Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Vektoren in der Ebene - Übersicht

1.1.1 Veranschaulichung von Vektoren in der Ebene

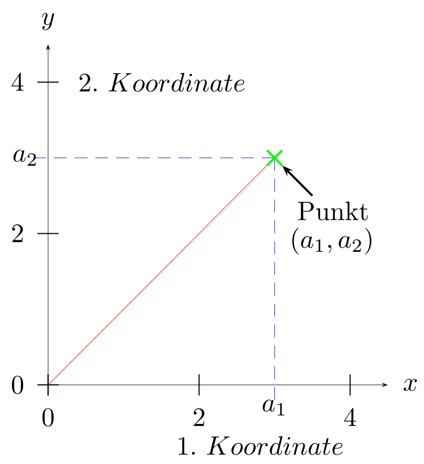


Abbildung 1.1: Punkt (a_1, a_2)

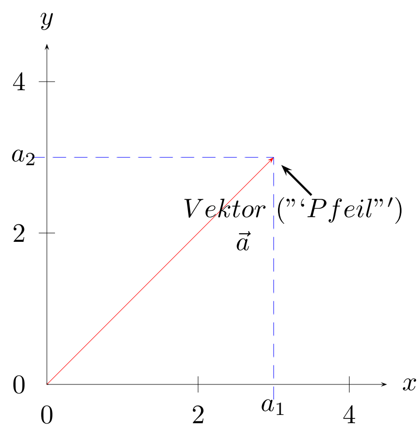


Abbildung 1.2: $\vec{a} = (a_1, a_2)$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ auch üblich $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \leftarrow$ Geordnetes Paar

1.1.2 Menge aller Vektoren in der Ebene

Die Menge aller Vektoren in der Ebene heißt $\mathbb{R}^2$; dabei ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Also: $\mathbb{R} = \{\vec{a} = (a_1, a_2) | a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}\}$

1.1.3 Addition von Vektoren in der Ebene

Die Addition von Vektoren liefert als Ergebnis wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, \vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} + \vec{b} = ((a_1 + b_1, a_2 + b_2))$

zeichnerisch:

Rechenregeln: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$

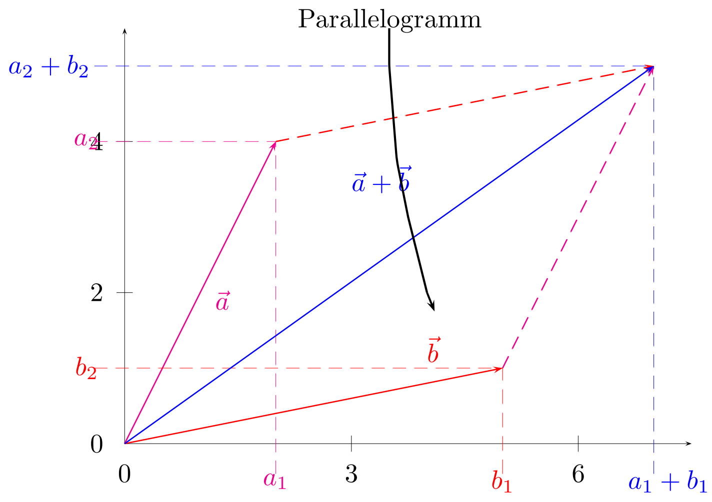


Abbildung 1.3: Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$

1.1.4 Nullvektor in der Ebene

$$\vec{0} = (0, 0)$$

Rechenregel: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

1.1.5 Subtraktion von Vektoren in der Ebene

Die Subtraktion von Vektoren liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, \vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

zeichnerisch:

Rechenregel: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

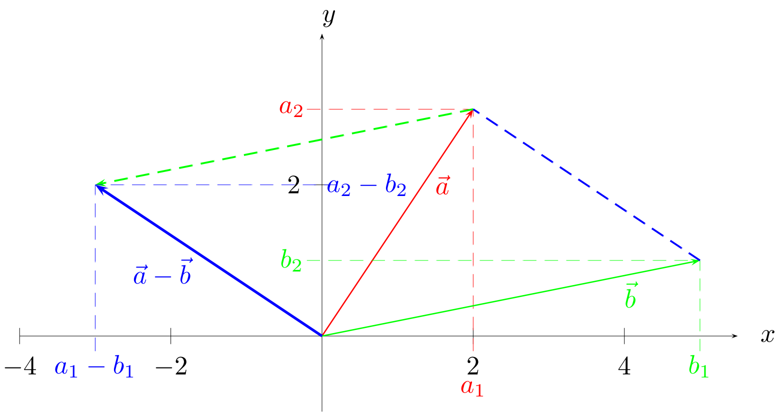


Abbildung 1.4: Subtraktion von Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$

