Aufgabe 1.

gegeben sind: $\vec{a} = (3,4)$, $\vec{b} = (10,5)$, $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

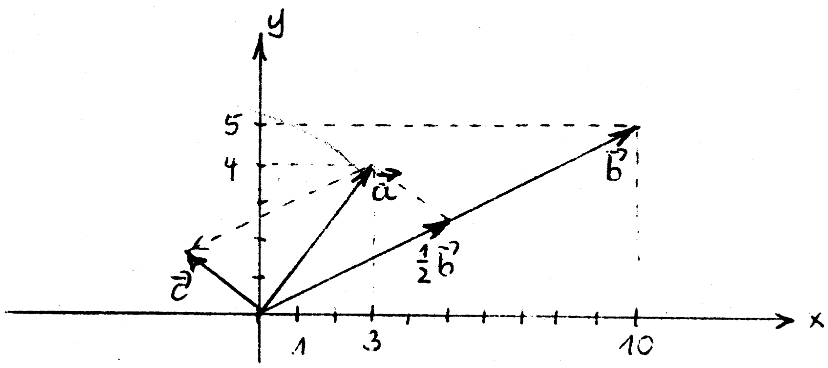
a. Bestimmen Sie $\vec{c}$ durch Zeichnung und Rechnung.

b. Bestimmen Sie $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

c. Bestimmen Sie die Öffnungswinkel $\measuredangle(\vec{a},\vec{c})$ und $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

Lösung:

a. Zeichnung:



Rechnung:

$\underline{\underline{\vec{c}}} = \vec{a} - \frac{1}{2}\cdot\vec{b} = (3,4) - \frac{1}{2}\cdot(10,5) = (3,4) - (\frac{1}{2}\cdot 10, \frac{1}{2}\cdot 5) =$

$(3,4) - (5, \frac{5}{2}) = (3-5, 4-\frac{5}{2}) = \underline{\underline{(-2, \frac{3}{2})}}$

b. $\underline{\underline{|\vec{a}|}} = |(3,4)| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$

$\underline{\underline{|\vec{b}|}} = |(10,5)| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5\cdot 25} = \underline{\underline{5\cdot\sqrt{5}}}$

$(\cong 11{,}18033989)$

$\underline{\underline{|\vec{c}|}} = |(-2, \frac{3}{2})| = \sqrt{(-2)^2+(\frac{3}{2})^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}}$

$= \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

c. Abkürzung: $\alpha = \measuredangle(\vec{a},\vec{c})$, $0 \le \alpha \le \pi$

$\cos(\alpha) = \frac{\langle\vec{a},\vec{c}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} \underset{\text{vgl. b.}}{=} \frac{\langle(3,4),(-2,\frac{3}{2})\rangle}{5\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3\cdot(-2)+4\cdot\frac{3}{2}}{\frac{25}{2}}$

$= \frac{-6+6}{\frac{25}{2}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{2}}}$ $(\hat{=}\ 90°)$

Abkürzung: $\beta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, $0 \le \beta \le \pi$.

$\cos(\beta) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \underset{\text{vgl. b.}}{=} \frac{\langle(3,4),(10,5)\rangle}{5\cdot 5\cdot\sqrt{5}} = \frac{3\cdot 10+4\cdot 5}{25\cdot\sqrt{5}} = \frac{50}{25\sqrt{5}}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}$. Der Taschenrechner liefert: $\underline{\underline{\beta \cong 0{,}463647609}}$

$(\hat{=}\ 26{,}56505118°)$

Aufgabe 2.

Welche Gegenkraft $\vec{F}$ hebt die folgenden vier Einzelkräfte, die an einem Massenpunkt angreifen, in der Wirkung auf?

$\vec{F_1} = (200\,N,\ 110\,N)$, $\vec{F_2} = (-10\,N,\ 30\,N)$,

$\vec{F_3} = (40\,N,\ 85\,N)$, $\vec{F_4} = (-30\,N,\ -50\,N)$

Von welchem Betrag ist $\vec{F}$? unter welchem Winkel greifen $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ am Massenpunkt an?

Lösung:

$$\vec{F} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4})$$

$$= -(200N - 10N + 40N - 30N,\ 110N + 30N + 85N - 50N)$$

$$= -(200N,\ 175\,N)$$

$$= \underline{\underline{(-200\,N,\ -175\,N)}}$$

$$\underline{\underline{|\vec{F}|}} = \sqrt{(-200)^2 + (-175)^2}\ N = \sqrt{(8 \cdot 25)^2 + (7 \cdot 25)^2}\ N =$$

$$25 \cdot \sqrt{113}\ N \cong \underline{\underline{265{,}7536453\ N}}$$

Der gesuchte Winkel sei α, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Dann gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{<\vec{F_1}, \vec{F_2}>}{|\vec{F_1}| \cdot |\vec{F_2}|}$. ⊛

$$<\vec{F_1}, \vec{F_2}> = <(200N, 110N), (-10N, 30N)> = -2000\,N^2 + 3300\,N^2 = 1300\,N^2$$

$$|\vec{F_1}| = \sqrt{(200)^2 + (110)^2}\ N \cong 228{,}2542442\ N$$

$$|\vec{F_2}| = \sqrt{(-10)^2 + (30)^2}\ N \cong 31{,}6227766\ N$$

Einsetzen in ⊛ ergibt: $\cos(\alpha) \cong 0{,}1801044696 \Rightarrow$

$\underline{\underline{\alpha \cong 1{,}38970367}}$ ($\triangleq 79{,}62415506°$)

Aufgabe 3.

gegeben sind: $\vec{a} = (3, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$.

Berechnen Sie:

a. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $4 \cdot \vec{a}$, $-\frac{1}{4} \cdot \vec{b}$, $-5 \cdot \vec{c}$

b. $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$,

c. $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$,

d. $\vec{a} \times \vec{b}$ und den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,

e. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]$ und das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

Lösung:

a. $\underline{\underline{\vec{a} + \vec{b}}} = (3, -1, 2) + (1, 2, 4) = (3+1, -1+2, 2+4) = \underline{\underline{(4, 1, 6)}}$

$\underline{\underline{\vec{a} - \vec{b}}} = (3, -1, 2) - (1, 2, 4) = (3-1, -1-2, 2-4) = \underline{\underline{(2, -3, -2)}}$

$\underline{\underline{4 \cdot \vec{a}}} = 4 \cdot (3, -1, 2) = (4 \cdot 3, 4 \cdot (-1), 4 \cdot 2) = \underline{\underline{(12, -4, 8)}}$

$\underline{\underline{-\frac{1}{4} \cdot \vec{b}}} = -\frac{1}{4} \cdot (1, 2, 4) = \left((-\frac{1}{4}) \cdot 1, (-\frac{1}{4}) \cdot 2, (-\frac{1}{4}) \cdot 4\right) = \underline{\underline{(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1)}}$

$\underline{\underline{-5 \cdot \vec{c}}} = -5 \cdot (1, 1, 1) = \underline{\underline{(-5, -5, -5)}}$

b. $\underline{\underline{|\vec{a}|}} = |(3, -1, 2)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$

$(\cong 3{,}741657387)$

$\underline{\underline{|\vec{b}|}} = |(1, 2, 4)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \underline{\underline{\sqrt{21}}}$

$(\cong 4{,}582575695)$

$\underline{\underline{|\vec{c}|}} = |(1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$ $(\cong 1{,}732050808)$

c. Sei $\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, dann gilt $0 \le \alpha \le \pi$ und

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \underset{\text{vgl. b.}}{=} \frac{\langle (3, -1, 2), (1, 2, 4) \rangle}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4}{7 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 - 2 + 8}{7 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{7 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

Der Taschenrechner liefert: $\underline{\underline{\alpha \cong 1{,}018209678}}$

$(\triangleq 58{,}33911721^\circ)$

d. $\vec{a} \times \vec{b} = (3,-1,2) \times (1,2,4) = ((-1)\cdot 4 - 2\cdot 2,\ 2\cdot 1 - 4\cdot 3,\ 3\cdot 2 - 1\cdot(-1))$

$= (-4-4,\ 2-12,\ 6+1) = \underline{\underline{(-8,-10,7)}}$

Der gesuchte Flächeninhalt F ist $\underline{\underline{F}} = |\vec{a} \times \vec{b}| =$

$\sqrt{(-8)^2+(-10)^2+7^2} = \sqrt{64+100+49} = \underline{\underline{\sqrt{213}}}$ $(\cong 14{,}59451952)$

e. $\underline{\underline{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \underset{\text{vgl. d.}}{=} \langle (-8,-10,7), (1,1,1) \rangle$

$= -8 - 10 + 7 = \underline{\underline{-11}}$

Das gesuchte Volumen V ist $\underline{\underline{V}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |-11| = \underline{\underline{11.}}$

Aufgabe 4.

Eine Kraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 85$ N verschiebt einen Massenpunkt um eine Strecke $\vec{s}$ mit $|\vec{s}| = 32$ m, dabei wird eine Arbeit von $W = 1360$ J verrichtet.
Unter welchem Winkel greift die Kraft an?

Lösung:

· Gesucht ist $\alpha = \angle(\vec{F}, \vec{s})$. Es gilt $0 \leq \alpha \leq \pi$ und

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{1360 \quad J}{32 \cdot 85 \quad N \cdot m} = \frac{1360}{2720}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Es folgt: $\underline{\underline{\alpha = \frac{\pi}{3}}}$ im Bogenmaß bzw.

$\underline{\underline{\alpha = 60^\circ}}$ im Gradmaß.

Aufgabe 5.

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a. Berechnen Sie die folgenden Matrizen bzw. begründen Sie das Nichterklärtsein:

$A+B$, $B+C$, $C-D$, $4 \cdot F$

b. Berechnen Sie die folgenden Matrizen bzw. begründen Sie das Nichterklärtsein:

$B \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot B$

c. Berechnen Sie $D \cdot F$ und $F \cdot D$. Folgern Sie, daß D invertierbar ist und geben Sie D^{-1} an.

d. Berechnen Sie A^t und B^t.

Lösung:

a. <u>$A+B$ ist nicht erklärt</u>, da A und B unterschiedliches Format haben.

$$\underline{\underline{B+C}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 5+1 \\ 0+0 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{C-D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & 1-3 \\ 0-0 & -1-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{4 \cdot F}} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ 4 \cdot 0 & 4 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b. $$\underline{\underline{B \cdot A}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

<u>$A \cdot B$ ist nicht erklärt</u>, da A 3 Spalten hat, B 2 Zeilen hat und $3 \neq 2$ ist.

$$\underline{\underline{B \cdot C}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 0 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{C \cdot B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 & 0{,}5 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

c. $$\underline{\underline{D \cdot F}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-\frac{3}{2}) + 3 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-\frac{3}{2}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{E_2}}$$

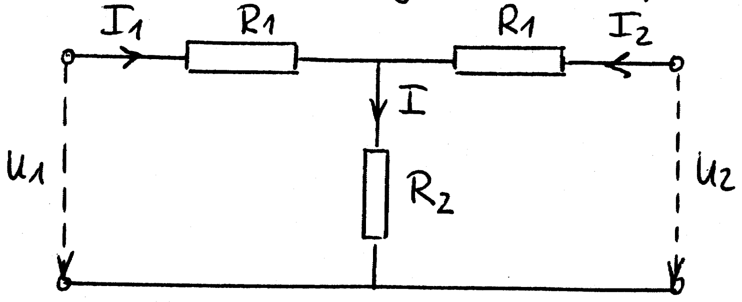
$$\underline{\underline{F \cdot D}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-\frac{3}{2}) \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-\frac{3}{2}) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 & 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{E_2}}$$

Aus $D \cdot F = E_2$ und $F \cdot D = E_2$ (den "typischen" Gleichungen für die inverse Matrix) folgt, daß <u>D invertierbar</u> ist mit $\underline{\underline{D^{-1} = F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$

d. $$\underline{\underline{A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}} \quad , \quad \underline{\underline{B^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 6.

Gegeben ist der folgende Vierpol:



a. Bestimmen Sie eine Matrix A mit

$$A \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

(A heißt Widerstandsmatrix)

b. Berechnen Sie U_1 und U_2 mit Hilfe von a. für folgende Werte:

$R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $I_1 = 0{,}5\,A$, $I_2 = 2\,A$.

Lösung:

"Physik" vorab:

1) $I_1 + I_2 - I = 0$

2) $U_1 - R_2 I - R_1 I_1 = 0$

3) $U_2 - R_2 I - R_1 I_2 = 0$

a. $U_1 \overset{2)}{=} R_1 I_1 + R_2 I \overset{1)}{=} R_1 I_1 + R_2 I_1 + R_2 I_2$, also

I.) $\underline{U_1 = (R_1 + R_2) \cdot I_1 + R_2 I_2}$

$U_2 \overset{3)}{=} R_2 I + R_1 I_2 \overset{1)}{=} R_2 I_1 + R_2 I_2 + R_1 I_2$, also

II.) $\underline{U_2 = R_2 \cdot I_1 + (R_1 + R_2) \cdot I_2}$

I.) und II.) liefern:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Also: $$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1 + R_2 \end{pmatrix}}}$$

b. $$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\Omega + 20\Omega & 20\Omega \\ 20\Omega & 10\Omega + 20\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5\ A \\ 2\ A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30\ \Omega & 20\ \Omega \\ 20\Omega & 30\ \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5\ A \\ 2\ A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 \cdot 0{,}5\ \Omega \cdot A + 20 \cdot 2\ \Omega \cdot A \\ 20 \cdot 0{,}5\ \Omega \cdot A + 30 \cdot 2\ \Omega \cdot A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15\ V + 40\ V \\ 10\ V + 60\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55\ V \\ 70\ V \end{pmatrix}$$

Also: $\underline{\underline{U_1 = 55\,V}}$, $\underline{\underline{U_2 = 70\,V}}$

Aufgabe 7.

Gegeben sind die folgenden Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(B und D wie in Aufgabe 5).

a. Bestimmen Sie durch elementare Umformungen den Rang dieser Matrizen.

b. Untersuchen Sie, welche dieser Matrizen invertierbar sind.

c. Bestimmen Sie für die invertierbaren Matrizen die inverse Matrix.

Lösung:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2 - \frac{3}{2}\cdot Z1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Also: $\underline{\underline{rg(A) = 1.}}$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Also: $\underline{\underline{rg(B) = 1.}}$

$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 - 4\cdot Z1]{Z2 - 3\cdot Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3 - \frac{2}{5}\cdot Z2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ Also: $\underline{\underline{rg(C) = 3}}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Also: $\underline{\underline{rg(D) = 2.}}$

b. <u>A ist nicht invertierbar</u>, da A keine quadratische Matrix ist.

<u>B ist nicht invertierbar</u>, da $B \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ und $rg(B) = 1 \neq 2$.

<u>C ist invertierbar</u>, da $C \in M(3\times 3, \mathbb{R})$ und $rg(C) = 3$.

<u>D ist invertierbar</u>, da $D \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ und $rg(D) = 2$.

c. 1. Schritt:

$$(C \,\vdots\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1 \leftrightarrow Z3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z3-4\cdot Z1]{Z2-3\cdot Z1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{5}\cdot Z2]{\substack{Z1+Z3 \\ Z3-\frac{2}{5}Z2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{14}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[5\cdot Z3]{Z2-3\cdot Z3}$$

$$\left(\begin{array}{c:c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_3} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 5 & -2 & -14 \end{matrix}}_{C^{-1}} \end{array}\right)$$

3. Schritt:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 9 \\ 5 & -2 & -14 \end{pmatrix}$$

---

1. Schritt:

$$(D \,\vdots\, E_2) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Schritt:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot Z2]{Z1-\frac{3}{2}\cdot Z2} \left(\begin{array}{c:c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E_2} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{D^{-1}} \end{array}\right)$$

3. Schritt:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

* Aufgabe 8.

Vorgelegt ist die Situation aus Aufgabe 6. Dort wurde für

$$A = \begin{pmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}$$

gezeigt: $A \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$.

a. Bestimmen Sie zu A die inverse Matrix A^{-1}. (A^{-1} heißt Leitwertmatrix)

b. Begründen Sie mit Hilfe von $A^{-1} \cdot A = E_2$, daß

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

gilt.

c. Berechnen Sie I_1 und I_2 mit Hilfe von a. und b. für folgende Werte:
$R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $U_1 = 10\,V$, $U_2 = 10\,V$.

Lösung:

a. 1. Schritt:

$$(A \,\vdots\, E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} R_1+R_2 & R_2 & 1 & 0 \\ R_2 & R_1+R_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. Schritt:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} R_1+R_2 & R_2 & 1 & 0 \\ R_2 & R_1+R_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{R_1+R_2} \cdot Z1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ R_2 & R_1+R_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2 - R_2 \cdot Z1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & \underbrace{R_1+R_2 - \frac{R_2^2}{R_1+R_2}} & \frac{-R_2}{R_1+R_2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \cdot Z2}$$

$$= \frac{(R_1+R_2)^2 - R_2^2}{R_1+R_2} = \frac{R_1^2 + 2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{R_2}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2} & \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot Z2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{R_1+R_2}+\frac{R_2^2}{(R_1^2+2R_1R_2)(R_1+R_2)} & \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \\ 0 & 1 & \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2} & \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{E_2} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Wegen $\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{R_2^2}{(R_1^2+2R_1R_2)(R_1+R_2)} = \frac{R_1^2+2R_1R_2+R_2^2}{(R_1^2+2R_1R_2)(R_1+R_2)}$

$= \frac{(R_1+R_2)^2}{(R_1^2+2R_1R_2)(R_1+R_2)} = \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2}$ folgt

3. Schritt:

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \begin{pmatrix} \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2} & \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \\ \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2} & \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{R_1^2+2R_1R_2}\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}}}$$

b. $A\cdot\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} (A^{-1}\cdot A)\cdot\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

$\overset{A^{-1}\cdot A=E_2}{\Longrightarrow} E_2\cdot\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}}}$

c. $A^{-1} = \frac{1}{R_1^2+2R_1R_2}\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{100\,\Omega^2+400\,\Omega^2}\begin{pmatrix} 30\,\Omega & -20\,\Omega \\ -20\,\Omega & 30\,\Omega \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{50}\frac{1}{\Omega}, & -\frac{2}{50}\frac{1}{\Omega} \\ -\frac{2}{50}\frac{1}{\Omega}, & \frac{3}{50}\frac{1}{\Omega} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{50}\frac{1}{\Omega}, & -\frac{2}{50}\frac{1}{\Omega} \\ -\frac{2}{50}\frac{1}{\Omega}, & \frac{3}{50}\,\Omega \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10\,V \\ 10\,V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{50}\frac{V}{\Omega}-\frac{20}{50}\frac{V}{\Omega} \\ -\frac{20}{50}\frac{V}{\Omega}+\frac{30}{50}\frac{V}{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{50}\,A \\ \frac{10}{50}\,A \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\,A \\ \frac{1}{5}\,A \end{pmatrix}$. Also: $\underline{\underline{I_1 = \frac{1}{5}\,A = 0{,}2\,A}}$; $\underline{\underline{I_2 = \frac{1}{5}\,A = 0{,}2\,A}}$

Aufgabe 9.

Gegeben sind die folgenden linearen Gleichungssysteme

① $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 9 \end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 6 \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 15 \\ 6x_1 + 14x_2 + 25x_3 &= 45 \end{aligned}$$

a. Schreiben Sie die linearen Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen.

b. Untersuchen Sie, welche dieser Systeme
- keine Lösung,
- unendlich viele Lösungen
- genau eine Lösung

haben.

c. Bestimmen Sie die Lösung der eindeutig lösbaren Systeme mit dem Gaußalgorithmus.

Lösung:

a. ① $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

② $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

③ $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

④ $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 14 & 25 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}$

b. ① $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2 - 2 \cdot Z1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Also: $rg(A) = 2 =$ Anzahl der Unbestimmten

$\Rightarrow$ das System ist eindeutig lösbar

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2-3\,Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$

$(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2-3Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A, \vec{b}) = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$rg(A) = rg(A, \vec{b}) < 2 =$ Anzahl der Unbestimmten $\Rightarrow$

das System hat unendlich viele Lösungen

③ A wie bei ② $\Rightarrow rg(A) = 1$

$(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2-3\cdot Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S2 \leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A, \vec{b}) =$

$\Rightarrow rg(A) \neq rg(A, \vec{b}) \Rightarrow$ das System hat keine Lösung

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 14 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3-6\cdot Z1]{Z2-2\cdot Z1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3-2\cdot Z2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A) = 3 =$ Anzahl der Unbestimmten $\Rightarrow$

das System ist eindeutig lösbar

c. ① 1. Schritt:

$(A, \vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-2\cdot Z1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ \underbrace{0 \;\; -1}_{U} & & \underbrace{-1}_{\vec{g}} \end{array}\right)$

2. Schritt:

$(-1)\cdot x_2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 1}}$

$2\cdot x_1 + 3\,x_2 = 5$ und $x_2 = 1 \Rightarrow 2x_1 + 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

Also: $\underline{\underline{Lös(A, \vec{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$

④ 1. Schritt:

$(A, \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 & 15 \\ 6 & 14 & 25 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow[Z3-6\cdot Z1]{Z2-2\cdot Z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3-2\cdot Z2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

U, $\vec{g}$

2. Schritt:

$3x_3 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 3$ und $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 + 2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 1}}$

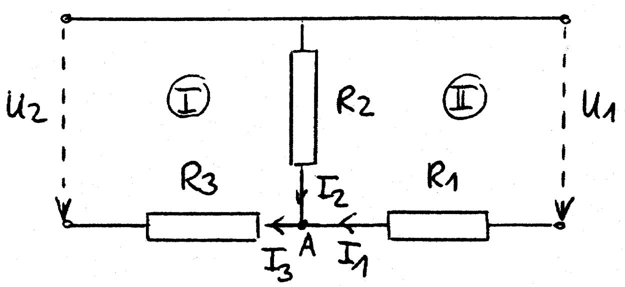
$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 6$ und $x_2 = x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow$

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$

Also: $\underline{\underline{Lös(A, \vec{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$

Aufgabe 10.

