Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Vektoren in der Ebene - Übersicht

1.1.1 01_1 Veranschaulichung von Vektoren in der Ebene

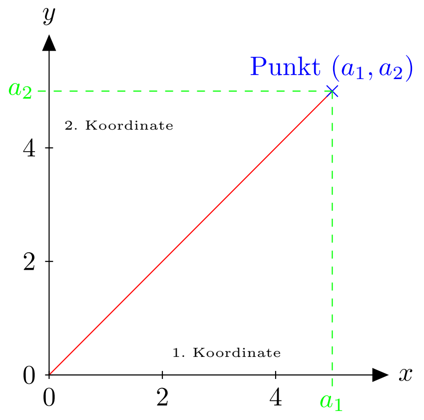


Abbildung 1.1: Punkt (a_1, a_2)

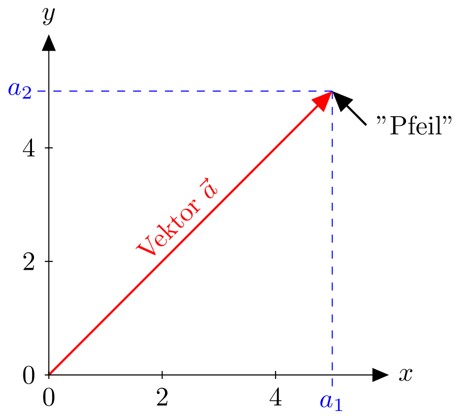


Abbildung 1.2: $\vec{a} = (a_1, a_2)$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ auch üblich $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \leftarrow$ Geordnetes Paar

1.1.2 01_1 Menge aller Vektoren in der Ebene

Die Menge aller Vektoren in der Ebene heißt $\mathbb{R}^2$; dabei ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Also: $\mathbb{R} = \{\vec{a} = (a_1, a_2) | a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}\}$

1.1.3 01_1 Addition von Vektoren in der Ebene

Die Addition von Vektoren liefert als Ergebnis wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, \vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} + \vec{b} = ((a_1 + b_1, a_2 + b_2))$

zeichnerisch:

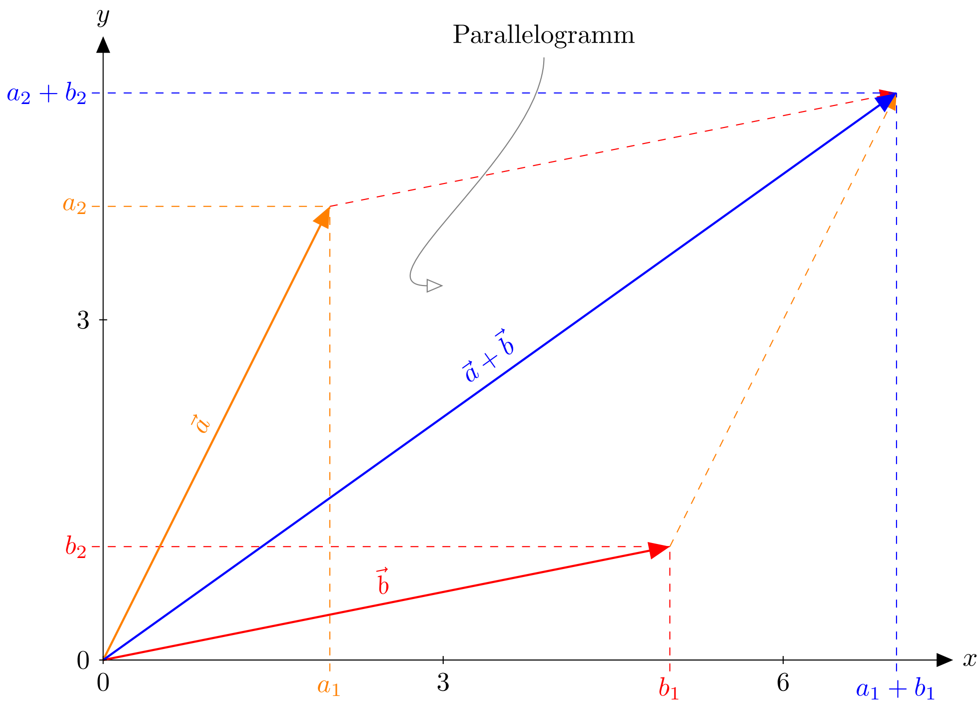


Abbildung 1.3: Addition von Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$