1.1.6 Multiplikation von einem Vektor mit einem Skalar (einer Zahl)

Liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, k \in I\!R$

$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$

$k = 0 : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

zeichnerisch:

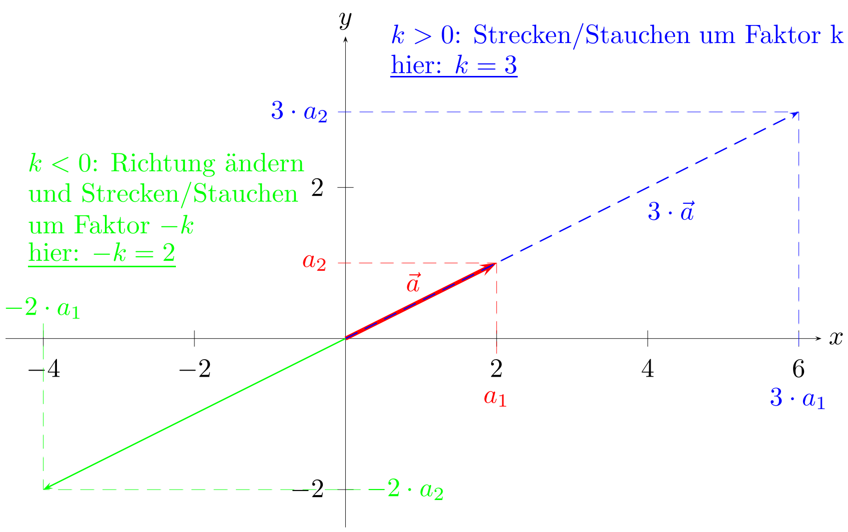


Abbildung 1.5: Multiplikation von Vektoren $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln: $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a})\,;$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$$
$$k \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b};$$
$$(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$$

Zusammenhang mit der Subtraktion:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$$

1.1.7 „Kanonische“ Basisvektoren in der Ebene

$\vec{e_1} = (1, 0)$; $\vec{e_2} = (0, 1)$

Darstellung von $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$

1.1.8 Lineare Abhängighängigkeit (Kollinearität)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhänging falls gilt:

es gibt k_1 mit $\vec{a} = k_1 \cdot \vec{b}$ oder
es gibt k_2 mit $\vec{b} = k_2 \cdot \vec{a}$

- Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$: die Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.
- Gegenteil: lineare Abhängigkeit

1.1.9 Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

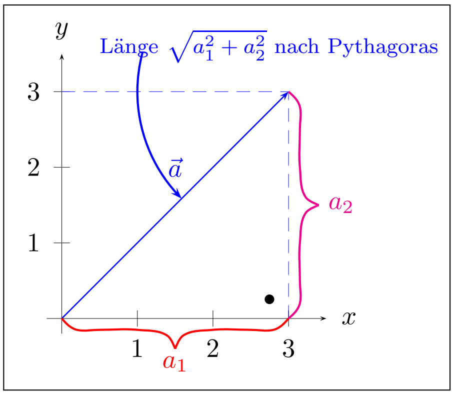


Abbildung 1.6: Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Auch üblich: $\|\vec{a}\|$
- ist auch der Abstand zwischen den Punkten $(0, 0)$ und (a_1, a_2)

Rechenregeln: $|\vec{a}| = 0$ gilt nur für $\vec{a} = \vec{0}$
$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leqslant |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$

- für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ist $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ der Abstand der Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2).

1.1.10 Einheitsvektoren

Einheitsvekotren sind Vektoren der Länge 1.