Gegeben ist die folgende Schaltung:



wobei $U_2 = 20\,V$, $U_1 = -10\,V$, $R_1 = 6\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$.

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von I_1, I_2, I_3 in Matrixform auf.

Lösen Sie es mit dem Gaußalgorithmus.

Lösung:

"Physik" vorab: "Knoten"gleichung A : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

"Maschen"gleichung (I): $U_2 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$

"Maschen"gleichung (II): $U_1 + R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$

Also:

$$\begin{aligned} 1\cdot I_1 + 1\cdot I_2 - 1\, I_3 &= 0\,A \\ 2\Omega\cdot I_2 + 3\Omega\cdot I_3 &= 20\,V \\ 6\Omega\cdot I_1 - 2\Omega\cdot I_2 \quad &= 10\,V \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,A \\ 20\,A \\ 10\,A \end{pmatrix}$$

Lösung mit Gaußalgorithmus (Einheiten werden nicht notiert)

1. Schritt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 20 \\ 6 & -2 & 0 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{z3 - 6\cdot z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -8 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{z3 + 4\cdot z2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 20 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 18}_{=u} & & & \underbrace{90}_{g} \end{array}\right)$$

2. Schritt: $18 I_3 = 90 \Rightarrow \underline{\underline{I_3 = 5}}$ [A]

$2I_2 + 3I_3 = 20$ und $I_3 = 5 \Rightarrow 2I_2 + 15 = 20 \Rightarrow 2I_2 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{I_2 = 2{,}5}}$

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ und $I_2 = 2{,}5$; $I_3 = 5 \Rightarrow I_1 + 2{,}5 - 5 = 0 \Rightarrow$
$\underline{\underline{I_1 = 2{,}5.}}$ [A]

Endergebnis: Die Stromstärken betragen $\underline{\underline{I_1 = I_2 = 2{,}5\,A}}$,
$\underline{\underline{I_3 = 5\,A.}}$

Aufgabe 11.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Berechnen Sie det (A) und det (B). Wie lautet der Flächeninhalt des von $\vec{a} = (1,3)$, $\vec{b} = (0,2)$ aufgespannten Parallelogramms?

b. Berechnen Sie det (C) mit der Sarrusregel. Wie lautet das Volumen des von $\vec{a} = (4,6,3)$, $\vec{b} = (3,1,0)$, $\vec{c} = (1,2,1)$ aufgespannten Spats?

c. Berechnen Sie det (C) erneut
- durch Entwicklung nach der 1. Spalte,
- durch Entwicklung nach der 2. Zeile.

*d. Berechnen Sie det (D) möglichst geschickt ohne Verwendung des Taschenrechners.

Lösung:

a. $\underline{\underline{\det(A)}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = \underline{\underline{2}}$;

$\underline{\underline{\det(B)}} = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 0 - 0 \cdot 5 = \underline{\underline{0}}$.

Der gesuchte Flächeninhalt F ist $\underline{\underline{F}} = |\det(A)| = \underline{\underline{2}}$.

b.
$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$\underline{\underline{\det(C)}} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 =$

$4 + 18 - 3 - 18 = 22 - 21 = \underline{\underline{1}}$

Das gesuchte Volumen V ist $\underline{\underline{V}} = |\det(C)| = \underline{\underline{1}}$

c. $\underline{\underline{\det(C)}} = \det\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= 4 \cdot (1-0) - 3(6-6) + (0-3) = 4 - 3 = \underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{\det(C)}} = \det\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow = -3\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$-3\cdot(6-6)+(4-3) = \underline{\underline{1.}}$$

d. $$\underline{\underline{\det(D)}} = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z1-3\cdot Z3 \\ Z2-6\cdot Z3 \\ = \\ Z4-2\cdot Z3 \end{matrix} \det\begin{pmatrix} -5 & -4 & 0 & -4 \\ -11 & -7 & 0 & -23 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -5 & -4 & -4 \\ -11 & -7 & -23 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} S2+4\cdot S1 \\ = \\ S3-2\cdot S1 \end{matrix} \det\begin{pmatrix} -5 & -24 & 6 \\ -11 & -51 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow = -\det\begin{pmatrix} -24 & 6 \\ -51 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -(24+306) = \underline{\underline{-330}}$$

Aufgabe 12.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 14 & 25 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix}$.

a. Zeigen Sie mit Hilfe von Determinanten, daß A invertierbar ist.

b. Bestimmen Sie A^{-1} mit Hilfe von Determinanten.

c. Lösen Sie $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- mit Hilfe von $\vec{b}$,
- mit der Cramerschen Regel.

Lösung:

a. $\underline{\det(A)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 14 & 25 \end{pmatrix} \underset{Z3-6\cdot Z1}{\overset{Z2-2\cdot Z1}{=}} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$= 7 - 4 = \underline{\underline{3 \neq 0}} \Rightarrow$ <u>A ist invertierbar.</u>

b. Sei $A^{-1} = (b_{ij})$; dann gilt wegen $\det(A) = 3$:

$b_{11} = \frac{1}{3}\det(A_{11}) = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(125 - 112) = \frac{13}{3}$

$b_{12} = -\frac{1}{3}\det(A_{21}) = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(50 - 42) = -\frac{8}{3}$

$b_{13} = \frac{1}{3}\det(A_{31}) = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(16 - 15) = \frac{1}{3}$

$b_{21} = -\frac{1}{3}\det(A_{12}) = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 25 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(50 - 48) = -\frac{2}{3}$

$b_{22} = \frac{1}{3}\det(A_{22}) = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(25 - 18) = \frac{7}{3}$

$b_{23} = -\frac{1}{3}\det(A_{32}) = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(8 - 6) = -\frac{2}{3}$

$b_{31} = \frac{1}{3}\det(A_{13}) = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(28 - 30) = -\frac{2}{3}$

$b_{32} = -\frac{1}{3}\det(A_{23}) = -\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}(14 - 12) = -\frac{2}{3}$

$b_{33} = \frac{1}{3}\det(A_{33}) = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(5 - 4) = \frac{1}{3}$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c. i. $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \cdot 6 - \frac{8}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 45 \\ -\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{7}{3} \cdot 15 - \frac{2}{3} \cdot 45 \\ -\frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 45 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 26 - 40 + 15 \\ -4 + 35 - 30 \\ -4 - 10 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\underline{\underline{\text{Lös}(A, \vec{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}}$

ii. $\det(A) = 3$ (s.o.)

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 8 \\ 45 & 14 & 25 \end{pmatrix} = 6 \det \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 14 & 25 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 45 & 25 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 45 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= 6(125 - 112) - 2(375 - 360) + 3(210 - 225) = 6 \cdot 13 - 2 \cdot 15 - 3 \cdot 15$$

$$= 78 - 30 - 45 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{3} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 15 & 8 \\ 6 & 45 & 25 \end{pmatrix} \underset{Z3-6 \cdot Z1}{\overset{Z2-2 \cdot Z1}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = 21 - 18 = 3$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3}{3} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 15 \\ 6 & 14 & 45 \end{pmatrix} \underset{Z3-6 \cdot Z1}{\overset{Z2-2Z1}{=}} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = 9 - 6 = 3$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{3}{3} = 1$$

Also: $\underline{\text{Lös}(A, \vec{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}$

Aufgabe 13.

Lösen Sie Aufgabe 8a erneut – jetzt aber mit Hilfe von Determinanten.

Lösung:

Zu bestimmen ist A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} R_1+R_2 & R_2 \\ R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix} = (R_1+R_2)^2 - R_2^2 = R_1^2 + 2R_1R_2$$

Es ist $A^{-1} = (b_{ij})$ mit

$$b_{11} = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{11}) = \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2},$$

$$b_{12} = -\frac{1}{\det(A)} \det(A_{21}) = \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2},$$

$$b_{21} = -\frac{1}{\det(A)} \det(A_{12}) = \frac{-R_2}{R_1^2+2R_1R_2},$$

$$b_{22} = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{22}) = \frac{R_1+R_2}{R_1^2+2R_1R_2}.$$

Also: $$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{R_1^2+2R_1R_2}\begin{pmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_1+R_2 \end{pmatrix}}}.$$

(Vergleichen Sie mit den Rechnungen bei 8a im Hinblick auf den Aufwand!)

Aufgabe 14.

Schreiben Sie als einen Bruch, der so weit wie möglich gekürzt und zusammengefaßt ist:

a. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

b. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x^2}$

c. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2}$

d. $\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{x}$

Lösung:

a. $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2) - x(x-2) - x(x-1)}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{x^2-x-2x+2-x^2+2x-x^2+x}{x(x^2-x-2x+2)} = \frac{-x^2+2}{x(x^2-3x+2)} = \underline{\underline{\frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}}}$$

b. $$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(1-x)(1+x^2)+(x+1)(1+x^2)-2(x+1)(1-x)}{(x+1)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{2(1+x^2)-2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \underline{\underline{\frac{4x^2}{1-x^4}}}$$

c. $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x(x-1)-x^2+(x-1)}{x^2(x-1)} = \frac{x^2-x-x^2+x-1}{x^3-x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^3-x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2-x^3}}}$$

d. $$\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{2x + x(x-1) + 2x(x-1)^2 - (x-1)^3}{(x-1)^3 \cdot x} =$$

$$\frac{2x + x^2 - x + 2x(x^2-2x+1) - (x^3-3x^2+3x-1)}{(x^3-3x^2+3x-1)\cdot x} =$$

$$\frac{x + x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 2x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \underline{\underline{\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}}}$$

Aufgabe 15.

a. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{2} \text{ und } \frac{3x+9}{2x-3} > 6\}$

b. Geben Sie M unter Benutzung der Intervallschreibweise an.

c. Ist M beschränkt?

d. Geben Sie die folgenden Größen an - bzw. begründen Sie ihre Nichtexistenz: $\inf(M)$, $\sup(M)$, $\min(M)$, $\max(M)$.

Lösung:

a. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{3}{2}$, gilt:

$$x \in M \iff \frac{3x+9}{2x-3} > 6$$

$$\iff \left(x > \tfrac{3}{2} \text{ und } \frac{3x+9}{2x-3} > 6\right) \text{ oder } \left(x < \tfrac{3}{2} \text{ und } \frac{3x+9}{2x-3} > 6\right)$$

$$\overset{\cdot(2x-3)}{\iff} \left(x > \tfrac{3}{2} \text{ und } 3x+9 > 6(2x-3)\right) \text{ oder } \left(x < \tfrac{3}{2} \text{ und } 3x+9 < 6(2x-3)\right)$$

$$\iff \left(x > \tfrac{3}{2} \text{ und } 3x+9 > 12x-18\right) \text{ oder } \left(x < \tfrac{3}{2} \text{ und } 3x+9 < 12x-18\right)$$

$$\overset{-3x+9}{\iff} \left(x > \tfrac{3}{2} \text{ und } 27 > 9x\right) \text{ oder } \left(x < \tfrac{3}{2} \text{ und } 27 < 9x\right)$$

$$\overset{:9}{\iff} \left(x > \tfrac{3}{2} \text{ und } 3 > x\right) \text{ oder } (\underbrace{x < \tfrac{3}{2} \text{ und } 3 < x}_{\text{geht nicht!}})$$

$$\iff \underline{\tfrac{3}{2} < x < 3}$$

b. Also: $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3\} =]\frac{3}{2}; 3[$

c. <u>M ist beschränkt</u>, da $M \subseteq [\frac{3}{2}, 3]$

d. $\inf(M) = \frac{3}{2}$; $\sup(M) = 3$,

<u>min (M) und max (M) existieren nicht</u> wegen

$\inf(M) = \frac{3}{2} \notin M$, $\sup(M) = 3 \notin M$.

* **Aufgabe 16**

Eine Kugel K_1 wird zur Zeit $t=0$ aus einer Höhe von 9,81 m über dem Meeresspiegel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 14,715 m/sec senkrecht nach oben katapultiert. Ihre Höhe h_1 wird für $t \geq 0$ beschrieben durch

$$h_1(t) = 9{,}81 + 14{,}715\,t - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

wobei $g = 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2}$.

Eine zweite Kugel K_2 werde zur Zeit $t=0$ aus einer Tiefe von 49,05 m unter dem Meeresspiegel mit der konstanten Geschwindigkeit von 9,81 m/sec senkrecht nach oben geführt. Die Höhe h_2 wird für $t \geq 0$ gegeben durch

$$h_2(t) = -49{,}05 + 9{,}81\,t .$$

Für welche Zeiten $t \geq 0$ befindet sich K_1 in größerer Höhe als K_2?

__Lösung:__

Gesucht ist $M = \{ t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \text{ und } h_1(t) > h_2(t) \}$. Es gilt für $t \geq 0$:

$$h_1(t) > h_2(t) \iff 9{,}81 + 14{,}715\,t - 4{,}905\,t^2 > -49{,}05 + 9{,}81\,t$$

$$\overset{+49{,}05 - 9{,}81t}{\iff} -4{,}905\,t^2 + 4{,}905\,t + 58{,}86 > 0 \overset{:(-4{,}905)<0}{\iff} t^2 - t - 12 < 0$$

__Nebenrechnung:__ $t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$

Also: $t^2 - t - 12 = (t-4)(t+3)$

Daher: $t^2 - t - 12 < 0 \iff (t-4)(t+3) < 0 \iff (t-4<0 \text{ und } t+3>0)$ oder $(t-4>0 \text{ und } t+3<0) \overset{+4/-3}{\iff} (t<4 \text{ und } t>-3)$ oder $\underbrace{(t>4 \text{ und } t<-3)}_{\text{geht nicht!}} \iff t<4 \text{ und } \underbrace{t>-3}_{\text{gilt stets wegen } t \geq 0} \iff t<4.$

Endergebnis: Für $\underline{\underline{0 \leq t < 4}}$ hat K_1 größere Höhe als K_2.

Aufgabe 17.

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Betrags(un)gleichungen:

a. $M_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}| = 2 \}$

b. $M_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x+1| + |x+2| \geq 4 \}$

Lösung:

a. $x \in M_1 \iff |\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}| = 2 \iff \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 2$ oder $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2 \overset{-\frac{3}{2}}{\iff} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}x = -\frac{7}{2} \iff$

$x = 1$ oder $x = -7$.

Also: $\underline{\underline{M_1 = \{ 1; -7 \}.}}$

b. Vorüberlegung:

$$|x+1| + |x+2| = \begin{cases} x+1+x+2 = 2x+3 & \text{für } x \geq -1 \\ -(x+1)+x+2 = 1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ -(x+1)-(x+2) = -2x-3 & \text{für } x < -2 \end{cases}$$

$x \in M_2 \iff |x+1| + |x+2| \geq 4$

$\iff (x \geq -1$ und $2x+3 \geq 4)$ oder

$\underbrace{(-2 \leq x < -1 \text{ und } 1 \geq 4)}_{\text{gilt nicht}}$ oder

$(x < -2$ und $-2x-3 \geq 4)$

$\overset{-3/+3}{\iff} (x \geq -1$ und $2x \geq 1)$ oder

$(x < -2$ und $-2x \geq 7)$

$\overset{:2/:(-2)}{\iff} (x \geq -1$ und $x \geq \frac{1}{2})$ oder

$(x < -2$ und $x \leq -\frac{7}{2})$

$\iff x \geq \frac{1}{2}$ oder $x \leq -\frac{7}{2}$

Also: $\underline{\underline{M_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2} \text{ oder } x \leq -\frac{7}{2} \}}}$

$\underline{\underline{=]-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty[}}$

Aufgabe 18.

Gegeben sind $z_1 = 5+5i$, $z_2 = 3-4i$, $z_3 = 12-6i$, $z_4 = 4+3i$. Berechnen Sie:

a. $\operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Im} z_2$, $-z_2$, z_2+z_4, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$

b. $\frac{1}{z_1}$, $\frac{z_3}{z_1}$, $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}$

c. $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_3+\overline{z_3}$, $z_4-\overline{z_4}$, $z_1 \cdot \overline{z_1}$

d. $|z_1|$, $|z_4|$

Lösung:

a. $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re}(5+5i) = 5$; $\operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im}(3-4i) = -4$;

$-z_2 = -(3-4i) = -3+4i$;

$z_2+z_4 = (3-4i)+(4+3i) = (3+4)+(-4+3)i = 7-i$;

$z_1-z_2 = (5+5i)-(3-4i) = (5-3)+(5+4)i = 2+9i$;

$z_1 \cdot z_2 = (5+5i)\cdot(3-4i) = (5\cdot 3-5\cdot(-4))+(5\cdot(-4)+5\cdot 3)i =$

$35-5i$

b. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5+5i} = \frac{5-5i}{(5+5i)(5-5i)} = \frac{5-5i}{50} = \frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$;

$\frac{z_3}{z_1} = \frac{12-6i}{5+5i} = \frac{(12-6i)(5-5i)}{(5+5i)(5-5i)} = \frac{(12\cdot 5-6\cdot 5)+(12\cdot(-5)+(-6)\cdot 5)i}{50} =$

$\frac{30-90i}{50} = \frac{3}{5}-\frac{9}{5}i$;

$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4} = \frac{5+5i}{3-4i}+\frac{12-6i}{4+3i} = \frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(12-6i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$

$\frac{(5\cdot 3-5\cdot 4)+(5\cdot 4+5\cdot 3)i}{25}+\frac{(12\cdot 4-6\cdot 3)+(12\cdot(-3)+(-6)\cdot 4)i}{25} = \frac{-5+35i+30-60i}{25}$

$= \frac{+25-25i}{25} = 1-i$

c. $\overline{z_1} = \overline{(5+5i)} = 5-5i$; $\overline{z_2} = \overline{(3-4i)} = 3+4i$;

$z_3+\overline{z_3} = (12-6i)+\overline{(12-6i)} = 12-6i+(12+6i) = 24$;

$$\underline{\underline{z_4 - \overline{z_4}}} = (4+3i) - \overline{(4+3i)} = (4+3i) - (4-3i) = \underline{\underline{6i}},$$

$$\underline{\underline{z_1 \cdot \overline{z_1}}} = (5+5i)\overline{(5+5i)} = (5+5i)(5-5i) = 25+25 = \underline{\underline{50}}$$

d. $\underline{\underline{|z_1|}} = \sqrt{5^2+5^2} = \underline{\underline{\sqrt{50}}} \quad (\cong 7{,}07);$

$\underline{\underline{|z_4|}} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}.$

Aufgabe 19.

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Betrags(un)gleichungen in $\mathbb{C}$:

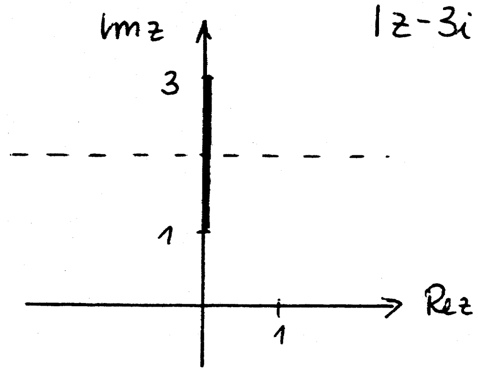
a. $M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| = |z-3i| \}$

b. $M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z+4| \}$

Lösung:

a. Anschauung: $|z-i|$: Abstand von z und i

$|z-3i|$: " " z " $3i$



Diese Abstände sind genau dann gleich, wenn z auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke von i und $3i$ liegt.

Daher: $M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 2 \}$

Rechnung:

$z \in M_1 \iff |z-i| = |z-3i| \overset{(\,)^2}{\iff} |z-i|^2 = |z-3i|^2$

$\iff (z-i)\overline{(z-i)} = (z-3i)\overline{(z-3i)} \iff (z-i)(\bar{z}-\bar{i}) =$

$(z-3i)(\bar{z}-\overline{3i}) \overset{\bar{i}=-i}{\iff} (z-i)(\bar{z}+i) = (z-3i)(\bar{z}+3i) \iff$

$z\cdot\bar{z} - i\bar{z} + iz + 1 = z\bar{z} - 3i\bar{z} + 3iz + 9 \iff 2i\bar{z} - 2iz = 8$

$\overset{:4}{\iff} -\frac{1}{2} i (z-\bar{z}) = 2 \iff \operatorname{Im} z = 2.$

Also: $\underline{\underline{M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 2 \}}}$

b. $z \in M_2 \iff |z| \leq |z+4| \overset{(\,)^2}{\iff} |z|^2 \leq |z+4|^2 \iff z\cdot\bar{z} \leq (z+4)\overline{(z+4)}$

$\iff z\cdot\bar{z} \leq (z+4)(\bar{z}+4) \iff z\cdot\bar{z} \leq z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} + 16 \iff$

$-16 \leq 4(z+\bar{z}) \overset{:8}{\iff} -2 \leq \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \iff -2 \leq \operatorname{Re} z$

Also: $\underline{\underline{M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq -2 \}}}$

Aufgabe 20

Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

(a Realteil, b Imaginärteil, r Betrag, φ Winkel)

	a	b	r	φ
z_1	4	$-4\sqrt{3}$		
z_2			3	$-\frac{3\pi}{4}$
z_3	0	-5		

Lösung:

Sei $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))$.

$\underline{\underline{r_1}} = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 3 \cdot 16} = \sqrt{4 \cdot 16} = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}.$

$a_1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_1}} = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) =$

$-\arctan(\sqrt{3}) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{3}}}$

Sei $z_2 = a_2 + i b_2$

$z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) = 3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Aufgabe 21.

Sei $z = -1+i$.

a. Bestimmen Sie die Polarform von z.

b. Berechnen Sie $\frac{1}{z}$ mit Hilfe der Polarform.

c. Berechnen Sie z^6.

d. Berechnen Sie z^{22}.

e. Bestimmen Sie alle dritten Wurzeln aus z.

Lösung:

a. $r = |z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$;

$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right)+\pi = \arctan(-1)+\pi = -\arctan(1)+\pi$

$= -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$.