Rechenregeln: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$

1.1.4 01_2 Nullvektor in der Ebene

$$\vec{0}=(0,0)$$

Rechenregel: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

1.1.5 01_2 Subtraktion von Vektoren in der Ebene

Die Subtraktion von Vektoren liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, \vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

zeichnerisch:

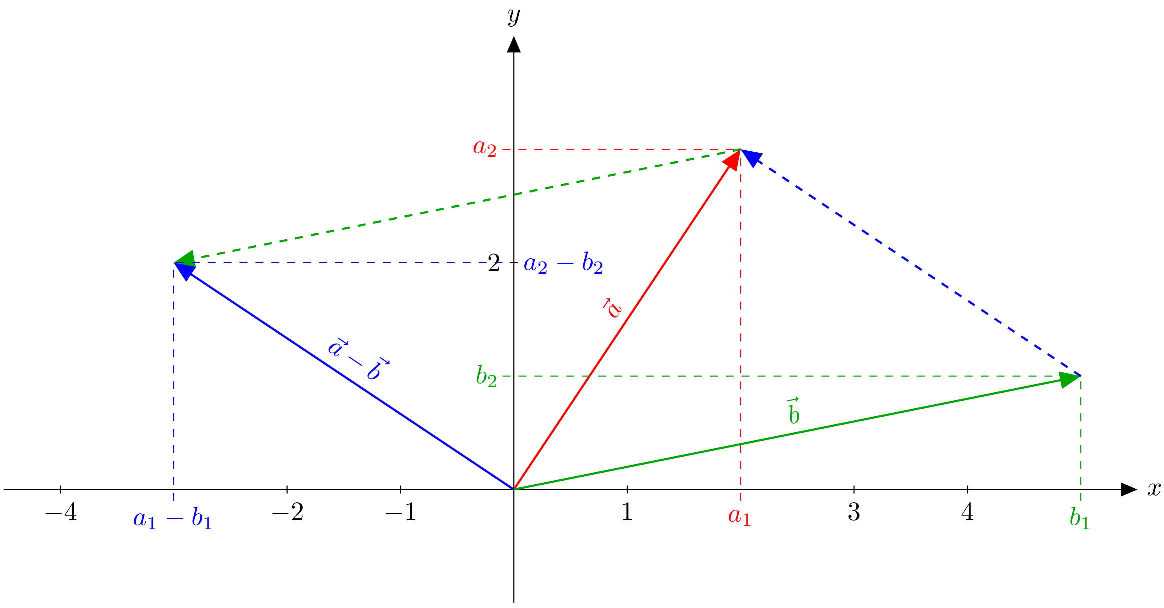


Abbildung 1.4: Subtraktion von Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$

Rechenregel: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

1.1.6 01_2 Multiplikation von einem Vektor mit einem Skalar (einer Zahl)

Liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, k \in \mathbb{R}$
$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$
$k = 0 : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

zeichnerisch:

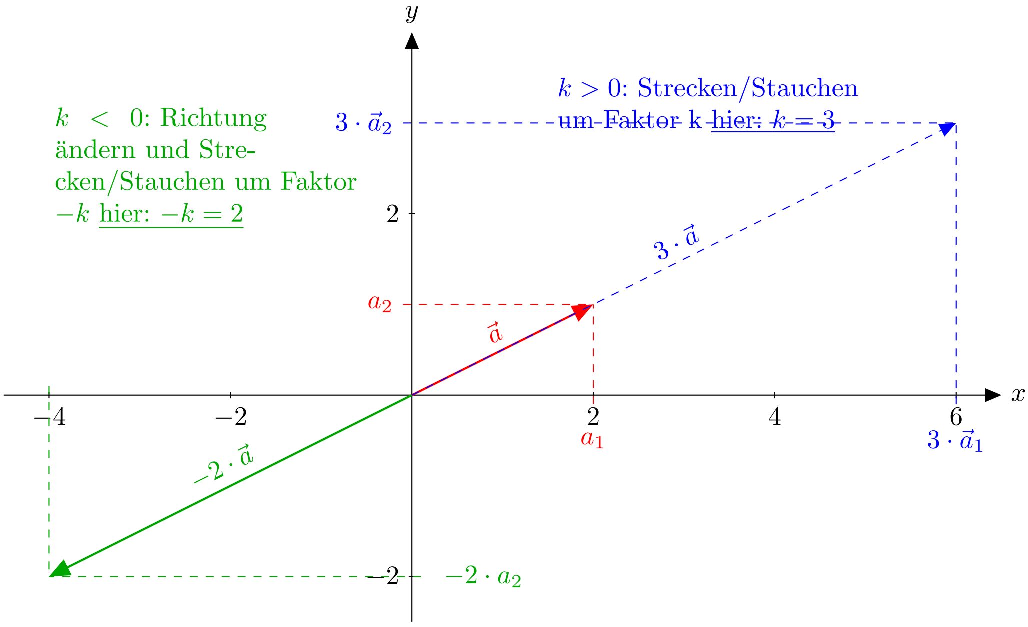


Abbildung 1.5: Multiplikation von Vektoren $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln: $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a})\,;$
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$
$k \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b};$
$(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

Zusammenhang mit der Subtraktion:
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

1.1.7 02_1 „Kanonische“ Basisvektoren in der Ebene

$\vec{e_1} = (1,0)$; $\vec{e_2} = (0,1)$

Darstellung von $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$

1.1.8 02_1 Lineare Abhängigkeit (Kollinearität)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhänging falls gilt:

es gibt k_1 mit $\vec{a} = k_1 \cdot \vec{b}$ oder
es gibt k_2 mit $\vec{b} = k_2 \cdot \vec{a}$

- Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$: die Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.
- Gegenteil: lineare Abhängigkeit

1.1.9 02_1 Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

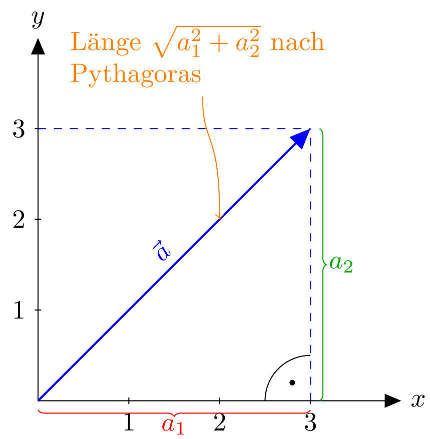


Abbildung 1.6: Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Auch üblich: $\|\vec{a}\|$
- ist auch der Abstand zwischen den Punkten $(0,0)$ und (a_1, a_2)

Rechenregeln: $|\vec{a}| = 0$ gilt nur für $\vec{a} = \vec{0}$
$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leqslant |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$

- für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ist $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ der Abstand der Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2).

1.1.10 02_2 Einheitsvektoren

Einheitsvekotren sind Vektoren der Länge 1.

