Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Algebra

1.1 Vektoren in der Ebene - Übersicht

1.1.1 Veranschaulichung von Vektoren in der Ebene

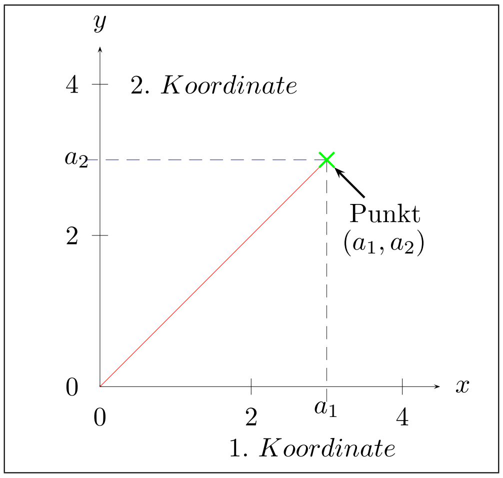

Abbildung 1.1: Punkt (a_1, a_2)

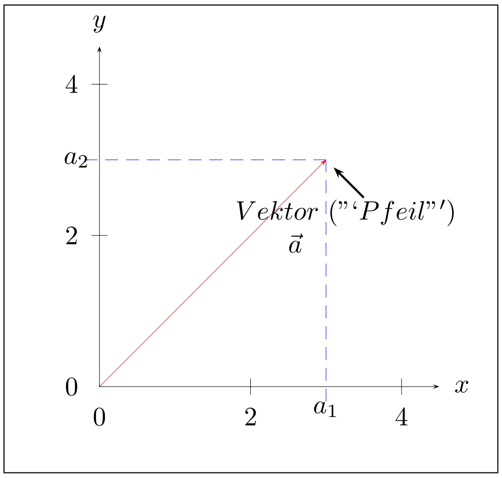

Abbildung 1.2: $\vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \qquad \text{auch üblich } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Geordnetes Paar}$$

1.1.2 Menge aller Vektoren in der Ebene

Die Menge aller Vektoren in der Ebene heißt $I\!R^2$; dabei ist $I\!R$ die Menge der reellen Zahlen. Also: $I\!R = \{\vec{a} = (a_1, a_2) | a_1 \in I\!R, a_2 \in I\!R\}$

1.1.3 Addition von Vektoren in der Ebene

Die Addition von Vektoren liefert als Ergebnis wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, \vec{b} = (b_1, b_2)$

$\vec{a} + \vec{b} = ((a_1 + b_1, a_2 + b_2))$

zeichnerisch:

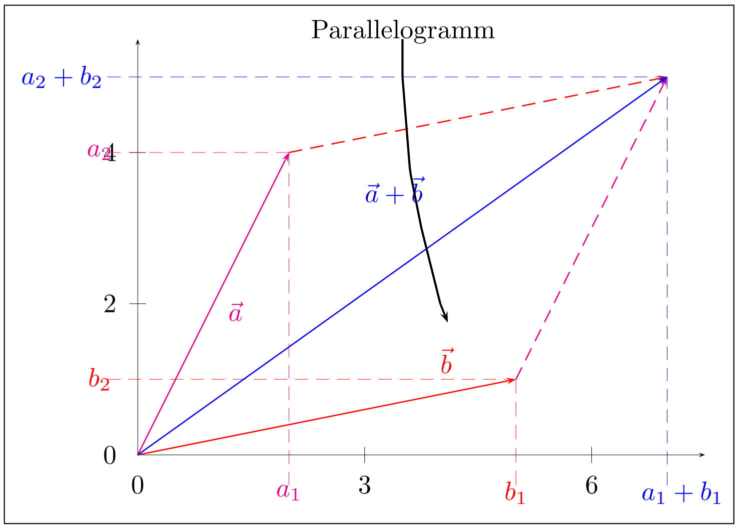

Abbildung 1.3: Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$

Rechenregeln: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$

1.1.4 Nullvektor in der Ebene

$$\vec{0} = (0, 0)$$

Rechenregel: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

1.1.5 Subtraktion von Vektoren in der Ebene

Die Subtraktion von Vektoren liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

zeichnerisch:

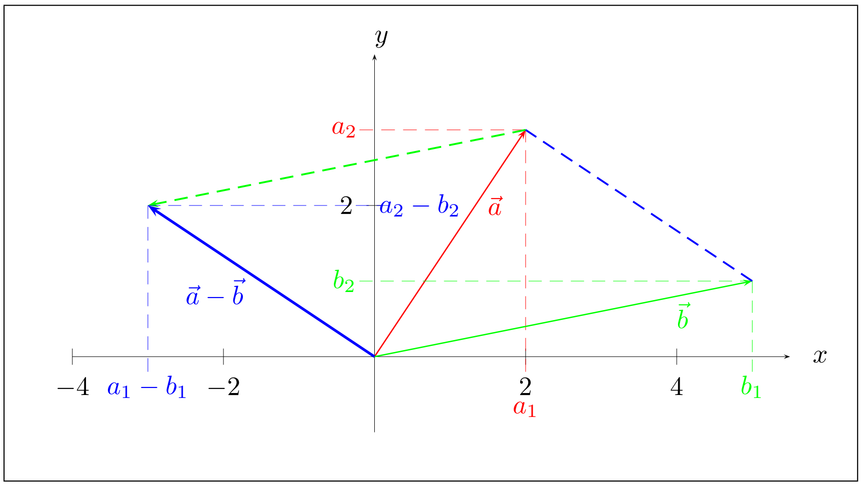

Abbildung 1.4: Subtraktion von Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$

Rechenregel: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

1.1.6 Multiplikation von einem Vektor mit einem Skalar (einer Zahl)

Liefert wieder einen Vektor.

rechnerisch: $\vec{a} = (a_1, a_2)\,, k \in \mathbb{R}$
$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$
$k = 0 : 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

zeichnerisch:

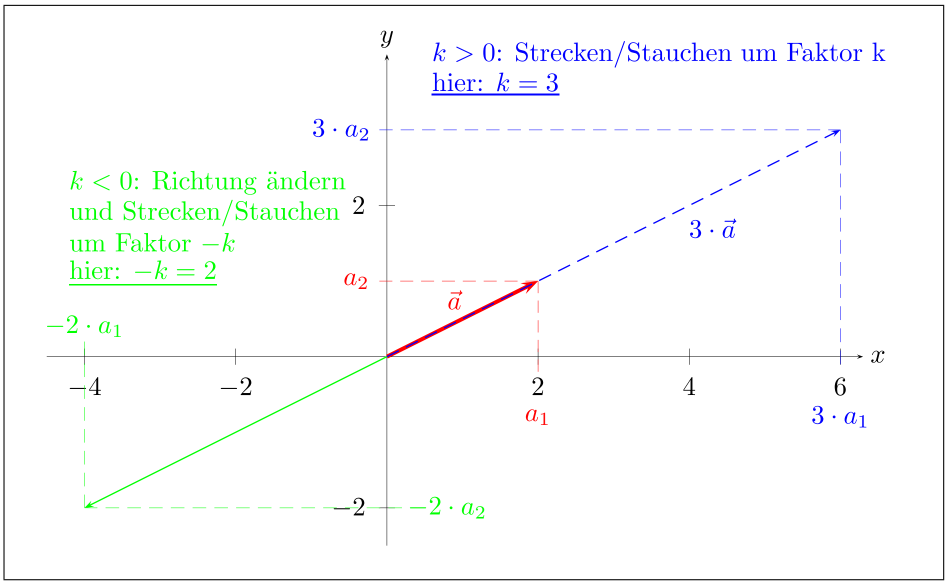

Abbildung 1.5: Multiplikation von Vektoren $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln: $(k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a})\,;$
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a};$
$k \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b};$
$(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

Zusammenhang mit der Subtraktion:
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

1.1.7 „Kanonische" Basisvektoren in der Ebene

$\vec{e_1} = (1, 0)$; $\vec{e_2} = (0, 1)$

Darstellung von $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2}$

1.1.8 Lineare Abhängighängigkeit (Kollinearität)

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhänging falls gilt:

es gibt k_1 mit $\vec{a} = k_1 \cdot \vec{b}$ oder
es gibt k_2 mit $\vec{b} = k_2 \cdot \vec{a}$

- Anschauung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$: die Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.
- Gegenteil: <u>lineare Abhängigkeit</u>

1.1.9 Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

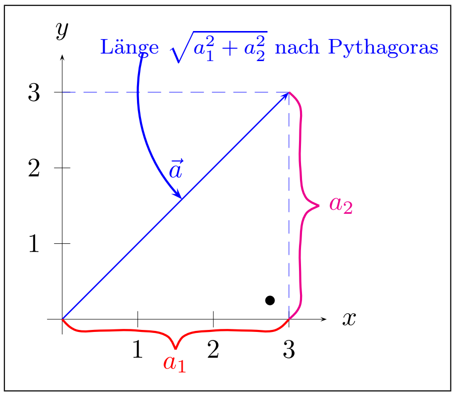

Abbildung 1.6: Länge (Norm) eines Vektors in der Ebene

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Auch üblich: $\|\vec{a}\|$
- ist auch der Abstand zwischen den Punkten $(0, 0)$ und (a_1, a_2)

Rechenregeln: $|\vec{a}| = 0$ gilt nur für $\vec{a} = \vec{0}$
$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leqslant |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$

- für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ist $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ der Abstand der Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2).