Also: $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

b. $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

c. $z^6 = (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(6\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 8\left(\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 8i$

d. $z^{22} = (\sqrt{2})^{22}\left(\cos\left(22\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(22\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= 2^{11}\left(\cos\left(16\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(16\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= 2^{11}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{11}\cdot i = 2048\,i$

e. Für die dritten Wurzeln z_0, z_1, z_2 aus z gilt:

$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i) \cong 0{,}79+0{,}79\,i$

$$\underline{\underline{z_1}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)}}$$

$$\underline{\underline{\approx -1{,}08 + 0{,}29\, i}}$$

$$\underline{\underline{z_2}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)}}$$

$$\underline{\underline{\approx 0{,}29 - 1{,}08\, i.}}$$

Aufgabe 22.

Gegeben sind die folgenden Wechselspannungen:

$$u_1(t) = u_{0,1} \cdot \sin(\omega t),$$
$$u_2(t) = u_{0,2} \cdot \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{4}),$$

wobei $u_{0,1} = 100\ V$, $u_{0,2} = 150\ V$, $\omega = 314 \frac{1}{sec}$.

a. Geben Sie die zugehörigen komplexen Zeiger $\hat{u}_1(t)$ und $\hat{u}_2(t)$ an.

b. Berechnen Sie $\hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t)$.

c. Wie lautet also $u_1(t) + u_2(t)$?

Tip: $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

Lösung:

a. $u_1(t) = u_{0,1} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \underline{\underline{\hat{u}_1(t)}} = u_{0,1} \exp(j\omega t)$

$\underline{\underline{= 100 V \cdot \exp(j \cdot 314 \frac{1}{sec} t)}}$

$u_2(t) = u_{0,2} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \overset{Tip}{=} u_{0,2} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$

$\underline{\underline{\hat{u}_2(t)}} = u_{0,2} \cdot \exp(j(\omega t + \frac{\pi}{4})) = u_{0,2} \exp(j \cdot \frac{\pi}{4}) \cdot \exp(j\omega t)$

$= u_{0,2} \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} j) \exp(j\omega t) = \underline{\underline{(75\sqrt{2} V + 75\sqrt{2} V j) \cdot \exp(j \cdot 314 \frac{1}{sec} t)}}$

b. $\underline{\underline{\hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t)}} = \underline{((100 + 75\sqrt{2})V + 75\sqrt{2} V j) \exp(j \cdot 314 \cdot \frac{1}{sec} t)} = \circledast$

Bestimmung der Polarform von $(100+75\sqrt{2})V + 75\sqrt{2} V j$:

$r = \sqrt{(100+75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2})^2}\ V \cong 231{,}76\ V$

$\varphi = \arctan\left(\frac{75\sqrt{2}}{100 + 75\sqrt{2}}\right) \cong 0{,}48$

$\circledast \cong \underline{231{,}76 V \cdot \exp(j \cdot 0{,}48) \cdot \exp(j\, 314 \cdot \frac{1}{sec} t)}$

$\underline{\underline{= 231{,}76 V \exp(j(314 \cdot \frac{1}{sec} t + 0{,}48))}}$

c. $\underline{\underline{u_1(t) + u_2(t)}} = Im(\hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t)) \underline{\underline{\cong}}$

$\underline{\underline{231{,}76 V \cdot \sin(314 \cdot \frac{1}{sec} t + 0{,}48)}}$

Aufgabe 23

Gegeben sind die nachstehenden Folgen:

$(a_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $(b_n) = \left(\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$, $(c_n) = \left(\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)$.

a. Welche dieser Folgen sind monoton?

b. Welche dieser Folgen sind beschränkt?

c. Welche dieser Folgen sind konvergent? Wie lautet gegebenenfalls der Grenzwert?

Lösung:

a. (a_n) ist streng monoton fallend, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{(\,)^2}{\iff} \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \overset{\cdot n(n+1)}{\iff} n+1 > n \overset{-n}{\iff} 1 > 0. \quad (\checkmark)$$

(b_n) ist nicht monoton, denn:

$b_1 = 1 > 0 = b_2 \Rightarrow (b_n)$ ist nicht monoton wachsend

$b_3 = -1 < 0 = b_4 \Rightarrow (b_n)$ ist nicht monoton fallend

(c_n) ist streng monoton wachsend, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_n \le c_{n+1} \iff \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \le \frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}$$

$$\overset{-\frac{1}{2}}{\iff} \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n \le \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \overset{-\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n}{\iff}$$

$$0 \le \frac{1}{2}n + \frac{3}{4} \overset{:2}{\iff} 0 \le n + \frac{3}{2} \overset{-\frac{3}{2}}{\iff} -\frac{3}{2} \le n \quad (\checkmark)$$

b. Wegen $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0; 1]$ ist (a_n) beschränkt.

Wegen $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1; 0, -1\} \subseteq [-1, 1]$ ist (b_n) beschränkt.

(c_n) ist nicht beschränkt, denn: Andernfalls gibt es $K \in \mathbb{R}$ mit $c_n \le K$ für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

c. $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}}$, denn:

Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig, aber fest gewählt).

Vorüberlegung:

$$\circledast \quad |a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \overset{(\ )^2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \overset{\cdot \frac{n}{\varepsilon^2}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\varepsilon^2} < n$$

$\frac{1}{\varepsilon^2}$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, also gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon^2} < N$. Für $n \geq N$ gilt dann "erst recht" $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$. $\circledast$ zeigt dann: $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, was nachzuweisen war.

$\underline{\underline{(b_n) \text{ ist divergent}}}$, da (b_n) drei Häufungspunkte hat:

$$b_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade (Fall 1)} \\ 1 & \text{falls } n \text{ bei Division durch 4 den Rest 1 läßt (Fall 2)} \\ -1 & \text{falls } n \text{ bei Division durch 4 den Rest 3 läßt (Fall 3)} \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} |b_n - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon & \text{im Fall 1} \\ |b_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon & \text{im Fall 2} \\ |b_n + 1| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon & \text{im Fall 3} \end{array}\right\} \text{ also stets für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

Damit sind $0, 1, -1$ Häufungspunkte von (b_n).

$\underline{\underline{(c_n) \text{ ist divergent}}}$, da (c_n) nach b. nicht beschränkt ist.

Aufgabe 24.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 5\right)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n+9}{7n^3+n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n + \sin(n\cdot\frac{\pi}{4})}{6n + \cos(n\cdot\pi)}$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot \arctan(n)\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}$.

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sqrt[n]{n^3}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)^n$

Lösung:

a. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}} \stackrel{gws}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^3 = 0^3 = \underline{\underline{0}}$;

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 5\right)}} \stackrel{gws}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)^2 + 2\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} 5 =$

$0^2 + 2\cdot 0 + 5 = \underline{\underline{5}}$;

Erweitern mit $\frac{1}{n^3}$

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n+9}{7n^3+n^2+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 + 2\cdot\frac{1}{n^2} + 9\cdot\frac{1}{n^3}}{7 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \stackrel{gws}{=}$

$\frac{5 + 2\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2 + 9\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3}{7 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{5 + 2\cdot 0^2 + 9\cdot 0^3}{7 + 0 + 0^3} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$;

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n + \sin(n\cdot\frac{\pi}{4})}{6n + \cos(n\cdot\pi)}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}\sin(n\cdot\frac{\pi}{4})}{6 + \frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)} \stackrel{gws}{=}$

$\frac{5 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4})\right)}{6 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\cos(n\cdot\pi)\right)} = \frac{5+0}{6+0} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$;

dabei ist zu beachten, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{4})\right) = 0$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\cos(n\pi)\right)$ aus $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ und der Beschränktheit von $(\cos(n\pi))$ und $(\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}))$ folgt.

b. Es gilt $\left|(-1)^n \frac{1}{n} \arctan(n)\right| = \frac{1}{n}\left|\arctan(n)\right|$ $\leq \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$; ferner ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Also folgt: $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\arctan(n)\right) = 0}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)} \overset{gws}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

c. $$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \sqrt[n]{n^3} \right) \overset{gws}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^3$$

$$= 0 + 1^3 = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)^2 = e^2$$

Aufgabe 25.

Sei $(z_n) = \left(\left(\frac{1}{2}i\right)^n \right)$.

a. Bestimmen Sie Re z_n und Im z_n mit Hilfe der Polarform von $\frac{1}{2}i$.

b. Bestimmen Sie dann $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Lösung:

a. Bestimmung der Polarform von $z = \frac{1}{2}i$:

$r = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da $a = \mathrm{Re}\, z = 0$, $b = \mathrm{Im}\, z = 1 > 0$

Also: $\underline{\underline{z}} = \frac{1}{2}i = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}}$

Es folgt: $z_n = z^n = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^n =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$

$\underline{\underline{\mathrm{Re}\, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}}$, $\underline{\underline{\mathrm{Im}\, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}}$.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ und der Beschränktheit von $\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $\left(\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$ gilt:

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{0}}$;

$\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{0}}$.

Also: $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n + i\cdot\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n =$

$0 + i\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$.

Aufgabe 26.

Vorgänger gleich 1 setzen

Näherung gleich 2 setzen

Solange Näherung $\neq$ Vorgänger

    Vorgänger = Näherung setzen

    Näherung durch $\dfrac{(\text{Näherung})^2+2}{2\cdot \text{Näherung}}$ ersetzen

Näherung ausgeben

a. Welche Zahl berechnet das nebenstehende Programm mit Taschenrechnergenauigkeit? Probieren Sie es aus!

b. Zeigen Sie, daß (a_n) mit

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} \qquad (*)$$

- durch $\sqrt{2}$ nach unten beschränkt ist,
- monoton fallend ist.

c. Nach b. ist (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Zeigen Sie mit Hilfe von $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, $(*)$ und den Grenzwertsätzen: $a = \sqrt{2}$.

Lösung:

a. Initialisierung: Vorgänger = 1, Näherung = 2.

① Vorgänger $\neq$ Näherung, also:
Vorgänger = 2; Näherung = 1,5

② Vorgänger $\neq$ Näherung, also:
Vorgänger = 1,5; Näherung = $1{,}41\overline{6}$

③ Vorgänger ≠ Näherung, also:

Vorgänger = $1{,}41\overline{6}$; Näherung = 1,414215686

④ Vorgänger ≠ Näherung, also:

Vorgänger = 1,414215686; Näherung = 1,414213562

⑤ Vorgänger ≠ Näherung, also:

Vorgänger = 1,414213562; Näherung = 1,414213562

Vorgänger = Näherung, also <u>Näherung = 1,414213562</u>

Dies ist $\sqrt{2}$ im Rahmen der Genauigkeit meines Taschenrechners. (Details rechnerabhängig!)

b. i. <u>(a_n) ist durch $\sqrt{2}$ nach unten beschränkt:</u>

$n=1$: $a_1 = 2 \geq \sqrt{2}$ ist klar. Sonst gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} \geq \sqrt{2} \iff \frac{a_n^2+2}{2a_n} \geq \sqrt{2} \overset{\cdot 2a_n>0}{\iff} a_n^2+2 \geq 2\sqrt{2}\,a_n$$

$$\overset{-2\sqrt{2}a_n}{\iff} a_n^2 - 2\sqrt{2}\,a_n + 2 \geq 0 \underset{\text{Formel}}{\overset{\text{bin.}}{\iff}} (a_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \quad (\text{v})$$

ii. <u>(a_n) ist monoton fallend</u>, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n \geq a_{n+1} \iff a_n \geq \frac{a_n^2+2}{2a_n} \overset{\cdot 2a_n>0}{\iff} 2a_n^2 \geq a_n^2+2$$

$$\overset{-a_n^2}{\iff} a_n^2 \geq 2 \overset{a_n>0}{\iff} a_n \geq \sqrt{2} \quad \text{(dies gilt nach i.)}$$

c. $$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{2a_n} \overset{\text{GWS}}{=}$$

$$\frac{(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 + 2}{2 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{a^2+2}{2a}.$$

Also: $$a = \frac{a^2+2}{2a} \overset{\cdot 2a}{\Rightarrow} 2a^2 = a^2+2 \overset{-a^2}{\Rightarrow} a^2 = 2 \overset{a>0}{\Rightarrow}$$

$a = \sqrt{2}$.

Endergebnis: $$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.}}$$

Aufgabe 27.

Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen konvergent sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ b. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$ c. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{i-1}$

d. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}$ e. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}+3^{i-1}}{5^{i-1}}$ f. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+3^{i-1}}{4^{i}}$

Lösung:

a. Die Reihe ist wegen $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ konvergent und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

b. Die Reihe ist wegen $\left|-\frac{3}{4}\right| < 1$ konvergent und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

c. Die Reihe ist wegen $\left|\frac{8}{7}\right| > 1$ divergent.

d. Wegen $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \neq 0$ ist die Reihe divergent.

e. Die Reihe ist wegen $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ und $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ konvergent und es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}+3^{i-1}}{5^{i-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} =$

$$\frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} + \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{10+15}{6}$$

$$= \frac{25}{6}$$

f. Die Reihe ist wegen $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ und $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ konvergent und es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2+3^{i-1}}{4^{i}} = \frac{2}{4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{i}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 28.

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$ b. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$ c. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3}}$

d. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3i}\right)^i$ e. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!}$ f. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{i!}$

Lösungen:

a. Es gilt $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ ist konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$ ist konvergent (Vergleichskriterium)

b. Es gilt $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ ist divergent $\Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$ ist divergent (Vergleichskriterium)

c. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \overset{\text{gws}}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[i]{3}}$ divergent

d. Sei $a_n = \left(\frac{1}{3n}\right)^n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n}$

$= 0 < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3i}\right)^i$ konvergent (Wurzelkriterium)

e. Sei $a_n = \frac{3^n}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0 < 1 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{(i+1)!}$ konvergent (Quotientenkriterium)

f. Sei $a_n = \frac{n^n}{n!} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$= e > 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^i}{i!}$ ist divergent (Quotienten-

kriterium)

Aufgabe 29

Anzahl n der Summanden einlesen (ohne Anfangssummand)
Summand gleich 1 setzen
Summe gleich 1 setzen
Für $i = 1$ bis n
Summand durch $\frac{-\text{Summand}}{i}$ ersetzen
Summe durch Summe + Summand ersetzen
Summe ausgeben

Struktogramm

Dieses Programm berechnet Näherungswerte für eine Zahl s, die durch eine Reihe definiert ist, indem es Werte von Partialsummen s_n bestimmt.

a. Berechnen Sie s_5 (d.h. setzen Sie $n = 5$)

b. Wie lautet s (in Reihenform)? Warum ist diese Reihe konvergent? Raten Sie: Welche Zahl ist s?

c. Wie groß ist der Fehler $|s - s_5|$ höchstens?

Lösung:

a. $$s_5 = 1 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^i \cdot \frac{1}{i!} = 1 - \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \cdot \frac{1}{i!} =$$
$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{60 - 20 + 5 - 1}{120} = \frac{44}{120} = \underline{\underline{\frac{11}{30}}}$$
$$\underline{\underline{= 0{,}3\overline{6}}}$$

b. $s = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}$. Diese Reihe ist $\underline{\underline{\text{konvergent}}}$,

weil $(a_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist:

- es gilt $0 \leq |a_n| \leq \left|\frac{1}{n}\right|$ und $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist Nullfolge
  $\Rightarrow$ <u>(a_n) ist Nullfolge.</u>
- es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \overset{\cdot n!}{\underset{\cdot (n+1)!}{\iff}} n! \leq (n+1)! \iff n! \leq n!(n+1)$$

$$\overset{/n!}{\iff} 1 \leq n+1 \overset{-1}{\iff} 0 \leq n.$$

Also ist (a_n) monoton fallend.

Es gilt genau: $s = \exp(-1) = \frac{1}{e}$. Richtig geraten?

c. Wegen $|s - s_5| \leq a_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} = 1{,}3\overline{8} \cdot 10^{-3}$ gilt

$|s - s_5| \leq 1{,}3\overline{8} \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 30.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz und Konvergenz:

a. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$ b. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{i}}$ *c. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot i^k$

komplexe Zahl i

Lösung:

a. Wegen $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ ist $\sum_{i=1}^{\infty}\left|(-1)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$ konvergent. Daher ist die vorgelegte Reihe absolut konvergent und somit konvergent.

b. Da $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, ist die vorgelegte Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.
$\sum_{i=1}^{\infty}\left|(-1)^{i-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{i}}\right| = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}$ ist nach Aufgabe 2a. zu Abschnitt 3.2. divergent; also ist die vorgelegte Reihe nicht absolut konvergent.

c. $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}\cdot i^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist die divergente harmonische Reihe. Also ist die vorgelegte Reihe nicht absolut konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}i^k = i + \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^3 + \frac{1}{4}i^4 + \frac{1}{5}i^5 + \frac{1}{6}i^6 + \dots$$
$$= i - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}i - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}i + \frac{1}{8} + \dots$$
$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right)$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k} + i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

Real- und Imaginärteil der Reihe sind nach dem Leibnizkriterium konvergent $\Rightarrow$ die Reihe ist konvergent

Aufgabe 31.

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden komplexen Potenzreihen:

a. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} z^i$ b. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} (z-1)^i$ c. $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{(i^2)} z^i$

d. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{i+1}} z^i$

Lösung:

Der Konvergenzradius wird stets mit R bezeichnet.

a. $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \overset{\text{gws}}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{R}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1.}}$

b. $a_n = \frac{1}{4^n} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{4.}}$

c. $a_n = 2^{(n^2)} = 2^{n\cdot n} = (2^n)^n \Rightarrow (\sqrt[n]{|a_n|}) =$

$(\sqrt[n]{(2^n)^n}) = (2^n)$ ist unbeschränkt $\Rightarrow \underline{\underline{R=0.}}$

d. $a_n = \frac{1}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^n \cdot n} \Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n \cdot n}} =$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) \overset{\text{gws}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{R=\infty.}}$

Aufgabe 32.

Zeigen Sie mit Hilfe von $\exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$:

a. $\exp(x) > 1$ für $x>0$

b. $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$.

Lösung:

a. Sei $x>0 \Rightarrow \underline{\underline{\exp(x)}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i}_{>0,\ \text{da } x>0} \underline{\underline{>1}}$

b. Sei $x < 0$. Betrachte $y = -x \Rightarrow y > 0 \overset{a.}{\Rightarrow}$
$\exp(y) > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\exp(y)} < 1 \Rightarrow 0 < \exp(-y) < 1$
$\Rightarrow \underline{\underline{0 < \exp(x) < 1.}}$

Aufgabe 33.

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a. $M_1 = \{ x \in]0,\infty[\setminus \{1\} \mid \log_x(8) + \log_x(2) = 2 \}$

b. $M_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid 3^{4-x} = 2 \cdot 5^x \}$.

Lösung:

a. Für $x \in]0,\infty[\setminus \{1\}$ gilt:

$$x \in M_1 \Leftrightarrow \log_x(8) + \log_x(2) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(8)}{\ln(x)} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} = 2 \overset{\cdot \ln(x)}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(8) + \ln(2) = 2 \cdot \ln(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(8) + \ln(2) = \ln(x) + \ln(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln(8 \cdot 2) = \ln(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\ln(16) = \ln(x^2) \overset{\text{exp anwenden}}{\Leftrightarrow}$$

$$\exp(\ln(16)) = \exp(\ln(x^2)) \Leftrightarrow$$

$$16 = x^2 \Leftrightarrow x = 4,$$

Also: $\underline{\underline{M_1 = \{4\}.}}$

b. $$x \in M_2 \Leftrightarrow 3^{4-x} = 2 \cdot 5^x \Leftrightarrow \exp(\ln(3) \cdot (4-x)) = 2 \cdot \exp(\ln(5) \cdot x) \overset{\ln \text{ anwenden}}{\Leftrightarrow} \ln(3) \cdot (4-x) =$$

$$\ln(2 \cdot \exp(\ln(5) \cdot x)) \Leftrightarrow \ln(3) \cdot (4-x) =$$

$$\ln(2) + \ln(5) \cdot x \Leftrightarrow 4 \cdot \ln(3) - x \cdot \ln(3) =$$

$$\ln(2) + x \cdot \ln(5) \Leftrightarrow 4 \cdot \ln(3) - \ln(2) =$$

$$x(\ln(3) + \ln(5)) \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot \ln(3) - \ln(2)}{\ln(3) + \ln(5)}$$

$$= \frac{\ln(40,5)}{\ln(15)} \cong 1,36677746$$

Also: $\underline{\underline{M_2 = \left\{ \frac{\ln(40,5)}{\ln(15)} \right\} \cong \{1,36677746\}}}$

Aufgabe 34.

Sie möchten in PASCAL mit dem Arcussinus arbeiten, der nicht standardmäßig vorgegeben ist.

a. In einem Mathematikbuch finden Sie die Formel $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ für alle $x \in]-1,1[$. Begründen Sie die Richtigkeit dieser Formel.

b. Beschreiben Sie nun den Arcussinus mit Hilfe von in PASCAL vorhandenen Funktionen.

Lösung:

a. Sei $x \in]-1,1[$ und $y = \arcsin(x)$. Dann gilt $y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und $x = \sin(y) \Rightarrow$

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} \underset{\substack{\cos^2(y)+\sin^2(y)=1,\\ \cos(y)>0 \text{ wegen } y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}}{=} \frac{x}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}{\Rightarrow}$$

$$\underline{\underline{y = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}}$$

b. $\underline{\underline{\arcsin(-1) = -(2 * \text{ARCTAN}(1))}}$;

$\underline{\underline{\arcsin(1) = 2 * \text{ARCTAN}(1)}}$;

$\underline{\underline{\arcsin(x) = \text{ARCTAN}(X / \text{SQRT}(1 - \text{SQR}(X)))}}$

für $x \in]-1,1[$.

* **Aufgabe 35.**

Wird beim freien Fall der Luftwiderstand durch eine dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionale Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so erhält man die folgenden Funktionen s für den Fallweg und v für die Fallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit t $(t \geq 0)$:

$$s(t) = \frac{m}{k} \ln(\cosh(\alpha t)), \quad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \, \frac{\sinh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t)},$$

wobei $\alpha = \sqrt{\frac{gk}{m}}$.

Beschreiben Sie die Fallgeschwindigkeit v in Abhängigkeit vom Fallweg s.