1.1.11 02_2 Skalarprodukt von zwei Vektoren in der Ebene

- liefert wieder einen Skalar
- Berechnung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$;
  $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ auch übliche Schreibweise: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln:
$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle;$$
$$\left\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle;$$
$$\left\langle k \cdot \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = k \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle;$$
$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0 \text{ für } \vec{a} \neq \vec{0}$$
$$\left| \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \right| \leqslant |\vec{a}| \cdot \left| \vec{b} \right|$$

1.1.12 02_2 Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ in der Ebene

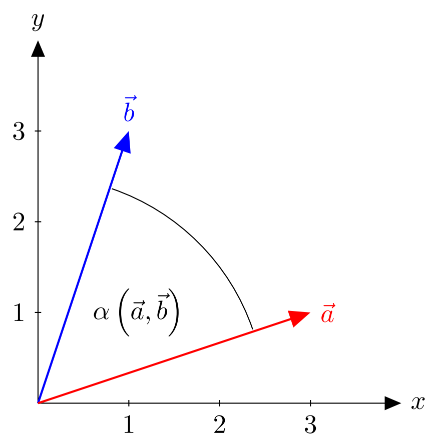


Abbildung 1.7: Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene

$\cos\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$, wobei $0 \leqslant \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leqslant \pi$
im Bogenmaß (d.h. $0° \leqslant \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leqslant 180°$ im Gradmaß)

1.1.13 Aufgaben - Vektoren in der Ebene

Aufgabe 1

(Lösung siehe3.1)
Gegeben sind: $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (10, 5)$, $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

a. Bestimmen Sie $\vec{c}$ durch Zeichnung und Rechnung!

b. Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$.

c. Bestimmen Sie den Öffnungswinkel $\alpha\,(\vec{a}, \vec{c})$ und $\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Aufgabe 2

Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die folgenden vier Einzelkräfte, die an einem Massepunkt angreifen, in der Wirkung auf?

$$\vec{F}_1 = (200N, 110N) \qquad \vec{F}_2 = (-10N, 30N)$$
$$\vec{F}_3 = (40N, 85N) \qquad \vec{F}_4 = (-30N, -50N)$$

Von welchem Betrag ist $\vec{F}$? Unter welchem Winkel greifen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ den Massepunkt an?

Aufgabe 3

Gegeben sind: $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$.
Berechnen Sie:

a. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $4 \cdot \vec{a}$, $-\frac{1}{4} \cdot \vec{b}$, $-5 \cdot \vec{c}$,

b. $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$,

c. $\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

d. $\vec{a} \times \vec{b}$ und den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,

e. $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ und das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 4

Eine Kraft $\vec{F}$ mit $\left|\vec{F}\right| = 85N$ verschiebt einen Massenpunkt um eine Strecke $\vec{s}$ mit $|\vec{s}| = 32m$; dabei wird eine Arbeit von $W = 1360J$ verrichtet.
Unter welchem Winkel greift die Kraft an?

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A + B$
$B + C$
$C - D$
$4 \cdot F$
$B \cdot A$
$A \cdot B$
$B \cdot C$
$C \cdot B$
$D \cdot F$
$F \cdot D$
D
D^{-1}
A^t
B^t

1.2 Vektoren im Raum und n-dimensionale Vektoren - Übersicht

1.2.1 03_1 Veranschaulichung von Vektoren im Raum

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ auch üblich $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leftarrow$ Tripel