1.1.11 Skalarprodukt von zwei Vektoren in der Ebene

- liefert wieder einen Skalar
- Berechnung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$;
  $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ auch übliche Schreibweise: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$;
$\left\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle$;
$\left\langle k \cdot \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = k \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$;
$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$
$\left|\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle\right| \leqslant |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

1.1.12 Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ in der Ebene

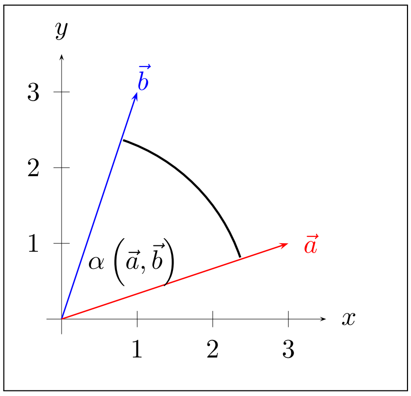


Abbildung 1.7: Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene

$\cos\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, wobei $0 \leqslant \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leqslant \pi$

im Bogenmaß (d.h. $0° \leqslant \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leqslant 180°$ im Gradmaß)

1.2 Aufgaben

1.2.1 Aufgabe 1

1. Gegeben sind: $\vec{a} = (3,4)$, $\vec{b} = (10,5)$, $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
   a) Bestimmen Sie $\vec{c}$ durch Zeichnung und Rechnung!
   b) Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$.
   c) Bestimmen Sie den Öffnungswinkel $\alpha\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ und $\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

2. Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die folgenden vier Einzelkräfte, die an einem Massepunkt angreifen, in der Wirkung auf?

   $\vec{F_1} = (200N, 110N)$ $\quad$ $\vec{F_2} = (-10N, 30N)$
   $\vec{F_3} = (40N, 85N)$ $\quad$ $\vec{F_4} = (-30N, -50N)$

   a) Von welchem Betrag ist $\vec{F}$?
   b) Unter welchem Winkel greifen $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ den Massepunkt an?

3. Gegeben sind: $\vec{a} = (3,-1,2)$, $\vec{b} = (1,2,4)$

1.3 Vektoren im Raum und n-dimensionale Vektoren - Übersicht

1.3.1 Veranschaulichung von Vektoren im Raum

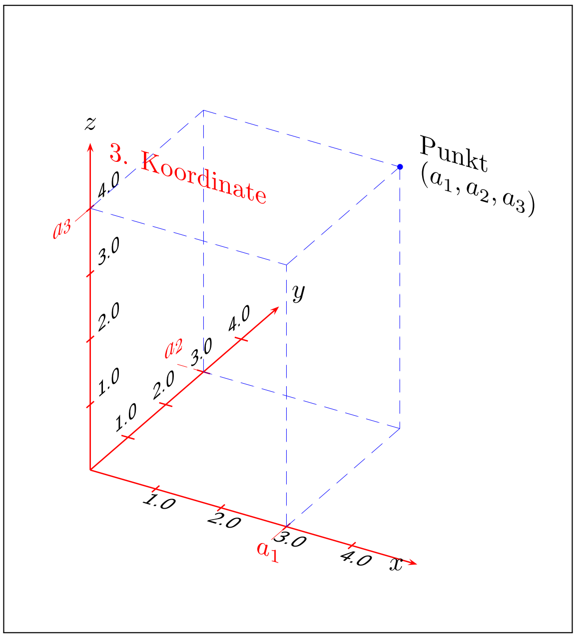


Abbildung 1.8: $Punkt(a_1, a_2, a_3)$

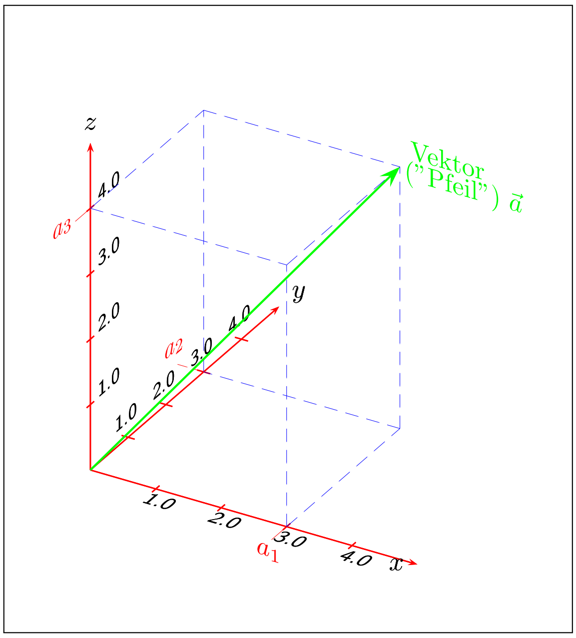


Abbildung 1.9: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

auch üblich $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leftarrow$ Tripel

1.3.2 Menge aller Vektoren im Raum / Menge aller n-dimensionalen Vektoren

- Die Menge heißt $\mathbb{R}^3$ / $\mathbb{R}^n$;
- Dabei ist n eine natürliche Zahl, $n \in \mathbb{N}$.
- Also: $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \,|a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \,|a_1, \dots a_n \in \mathbb{R} \right\}$

n-Tupel

1.3.3 Addition von n-dimensionalen Vektoren

Die Addition liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \qquad \vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

Rechenregeln wie für $n = 2$.