Lösung:

$$s(t) = \frac{m}{k} \ln(\cosh(\alpha t)) \Rightarrow \frac{k}{m} s(t) = \ln(\cosh(\alpha t)) \Rightarrow$$

$$\cosh(\alpha t) = \exp\left(\frac{k}{m} s(t)\right) \quad (1)$$

$$\underline{\underline{v(t)}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \, \frac{\sinh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t)} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{\sqrt{\cosh^2(\alpha t) - 1}}{\sqrt{\cosh^2(\alpha t)}} =$$

$$\cosh^2(\alpha t) - \sinh^2(\alpha t) = 1$$

$$\sqrt{\frac{mg}{k} \, \frac{\cosh^2(\alpha t) - 1}{\cosh^2(\alpha t)}} = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(\alpha t)}\right)} \overset{(1)}{=}$$

$$\sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{k}{m} s(t)\right)^2}\right)} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - \exp\left(-2 \cdot \frac{k}{m} s(t)\right)\right)}}}$$

Aufgabe 36.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 4x^2 - 6x + 21)$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Lösung:

a. Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n^3 + 4x_n^2 - 6x_n + 21) \stackrel{GWS}{=} (\lim_{n \to \infty} x_n)^3 + 4(\lim_{n \to \infty} x_n)^2 - 6 \cdot \lim_{n \to \infty} x_n + 21 \stackrel{\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2}{=} 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 21 = 8 + 16 - 12 + 21 = 33$$

Also: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 4x^2 - 6x + 21) = 33.}}$

Lösung in Kurznotation:

$$\lim_{x \to 2} (x^3 + 4x^2 - 6x + 21) \stackrel{GWS}{=} 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 21 = 33$$

b. Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x_n \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) = 0$, da $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ ist und $\left(\cos^2\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$ beschränkt ist. (vgl. 3.1.8. (3)).

Also: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0}}$

Aufgabe 37.

Untersuchen Sie auf Stetigkeit in $x_0 = 1$:

a. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 21$

b. $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 1 \\ (x-1)^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

c. $f(x) = |x-1|$

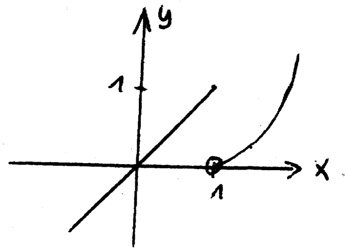
d. $f(x) = |\ln(x)|^5 - 12$

Lösung:

a. $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+4x^2-6x+21) \overset{GWS}{=} 1^3+4\cdot 1^2-6\cdot 1+21 = 20 = f(1) \Rightarrow$

f ist in $x_0 = 1$ stetig.

b.



$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left((x-1)^2\right) \overset{GWS}{=} (1-1)^2 = 0 \neq 1$

$= f(1) \Rightarrow$ f ist in $x_0=1$ nicht stetig.

c.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} |x-1| = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-x+1) \overset{GWS}{=} -1+1 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} |x-1| = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 1-1 = 0$

$f(1) = |1-1| = |0| = 0$

$\Rightarrow$ f ist in $x_0 = 1$ stetig

d. Stetig sind im Definitionsbereich:

$g(x) = \ln(x)$

$h(x) = |x|$

$t(x) = x^5 - 12$

$\Rightarrow$ f mit $f(x) = t(h(g(x)))$ ist im Definitionsbereich stetig

$\Rightarrow$ f ist in $x_0 = 1$ stetig.

Aufgabe 38.

Gegeben ist die "mathematische Version" der PASCAL-Funktion TRUNC, allerdings nur auf $[-3,3]$. Betrachtet wird also

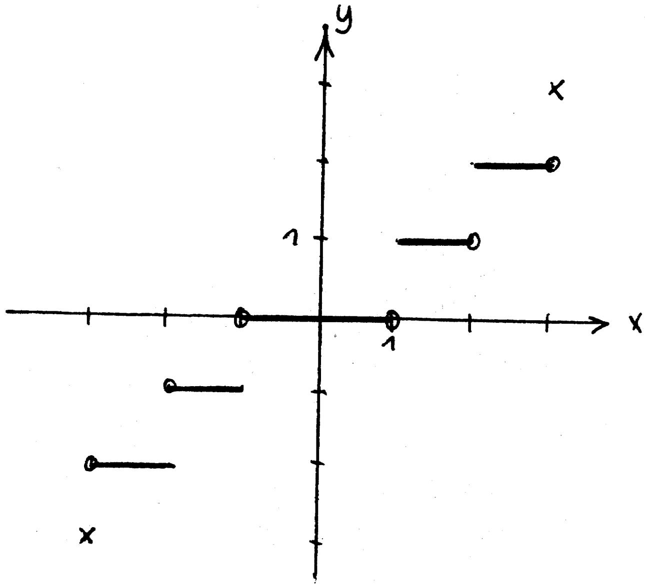
$$t: [-3,3] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t(x) = \begin{cases} \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le x\} & \text{für } x \geq 0 \\ -t(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

a. Skizzieren Sie den Graphen von t.

b. Untersuchen Sie t auf Stetigkeit in $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$.

Lösung:

a.



b. t ist in $x_0 = 0$ stetig, denn:

$$\lim_{x \to 0} t(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 = t(0)$$

t ist in $x_0 = 1$ nicht stetig, denn:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} t(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 0 = 0 \neq 1 = t(1)$$

Aufgabe 39.

Sei $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos(x)$.

a. Zeigen Sie, daß f im Intervall $[0,1]$ mindestens eine Nullstelle x_0 hat.

Man kann sich überlegen, daß x_0 eindeutig bestimmt ist.

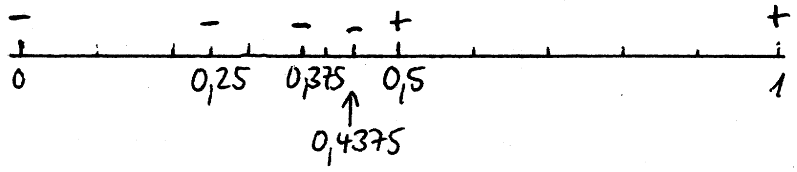
b. Geben Sie ein Intervall der Länge $< 0{,}1$ an, in dem x_0 liegt.

Lösung:

a. f ist stetig mit $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(1) \cong 0{,}73 > 0$.

Damit hat f nach dem Nullstellensatz in $[0,1]$ mindestens eine Nullstelle x_0.

b.



+ Funktionswert positiv

− " negativ

$f(0{,}5) \cong 0{,}06 > 0 \Rightarrow x_0$ liegt in $[0;\ 0{,}5]$

$f(0{,}25) \cong -0{,}23 < 0 \Rightarrow x_0$ liegt in $[0{,}25;\ 0{,}5]$

$f(0{,}375) \cong -0{,}09 < 0 \Rightarrow x_0$ liegt in $[0{,}375;\ 0{,}5]$

$f(0{,}4375) \cong -0{,}015 < 0 \Rightarrow x_0$ liegt in $\underbrace{[0{,}4375;\ 0{,}5]}_{\text{Länge } 0{,}0625 < 0{,}1}$.

x_0 liegt in $[0{,}4375;\ 0{,}5]$.

Aufgabe 40.

a. Zeigen Sie, daß f mit $f(x) = x^3$ in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Tip: $x^3 - x_0^3 = (x - x_0) \cdot (x^2 + x x_0 + x_0^2)$

b. Geben Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f durch $(x_0, f(x_0))$ an.

Lösung:

a. $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \overset{\text{Tip}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) \overset{\text{GWS}}{=} x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 = 3x_0^2$$

Also: f ist in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = 3x_0^2$.

b. $$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 3x_0^2(x - x_0) + x_0^3$$

$$= 3x_0^2 x - 3x_0^3 + x_0^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3$$

Aufgabe 41.

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + x + 4$

b. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 1}$

c. $f(x) = \sin(x)$

d. $f(x) = \tan(x)$

e. $f(x) = \sinh(x)$

f. $f(x) = \arcsin(x)$

g. $f(x) = \arctan(x)$

h. $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$

i. $f(x) = \exp(\sin(x^2))$

Lösung:

a. $\underline{\underline{f'(x) = 15x^4 + 6x^2 - 2x + 1}}$

b. $\underline{\underline{f'(x)}} = \dfrac{(3x^2+2)(x^2+1) - 2x(x^3+2x+5)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2 - 10x}{(x^2+1)^2}$

$= \underline{\underline{\dfrac{x^4 + x^2 - 10x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}}}$

c. $f(x) = \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \dfrac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$

$\Rightarrow \underline{\underline{f'(x)}} = 1 - \frac{1}{3!} 3x^2 + \frac{1}{5!} 5 \cdot x^4 - \dots = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{(2k)!} x^{2k} = \underline{\underline{\cos(x)}}$

d. $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow \underline{\underline{f'(x)}} = \dfrac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$

$= \underline{\underline{\dfrac{1}{\cos^2(x)}}}$ (oder: $= 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{1 + \tan^2(x)}}$)

e. $f(x) = \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ Argument wie bei c. $\Rightarrow$

$\underline{\underline{f'(x)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \underline{\underline{\cosh(x)}}$

f. f ist die Umkehrfunktion von g mit $g(x) = \sin(x)$,

d.h. $f = g^{-1}$.

Es gilt $g'(g^{-1}(x)) \overset{c.}{=} \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$

$= \sqrt{1-x^2} \neq 0$ für $x \in]-1,1[$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{f'(x)}} = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}$ für $x \in]-1,1[$

g. f ist die Umkehrfunktion von g mit $g(x) = \tan(x)$,

d.h. $f = g^{-1}$.

Es gilt $g'(g^{-1}(x)) \overset{d.}{=} 1 + \tan^2(\arctan(x)) = 1 + x^2 \neq 0$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{f'(x)}} = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$

h. f ist die Umkehrfunktion von g mit $g(x) = \sinh(x)$,

d.h. $f = g^{-1}$.

Es gilt $g'(g^{-1}(x)) \overset{e.}{=} \cosh(\operatorname{Arsinh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}$

$= \sqrt{1+x^2} \neq 0$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{f'(x)}} = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}}$

i. $f(x) = \exp(\sin(x^2))$ $\underset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow}$ $\underline{\underline{f'(x) = \exp(\sin(x^2)) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}}$

Aufgabe 42.

Berechnen Sie $f^{(n)}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

a. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + x + 4$

b. $f(x) = \sinh(x)$

Lösung:

a. $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$

$f''(x) = 60x^3 + 12x - 2 \Rightarrow$

$f'''(x) = 180x^2 + 12 \Rightarrow$

$f^{(4)}(x) = 360x \Rightarrow$

$f^{(5)}(x) = 360 \Rightarrow$

$f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 6$.

b. $f(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x) \Rightarrow f''(x) = \sinh(x)$

usw.

Also:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \sinh(x) & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe 43.

Zeigen Sie, daß $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$ streng monoton wachsend ist.
(Damit ist die in Aufgabe 39 erwähnte Nullstelle x_0 von f tatsächlich eindeutig bestimmt.)

Lösung:

f ist differenzierbar mit $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin(x)$.
Für $x \in]0,1[$ gilt: $\sin(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 > 0$ für alle $x \in]0,1[\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend.

Aufgabe 44.

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin^2(x) + 2\cos(x)$.

Lösung:

1. Teil: Bestimmung der lokalen Extrema in $]-\pi,\pi[$:

i. $f'(x) = 0 \iff 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) = 0 \iff \sin(x)(\cos(x)-1) = 0 \iff \sin(x) = 0$ oder $\cos(x) = 1 \overset{x \in]-\pi,\pi[}{\iff} x = 0$.

ii. $f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) - 2\cos(x) \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = -8\cos(x)\sin(x) + 2\sin(x) \Rightarrow f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = -8\cos^2(x) + 8\sin^2(x) + 2\cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6 < 0$
4 gerade $\Rightarrow$

f hat in $x_0 = 0$ ein lokales Maximum mit $f(0) = 2$.

2. Teil: Betrachtung der Intervallrandpunkte

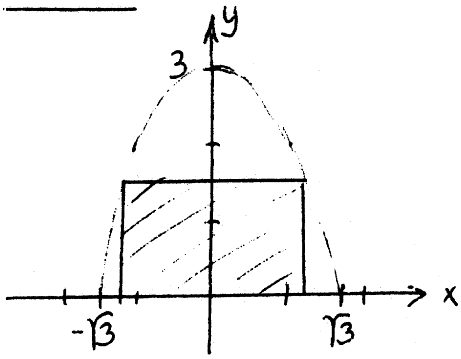
$f(-\pi) = f(\pi) = -2 \Rightarrow$ f hat in $x_1 = -\pi$ und $x_2 = \pi$ lokale Minima mit $f(x_1) = f(-\pi) = -2$ und $f(x_2) = f(\pi) = -2$.

Aufgabe 45.

Bestimmen Sie das Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt, das achsenparallel zwischen die x-Achse und den Graphen der Funktion $f: [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 - x^2$ gelegt werden kann.

Lösung:

Skizze:



Das gesuchte Rechteck hat die Eckpunkte $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, f(-a))$, $(a, f(a))$ mit $a \in]0, \sqrt{3}[$.
(Für $a = 0$, $a = \sqrt{3}$ liegt Flächeninhalt 0 vor – uninteressant!)

Für den Flächeninhalt F gilt: $F(a) = 2a \cdot f(a) = 2a(3-a^2) = 6a - 2a^3$. $\Rightarrow F'(a) = 6 - 6a^2 \Rightarrow F''(a) = -12a$.

$F'(a) = 0 \Leftrightarrow 6 - 6a^2 = 0 \Leftrightarrow 6a^2 = 6 \Leftrightarrow a^2 = 1 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 1.$

Wegen $F''(1) = -12 < 0$ liegt in $a = 1$ ein lokales Maximum von F vor.

Damit hat das gesuchte Rechteck die Ecken $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$ und den Flächeninhalt $F(1) = 4$.

Aufgabe 46.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{\ln(e-x) + x - 1}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

* d. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

Lösung:

a. $$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\ln(e-x)+x-1} \overset{\substack{\text{l'Hôspital}\\ \text{Typ } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{\frac{1}{e-x}(-1)+1} = \frac{2}{-\frac{1}{e}+1} = \underline{\underline{\frac{2e}{e-1}}}$$

b. $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\substack{\text{l'Hôspital}\\ \text{Typ } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \underline{\underline{1.}}$$

c. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)} \overset{\substack{\text{l'Hôspital}\\ \text{Typ } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)}$$

$$\overset{\substack{\text{l'Hôspital}\\ \text{Typ } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0.}}$$

d. $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot x\right) \overset{\text{exp stetig}}{=}$$

$$\exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}\right) \overset{\substack{\text{l'Hôspital}\\ \text{Typ } \frac{0}{0}}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \exp(2) = \underline{\underline{e^2}}$$

Aufgabe 47.

Von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wissen Sie nur:

1. f ist unendlich oft differenzierbar
2. $f^{(n)}(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
3. $|f^{(n)}(x)| \leq 3$ für alle $x \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

a. Berechnen Sie das 5. Taylorpolynom $p_5(x)$ von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b. Berechnen Sie $p_5(0{,}1)$ als Näherungswert für $f(0{,}1)$.

c. Schätzen Sie den Fehler $|R_6(0{,}1)| = |f(0{,}1) - p_5(0{,}1)|$ ab.

Lösung:

a. $$\underline{\underline{p_5(x)}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\,(x-0)^k \overset{1.,2.}{=} \underline{\underline{\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} x^k}}$$

b. $$\underline{\underline{p_5(0{,}1)}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} 0{,}1^k = 1 + 0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}1^3 + \frac{1}{24}\cdot 0{,}1^4 + \frac{1}{120}\cdot 0{,}1^5 \cong \underline{\underline{1{,}1051709 17.}}$$

c. Es gibt $\tilde{x} \in [0;\,0{,}1]$ mit

$$|R_6(0{,}1)| = \frac{1}{6!}\, 0{,}1^6\, |f^{(6)}(\tilde{x})| \overset{1.,3.}{\leq} \frac{1}{6!}\, 0{,}1^6 \cdot 3 \cong 4{,}1\overline{6} \cdot 10^{-9}$$

Also: $\underline{\underline{|R_6(0{,}1)| \leq 4{,}1\overline{6} \cdot 10^{-9}}}$

Es wurde übrigens $\exp(0{,}1)$ näherungsweise berechnet! Vergleichen Sie mal mit dem Wert Ihres Taschenrechners!

Aufgabe 48.

Berechnen Sie $\int (3x^6 + 4x^5 - 12x^4 - 22x^3 + x^2 - 17x + 9)\, dx$

Lösung:

$$\int (3x^6 + 4x^5 - 12x^4 - 22x^3 + x^2 - 17x + 9)\,dx = 3\int x^6 dx + 4\int x^5 dx -$$

$$12\int x^4 dx - 22\int x^3 dx + \int x^2 dx - 17\int x^1 dx + 9\int x^0 dx =$$

$$\frac{3}{7}x^7 + \frac{4}{6}x^6 \quad \frac{12}{5}x^5 - \frac{22}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 9x + C =$$

$$\frac{3}{7}x^7 + \frac{2}{3}x^6 \quad \frac{12}{5}x^5 - \frac{11}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 9x + c$$

Aufgabe 49.

Berechnen Sie durch partielle Integration:

a. $\int x \cos(x)\, dx$

b. $\int x^2 \exp(x)\, dx$

c. $\int x \ln(x)\, dx$

d. $\int \arctan(x)\, dx$ (Tip: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + c$)

e. $\int \sin^2(x)\, dx$

Lösungen:

a. $g(x) = x,\ g'(x) = 1,\ f(x) = \sin(x),\ f'(x) = \cos(x)$

$$\int x \cos(x)\,dx = \int g(x) f'(x)\,dx = g(x) f(x) - \int g'(x) f(x)\,dx$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x)\,dx = \underline{\underline{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.}}$$

b. $g(x) = x^2,\ g'(x) = 2x,\ f(x) = \exp(x),\ f'(x) = \exp(x)$

$$\int x^2 \exp(x)\,dx = \int g(x) f'(x)\,dx = g(x) f(x) - \int g'(x) f(x)\,dx =$$

$$x^2 \exp(x) - 2\int x \exp(x)\,dx \overset{\text{Auf. 2a.}}{\underset{\text{u. 5.1.}}{=}} \underline{\underline{x^2 \exp(x) - 2x \exp(x) + 2\exp(x)}}$$

$\underline{\underline{+C}}$

c. $g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f'(x) = x$

$$\int x \ln(x)\,dx = \int f'(x) g(x)\,dx = g(x) f(x) - \int f(x) g'(x)\,dx =$$
$$\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C}}$$

d. $g(x) = \arctan(x)$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

$$\int \arctan(x)\,dx = \int g(x) f'(x)\,dx = g(x) f(x) - \int g'(x) f(x)\,dx$$
$$= x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$
$$\overset{\text{Tip.}}{=} \underline{\underline{x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}}$$

e. $g(x) = \sinh(x)$, $g'(x) = \cosh(x)$, $f(x) = \cosh(x)$, $f'(x) = \sinh(x)$

$$\int \sinh^2(x)\,dx = \int g(x) f'(x)\,dx = g(x) f(x) - \int g'(x) f(x)\,dx$$
$$= \sinh(x)\cosh(x) - \int \cosh^2(x)\,dx \underset{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}{=} \sinh(x)\cosh(x)$$
$$- \int \sinh^2(x)\,dx - \int 1\,dx \Rightarrow$$
$$2\int \sinh^2(x)\,dx = \sinh(x)\cosh(x) - \int 1\,dx \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\sinh(x)\cosh(x) - \frac{1}{2}x + C}}$$

Aufgabe 50

Berechnen Sie mit der Substitutionsregel die folgenden Integrale:

a. $\int \frac{1}{(4x+1)^3}\,dx$ b. $\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$

c. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ d. $\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$

Lösungen:

a. Substitution: $y = 4x+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dy$

$$\underline{\underline{\int \frac{1}{(4x+1)^3}\,dx}} = \int \frac{1}{y^3}\cdot\frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4}\int\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{y^2}+C = \underline{\underline{-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(4x+1)^2}+C}}$$

b. Substitution: $y = \arctan(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow dx = (1+x^2)\,dy$

$$\underline{\underline{\int\frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx}} = \int\frac{y}{1+x^2}\cdot(1+x^2)\,dy = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2+C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(\arctan(x))^2+C}}$$

c. Substitution: $x = 2\cdot\sin(y)$, $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

i. $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

ii. $\frac{dx}{dy} = 2\cdot\cos(y) \Rightarrow dx = 2\cdot\cos(y)\,dy$

iii. $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2(y)} = 2\sqrt{1-\sin^2(y)} = 2\sqrt{\cos^2(y)}$

$= 2\cos(y)$

Aufgabe 2 d. zu 5.1.

$$\underline{\underline{\int\sqrt{4-x^2}\,dx}} = \int 2\cos(y)\cdot 2\cos(y)\,dy = 4\int\cos^2(y)\,dy =$$

$$4\cdot\left(\frac{1}{2}\cos(y)\sin(y)+\frac{1}{2}y\right)+C = \frac{1}{2}\cdot 2\sin(y)\cdot 2\cdot\cos(y) + 2y + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C}}$$

↑

$2\sin(y) = x$, i., iii.

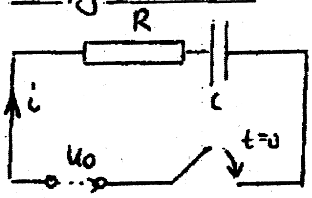
d. Substitution : $y = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow$ (Tabelle) $\sin(x) = \frac{2y}{1+y^2}$,

$dx = \frac{2}{1+y^2}\, dy$

$$\underline{\underline{\int \frac{1}{1+\sin(x)}\, dx}} = \int \frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy = \int \frac{2}{\frac{1+y^2+2y}{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}\, dy$$

$$= \int \frac{2}{(y+1)^2}\, dy = -\frac{2}{y+1} + C = \underline{\underline{-\frac{2}{\tan(\frac{x}{2})+1} + C}}$$

Aufgabe 51.



Nach Schließen des Schalters zum Zeitpunkt $t=0$ fließt im nebenstehenden Stromkreis der Ladestrom $i(t) = i_0 \cdot \exp(-\frac{1}{RC}\cdot t)$.