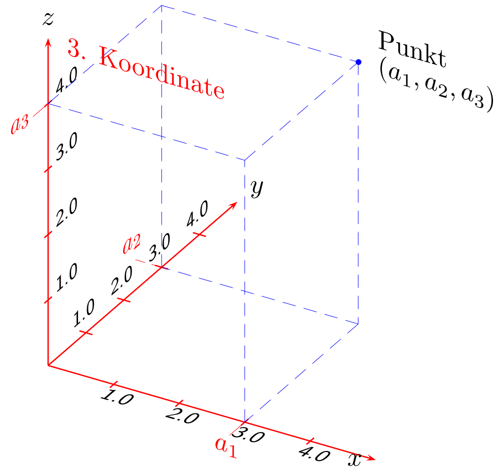


Abbildung 1.8: $Punkt(a_1, a_2, a_3)$

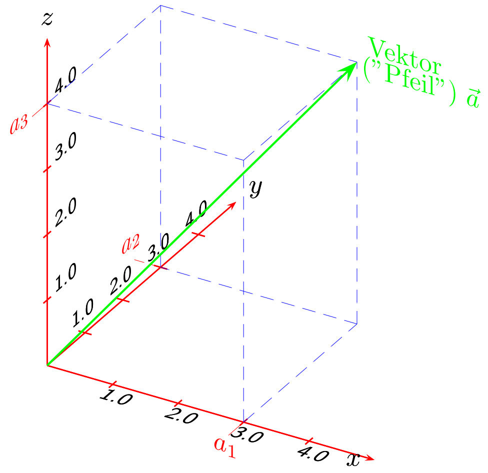


Abbildung 1.9: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

1.2.2 03_1 Menge aller Vektoren im Raum / Menge aller n-dimensionalen Vektoren

- Die Menge heißt $\mathbb{R}^3$ / $\mathbb{R}^n$;
- Dabei ist n eine natürliche Zahl, $n \in \mathbb{N}$.
- Also: $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \,|a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \,|a_1, \dots a_n \in \mathbb{R} \right\}$

n-Tupel

1.2.3 03_1 Addition von n-dimensionalen Vektoren

Die Addition liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

Rechenregeln wie für $n = 2$.

1.2.4 03_1 n-dimensionaler Nullvektor

$$\vec{0} = (0, \ldots, 0)$$

Rechenregeln wie für $n = 2$.

1.2.5 03_2 Subtraktion von n-dimensionalen Vektoren

Die Subtraktion liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \qquad \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$$

Rechenregeln und Zusammenhang mit der Subtraktion wie für $n = 2$.

1.2.6 03_2 Multiplikation von einem n-dimensionale Vektor mit einem Skalar

Die Multiplikation liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n), \qquad k \in \mathbb{R}$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, \ldots, k \cdot a_n)$$

Rechenregeln und Zusammenhang mit der Subtraktion wie für $n = 2$.

1.2.7 03_2 „Kanonische“ n-dimensionale Basisvektoren

$$\vec{e_1} = (1, 0, \dots, 0) \quad \dots \quad \vec{e_i} = (0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, \dots, 0) \quad \dots \quad \vec{e_n} = (0, \dots, 0, 1)$$

i. Koordinate

Darstellung von $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$:
$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + \dots + a_n\vec{e_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\vec{e_i}$

1.2.8 03_2 Eine Linearkombination von m n-dimensionalen Vektoren $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_m}$

ist ein Ausdruck der Form
$k_1 \cdot \vec{a_1} + \dots + k_m \cdot \vec{a_m} = \sum\limits_{j=1}^{m} k_j \cdot \vec{a_j}$

1.2.9 03_2 Lineare Abhängigkeit von n-dimensionalen Vektoren

$\vec{a_1}, \dots, \vec{a_m}$ sind linear abhängig, falls sich einer der Vektoren als Linearkombination der restlichen darstellen lässt.
Gegenteil: lineare Unabhängigkeit

- Lineare Abhängigkeit für drei Vektoren im Raum:
  - anderer Name: Komplanarität
  - Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$:
    die Punkte (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) und (c_1, c_2, c_3) liegen auf einer Ebene durch den Nullpunkt.

1.2.10 04_1 Länge (Norm) eines n-dimensionalen Vektors

Berechnung:

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + \dots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Rechenregeln wie für $n = 2$

für $n = 3$ ist $|\vec{a}\|$ auch der Abstand der Punkte $(0, 0, 0)$ und (a_1, a_2, a_3)

für $n = 3$, $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$

ist $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ auch der Abstand der Punkte (a_1, a_2, a_3)
und (b_1, b_2, b_3)

1.2.11 04_1 n-dimensionale Einheitsvektoren

sind Vektoren der Länge 1

1.2.12 04_1 Skalarprodukt von zwei n-dimensionalen Vektoren

liefert einen Skalar
Berechnung: $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$
$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$
Rechenregeln wie für $n = 2$