1.1.10 Einheitsvektoren

Einheitsvekotren sind Vektoren der Länge 1.

1.1.11 Skalarprodukt von zwei Vektoren in der Ebene

- liefert wieder einen Skalar
- Berechnung für $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$;
  $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$ auch übliche Schreibweise: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Rechenregeln: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$;
$\left\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{b} \right\rangle$;
$\left\langle k \cdot \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = k \cdot \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$;
$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$
$\left|\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle\right| \leqslant |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

1.1.12 Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ in der Ebene

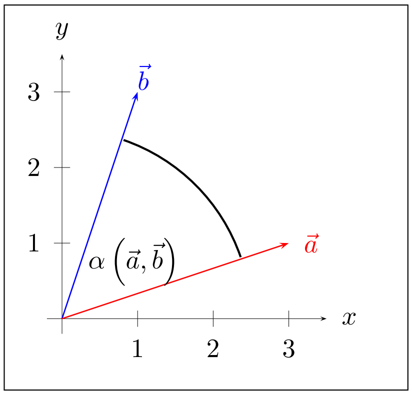

Abbildung 1.7: Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren in der Ebene

$\cos\left(\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$, wobei $0 \leqslant \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant \pi$
im Bogenmaß (d.h. $0^\circ \leqslant \alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant 180^\circ$ im Gradmaß)

1.2 Vektoren im Raum und n-dimensionale Vektoren - Übersicht

1.2.1 Veranschaulichung von Vektoren im Raum

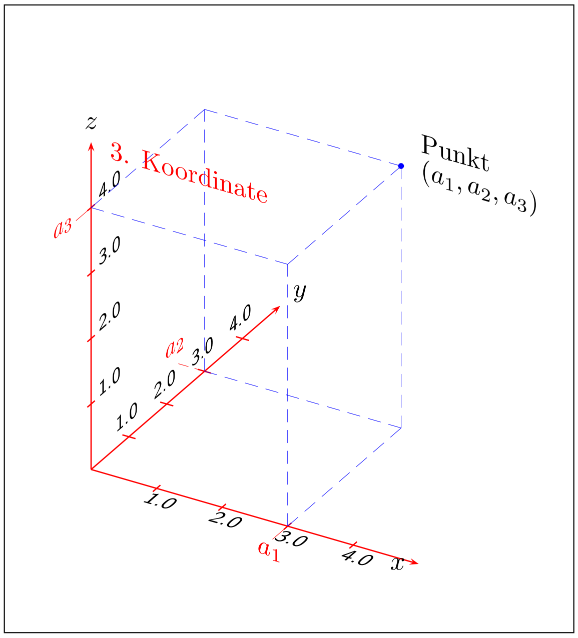

Abbildung 1.8: $Punkt(a_1, a_2, a_3)$

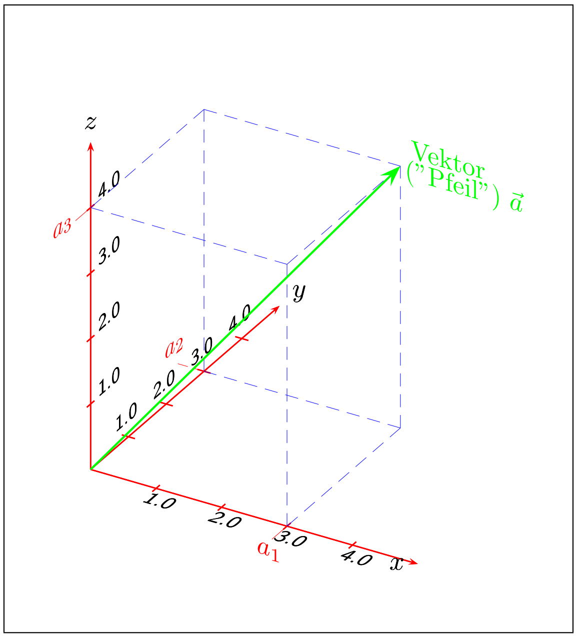

Abbildung 1.9: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \text{auch üblich } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Tripel}$$

1.2.2 Menge aller Vektoren im Raum / Menge aller n-dimensionalen Vektoren

- Die Menge heißt $\mathbb{R}^3$ / $\mathbb{R}^n$;
- Dabei ist n eine natürliche Zahl, $n \in \mathbb{N}$.
- Also: $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \,|a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \,|a_1, \dots a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- n-Tupel

1.2.3 Addition von n-dimensionalen Vektoren

Die Addition liefert wieder einen Vektor.

Berechnung: $\vec{a}$