1.3.4 n-dimensionaler Nullvektor

$$\vec{0} = (0, \dots, 0)$$

Rechenregeln wie für $n = 2$.

1.3.5 Subtraktion von n-dimensionalen Vektoren

Die Subtraktion liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \qquad \vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$$

Rechenregeln und Zusammenhang mit der Subtraktion wie für $n = 2$.

1.3.6 Multiplikation von einem n-dimensionale Vektor mit einem Skalar

Die Multiplikation liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n), \qquad k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, \dots, k \cdot a_n)$$

Rechenregeln und Zusammenhang mit der Subtraktion wie für $n = 2$.

1.3.7 „Kanonische“ n-dimensionale Basisvektoren

$\vec{e_1} = (1, 0, \ldots, 0) \quad \ldots \quad \vec{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad \ldots \quad \vec{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)$

i. Koordinate

Darstellung von $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$:
$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + \ldots + a_n\vec{e_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\vec{e_i}$

1.3.8 Eine Linearkombination von m n-dimensionalen Vektoren $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$

ist ein Ausdruck der Form
$k_1 \cdot \vec{a_1} + \ldots + k_m \cdot \vec{a_m} = \sum\limits_{j=1}^{m} k_j \cdot \vec{a_j}$

1.3.9 Lineare Abhängigkeit von n-dimensionalen Vektoren

$\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}$ sind linear abhängig, falls sich einer der Vektoren als Linearkombination der restlichen darstellen lässt.
Gegenteil: lineare Unabhängigkeit

- Lineare Abhängigkeit für drei Vektoren im Raum:
  - anderer Name: Komplanarität
  - Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$:
    die pUNKTE (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) liegen auf einer Ebene durch den Nullpunkt.

1.3.10 Länge (Norm) eines n-dimensionalen Vektors

- Berechnung:
  - $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$
  - $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$
- Rechenregeln wie für $n = 2$
- für $n = 3$ ist $|\vec{a}\|$ auch der Abstand der Punkte $(0, 0, 0)$ und (a_1, a_2, a_3)
- für $n = 3$, $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$ ist $\|\vec{a} - \vec{b}\|$ auch der Abstand der Punkte (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3)

1.3.11 n-dimensionale Einheitsvektoren

- sind Vektoren der Länge 1

1.3.12 Skalarprodukt von zwei n-dimensionalen Vektoren

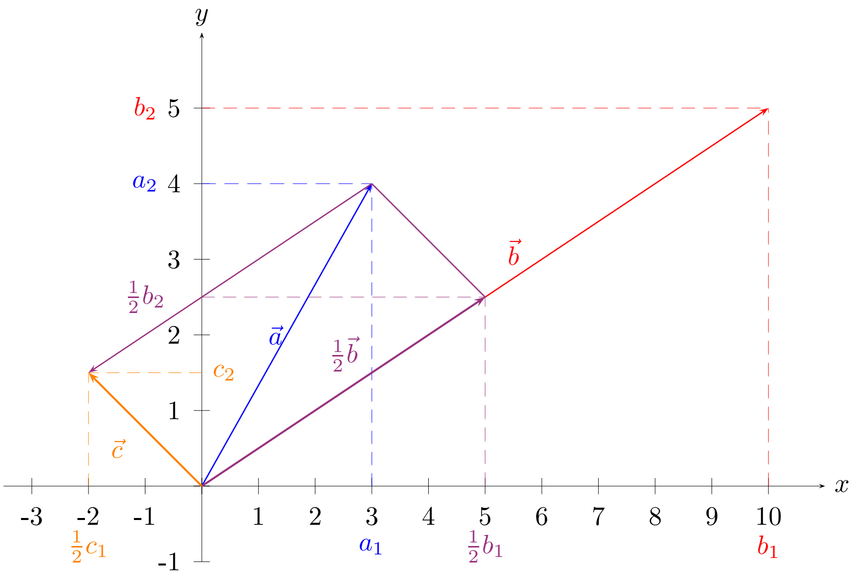
- liefert einen Skalar
- Berechnung: $\vec{a} =$

2 Lösungen

2.1 Aufgabe 1

1. Gegeben sind: $\vec{a} = (3,4), \quad \vec{b} = (10,5), \quad \vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
   a) Bestimmen Sie $\vec{c}$ durch Zeichnung und Rechnung!