Für die Kondensatorladung q gilt: $\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q(t) = i(t)$, $q(0)=0$.

Bestimmen Sie $q(t)$.

Lösung:

q ist eine Stammfunktion von i, daher wird zunächst $\int i(t)dt$ berechnet.

$$\int i(t)dt = i_0 \int \exp(-\frac{1}{RC}\cdot t)dt = (*)$$

Substitution: $y = -\frac{1}{RC}\cdot t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{RC} \Rightarrow dt = -RC\,dy$

Also: $(*) = i_0 \int \exp(y)(-RC\,dy) = -RC i_0 \int \exp(y)dy =$

$-RC\,i_0 \exp(y) + K = -RC\,i_0 \exp(-\frac{R}{C}t) + K$

$\Rightarrow \underline{q(t) = -RC\,i_0 \exp(-\frac{R}{C}t) + K.}$

Ferner gilt: $q(0) = 0 \Rightarrow q(0) = -RC\,i_0 \underbrace{\exp(0)}_{=1} + K = 0 \Rightarrow$

$K = RC\,i_0$

$\Rightarrow \underline{\underline{q(t)}} = -RC\,i_0 \exp(-\frac{R}{C}t) + RC\,i_0 = \underline{\underline{RC\,i_0(1 - \exp(-\frac{R}{C}t)).}}$

Aufgabe 52

Berechnen Sie die folgenden Integrale gebrochen-rationaler Funktionen:

a. $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}dx$ b. $\int \frac{2x+1}{x^2-10x+25}dx$

c. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1}dx$

Lösung:

a. Schritt 1: Polynomdivision

$$(3x^3-6x^2-20x-1):(x^2-2x-8) = 3x + \frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$
$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

Also. $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}dx = \int 3x\,dx + \int \frac{4x-1}{x^2-2x-8}dx$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \underbrace{\int \frac{4x-1}{x^2-2x-8}dx}_{\text{noch zu berechnen!}}$$

Schritt 2: Nennerzerlegung

$x^2-2x-8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -2$

Also: $x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{A_1}{x-4} + \frac{\tilde{A}_1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{A_1(x+2)+\tilde{A}_1(x-4)}{(x-4)(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$4x-1 = (A_1+\tilde{A}_1)x + (2A_1-4\tilde{A}_1) \Leftrightarrow$$

$$A_1+\tilde{A}_1 = 4,\quad 2A_1-4\tilde{A}_1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$A_1 = 4-\tilde{A}_1,\quad 8-6\tilde{A}_1 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{3}{2},\quad A_1 = \frac{5}{2}$$

Also: $\frac{4x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}$

Schritt 4: Integration

$$\int \frac{4x-1}{(x-4)(x+2)}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{5}{2}\ln|x-4| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$$

Endergebnis: $\int \frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}\,dx = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}\ln|x-4| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$

b. Schritt 1: Polynomdivision entfällt

Schritt 2: Nennerzerlegung $x^2-10x+25 = (x-5)^2$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x+1}{(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} \iff$$

$$\frac{2x+1}{(x-5)^2} = \frac{A_1(x-5)+A_2}{(x-5)^2} \iff$$

$$2x+1 = A_1x + (A_2 - 5A_1) \iff$$

$$A_1 = 2, \quad A_2 - 5A_1 = 1 \iff$$

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 11$$

Also: $\frac{2x+1}{(x-5)^2} = 2\cdot\frac{1}{x-5} + 11\cdot\frac{1}{(x-5)^2}$

Schritt 4: Integration

$$\int \frac{2x+1}{x^2-10x+25}\,dx = 2\int \frac{1}{x-5}\,dx + 11\int \frac{1}{(x-5)^2}\,dx = 2\ln|x-5| - 11\frac{1}{x-5} + C$$

c. Schritt 1: Polynomdivision entfällt

Schritt 2: Nennerzerlegung: -1 ist Nullstelle des Nenners

$$(x^3+x^2+x+1) : (x+1) = x^2+1$$
$$-(x^3+x^2)$$
$$x+1$$

Also: $x^3+x^2+x+1 = (x+1)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{ohne reelle Nullstelle}}$

Schritt 3: Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1(x^2+1)+(B_1x+C_1)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$x^2+x+2 = (A_1+B_1)x^2+(B_1+C_1)x+(A_1+C_1) \Leftrightarrow$$

$$A_1+B_1=1,\quad B_1+C_1=1,\quad A_1+C_1=2 \Leftrightarrow$$

$$A_1=1-B_1,\quad C_1=1-B_1\quad,\quad 2-2B_1=2 \Leftrightarrow$$

$$B_1=0,\quad A_1=C_1=1$$

Also: $\dfrac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$

Schritt 4: Integration

$$\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int\frac{1}{x+1}\,dx + \int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x+1| + \arctan(x) + C$$

Aufgabe 53.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a. $\int 12x \sin(x^2) \exp(\cos(x^2))\,dx$ b. $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

c. $\int \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}\,dx$

Lösung:

a. Substitution: $y = \cos(x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x^2)\cdot 2x \Rightarrow$

$dx = \frac{-dy}{2x\cdot\sin(x^2)}$

$$\underline{\underline{\int 12x\sin(x^2)\exp(\cos(x^2))\,dx}} = \int 12x\sin(x^2)\exp(y)\cdot\frac{-dy}{2x\cdot\sin(x^2)}$$

$$= -6\int\exp(y)\,dy = -6\exp(y)+C = \underline{\underline{-6\exp(\cos(x^2))+C}}$$

b. Schritt 1: Polynomdivision entfällt.

Schritt 2: entfällt, da der Nenner keine reelle Nullstelle hat.

Schritt 3: Partialbruchzerlegung liegt bereits vor.

Schritt 4: Integration (ohne Formelsammlung!)

$$\underline{\underline{\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quadratische} \\ \text{Ergänzung}}}{=} \int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int\frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1\right)}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}\,dx = \frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \circledast$$

Substitution: $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot dy$

$$\circledast = \frac{4}{3}\int\frac{1\cdot\sqrt{3}}{(y^2+1)\cdot 2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y)+C =$$

$$\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C}}$$

c. Substitution: $y = \exp(x) + \exp(-x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \exp(x) - \exp(-x)$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{\exp(x) - \exp(-x)}$

$$\underline{\underline{\int \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}\,dx}} = \int \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{y} \cdot \frac{dy}{\exp(x) - \exp(-x)}$$

$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln|\exp(x) + \exp(-x)| + C =$$

$$\underline{\underline{\ln(\exp(x) + \exp(-x)) + C}}$$

Aufgabe 54

a. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx$$

b. Geben Sie eine anschauliche Interpretation von I_1 und I_2 an.

Lösung:

a. $\underline{\underline{I_1}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

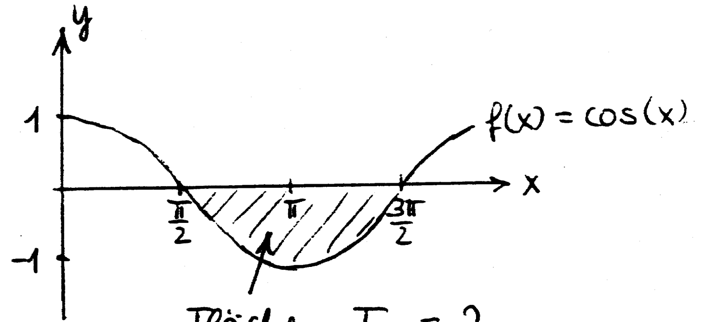
$-1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$;

$\underline{\underline{I_2}} = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} =$

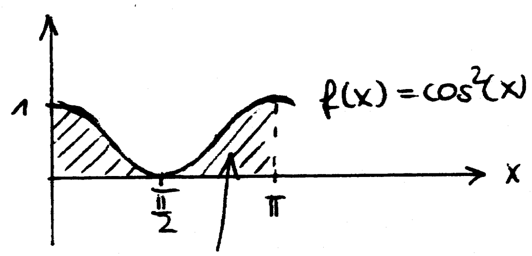
Aufgabe 2c. zu 5.1.

$\frac{1}{2}\cos(\pi)\sin(\pi) + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\cos(0)\sin(0) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$

b.



Fläche $-I_1 = 2$.



Skizzen!

Fläche $I_2 = \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 55

$f: [1;5] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = 5\sqrt{5} - \sqrt{x^3}$. Berechnen Sie:

a. die Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse

b. die Bogenlänge S_f von f.

Lösung:

a. $$\underline{\underline{A}} = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (5\sqrt{5} - \sqrt{x^3})\,dx = \int_1^5 (5\sqrt{5} - x^{\frac{3}{2}})\,dx =$$

$$\left[5\sqrt{5}\cdot x - \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_1^5 = \left[5\sqrt{5}x - \frac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x}\right]_1^5 =$$

$$25\sqrt{5} - \frac{2}{5}\cdot 25\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + \frac{2}{5} = 25\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + \frac{2}{5}$$

$$= 10\sqrt{5} + \frac{2}{5} \cong \underline{\underline{22{,}76067977}}$$

b. $$S_f = \int_1^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

$$f(x) = 5\sqrt{5} - \sqrt{x^3} = 5\sqrt{5} - x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 = \frac{9}{4}x$$ Also.

$$S_f = \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx.$$

NR.: $$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = ?$$

Substitution: $$y = 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9}{4} \Rightarrow dx = \frac{4}{9}dy$$

$$\int \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \int \sqrt{y}\cdot\frac{4}{9}\,dy = \frac{4}{9}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot y^{\frac{3}{2}} + C$$

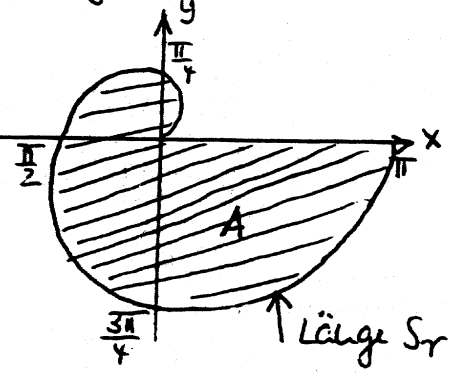
$$= \frac{8}{27}y\sqrt{y} + C = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x} + C$$

Also: $$\underline{\underline{S_f}} = \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right]_1^5 = \frac{8}{27}\left(1+\frac{45}{4}\right)\sqrt{1+\frac{45}{4}}$$

$$-\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}} = \frac{8}{27}\cdot\frac{49}{4}\cdot\frac{7}{2} - \frac{8}{27}\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13} =$$

$$\frac{49\cdot 7}{27} - \frac{13\sqrt{13}}{27} \cong \underline{\underline{10{,}96769753}}$$

Aufgabe 56.



$r: [0, 2\pi] \to [0, \infty[$ sei definiert durch $r(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$; man erhält eine archimedische Spirale (siehe Skizze).

a. Berechnen Sie die Fläche A.

*b. Berechnen Sie die Bogenlänge S_r.

Lösung:

a. $$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2 d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\, 8\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^3$$

b. $$S_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi}(\varphi) = \frac{1}{2}$$ Also:

$$S_r = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\varphi^2 + \frac{1}{4}}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi .$$

NR: $\int \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi = ?$

Standardsubstitution: $\varphi = \sinh(y)$. Es folgt:

i. $y = \operatorname{Arsinh}(\varphi)$

ii. $d\varphi = \cosh(y)\, dy$

iii. $\sqrt{\varphi^2+1} = \sqrt{\sinh^2(y)+1} = \sqrt{\cosh^2(y)} = \cosh(y)$

Also: $$\int \sqrt{\varphi^2+1}\, d\varphi = \int \cosh(y)\cdot\cosh(y)\, dy = \int \cosh^2(y)\, dy$$

$$= \int (1 + \sinh^2(y))\, dy = \int dy + \int \sinh^2(y)\, dy =$$ Aufgabe 49 e.

$$y + \frac{1}{2}\sinh(y)\cosh(y) - \frac{1}{2}y + C =$$

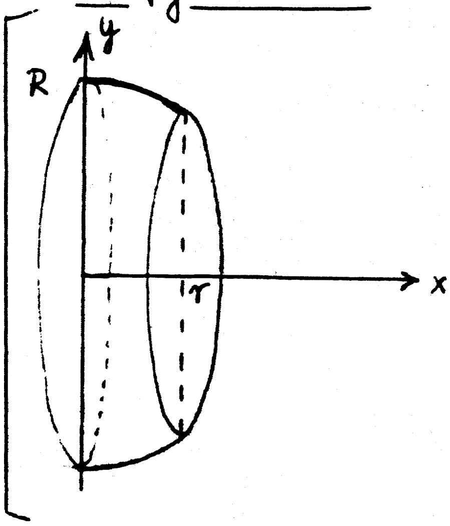
$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sinh(y)\cosh(y) + C = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + C$$

Also: $\underline{\underline{S_r}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\right]_0^{2\pi} =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{Arsinh}(0)}_{=0}\right) =$

$\frac{1}{4}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \frac{\pi}{2}\sqrt{4\pi^2+1} \cong \underline{\underline{10{,}62814708.}}$

Aufgabe 57.



Berechnen Sie Volumen V und Mantelfläche M des nebenan skizzierten Kugelabschnitts ($0 < r < R$).

Lösung:

Man betrachte $f: [0,r] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$; dann ist $V = V_{f,x}$ und $M = M_{f,x}$.

$$\underline{\underline{V}} = V_{f,x} = \pi \int_0^r (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^r (R^2-x^2)\,dx = \pi \left[R^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$= \underline{\underline{\pi\left[R^2r - \tfrac{1}{3}r^3\right]}}$$

$$f(x) = \sqrt{R^2-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}\cdot(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{R^2-x^2}, \quad \text{Also}$$

$$\underline{\underline{M}} = M_{f,x} = 2\pi \int_0^r \sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot f(x)\,dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{R^2}\,dx = 2\pi R \int_0^r 1\,dx$$

$$= 2\pi R\,[x]_0^r = \underline{\underline{2\pi R r}}$$

Aufgabe 58.

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \sin(x^2)$. Berechnen Sie für $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ einen Näherungswert $\tilde{I}$, indem Sie eine Potenzreihe verwenden und nach 4 Summanden abbrechen. Schätzen Sie den Fehler $|I - \tilde{I}|$ ab.

Lösung:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!}\, x^{2i+1} \Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!} (x^2)^{2i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!}\, x^{4i+2} \Rightarrow F \text{ mit } F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{4i+3}\, x$$

ist eine Stammfunktion von f.

Also:

$$I = F(1) - F(0) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \underbrace{\frac{1}{(2i+1)!} \cdot \frac{1}{4i+3}}_{a_i} \Rightarrow$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{11} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{1}{15} \cong 0{,}3102681578$$

(a_n) ist monoton fallende Nullfolge $\Rightarrow |I - \tilde{I}| \leq a_4$

$$= \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{19} \cong 1{,}450385222 \cdot 10^{-7}.$$

Aufgabe 59.

Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls:

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ b. $\int_0^\infty \exp(-x)\sin(x)\,dx$

c. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ d. $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

Lösung:

a. Sei $k \geq 1$, dann gilt $\int_1^k \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_1^k = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}$

Wegen $\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ist $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergent mit $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}$.

b. Sei $k \geq 0$, dann ist zu berechnen $\int_0^k \exp(-x)\sin(x)\,dx$.

NR: $\int \exp(-x)\sin(x)\,dx = ?$

Partielle Integration: $f(x) = \exp(-x)$, $f'(x) = -\exp(-x)\,dx$

$g(x) = -\cos(x)$, $g'(x) = \sin(x)$

$\int \exp(-x)\sin(x)\,dx = \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx = -\exp(-x)\cos(x) - \int \exp(-x)\cos(x)\,dx = ⊛$

Erneute partielle Integration: f wie oben,

$h(x) = \sin(x)$, $h'(x) = \cos(x)$

$⊛ = -\exp(-x)\cos(x) - \int f(x)\cdot h'(x)\,dx = -\exp(-x)\cos(x) - f(x)\cdot h(x) + \int f'(x)\,h(x)\,dx = -\exp(-x)\cos(x) - \exp(-x)\sin(x) - \int \exp(-x)\sin(x)\,dx \Rightarrow$

$\int \exp(-x)\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\exp(-x)\left(\cos(x)+\sin(x)\right) + C$

Also: $\int_0^k \exp(-x)\sin(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\exp(-x)\,(\cos(x)+\sin(x))\right]_0^k$

$= -\frac{1}{2}\exp(-k)\,(\cos(k)+\sin(k)) + \frac{1}{2}$

Es ist $\lim_{k\to\infty}\exp(-k) = 0$. Da cos und sin beschränkt sind, folgt: $\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\exp(-k)(\cos(k)+\sin(k)) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Also $\int_0^\infty \exp(-x)\sin(x)\,dx$ ist konvergent mit

$$\int_0^\infty \exp(-x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

c. Im Falle von Konvergenz ist aus Symmetriegründen

$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Sei $k \geq 0$, dann gilt: $\int_0^k \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan(x)\right]_0^k$

$= \arctan(k).$

Wegen $\lim_{k\to\infty}\arctan(k) = \frac{\pi}{2}$ ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent

mit $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ist konvergent

mit $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} = \pi.$

d. Sei $k>0$, $k\leq 1$. Dann gilt: $\int_k^1 \ln(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \left[\ln(x)\cdot x - x\right]_k^1$

Beispielaufgabe zu part. Integration

$= \ln(1)\cdot 1 - 1 - \ln(k)\cdot k + k = k - \ln(k)\cdot k - 1.$

Es gilt $\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}(-\ln(k)\cdot k) = \lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{-\ln(k)}{\frac{1}{k}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\frac{-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k^2}} =$

l'Hôspital Typ „$\frac{\infty}{\infty}$"

$\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} k = 0.$

Also: $\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}}(k - \ln(k)\cdot k - 1) = -1$. Damit ist $\int_0^1 \ln(x)\,dx$

konvergent mit $\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1.$

Aufgabe 60.

Welches Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreibt ein [illegible]

Aufgabe 62.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

a. Geben Sie die Niveaumengen $N_0(f)$ und $N_1(f)$ an und skizzieren Sie diese.

b. Geben Sie die partiellen Funktionen von f im Punkte $(1, \sqrt{2}) = \vec{x}^c$ an und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.

Lösung:

a. $\underline{\underline{N_0(f)}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) = 0 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ oder } x_1 + x_2 = 0 \}$

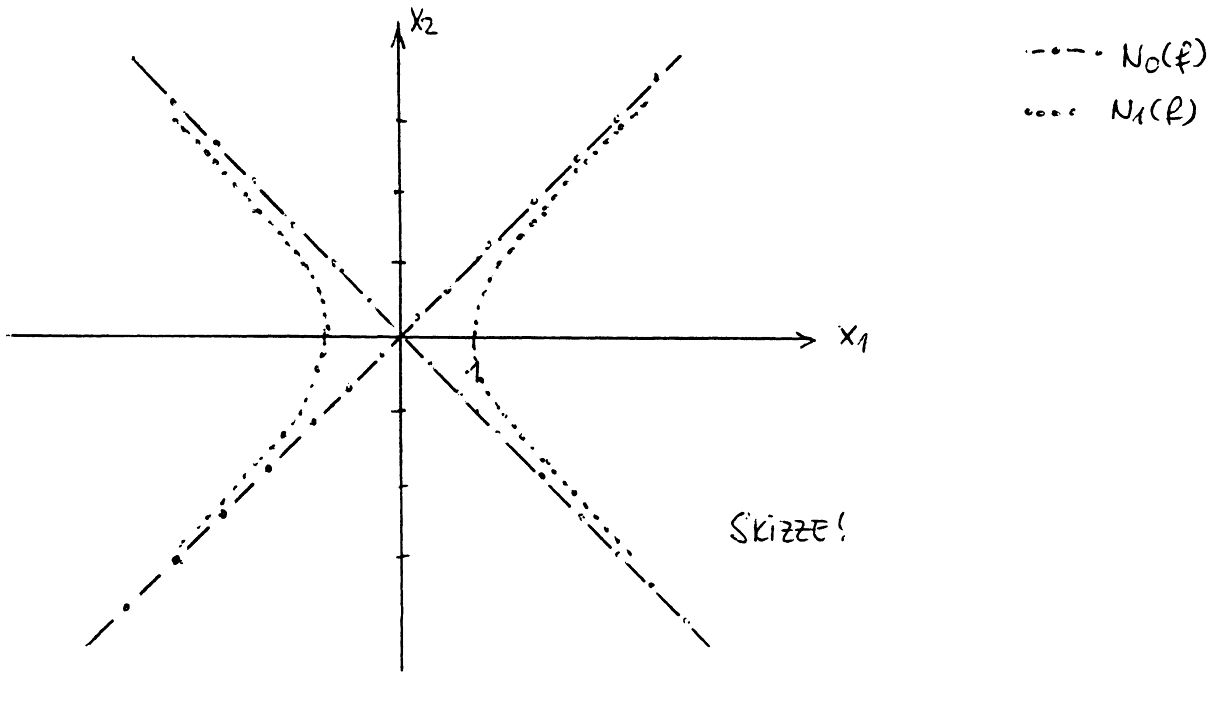
$= \underline{\underline{\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1 \text{ oder } x_2 = -x_1 \}}}$

$\underline{\underline{N_1(f)}} = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 1 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1 \}$

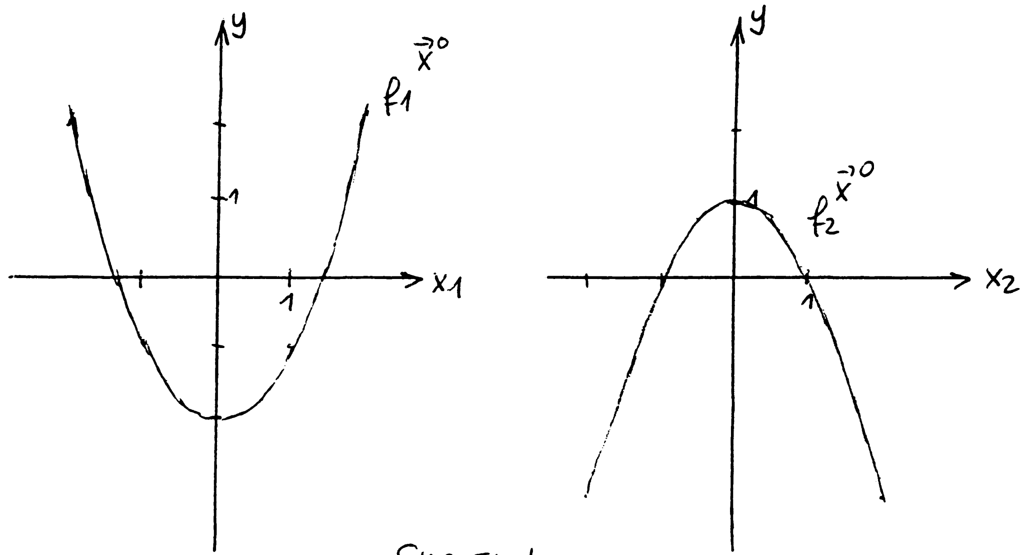
$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 = x_1^2 - 1 \}$

$= \underline{\underline{\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[\text{ und } (x_2 = \sqrt{x_1^2 - 1} \text{ oder } x_2 = -\sqrt{x_1^2 - 1}) \}}}$



b. $f_1^{\vec{x}^0}(x_1) = f(x_1, \sqrt{2}) = x_1^2 - (\sqrt{2})^2 = x_1^2 - 2$

$f_2^{\vec{x}^0}(x_2) = f(1, x_2) = 1^2 - x_2^2 = 1 - x_2^2$



SKIZZEN!

