällungspunkt 15
- Zusammenhang eines Graphen 15
  - , quasistarker 17, 21
  - , starker 16
- Zyklenbasis 14, 20, 26, 37
  - , Dimension einer 14
  - , Konstruktion einer 20
- Zyklenvektor 13
- zyklomatische Zahl 14, 20, 26
- Zyklus 12

I. N. BRONSTEIN † und K. A. SEMENDJAJEW, Moskau

**Taschenbuch der Mathematik**

23. Auflage, herausgegeben von G. GROSCHÉ, Leipzig, V. ZIEGLER † und D. ZIEGLER, Leipzig

XI, 840 Seiten mit 390 Abbildungen. 14,5 cm × 20 cm. 1987

Plastenband 29,50 M; Ausland 36,- M

Bestell-Nr. 665 911 8 · Bestellwort: Bronstein, Taschenbuch

Inhalt: Tabellen und graphische Darstellungen (Tabellen · Bilder elementarer Funktionen · Gleichungen und Parameterdarstellungen elementarer Kurven) · Elementarmathematik (Elementare Näherungsrechnung · Kombinatorik · Endliche Folgen, Summen, Produkte, Mittelwerte · Algebra · Elementare Funktionen · Geometrie) · Analysis (Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer und mehrerer Variablen · Variationsrechnung und optimale Prozesse · Differentialgleichungen · Komplexe Zahlen, Funktionen einer komplexen Veränderlichen) · Spezielle Kapitel (Mengen, Relationen, Funktionen · Vektorrechnung · Differentialgeometrie · Fourierreihen, Fourierintegrale und Laplacetransformation) · Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik (Wahrscheinlichkeitsrechnung · Mathematische Statistik) · Lineare Optimierung (Aufgabenstellung der linearen Optimierung und Simplexalgorithmus · Transportproblem und Transportalgorithmus · Typische Anwendungen der linearen Optimierung · Parametrische lineare Optimierung) · Numerik und Rechentechnik (Numerische Mathematik · Rechentechnik und Datenverarbeitung)

**Ergänzende Kapitel zu**

BRONSTEIN / SEMENDJAJEW

**Taschenbuch der Mathematik**

5. Auflage, herausgegeben von G. GROSCHÉ, Leipzig, V. ZIEGLER † und D. ZIEGLER, Leipzig

VI, 234 Seiten mit Abbildungen. 14,5 cm × 20 cm. 1988

Plastenband 13,- M; Ausland 19,80 M

Bestell-Nr. 666 456 6 · Bestellwort: Bronstein, Ergänzungsbd.

Inhalt: Analysis (Funktionalanalysis · Maßtheorie und Lebesgue-Stieltjes-Integral · Tensorrechnung · Integralgleichungen) · Mathematische Methoden der Operationsforschung (Ganzzahlige lineare Optimierung · Nichtlineare Optimierung · Dynamische Optimierung · Graphentheorie · Spieltheorie · Kombinatorische Optimierungsaufgaben) · Mathematische Informationsverarbeitung (Grundbegriffe · Automaten · Algorithmen · Elementare Schaltalgebra · Simulation und statistische Versuchsplanung und -optimierung) · Dynamische Systeme (Grundideen · Dynamische Systeme in der Ebene · Stabilität · Bifurkation · Ljapunovfunktion)

BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG

MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,  
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE

H. WENZEL · G. HEINRICH

**Übungsaufgaben zur Analysis 1**

2. Auflage. 76 Seiten mit 34 Abbildungen. 16,5 cm × 23,0 cm  
(Bd. Ü 1). 1988

Kartoniert 6,- M

Bestell-Nr. 666 369 4 Bestellwort: Wenzel, Ueb. Analysis 1

H. WENZEL · G. HEINRICH

**Übungsaufgaben zur Analysis 2**

2. Auflage. 84 Seiten mit 57 Abbildungen. 16,5 cm × 23,0 cm.  
(Bd. Ü 2). 1988

Kartoniert 6,50 M

Bestell-Nr. 666 370 7 Bestellwort: Wenzel, Ueb. Analysis 2

E.-A. PFORR · L. OEHLSCHLAEDEL · G. SELTMANN

**Übungsaufgaben zur linearen Algebra und linearen Optimierung**

2. Auflage. 92 Seiten mit 16 Abbildungen. 16,5 cm × 23,0 cm  
(Bd. Ü 3). 1988

Kartoniert 7,50 M

Bestell-Nr. 666 372 3 Bestellwort: Pforr, Ueb. Algebra

H. GILLERT · V. NOLLAU

**Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung  
und mathematischen Statistik**

2. Auflage. 56 Seiten. 16,5 cm × 23,0 cm  
(Bd. Ü 4). 1988

Kartoniert 4,50 M

Bestell-Nr. 666 371 5 Bestellwort: Gillert, Ueb. Wahrscheinl.