   Zeichnung:



   Rechnung:

   $\underline{\underline{\vec{c}}} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (3,4) - \frac{1}{2}(10,5) = (3,4) - \left(10 \cdot \frac{1}{2}, 5 \cdot \frac{1}{2}\right) = (3,4) - \left(5, \frac{5}{2}\right) =$

   $\left(3-5, 4-\frac{5}{2}\right) = \underline{\underline{\left(-2, \frac{3}{2}\right)}}$

   b) Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$.

   $\underline{\underline{|\vec{a}|}} = |(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{5}$

   $\underline{\underline{\left|\vec{b}\right|}} = |(10,6)| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 25} = 5\sqrt{5}$

   $\cong \underline{\underline{11,18033988}}$

   c) Bestimmen Sie den Öffnungswinkel $\alpha(\vec{a},\vec{c})$ und $\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

2.2 Aufgabe 120

Sei $x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$; $\widetilde{x} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{1}{k!}$

a. Mit Hilfe von welcher speziellen Funktion läßt sich x genau beschreiben? Wie? (Tip: 3.3.5)

b. Berechnen Sie $\widetilde{x}$.

c. Geben Sie einen absoluten Höchstfehler von $\widetilde{x}$ an. (Tip: 3.2.7)

2.2.1 Lösung

a. $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \implies x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k = \exp(-1) = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$

b. $\widetilde{x} = \sum\limits_{k=0}^{4} \frac{1}{k!}(-1)^k = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{12-4+1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = \underline{\underline{0.375}}$

c. Da die vorliegende Reihe eine alternierende Reihe ist, gilt $|x - \widetilde{x}| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 8.\overline{3} \cdot 10^{-3}$. Damit ist $\underline{\underline{\alpha_x = 8.\overline{3} \cdot 10^{-3}}}$ ein absoluter Höchstfehler von $\widetilde{x}$.

2.3 Aufgabe 125

Gegeben sei das eindeutig lösbare lineare Gleichungssystem $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a. Sei $\overrightarrow{x}^{(0)} = \overrightarrow{0}$. Berechnen Sie die Näherungsösung $\overrightarrow{x}^{(3)}$ des Systems, die man nach 3 Schritten des Gesamtschrittverfahrens erhält.

b. Zeigen Sie, daß das Gesamtschrittverfahren konvergiert.

c. Führen Sie eine Apeoteriori-Fehlerabschätzung für $\overrightarrow{x}^{(3)}$ durch.

d. Führen Sie eine Apriori-Fehlerabschätzung für $\overrightarrow{x}^{(10)}$ durch.

2.3.1 Lösung

a. Rechenvorschriften:

$$x_1^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_2^{(Z-1)} + x_4^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_2^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_4^{(Z-1)}$$
$$x_2^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(1 + x_1^{(Z-1)} + x_3^{(Z-1)} + x_5^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_3^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_5^{(Z-1)}$$
$$x_3^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_2^{(Z-1)} + x_6^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_2^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_6^{(Z-1)}$$
$$x_4^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_1^{(Z-1)} + x_5^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_5^{(Z-1)}$$
$$x_5^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(1 + x_2^{(Z-1)} + x_4^{(Z-1)} + x_6^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_2^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_4^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_6^{(Z-1)}$$
$$x_6^{(Z)} = \frac{1}{4}\left(2 + x_3^{(Z-1)} + x_5^{(Z-1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_3^{(Z-1)} + \frac{1}{4}x_5^{(Z-1)}$$

z	$x_1^{(Z)}$	$x_2^{(Z)}$	$x_3^{(Z)}$	$x_4^{(Z)}$	$x_5^{(Z)}$	$x_6^{(Z)}$
1	0.5	0.25	0.5	0.5	0.25	0.5
2	0.6875	0.5625	0.6875	0.6875	0.5625	0.6875
3	0.8125	0.734325	0.8125	0.8125	0.734375	0.8125