Aufgabe 63

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \cosh(3x_1^2 + 5x_2)$

b. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \dfrac{xy + y^3}{x^2+1}$

c. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \arctan(x_1^2 + x_2^3)$

d. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$f: U \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2^x \cdot y^y$

Lösung:

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sinh(3x_1^2 + 5x_2) \cdot 6x_1$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sinh(3x_1^2 + 5x_2) \cdot 5$

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^2+1) - 2x(xy+y^3)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{yx^2 + y - 2x^2y - 2xy^3}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{y - x^2y - 2xy^3}{(x^2+1)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x + 3y^2}{x^2+1}$

c. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{2x_1}{(x_1^2 + x_2^3)^2 + 1}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{3x_2^2}{(x_1^2 + x_2^3)^2 + 1}$

d. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2^x \cdot \ln(2) \cdot y^y$

$f(x,y) = 2^x \cdot \exp(\ln(y) \cdot y) \Rightarrow$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2^x \cdot \exp(\ln(y) \cdot y) \cdot \left(\dfrac{1}{y} \cdot y + \ln(y)\right)$

$= 2^x \cdot y^y (1 + \ln(y))$

Aufgabe 64.

a. Zeigen Sie, daß $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \cosh(3x_1^2 + 5x_2)$ in jedem $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

** b. Zeigen Sie für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

i. f ist in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ partiell differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{0}) = 0$.

ii. f ist in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ nicht stetig.

Lösung:

a. Sei (x_{1m}) eine Folge mit $\lim_{m\to\infty} x_{1m} = x_1^0$; sei (x_{2m}) eine Folge mit $\lim_{m\to\infty} x_{2m} = x_2^0$. Dann gilt:

$$\lim_{m\to\infty} f(x_{1m}, x_{2m}) = \lim_{m\to\infty} \cosh(3x_{1m}^2 + 5x_{2m}) \overset{\text{cosh stetig; Grenzwertsätze}}{=}$$

$$\cosh\left(3\cdot\left(\lim_{m\to\infty} x_{1m}\right)^2 + 5\cdot\left(\lim_{m\to\infty} x_{2m}\right)\right) = \cosh\left(3(x_1^0)^2 + 5x_2^0\right) =$$

$$f(x_1^0, x_2^0) = f(\vec{x}^0).$$

Also ist f in $\vec{x}^0$ stetig.

b. i. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß f in $\vec{0}$ partiell nach x_1 differenzierbar ist mit $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{0}) = 0$.

Die 1. partielle Funktion von f in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ lautet

$$f_1^{\vec{x}^0}(x_1) = f(x_1, 0) = \left.\begin{cases} \frac{x_1 \cdot 0}{x_1^2 + 0^2} & \text{für } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1 = 0 \end{cases}\right\} = 0 .$$

Diese Funktion hat die Ableitung 0, also $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{0}) = 0$.

ii. Sei $(x_{1m}) = (x_{2m}) = \left(\frac{1}{m}\right)$, dann gilt $\lim_{m\to\infty} x_{1m} = 0$, $\lim_{m\to\infty} x_{2m} = 0$.

Es ist $f(x_{1m}, x_{2m}) = f\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) = \dfrac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2}\right)} = \dfrac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} f(x_{1m}, x_{2m}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\vec{0}).$$

Also ist f in $\vec{x}^0 = \vec{0}$ nicht stetig.

Aufgabe 65.

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen der folgenden Vektorfelder:

a. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1x_2x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1 \sin(x_2x_3))$

b. $U = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \}$,

$f: U \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$

(f beschreibt den Wechsel von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten in der rechten Halbebene)

c. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos(x_2),\ x_1 \sin(x_2))$

Lösung:

a. f hat die Koordinatenfunktionen

$f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2x_3$,

$f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2$,

$f_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \sin(x_2x_3)$. Damit gilt:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$= \underline{\underline{(3x_2x_3,\ 1,\ \sin(x_2x_3))}};$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$= \underline{\underline{(3x_1x_3,\ 1,\ x_1 \cdot \cos(x_2x_3) \cdot x_3)}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$= \underline{\underline{(3x_1x_2,\ 0,\ x_1 \cos(x_2x_3) \cdot x_2)}}$$

b. f hat die Koordinatenfunktionen

$f_1: U \to \mathbb{R}$, $f_1(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$f_2: U \to \mathbb{R}$, $f_2(x_1, x_2) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. Damit gilt:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot 2x_1,\ \frac{1}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 1} \cdot x_2 \cdot \left(-\frac{1}{x_1^2}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},\ \frac{-x_2}{x_2^2 + x_1^2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot 2x_2 , \frac{1}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2+1} \cdot \frac{1}{x_1}\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} , \frac{x_1}{x_2^2+x_1^2}\right)}}$$

c. f hat die Koordinatenfunktionen

$f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x_1,x_2) = x_1 \cos(x_2)$,

$f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_2(x_1,x_2) = x_1 \sin(x_2)$. Also gilt:

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)$$

$$= \underline{\underline{(\cos(x_2), \sin(x_2))}}$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2), \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)$$

$$= \underline{\underline{(-x_1 \sin(x_2), x_1 \cos(x_2))}}$$

Aufgabe 66.

Ein Teilchen bewegt sich in der Ebene längs der Kurve $\mathscr{C}$ mit Parameterdarstellung $\vec{s}: [0,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $\vec{s}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$.

a. Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve! (Tip: Wertetabelle anlegen!)

b. Berechnen Sie $\vec{v}(t) = \vec{s}\,'(t)$ für alle $t \in [0,\infty[$.

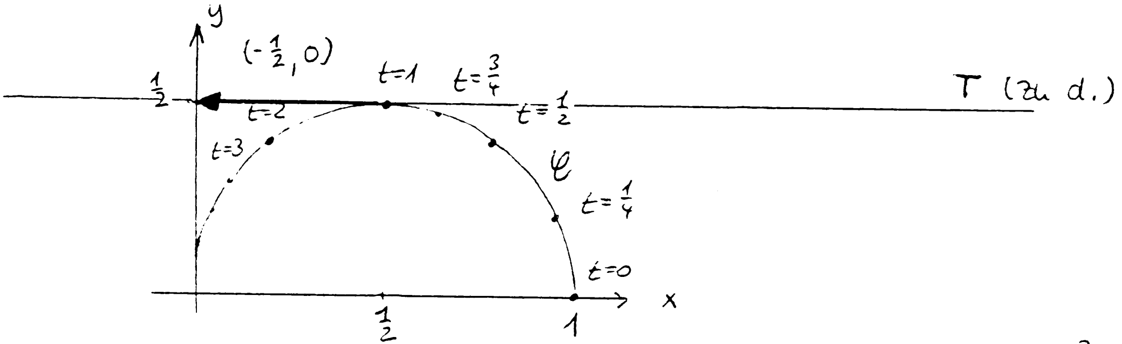
c. Berechnen Sie $|\vec{v}(t)|$ für alle $t \in [0,\infty[$.

d. Wie lautet die Tangente an $\mathscr{C}$ im Punkte $\vec{s}(1)$? Zeichnen Sie diese Tangente in a. ein!

Lösung:

a. Sei $\vec{s}(t) = (s_1(t), s_2(t))$, Wertetabelle:

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4
$s_1(t)$	1	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$
$s_2(t)$	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$



b. $\underline{\underline{\vec{v}(t)}} = \left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}, \frac{1+t^2-2t(t)}{(1+t^2)^2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2}, \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right)}}$

c. $\underline{\underline{|\vec{v}(t)|}} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^4} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^4}} = \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4} =$

$\frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{t^4+2t^2+1} = \frac{1}{(1+t^2)^2}\sqrt{(t^2+1)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot(t^2+1) = \underline{\underline{\frac{1}{1+t^2}}}$

d. $\vec{s}(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\vec{v}(1) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow$

die gesuchte Tangente T ist

$\underline{\underline{T}} = \{\vec{s}(1) + k\,\vec{v}(1) \mid k \in \mathbb{R}\} = \underline{\underline{\{(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + k(-\tfrac{1}{2}, 0) \mid k \in \mathbb{R}\}}}$

$(= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}\})$

Aufgabe 67

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig partiell differenzierbar; $g: U \to \mathbb{R}^2$ mit $U = \{(r,\varphi) \mid r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ und $g(r,\varphi) = (r\cos(\varphi),\ r \cdot \sin(\varphi))$ beschreibt den Wechsel von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten.

$h: U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h(r,\varphi) = f(g(r,\varphi))$. ("Funktion in Polarkoordinaten").

a. Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $\frac{\partial h}{\partial r}$ und $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$ an.

b. Welches Resultat liefert diese Formel für $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$? Machen Sie eine "Probe"!

Lösung:

a. Nach der Kettenregel gilt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\varphi) \\ g(r,\varphi) = (r\cos(\varphi),\ r\cdot\sin(\varphi)) \\ \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\varphi) = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\varphi) = \sin(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) \cdot \sin(\varphi)}}$$

Ferner gilt nach der Kettenregel

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r,\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ g(r,\varphi) = (r\cos(\varphi),\ r\cdot\sin(\varphi)) \\ \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -r\sin(\varphi), \quad \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r,\varphi) = r\cos(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\sin(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) \cdot r \cdot \cos(\varphi)}}$$

b. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 2x_2.$

Also folgt durch Einsetzen in a.:

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi) = 2r\cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi) + 2r\sin(\varphi)\sin(\varphi) = \underline{\underline{2r}};$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -2r\cos(\varphi)\cdot r\cdot\sin(\varphi) + 2r\sin(\varphi)\, r\cos(\varphi) = \underline{\underline{0}}.$$

Probe: $h(r,\varphi) = r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) = r^2 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi) = 2r,$

$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r,\varphi) = 0.$

Aufgabe 68.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei implizit erklärt durch $(f(t))^3 + t^2 + 2t = 1$. Berechnen Sie $f'(0)$

a. mit Methoden der Differentialrechnung in $\mathbb{R}$,

b. durch implizites Differenzieren.

Lösung:

a. $(f(t))^3 + t^2 + 2t = 1 \Rightarrow f(t) = \sqrt[3]{1-t^2-2t} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{1-t^2-2t})^2}(-2t-2) \Rightarrow \underline{\underline{f'(0) = -\frac{2}{3}}}$

b. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^3 - 1 \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + 2$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 3x_2^2$. $\Rightarrow$

$$f'(t) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, f(t))}{\frac{\partial F}{\partial x_2}(t, f(t))} = -\frac{2t+2}{3(f(t))^2}$$

$t = 0$, $(f(t))^3 + t^2 + 2t = 1 \Rightarrow (f(0))^3 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$.

Also: $\underline{\underline{f'(0)}} = -\dfrac{2 \cdot 0 + 2}{3 \cdot 1^2} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

Aufgabe 69.

Berechnen Sie für die folgenden Skalarfelder den Gradienten:

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2) \cdot \cos(x_1 + 2x_2)$

b. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $f: U \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^y$.

Lösung:

a. $\underline{\underline{\operatorname{grad} f(x_1, x_2)}} =$

$\underline{\underline{(\cos(x_1-x_2)\cdot\cos(x_1+2x_2) - \sin(x_1-x_2)\sin(x_1+2x_2), -\cos(x_1-x_2)\cos(x_1+2x_2) - 2\sin(x_1-x_2)\sin(x_1+2x_2))}}$

b. $f(x, y) = x^y = \exp(\ln(x) \cdot y) \Rightarrow$

$\underline{\underline{\operatorname{grad} f(x,y)}} = (\exp(\ln(x)\cdot y) \cdot \frac{1}{x} y, \exp(\ln(x)\cdot y) \ln(x))$

$= (x^y \cdot \frac{1}{x} \cdot y, x^y \cdot \ln(x)) = \underline{\underline{(x^{y-1} \cdot y, x^y \cdot \ln(x))}}$

Aufgabe 70.

Vorgelegt sei die Situation aus Aufgabe 61, d.h. $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(\vec{x}) = -\gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{x}$.

Ferner sei $\Phi: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ erklärt durch $\Phi(\vec{x}) = -\gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|}$.

Zeigen Sie, daß $f(\vec{x}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt.

Physikalischer Hintergrund: Φ beschreibt eine Potentialfunktion für f, das sogenannte Gravitationspotential. Da Φ existiert, ist die Gravitationskraft $\vec{F}$ eine sogenannte konservative Kraft.

Lösung:

Für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -\gamma m M \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} .$$

Damit folgt für alle $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = -\gamma m M \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^3} \cdot 2x_i$$

$$= \gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} \cdot x_i$$

Daher gilt

$$\underline{\underline{-\operatorname{grad} \Phi(\vec{x})}} = -\operatorname{grad} \Phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$= -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3), \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)\right)$$

$$= -\left(\gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} x_1, \gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} x_2, \gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} x_3\right)$$

$$= -\gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} (x_1, x_2, x_3)$$

$$= -\gamma m M \cdot \frac{1}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{x} = \underline{\underline{f(\vec{x})}}$$

Aufgabe 71.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + x_2^2$.

a. Berechnen Sie $\operatorname{grad} f\,(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b. Welche Funktion $t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat als Graphen die Tangentialebene $T_{\vec{p}}$ an G_f durch $\vec{p} = (1; 1; 10)$? Geben Sie $T_{\vec{p}} \subseteq \mathbb{R}^3$ an.

c. Bestimmen Sie die Tangente $T_{\vec{x}^0}$ an $N_{10}(f)$ im Punkte $\vec{x}^0 = (1; 1)$. Skizzieren Sie $N_{10}(f)$ und $T_{\vec{x}^0}$.

Lösung:

a. $\underline{\underline{\operatorname{grad} f\,(x_1, x_2) = (18x_1, 2x_2)}}$

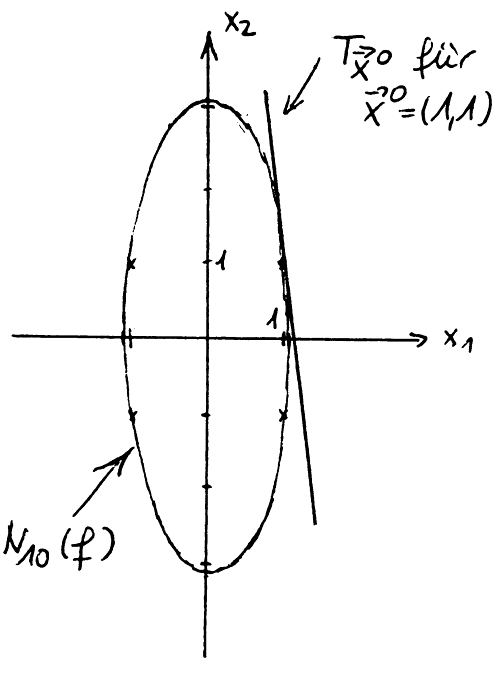
b. Betrachte $\vec{x}^0 = (1; 1)$ (die ersten beiden Koordinaten von $\vec{p}$ sind anzusehen!). Dann gilt für $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\underline{\underline{t(\vec{x})}} = \langle \operatorname{grad} f\,(\vec{x}^0), \vec{x} - \vec{x}^0 \rangle + f(\vec{x}^0)$$
$$= \langle (18, 2), (x_1 - 1, x_2 - 1) \rangle + 10$$
$$= 18(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) + 10 = \underline{\underline{18x_1 + 2x_2 - 10}}.$$ Es folgt:

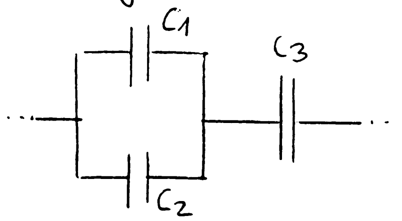
$$\underline{\underline{T_{\vec{p}}}} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = t(x_1, x_2) \}$$
$$= \underline{\underline{\{ (x_1, x_2, 18x_1 + 2x_2 - 10) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}}}.$$

c. Es gilt: $\underline{\underline{T_{\vec{x}^0}}} =$

$$\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \operatorname{grad} f\,(\vec{x}^0), \vec{x} - \vec{x}^0 \rangle = 0 \} =$$
$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (18, 2), (x_1 - 1, x_2 - 1) \rangle = 0 \} =$$
$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 18(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) = 0 \} =$$
$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 18x_1 + 2x_2 - 20 = 0 \} =$$
$$\underline{\underline{\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -9x_1 + 10 \}}}$$



Aufgabe 72.



Die nebenstehende Schaltung enthält drei Kondensatoren C_1, C_2 und C_3, wobei $C_1 = 100\,\mu F$, $C_2 = 150\,\mu F$, $C_3 = 250\,\mu F$.

a. Erläutern Sie, daß sich die Gesamtkapazität durch die Formel $C = \frac{(C_1+C_2)\cdot C_3}{C_1+C_2+C_3}$ berechnen läßt. Berechnen Sie diese.

b. Die Einzelkapazitäten werden um $\Delta C_1 = dC_1 = 2\mu F$, $\Delta C_2 = dC_2 = -1\mu F$ und $\Delta C_3 = dC_3 = 3\mu F$ geändert. Berechnen Sie die Änderung ΔC

i. genau (Taschenrechner!)

ii. näherungsweise durch Berechnung von dC.

Lösung:

a. Bei Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten, bei Reihenschaltung addieren sich ihre Kehrwerte. Also.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1+C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3+C_1+C_2}{(C_1+C_2)\cdot C_3} \Rightarrow$$

$$C = \frac{(C_1+C_2)\cdot C_3}{C_1+C_2+C_3}$$

Hier gilt: $C = \frac{(100+150)\cdot 250}{100+150+250}\frac{(\mu F)^2}{\mu F} = \frac{250\cdot 250}{2\cdot 250}\,\mu F$

$= 125\,\mu F.$

b. i. Es gilt $C + \Delta C = \frac{(102+149)\cdot 253}{102+149+253}\frac{(\mu F)^2}{\mu F} = \frac{251\cdot 253}{504}\,\mu F$

$\cong 125{,}9980159\,\mu F$

$\Rightarrow \Delta C \cong 0{,}9980159\,\mu F$

ii. $$\frac{\partial C}{\partial C_1} = \frac{C_3(C_1+C_2+C_3) - 1\cdot(C_1+C_2)\cdot C_3}{(C_1+C_2+C_3)^2} = \frac{C_3^{\,2}}{(C_1+C_2+C_3)^2};$$

$$\frac{\partial C}{\partial C_2} = \frac{C_3(C_1+C_2+C_3) - 1\cdot(C_1+C_2)\cdot C_3}{(C_1+C_2+C_3)^2} = \frac{C_3^{\,2}}{(C_1+C_2+C_3)^2};$$

$$\frac{\partial C}{\partial C_3} = \frac{(C_1+C_2)(C_1+C_2+C_3) - 1\cdot(C_1+C_2)\cdot C_3}{(C_1+C_2+C_3)^2} = \frac{(C_1+C_2)^2}{(C_1+C_2+C_3)^2}$$

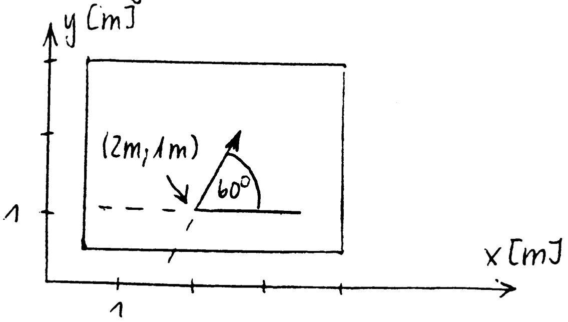
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{dC}} = \frac{\partial C}{\partial C_1} dC_1 + \frac{\partial C}{\partial C_2} dC_2 + \frac{\partial C}{\partial C_3} dC_3$$

$$= \frac{C_3^2(dC_1 + dC_2) + (C_1+C_2)^2 dC_3}{(C_1+C_2+C_3)^2}$$

$$= \frac{250^2(2-1) + (100+150)^2\, 3}{(100+150+250)^2} \; \frac{(\mu F)^3}{(\mu F)^2}$$

$$= \frac{4\cdot 250^2}{500^2}\,\mu F = \underline{\underline{1\,\mu F}}$$

Aufgabe 73



Die Ecken einer dünnen rechteckigen Metallplatte befinden sich in den Punkten (0,5m; 0,5m); (4m; 0,5m); (4m; 3m); (0,5m; 3m). In jedem Punkt (x,y) der Platte beträgt die Temperatur $f(x,y) = \frac{100\,xy}{x^2+y^2}$ °C. Untersuchen Sie, ob die Temperatur der Platte vom Punkt (2m; 1m) in der eingezeichneten Richtung, die einen Winkel von 60° mit der unteren Plattenkante bildet, ansteigt oder abfällt.