1.2.13 04_1 Öffnungswinkel zwischen zwei n-dimensionalen Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$

Berechnung: $\cos\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$,
wobei $0 \leq \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq \pi$ im Bogenmaß
(d.h. $0^0 \leq \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \leq 180^0$ im Gradmaß),
also wie für $n = 2$

1.2.14 04_1 Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$

gibt es nur im $\mathbb{R}^3$
liefert wieder einen Vektor
Berechnung: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

"Kreuz"

anderer Name: Kreuzprodukt

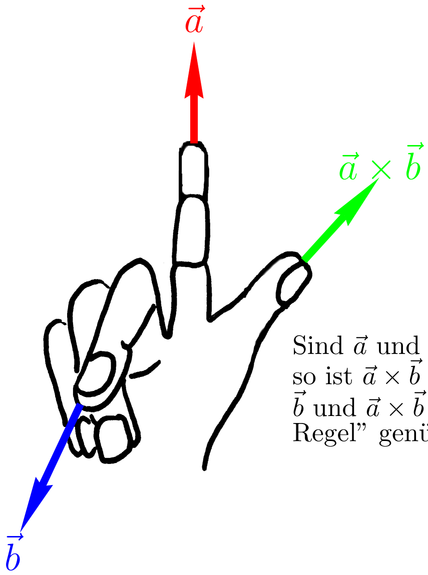
Rechenregeln:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right);$$

$$\left\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = 0;$$

(d.h. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right) \text{ für } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$



Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, so ist $\vec{a} \times \vec{b}$ so orientiert, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ der "Rechte Hand Regel" genügen.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$$\left\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin$$

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$$\alpha = \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

2 23_1 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

2.1 Grenzwertbildung bei Funktionen und Stetigkeit: Übersicht

2.1.1 Grenzwertbildung bei Funktionen

1. Es ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

3 Lösungen

3.1 Aufgabe 1

Gegeben sind: $\vec{a} = (3,4)$, $\vec{b} = (10,5)$, $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

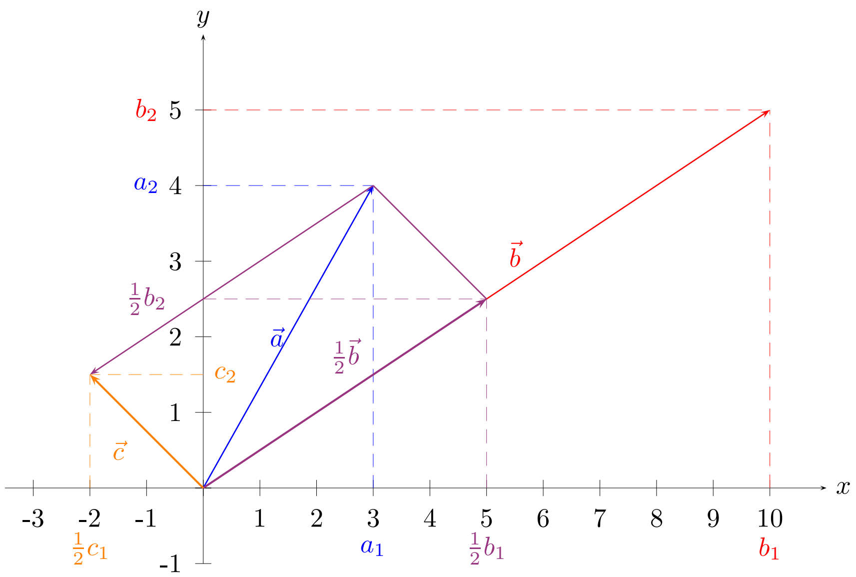
a. Bestimmen Sie $\vec{c}$ durch Zeichnung und Rechnung!

b. Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $|\vec{c}|$.

c. Bestimmen Sie den Öffnungswinkel $\alpha\,(\vec{a},\vec{c})$ und $\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

3.1.1 Lösung

Zeichnung



a.