$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{(3)} = (0.8125;\ 0.734325;\ 0.8125;\ 0.8125;\ 0.734375;\ 0.8125)$

b. Berechnung der Kontraktionszahl λ

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{6}\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right| = 0.5; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{6}\left|\frac{a_{2j}}{a_{22}}\right| = 0.75; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 3}}^{6}\left|\frac{a_{3j}}{a_{33}}\right| = 0.5;$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq 4}}^{6}\left|\frac{a_{4j}}{a_{44}}\right| = 0.5; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 5}}^{6}\left|\frac{a_{5j}}{a_{55}}\right| = 0.75; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 6}}^{6}\left|\frac{a_{6j}}{a_{66}}\right| = 0.5;$$

$\lambda = \max\{0.5; 0.75\} = \underline{\underline{0.75}}$

$\lambda < 1 \Longrightarrow$ das Gesamtschrittverfahren konvergiert für jeden Startvektor

c. $\max\limits_{i=1,\ldots,6}\left|x_i^{(3)} - x_i\right| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad \max\limits_{i=1,\ldots,6}\left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = \frac{0.75}{0.25}\cdot 0.171875 = \underline{\underline{0.515\,625}}$

d. $\max\limits_{i=1,\ldots,6}\left|x_i^{(10)} - x_i\right| \leq \frac{\lambda^{10}}{1-\lambda} \quad \max\limits_{i=1,\ldots,6}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = \frac{0.75^{10}}{0.25}\cdot 0.5 = \underline{\underline{0.112\,627\,029\,4}}$

2.4 Aufgabe 127

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Teilchens werde durch ein Polynom vom Grad ≤ 3 beschrieben. Folgende Werte sind bekannt:

t (in s)	0	1	2	3
$v(t)$ (in $\frac{m}{s}$)	0	4	18	48

Bestimmen Sie $v(t)$. Wie groß sind $v(1.5s)$ und $v(2.5s)$.

2.4.1 Lösung

1. Schritt Wegen $v(0s) = 0\frac{m}{s}$ genügt es, die Lagrangeschen Grundpolynome L_1, L_2 und L_3 zu bestimmen.

$$L_1(t) = \frac{t(t-2s)(t-3s)}{1s(-1s)\cdot(-2s)} = \frac{t(t^2-3st-2st+6s^2)}{2s^3} = \frac{t^3-5st^2+6s^2t}{2s^3} = \underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^3}t^3 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s^2}t^2 + 3\frac{1}{s}t}$$

$$L_2(t) = \frac{t(t-2s)(t-3s)}{2s\cdot 1s\cdot(-1s)} = \frac{t\left(t^2+3st-2st+6s^2\right)}{-2^3} = \frac{t^3+3st^2-2st^2+6s^2t}{-2s^3} = \underline{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^3}t^3 + 2\frac{1}{s^2}t^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}t}$$

$$L_3(t) = \frac{t(t-1s)(t-2s)}{3s\cdot 2s\cdot 1s} = \frac{t\left(t^2-2st-1st+2s^2\right)}{6s^3} = \frac{t^3-2st^2-1st^2+2s^t}{6s^3} = \underline{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s^3}t^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2}t^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}t}$$

2. Schritt $v(t) = 4\frac{m}{s}\cdot L_1(t) + 18\frac{m}{s}\cdot L_2(t) + 48\frac{m}{s}\cdot L_3(t) = 2\frac{m}{s^4}t^3 - 10\frac{m}{s^3}t^2 + 12\frac{m}{s^2}t - 9\frac{m}{s^4}t^3 + 36\frac{m}{s^3}t^2 - 27\frac{m}{s^2}t + 8\frac{m}{s^4}t^3 - 24\frac{m}{s^3}t^2 + 16\frac{m}{s^2}t = \underline{\underline{1\frac{m}{s^4}t^3 + 2\frac{m}{s^3}t^2 + 1\frac{m}{s^2}t}}$

Insbesondere

$$\underline{\underline{v\,(1,5s)}} = 3,375\frac{m}{s} + 4,5\frac{m}{s} + 1,5\frac{m}{s} = \underline{\underline{9,375\frac{m}{s}}}$$

$$\underline{\underline{v\,(2,5s)}} = 15,625\frac{m}{s} + 12,5\frac{m}{s} + 2,5\frac{m}{s} = \underline{\underline{30,625\frac{m}{s}}}$$