Lösung:

Wir betrachten $\vec{v} = (\cos(60°), \sin(60°)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und bestimmen $D_{\vec{v}} f(2m; 1m)$.

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{100y(x^2+y^2) - 2x(100x\cdot y)}{(x^2+y^2)^2} \,°C, \; \frac{100x(x^2+y^2) - 2y(100xy)}{(x^2+y^2)^2} \,°C \right)$$

$$= \left(\frac{100(y^3 - x^2y)}{(x^2+y^2)^2} \,°C, \; \frac{100(x^3 - xy^2)}{(x^2+y^2)^2} \,°C \right)$$

$$\Rightarrow \text{grad } f(2m; 1m) = \left(\frac{100(1-4)}{(4+1)^2} \frac{°C}{m}; \; \frac{100(8-2)}{(4+1)^2} \frac{°C}{m} \right)$$

$$= \left(-12 \frac{°C}{m}, \; 24 \frac{°C}{m} \right)$$

Also: $D_{\vec{v}} f(2m; 1m) = \langle \text{grad } f(2m; 1m), \vec{v} \rangle$

$$= \left\langle \left(-12 \frac{°C}{m}, 24 \frac{°C}{m}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \right\rangle$$

$$= (-6 + 12\sqrt{3}) \frac{°C}{m} \cong 14{,}7846097 \frac{°C}{m}$$

$D_{\vec{v}} f(2m; 1m) > 0 \Rightarrow$ die Temperatur nimmt in der eingezeichneten Richtung zu

Aufgabe 74.

Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Skalarfelder:

a. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = \sinh(4x_1 + 3x_2^2)$

b. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3^x \cdot y + \exp(y\cdot z) + z$

Lösung:

a. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \cosh(4x_1+3x_2^2)\cdot 4$; $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \cosh(4x_1+3x_2^2)\cdot 6x_2 \Rightarrow$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = 4\sinh(4x_1+3x_2^2)\cdot 4 = 16\sinh(4x_1+3x_2^2)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 4\sinh(4x_1+3x_2^2)\cdot 6x_2 = 24x_2\sinh(4x_1+3x_2^2)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = 6x_2\sinh(4x_1+3x_2^2)\cdot 4 = 24x_2\sinh(4x_1+3x_2^2)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 6\cosh(4x_1+3x_2^2) + 6x_2\sinh(4x_1+3x_2^2)\cdot 6x_2$

$= 6\cosh(4x_1+3x_2^2) + 36x_2^2\sinh(4x_1+3x_2^2)$

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \ln(3)\cdot 3^x\cdot y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3^x + z\cdot\exp(y\cdot z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y\cdot\exp(y\cdot z)+1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = (\ln(3))^2\cdot 3^x\cdot y$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \ln(3)\cdot 3^x$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \ln(3)\cdot 3^x$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = z^2\cdot\exp(y z)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \exp(y\cdot z) + z\cdot\exp(y\cdot z)y = \exp(y\cdot z)\cdot(z\cdot y+1)$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \exp(y\cdot z) + y\cdot\exp(y\cdot z)\cdot z = \exp(y\cdot z)\cdot(z\cdot y+1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = y\cdot\exp(y\cdot z)\,y = y^2\exp(yz)$

Aufgabe 75.

a. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$f(x,y) = (x+y)^3 - 12xy$

b. Zeigen Sie, daß $f: U \to \mathbb{R}$ mit $U = \{(x,y) \mid x+y > 0\}$ und $f(x,y) = x \cdot \ln(x+y) - y$ keine lokalen Extrema hat.

Lösung:

a. 1. Schritt:

$$\operatorname{grad} f(x^0, y^0) = \vec{0} \iff (3(x^0+y^0)^2 - 12y^0,\ 3(x^0+y^0)^2 - 12x^0) = \vec{0} \iff$$

$$(x^0+y^0)^2 - 4y^0 = 0 \text{ und } (x^0+y^0)^2 - 4x^0 = 0 \overset{1.\text{gl.} - 2.\text{gl.}}{\iff}$$

$$-4y^0 + 4x^0 = 0 \text{ und } (x^0+y^0)^2 - 4x^0 = 0 \iff$$

$$x^0 = y^0 \text{ und } (2x^0)^2 - 4x^0 = 0 \iff x^0 = y^0 \text{ und } x^{0^2} - x^0 = 0 \iff$$

$$x^0 = y^0 \text{ und } x^0(x^0 - 1) = 0 \iff x^0 = y^0 \text{ und } (x^0 = 0 \text{ oder } x^0 = 1) \iff$$

$$\underline{\underline{(x^0, y^0) = (0,0)}} \text{ oder } \underline{\underline{(x^0, y^0) = (1,1)}}$$

2. Schritt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (3(x+y)^2 - 12y,\ 3(x+y)^2 - 12x) \Rightarrow$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y) - 12 \\ 6(x+y) - 12 & 6(x+y) \end{pmatrix}$$

i. $\Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Hf(0,0) = -144 < 0 \Rightarrow$

$\underline{\underline{f \text{ hat in } (0,0) \text{ einen Sattelpunkt.}}}$

ii. $\Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Hf(1,1) = 144 > 0 \Rightarrow$

$\underline{\underline{f \text{ hat in } (1,1) \text{ ein lokales Extremum.}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{dies ist ein lokales Minimum.}}}$

Endergebnis: f hat in $(1,1)$ ein lokales Minimum mit $f(1,1) = -4$.

b. <u>1. Schritt:</u>

$$\operatorname{grad} f(x^0,y^0)=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\ln(x^0+y^0)+\frac{x^0}{x^0+y^0},\ \frac{x^0}{x^0+y^0}-1\right)=(0,0) \underset{\text{2. Gl. in 1. Gl.}}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(x^0+y^0)+\frac{x^0}{x^0+y^0}=0 \quad \text{und} \quad \frac{x^0}{x^0+y^0}-1=0 \underset{\text{2. Gl.}\cdot(x^0+y^0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(x^0+y^0)+1=0 \quad \text{und} \quad x^0-x^0-y^0=0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^0+y^0)=-1 \quad \text{und} \quad y^0=0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^0)=-1 \quad \text{und} \quad y^0=0 \Leftrightarrow x^0=\frac{1}{e} \quad \text{und} \quad y^0=0 \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{(x^0,y^0)=\left(\tfrac{1}{e},0\right).}}$$

<u>2. Schritt:</u>

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(\ln(x+y)+\frac{x}{x+y},\ \frac{x}{x+y}-1\right) \Rightarrow$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{1}{x+y}+\frac{x+y-x}{(x+y)^2}, & \frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2} \\ \frac{x+y-x}{(x+y)^2}, & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{x+2y}{(x+y)^2}, & \frac{y}{(x+y)^2} \\ \frac{y}{(x+y)^2}, & \frac{-x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{e},0\right)=\begin{pmatrix} e, & 0 \\ 0, & -e \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det Hf\left(\tfrac{1}{e},0\right)=-e^2<0 \Rightarrow \underline{\underline{f \text{ hat in } \left(\tfrac{1}{e},0\right) \text{ einen}}}$$
<u><u>Sattelpunkt.</u></u>

<u><u>Endergebnis:</u></u> f hat keine lokalen Extrema.

* **Aufgabe 76**

Die Raumdiagonale eines Quaders mit Seitenlängen x, y, z hat die Länge $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Es ist ein Quader mit maximalem Volumen zu bestimmen, dessen Raumdiagonale gleich $2\sqrt{3}$ ist.

Lösung:

Der gesuchte Quader habe die Seitenlängen $x, y, z > 0$.

Es gilt $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{3} \overset{(\,)^2}{\Leftrightarrow} x^2+y^2+z^2 = 12 \Rightarrow z^2 = 12-x^2-y^2$.

Es genügt, x, y, z so zu wählen, daß das Quadrat des Quadervolumens maximal wird, also $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$. Wegen $z^2 = 12-x^2-y^2$ ist ein Maximum von

$f: U \to \mathbb{R}$, $U = \{(x,y) \mid x>0, y>0\}$, $f(x,y) = x^2 \cdot y^2 \cdot (12-x^2-y^2)$

$= 12x^2y^2 - y^2x^4 - x^2y^4$

zu bestimmen.

1. Schritt:

$\operatorname{grad} f(x^0, y^0) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(24x^0(y^0)^2 - 4(y^0)^2(x^0)^3 - 2x^0(y^0)^4,\ 24(x^0)^2y^0 - 2y^0(x^0)^4 - 4(x^0)^2(y^0)^3) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$12x^0(y^0)^2 - 2(x^0)^3(y^0)^2 - x^0(y^0)^4 = 0$ und

$12(x^0)^2y^0 - y^0(x^0)^4 - 2(x^0)^2(y^0)^3 = 0 \quad \overset{x^0 \neq 0,\ y^0 \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$12 - 2(x^0)^2 - (y^0)^2 = 0$ und $12 - (x^0)^2 - 2(y^0)^2 = 0 \quad \overset{1.\text{gl.} - 2.\text{gl.}}{\Leftrightarrow}$

$12 - 2(x^0)^2 - (y^0)^2 = 0$ und $-(x^0)^2 + (y^0)^2 = 0 \quad \overset{x^0, y^0 > 0}{\Leftrightarrow}$

$12 - 2(x^0)^2 - (y^0)^2 = 0$ und $x^0 = y^0 \quad \Leftrightarrow$

$12 - 2(x^0)^2 - (x^0)^2 = 0$ und $x^0 = y^0 \quad \Leftrightarrow$

$12 = 3(x^0)^2$ und $x^0 = y^0 \quad \overset{x^0 > 0}{\Leftrightarrow}$

$(x^0)^2 = 4$ und $x^0 = y^0 \quad \Leftrightarrow$

$x^0 = y^0 = 2 \quad \Leftrightarrow$

$(x^0, y^0) = (2;2)$

2. Schritt:

$\operatorname{grad} f(x,y) = (24xy^2 - 4y^2x^3 - 2xy^4,\ 24x^2y - 2yx^4 - 4x^2y^3) \Rightarrow$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 24y^2 - 12y^2x^2 - 2y^4, & 48xy - 8yx^3 - 8xy^3 \\ 48xy - 8yx^3 - 8xy^3, & 24x^2 - 2x^4 - 12x^2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} -128 ; & -64 \\ -64 ; & -128 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(2,2) = 128^2 - 64^2 > 0 \Rightarrow$ f hat in (2,2) ein lokales Extremum.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = -128 < 0 \Rightarrow$ dies ist ein lokales Maximum.

Setze also $x = y = 2 \Rightarrow z^2 = 4 \overset{z>0}{\Rightarrow} z = 2$.

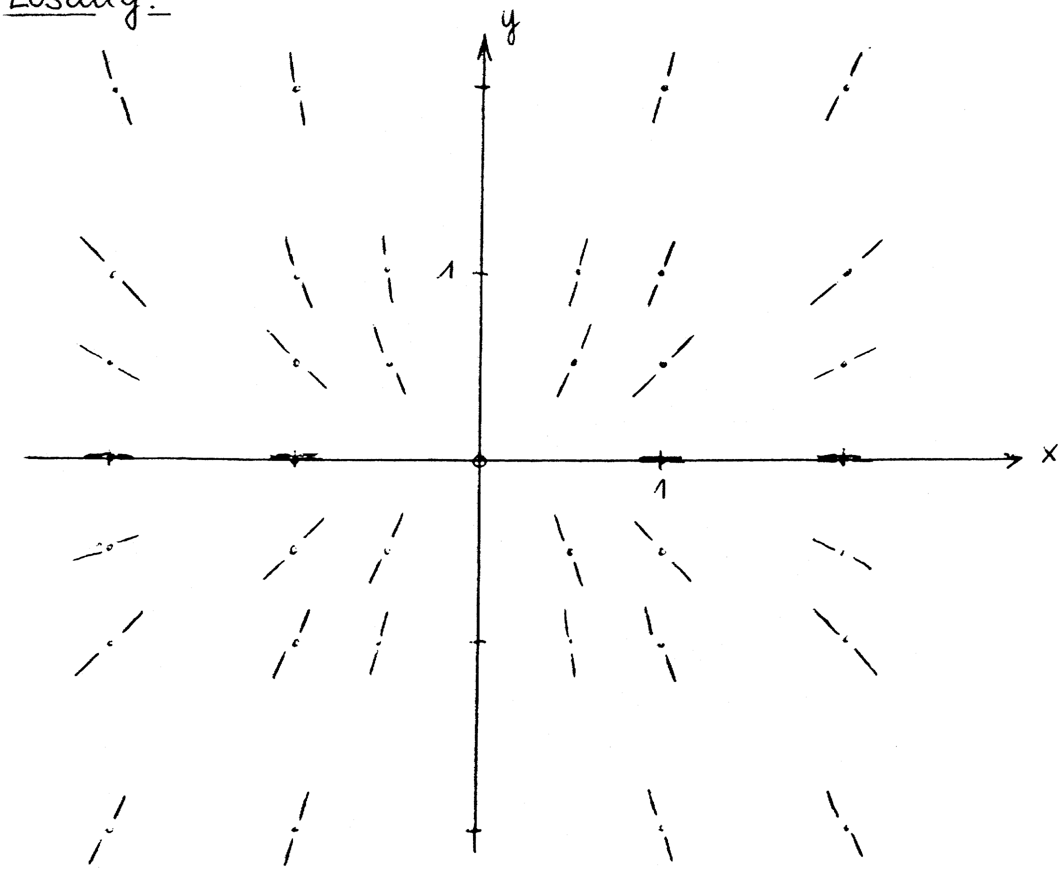
Endergebnis: Die Seiten des Quaders sind gleich 2 (LE) zu wählen (der Quader ist also ein Würfel!); er hat dann ein Volumen von 8 (LE^3).

Aufgabe 77.

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$y' = 2\frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Lösung:



Aufgabe 78.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme durch Trennung der Variablen:

a. $y' = 2\frac{y}{x}$, $y(1) = 4$ (vgl. Aufgabe 77)

b. $y' = 2xy$

c. $y' = -\frac{xy}{1+x^2}$

Lösung:

a. ① $y = 0$ ist offenbar eine Lösung der Differentialgleichung.

② Sei nun $y \neq 0$.

$$y' = 2\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = 2\cdot\frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{1}{y}\,dy = 2\int\frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + K \quad (K\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$$|y| = \exp(K + 2\cdot\ln|x|) \Leftrightarrow |y| = \exp(K)\cdot\exp(\ln|x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$|y| = \exp(K)\cdot x^2 \Leftrightarrow y = C\cdot x^2 \quad (C\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

① und ② liefern als allgemeine Lösung der DGL:

$$y = C\cdot x^2 \quad (C\in\mathbb{R})$$

③ $y(1) = 4 \Leftrightarrow C\cdot 1^2 = 4 \Leftrightarrow C = 4$

Endergebnis: $\underline{\underline{y = 4\cdot x^2}}$ löst das Anfangswertproblem

b. ① $y = 0$ ist eine Lösung.

② Sei nun $y \neq 0$.

$$y' = 2xy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx \Leftrightarrow$$

$$\ln|y| = x^2 + K \quad (K\in\mathbb{R}) \Leftrightarrow |y| = \exp(x^2 + K) \Leftrightarrow$$

$$|y| = \exp(K)\cdot\exp(x^2) \Leftrightarrow y = C\cdot\exp(x^2) \quad (C\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

① und ② liefern als allgemeine Lösung der DGL:

$\underline{\underline{y = C\cdot\exp(x^2) \quad (C\in\mathbb{R}).}}$

c. ① $y = 0$ ist eine Lösung.

② Sei $y \neq 0$.

$$y' = -\frac{xy}{1+x^2} \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1+x^2} \iff \frac{1}{y}\,dy = -\frac{x}{1+x^2}\,dx \iff$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \iff \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K \quad (K \in \mathbb{R}) \iff$$

$$\ln|y| = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + K \iff |y| = \exp(K)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff$$

$$y = C\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (C \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

① und ② liefern als allgemeine Lösung der DGL:

$$\underline{\underline{y = C\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (C \in \mathbb{R}).}}$$

Aufgabe 79.

Ein Körper der Masse m und der konstanten spezifischen Wärme c kühle sich von der Anfangstemperatur ϑ_2 auf die Temperatur ϑ_1 der Umgebung ab. $\vartheta = \vartheta(t)$ beschreibe den Verlauf der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit. Für die zeitliche Änderung der Wärmemenge Q gilt einerseits: $\frac{dQ}{dt} = m \cdot c \frac{d\vartheta}{dt}$, andererseits $\frac{dQ}{dt} = -k(\vartheta - \vartheta_1)$, wobei $k>0$ konstant ist. Bestimmen Sie $\vartheta(t)$

Lösung:

$$\frac{dQ}{dt} = mc \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \text{ und } \frac{dQ}{dt} = -k(\vartheta-\vartheta_1) \Rightarrow mc \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = -k(\vartheta - \vartheta_1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{k}{m \cdot c}(\vartheta-\vartheta_1) \\ \vartheta(0) &= \vartheta_2 \end{aligned}\right\} \text{ zu lösende Anfangswertaufgabe.}$$

① $\vartheta = \vartheta_1$ ist Lösung der DGL

② Sei $\vartheta \neq \vartheta_1$.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{k}{m \cdot c}(\vartheta - \vartheta_1) \Leftrightarrow \frac{1}{\vartheta - \vartheta_1} = -\frac{k}{m \cdot c} dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{\vartheta - \vartheta_1} d\vartheta =$$

$$-\frac{k}{m \cdot c}\int dt \Leftrightarrow \ln|\vartheta - \vartheta_1| = -\frac{k}{m \cdot c} t + \tilde{C} \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$$|\vartheta - \vartheta_1| = \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} t + \tilde{C}\right) \Leftrightarrow |\vartheta - \vartheta_1| = \exp(\tilde{C}) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} t\right) \Leftrightarrow$$

$$\vartheta - \vartheta_1 = \hat{C} \cdot \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} t\right) \quad (\hat{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \Leftrightarrow \vartheta = \vartheta_1 + \hat{C} \cdot \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} t\right)$$

① und ② liefern als allgemeine Lösung der DGL:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \hat{C} \cdot \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t\right) \quad (\hat{C} \in \mathbb{R})$$

③ $\vartheta(0) = \vartheta_2 \Leftrightarrow \vartheta_2 = \vartheta_1 + \hat{C} \Leftrightarrow \hat{C} = \vartheta_2 - \vartheta_1$

Endergebnis: $\vartheta = \vartheta(t) = \vartheta_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \exp\left(-\frac{k}{m \cdot c} \cdot t\right)$

Aufgabe 80.

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

a. $y' = (y-x)^2 + 5$

b. $y' = \frac{y+x}{x}, \quad x \neq 0$

c. $y' = (x + \exp(y) - 1) \cdot \exp(-y)$

Lösung:

a. Ansatz: $z = y - x$

Aufstellen einer DGL für z:

$$z = y - x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z' = y' - 1 \\ y' = (y-x)^2 + 5 = z^2 + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow z' = z^2 + 4$$

Lösen der DGL für z:

$$z' = z^2 + 4 \iff \frac{dz}{dx} = z^2 + 4 \iff \frac{1}{z^2+4}\,dz = dx \iff$$

$$\int \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int dx \quad (*)$$

Nebenrechnung:

$$\int \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2+1\right)}\,dz = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{z}{2}\right)^2+1}\,dz = \boxtimes$$

Substitution: $u = \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{du}{dz} = \frac{1}{2} \Rightarrow dz = 2\,du$

$$\boxtimes = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} \cdot 2\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan(u) + \tilde{C}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) + \tilde{C}$$

$$(*) \iff \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right) = x + K \quad (K \in \mathbb{R}) \iff \arctan\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$2x + C \quad (C \in \mathbb{R}) \iff \frac{z}{2} = \tan(2x + C) \iff z = 2\tan(2x+C)$$

Rücksubstitution:

$z = y - x$ und $z = 2\tan(2x+C) \Rightarrow y = 2\tan(2x+C) + x$

Endergebnis:

$$y = 2\tan(2x+C) + x \quad (C \in \mathbb{R})$$

b. Ansatz: $z = \frac{y}{x}$

Aufstellen einer DGL für z:

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \cdot x \Rightarrow y' = z' \cdot x + z \\ y' = \frac{y+x}{x} = \frac{y}{x} + 1 = z+1 \end{array} \right\} \Rightarrow z' x + z = z+1$$

$$\Rightarrow z' \cdot x = 1 \Rightarrow z' = \frac{1}{x}$$

Lösen der DGL für z (direkte Integration!):

$z = \ln|x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Rücksubstitution:

$z = \frac{y}{x}$ und $z = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow$

$y = x \cdot \ln|x| + C \cdot x$

Endergebnis:

$y = x \cdot \ln|x| + C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R})$

c. Ansatz: $z = x + \exp(y) - 1$

Aufstellen einer DGL für z:

$$z = x + \exp(y) - 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z' = 1 + \exp(y) \cdot y' \\ y' = (x + \exp(y) - 1) \cdot \exp(-y) = z \cdot \exp(-y) \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow z' = 1 + z$

Lösen der DGL für z:

① $z = -1$ ist eine Lösung

② Sei $z \neq -1$.