Rechnung

a. $\underline{\underline{\vec{c}}} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (3,4) - \frac{1}{2}(10,5) = (3,4) - \left(10\cdot\frac{1}{2}, 5\cdot\frac{1}{2}\right) = (3,4) - \left(5, \frac{5}{2}\right) = \left(3-5, 4-\frac{5}{2}\right) = \underline{\underline{\left(-2, \frac{3}{2}\right)}}$

b. $\underline{\underline{|\vec{a}|}} = |(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

$\underline{\underline{\left|\vec{b}\right|}} = |(10,6)| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5\cdot 25} = 5\sqrt{5} \cong \underline{\underline{11.18033988}}$

$\underline{\underline{|\vec{c}|}} = \left|\left(-2,\frac{3}{2}\right)\right| = \sqrt{(-2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

c. $\alpha = \alpha\left(\vec{a},\vec{c}\right),\ 0 \le \alpha \le \pi$

$\cos(\alpha) = \frac{\langle\vec{a},\vec{c}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} \underset{vgl.b.}{=} \frac{\left\langle(3,4),\left(-2,\frac{3}{2}\right)\right\rangle}{5\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3\cdot(-2)+4\cdot\frac{3}{2}}{\frac{25}{2}} = \frac{-6+6}{\frac{25}{2}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{2}}} \left(\hat{=}\ 90^\circ\right)$

$\beta = \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right),\ 0 \le \beta \le \pi$

$\cos(\beta) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} \underset{vgl.b.}{=} \frac{\langle(3,4),(10,5)\rangle}{5\cdot 5\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 10+4\cdot 5}{25\cdot\sqrt{5}} = \frac{50}{25\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

Es folgt:

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cong \underline{\underline{0.463647609}} \left(\hat{=}\ 26.565051177078^\circ\right)$

3.2 Aufgabe 2

Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die folgenden vier Einzelkräfte, die an einem Massepunkt angreifen, in der Wirkung auf?

$$\vec{F}_1 = (200N, 110N) \qquad \vec{F}_2 = (-10N, 30N)$$
$$\vec{F}_3 = (40N, 85N) \qquad \vec{F}_4 = (-30N, -50N)$$

Von welchem Betrag ist $\vec{F}$? Unter welchem Winkel greifen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ den Massepunkt an?

3.2.1 Lösung

$\overrightarrow{F} = -\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right)$

$= -(200N - 10N + 40N - 30N, 110N + 30N + 85N - 50N)$

$= -(200N, 175N)$

$= \underline{\underline{(-200N, -175N)}}$

$\underline{\underline{\overrightarrow{F}}} = \sqrt{-(200)^2+(-175)^2}N = \sqrt{(8\cdot 25)^2+(7\cdot 25)^2}N = 25\cdot\sqrt{113}N \ \hat{=}\ \underline{\underline{265.7536453N}}$

Der gesuchte Winkel sei α, $0 \le \alpha \le \pi$.

Dann gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\left\langle\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right\rangle}{\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|}$. $\otimes$

$\left\langle\vec{F}_1,\vec{F}_2\right\rangle = \langle(200N,110N),(-10N,30N)\rangle = -2000N^2+3300N^2 = 1300N^2$

$\left|\vec{F}_1\right| = \sqrt{(200)^2+(110)^2}N \cong 228.2542442N$

$\left|\vec{F}_2\right| = \sqrt{(-10)^2+(30)^2}N \cong 31.6227766N$

Das Einsetzen in $\otimes$ ergibt:

$\cos(\alpha) \cong 0.1801044696 \Rightarrow \arccos(\alpha) \cong \underline{\underline{1.38970367}}\,(79.62415508^\circ)$

3.3 Aufgabe 107

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \quad . \end{cases} \;;$$

a Skizzieren Sie den Graphen von f. Zeigen Sie, daß f die Voraussetzungen aus 9.3.2 erfüllt.

b Berechnen Sie das Fourierintegral $I(x)$ von f.

c Für welche $x \in \mathbb{R}$