$z' = 1 + z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z \Leftrightarrow \frac{1}{1+z} dz = dx \Leftrightarrow \ln|z+1| = x + K$

$(K \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow |z+1| = \exp(K) \cdot \exp(x) \Leftrightarrow z + 1 = C \cdot \exp(x) \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$\Leftrightarrow z = C \cdot \exp(x) - 1.$

① und ② liefern als allgemeine Lösung der DGL für z:

$z = C \exp(x) - 1 \quad (C \in \mathbb{R})$

Rücksubstitution:

$z = x + \exp(y) - 1$ und $z = C \cdot \exp(x) - 1 \Rightarrow x + \exp(y) =$

$C \cdot \exp(x) \Rightarrow \exp(y) = C \cdot \exp(x) - x \Rightarrow y = \ln(C \cdot \exp(x) - x)$

Endergebnis:

$$y = \ln(C \cdot \exp(x) - x) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 8.1.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen:

a. $y' = -2xy + x \cdot \exp(-x^2)$

b. $y' + 3y = \exp(2x) + 6$

Lösung:

a. 1. Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$y' = -2xy$ durch Trennung der Variablen

ⓐ $y = 0$ ist eine Lösung

ⓑ Für $y \neq 0$ gilt: $y' = -2xy \iff \frac{dy}{dx} = -2xy \iff \frac{1}{y}\,dy =$

$-2x\,dx \iff \int \frac{1}{y}\,dy = -2\int x\,dx \iff \ln|y| = -x^2 + K \;(K \in \mathbb{R}) \iff$

$|y| = \exp(K) \cdot \exp(-x^2) \iff y = C \cdot \exp(-x^2) \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Insgesamt: $\underline{y_h = C \cdot \exp(-x^2) \quad (C \in \mathbb{R})}$

2. Schritt: Variation der Konstanten

Ansatz: $y_s = c(x) \cdot \exp(-x^2)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & y_s' = \underline{-2x\,c(x) \cdot \exp(-x^2)} + x \cdot \exp(-x^2) \\ \text{II.} & y_s' = c'(x) \cdot \exp(-x^2) + \underline{c(x) \cdot \exp(-x^2) \cdot (-2x)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$c'(x) \cdot \exp(-x^2) = x \cdot \exp(-x^2) \Rightarrow c'(x) = x$

Setze $c(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow \underline{y_s = \frac{1}{2}x^2 \cdot \exp(-x^2)}$

3. Schritt:

$$\underline{\underline{y}} = y_h + y_s = \underline{\underline{C \cdot \exp(-x^2) + \frac{1}{2}x^2 \exp(-x^2) \quad (C \in \mathbb{R})}}$$

b. 1. Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$y' = -3y$ durch Trennung der Variablen

ⓐ $y = 0$ ist eine Lösung

ⓑ Für $y \neq 0$ gilt: $y' = -3y \iff \frac{dy}{dx} = -3y \iff \frac{1}{y}\,dy =$

$-3\,dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -3\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = -3x + K \quad (K \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$|y| = \exp(K)\cdot\exp(-3x) \Leftrightarrow y = C\cdot\exp(-3x) \quad (C \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$

Insgesamt: $\underline{y_h = C\cdot\exp(-3x) \quad (C \in \mathbb{R})}$

<u>2. Schritt:</u> Variation der Konstanten

Ansatz: $y_s = c(x)\cdot\exp(-3x)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & y_s' = -3c(x)\cdot\exp(-3x) + \exp(2x) + 6 \\ \text{II.} & y_s' = c'(x)\cdot\exp(-3x) + c(x)\cdot\exp(-3x)\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$c'(x)\cdot\exp(-3x) = \exp(2x) + 6 \Rightarrow c'(x) = \exp(5x) + 6\exp(3x)$

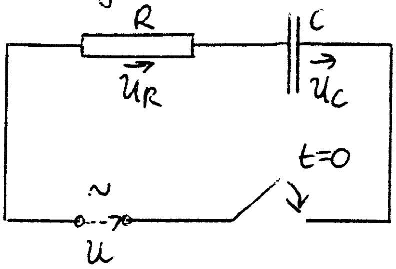
Setze $c(x) = \frac{1}{5}\exp(5x) + 2\exp(3x) \Rightarrow$

$\underline{y_s = \frac{1}{5}\exp(2x) + 2}$

<u>3. Schritt:</u>

$\underline{\underline{y}} = y_h + y_s = \underline{\underline{C\cdot\exp(-3x) + \frac{1}{5}\exp(2x) + 2 \quad (C \in \mathbb{R})}}$

Aufgabe 82.



Gegeben ist eine Reihenschaltung von einem Ohmschen Widerstand R und einem Kondensator mit Kapazität C, an die zum Zeitpunkt t=0 eine Wechselspannung der Form $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ angelegt wird. Der Kondensator ist im Einschaltmoment ungeladen. Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung $u_C(t)$.

a. Zeigen Sie, daß das folgende Anfangswertproblem zu lösen ist: $\frac{d}{dt} u_C(t) + \frac{1}{\tau} u_C(t) = \frac{\hat{u}}{\tau} \sin(\omega t)$, $\tau = R \cdot C$, $u_C(0) = 0$.

b. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem.

* Tip (ist nachzuweisen): $\int \exp(\frac{1}{\tau} t) \sin(\omega t)\, dt = \frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \exp(\frac{1}{\tau} t) \left(\frac{1}{\omega^2 \tau} \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right) + \text{const.}$

Lösung:

a. Aufstellen der Differentialgleichung für $u_C(t)$

1) $u_R(t) + u_C(t) = u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

2) a) $u_R(t) = R \cdot I(t)$
b) $I(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t)$

$\Rightarrow RC \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = \hat{u} \sin(\omega t) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} u_C(t) + \frac{1}{\tau} u_C(t) = \frac{\hat{u}}{\tau} \sin(\omega t) \quad , \quad \tau = R \cdot C.}}$$

Anfangsbedingung:

Kondensator ist im Einschaltmoment ungeladen $\Rightarrow$ $\underline{\underline{u_C(0) = 0}}$

b. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

1. Schritt: Lösen der zugehörigen homogenen DGL $\frac{d}{dt} u_C(t) = -\frac{1}{\tau} u_C(t)$ durch Trennung der Variablen.

ⓐ $u_c = 0$ ist sicher eine Lösung

ⓑ Für $u_c \neq 0$ gilt: $\frac{d}{dt} u_c = -\frac{1}{\tau} u_c \Leftrightarrow \frac{1}{u_c} du_c = -\frac{1}{\tau} dt \Leftrightarrow$

$\int \frac{1}{u_c} du_c = -\frac{1}{\tau} \int dt \Leftrightarrow \ln|u_c| = -\frac{1}{\tau} t + K \quad (K \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$|u_c| = \exp(K) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t) \Leftrightarrow u_c = \tilde{C} \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t) \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Also: $\underline{u_{c,h}(t) = \tilde{C} \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t) \quad (\tilde{C} \in \mathbb{R})}$

<u>2. Schritt:</u> Variation der Konstanten

<u>Ansatz</u>: $u_{c,s}(t) = \tilde{C}(t) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } \frac{d}{dt} u_{c,s}(t) = \underline{-\frac{1}{\tau} \tilde{C}(t) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t)} + \frac{\hat{u}}{\tau} \sin(\omega t) \\ \text{II. } \frac{d}{dt} u_{c,s}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{C}(t) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau}t) + \underline{\tilde{C}(t) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t) \cdot (-\frac{1}{\tau})} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{C}(t) \cdot \exp(-\frac{1}{\tau} t) = \frac{\hat{u}}{\tau} \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \tilde{C}(t) = \frac{\hat{u}}{\tau} \exp(\frac{1}{\tau} t) \sin(\omega t)$$

<u>Nebenrechnung (Tip):</u> $\int \exp(\frac{1}{\tau} t) \sin(\omega t) dt = ?$

1. partielle Integration: $f(t) = \exp(\frac{1}{\tau} t)$, $\dot{f}(t) = \frac{1}{\tau} \exp(\frac{1}{\tau} t)$

$g(t) = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)$, $\dot{g}(t) = \sin(\omega t)$

$$\underline{\int \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \sin(\omega t) dt} = \int f(t) \dot{g}(t) dt = f(t) \cdot g(t) - \int \dot{f}(t) g(t) dt =$$

$$-\frac{1}{\omega} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \int \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cos(\omega t) dt = ⊛$$

2. partielle Integration: $f(t) = \exp(\frac{1}{\tau} t)$, $\dot{f}(t) = \frac{1}{\tau} \exp(\frac{1}{\tau} t)$

$h(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$, $\dot{h}(t) = \cos(\omega t)$

$$⊛ = -\frac{1}{\omega} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \int f(t) \cdot \dot{h}(t) dt = -\frac{1}{\omega} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cos(\omega t)$$

$$+ \frac{1}{\omega\tau} f(t) \cdot h(t) - \frac{1}{\omega\tau} \int \dot{f}(t) h(t) dt = \underline{-\frac{1}{\omega} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cdot \cos(\omega t) +}$$

$$\underline{\frac{1}{\omega^2\tau} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cdot \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega^2\tau^2} \int \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cdot \sin(\omega t) dt} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{\omega^2\tau^2}\right) \int \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \cos(\omega t) +$$

$$\frac{1}{\omega^2\tau} \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \sin(\omega t) + \text{const.} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + \omega^2\tau^2}{\omega^2\tau^2} \int \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \sin(\omega t) dt = \exp(\tfrac{1}{\tau} t) \left[\frac{1}{\omega^2\tau} \sin(\omega t) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right] + \text{const} \Rightarrow$$

$$\int \exp\left(\tfrac{1}{\tau}t\right)\sin(\omega t)\,dt = \frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\exp\left(\tfrac{1}{\tau}t\right)\left[\frac{1}{\omega^2\tau}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right] + \text{const.}$$

Ende Nebenrechnung!

Sehe also $\tilde{c}(t) = \frac{\hat{u}}{\tau}\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\exp\left(\tfrac{1}{\tau}t\right)\left[\frac{1}{\omega^2\tau}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right] \Rightarrow$

$$u_{c,s}(t) = \frac{\hat{u}}{1+\omega^2\tau^2}\left(\sin(\omega t) - \omega\tau\cos(\omega t)\right)$$

3. Schritt:

$$u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,s}(t) = \tilde{C}\cdot\exp\left(-\tfrac{1}{\tau}t\right) + \frac{\hat{u}}{1+\omega^2\tau^2}\left(\sin(\omega t) - \omega\tau\cos(\omega t)\right)$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u_c(0) = 0 \iff \tilde{C} - \frac{\hat{u}\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} = 0 \iff \tilde{C} = \frac{\hat{u}\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

Endergebnis also:

$$u_c(t) = \frac{\hat{u}\omega t}{1+\omega^2\tau}\exp\left(-\tfrac{1}{\tau}t\right) + \frac{\hat{u}}{1+\omega^2\tau^2}\left(\sin(\omega t) - \omega\tau\cos(\omega t)\right)$$

(In der Physik wird der 2. Summand oft noch in folgender Form geschrieben:

$\frac{\hat{u}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\sin(\omega t - \varphi)$, $\varphi = \arctan(\omega\tau)$)

Aufgabe 83

Bestimmen Sie alle Lösungen $y \neq 0$ von $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} y^2$.

Lösung:

Es handelt sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = 2$.

Ansatz: $z = y^{1-\alpha} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

Aufstellen einer DGL für z:

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = \left(-\frac{1}{y^2}\right) \cdot y' = -z^2 y' \\ y' = -\frac{1}{x} y + \frac{1}{x} y^2 = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{z'} = -z^2\left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z^2}\right) = \underline{\frac{1}{x} z - \frac{1}{x}}$$

Lösen der DGL für z:

1. Schritt: Lösen der homogenen DGL $z' = \frac{1}{x} z$

(a) $z = 0$ ist Lösung

(b) Für $z \neq 0$ gilt: $z' = \frac{1}{x} z \iff \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z \iff \frac{1}{z} dz = \frac{1}{x} dx$

$\iff \ln|z| = \ln|x| + K \quad (K \in \mathbb{R}) \iff |z| = |x| \cdot \exp(K) \iff$

$z = C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

Also: $\underline{z_h = C \cdot x \quad (C \in \mathbb{R})}$

2. Schritt: Variation der Konstanten

Ansatz: $z_s = c(x) \cdot x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } z_s' = \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x - \frac{1}{x} \\ \text{II. } z_s' = c'(x) \cdot x + c(x) \end{array}\right\} \Rightarrow c'(x) \cdot x = -\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$c'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Setze $c(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \underline{z_s = 1.}$

3. Schritt: $\underline{z} = z_h + z_s = \underline{C \cdot x + 1 \quad (C \in \mathbb{R})}$

Rücksubstitution:

$$\underline{\underline{y}} = \frac{1}{z} = \underline{\underline{\frac{1}{C \cdot x + 1}}} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 84.

Bestimmen Sie mit Hilfe von Tabelle 7.4.3. die Lösung von

a. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

b. $y'' - 4y' + 4y = 0$ $\qquad$ c. $8y'' - 2y' - y = 0$

Lösung:

a. Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10.$

Es hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i.$

Also gilt:

$y = c_1 \exp(x) \cos(3x) + c_2 \exp(x) \sin(3x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \exp(x) \sin(3x)$

$y' = c_2 \exp(x) (\sin(3x) + 3\cos(3x))$ und $y'(0) = 1 \Rightarrow$

$3c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}.$

Also: $y = \frac{1}{3} \exp(x) \sin(3x)$

b. Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$

Es hat die doppelte Nullstelle $\lambda = 2.$

Also: $y = c_1 \exp(2x) + c_2 x \exp(2x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

c. Zu lösen ist $y'' - \frac{1}{4} y' - \frac{1}{8} = 0.$

Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8}.$

Es hat die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{8}{64}} = \frac{1}{8} \pm \frac{3}{8}$, d.h.

$\lambda_1 = \frac{1}{2}; \ \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$

Also: $y = c_1 \exp(\frac{1}{2}x) + c_2 \exp(-\frac{1}{4}x). \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Aufgabe 85.

Lösen Sie das folgende Schwingungsproblem ("schwache Dämpfung"):

$$\frac{d^2}{dt^2} s(t) + 2\delta \frac{d}{dt} s(t) + k^2 s(t) = 0, \quad s(0)=0, \quad \frac{d}{dt} s(0) = v_0,$$

wobei $0 < \delta < k$.

Lösung:

ⓐ Lösung der DGL $\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + k^2 s = 0$:

Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + k^2;$$

es hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\underbrace{\delta^2 - k^2}_{<0}} = -\delta \pm i\cdot\omega$

mit $\omega = \sqrt{k^2 - \delta^2}$.

Also: $\underline{s(t) = c_1 \exp(-\delta t)\cos(\omega t) + c_2 \exp(-\delta t)\sin(\omega t)}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$\underline{\omega = \sqrt{k^2 - \delta^2}}$

ⓑ Auswerten der Anfangsbedingungen:

$s(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow s(t) = c_2 \cdot \exp(-\delta t)\sin(\omega t)$

$\dot{s}(t) = c_2 \cdot (-\delta)\exp(-\delta t)\sin(\omega t) + c_2 \exp(-\delta t)\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)$

$= c_2 \exp(-\delta t)\,(\omega\cos(\omega t) - \delta\sin(\omega t))$ und $\dot{s}(0) = v_0 \Rightarrow$

$c_2 \cdot \omega = v_0 \Rightarrow c_2 = \frac{v_0}{\omega}$.

Also: $\underline{\underline{s(t) = \frac{v_0}{\omega}\exp(-\delta t)\sin(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{k^2 - \delta^2}}}$.

Aufgabe 86.

Bestimmen Sie eine spezielle Lösung y_s der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen:

a. $y'' + y = 3x^2$ b. $y'' + y' = x$

c. $y'' + y = \exp(2x)\cos(3x)$ d. $y'' - 2y' + y = \exp(x)$

Lösung:

a. Da 0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ ist, lautet der Ansatz:

$y_s = ax^2 + bx + c \Rightarrow$

$y_s' = 2ax + b \Rightarrow$

$y_s'' = 2a$

Einsetzen in die DGL ergibt

$2a + ax^2 + bx + c = 3x^2 \Rightarrow$

$ax^2 + bx + (2a+c) = 3x^2 + 0x + 0 \Rightarrow$

$a = 3$ und $b = 0$ und $c = -6$.

Also: $\underline{\underline{y_s = 3x^2 - 6.}}$

b. Da 0 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$ ist, lautet der Ansatz:

$y_s = ax^2 + bx \Rightarrow y_s' = 2ax + b \Rightarrow y_s'' = 2a$

Einsetzen die DGL ergibt:

$2a + 2ax + b = x \Rightarrow$

$2ax + (2a+b) = 1 \cdot x + 0 \Rightarrow$

$2a = 1$ und $2a + b = 0 \Rightarrow$

$a = \frac{1}{2}$ und $b = -1$.

Also: $\underline{\underline{y_s = \frac{1}{2}x^2 - x.}}$

c. Da $2+3i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)=\lambda^2+1$ ist, lautet der Ansatz:

$$y_s = C\exp(2x)\cos(3x) + \tilde{C}\exp(2x)\sin(3x) \Rightarrow$$

$$y_s' = 2C\exp(2x)\cos(3x) - 3C\exp(2x)\sin(3x) + 2\tilde{C}\exp(2x)\sin(3x) + 3\tilde{C}\exp(2x)\cos(3x)$$

$$= (2C+3\tilde{C})\exp(2x)\cos(3x) + (2\tilde{C}-3C)\exp(2x)\sin(3x) \Rightarrow$$

$$y_s'' = 2(2C+3\tilde{C})\exp(2x)\cos(3x) - 3(2C+3\tilde{C})\exp(2x)\sin(3x) + 2(2\tilde{C}-3C)\exp(2x)\sin(3x) + 3(2\tilde{C}-3C)\exp(2x)\cos(3x)$$

$$= (12\tilde{C}-5C)\exp(2x)\cos(3x) - (12C+5\tilde{C})\exp(2x)\sin(3x)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$(12\tilde{C}-5C)\exp(2x)\cos(3x) - (12C+5\tilde{C})\exp(2x)\sin(3x) + C\exp(2x)\cos(3x) + \tilde{C}\exp(2x)\sin(3x) = \exp(2x)\cos(3x) \Rightarrow$$

$$(12\tilde{C}-4C)\exp(2x)\cos(3x) + (-12C-4\tilde{C})\exp(2x)\sin(3x) = 1\cdot\exp(2x)\cos(3x) + 0\cdot\exp(2x)\sin(3x) \Rightarrow$$

$$12\tilde{C}-4C = 1 \quad \text{und} \quad -12C-4\tilde{C} = 0 \Rightarrow$$

$$-36C-4C = 1 \quad \text{und} \quad \tilde{C} = -3C \Rightarrow$$

$$C = -\frac{1}{40} \quad \text{und} \quad \tilde{C} = \frac{3}{40}$$

Also: $\underline{\underline{y_s}} = -\frac{1}{40}\exp(2x)\cos(3x) + \frac{3}{40}\exp(2x)\sin(3x)$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{40}\exp(2x)\left(3\sin(3x) - \cos(3x)\right)}}$$

d. Da 1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2$ ist, lautet der Ansatz:

$$y_s = C\cdot x^2\cdot\exp(x) \Rightarrow$$

$$y_s' = C\cdot 2x\exp(x) + C\cdot x^2\cdot\exp(x) = C(2x+x^2)\exp(x) \Rightarrow$$

$$y_s'' = C(2+2x)\exp(x) + C(2x+x^2)\exp(x) = C(x^2+4x+2)\cdot\exp(x)$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$C(x^2+4x+2)\exp(x) - 2C(x^2+2x)\exp(x) + Cx^2\exp(x) = \exp(x) \Rightarrow$

$C(x^2-2x^2+x^2+4x-4x+2)\exp(x) = \exp(x) \Rightarrow$

$2C\exp(x) = 1\cdot\exp(x) \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Also: $\underline{\underline{y_S = \frac{1}{2}x^2\exp(x)}}$

Aufgabe 87.

Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2} s(t) + 2\delta \frac{d}{dt} s(t) + k^2 s(t) = b \cdot \cos(kt),$$

$0 < \delta < k$ ("schwache Dämpfung"), $s(0) = 0$, $\frac{d}{dt} s(0) = 0$.

Lösung:

1. Teil: Allgemeine Lösung der DGL

1. Schritt: Lösen der zugehörigen homogenen DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} s(t) + 2\delta \frac{d}{dt} s(t) + k^2 s(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + k^2$$

und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1|2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - k^2} = -\delta \pm i\sqrt{k^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega \text{ mit}$$

$$\omega = \sqrt{k^2 - \delta^2} > 0.$$

Also:

$$s_h(t) = C_1 \exp(-\delta t) \cos(\omega t) + C_2 \exp(-\delta t) \sin(\omega t) \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2. Schritt: Bestimmen einer speziellen Lösung $s_s(t)$ der inhomogenen DGL

Da ki keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist (s.o.), lautet der Ansatz

$$s_s(t) = C \cdot \cos(kt) + \tilde{C} \sin(kt) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} s_s(t) = -Ck \sin(kt) + \tilde{C}k \cos(kt) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2} s_s(t) = -Ck^2 \cos(kt) - \tilde{C}k^2 \sin(kt)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$-\cancel{Ck^2 \cos(kt)} - \cancel{\tilde{C}k^2 \sin(kt)} - 2\delta C k \sin(kt) + 2\delta \tilde{C} k \cos(kt)$$

$$+ \cancel{k^2 C \cos(kt)} + \cancel{k^2 \tilde{C} \sin(kt)} = b \cos(kt) \Rightarrow$$

$$-2\delta C k \sin(kt) + 2\delta \tilde{C} k \cos(kt) = 0 \cdot \sin(kt) + b \cdot \cos(kt) \Rightarrow$$

$$-2\delta C k = 0 \quad \text{und} \quad 2\delta \tilde{C} k = b \Rightarrow C = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{C} = \frac{b}{2\delta k}$$

Also: $\underline{s_s(t) = \frac{b}{2\delta k} \sin(kt)}$

3. Schritt: Allgemeine Lösung der DGL

$$\underline{s(t)} = s_h(t) + s_s(t) = \underline{C_1 \exp(-\delta t) \cos(\omega t) + C_2 \exp(-\delta t) \sin(\omega t) + \frac{b}{2\delta k} \sin(kt)},$$

$$\underline{C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad \omega = \sqrt{k^2 - \delta^2}}.$$

2. Teil: Lösung des Anfangswertproblems

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = C_2 \exp(-\delta t) \sin(\omega t) + \frac{b}{2\delta k} \sin(kt) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} s(t) = -\delta C_2 \exp(-\delta t) \sin(\omega t) + \omega C_2 \exp(-\delta t) \cos(\omega t) + \frac{b}{2\delta} \cos(kt)$$

$$\frac{d}{dt} s(0) = 0 \Rightarrow \omega C_2 + \frac{b}{2\delta} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{b}{2\delta\omega}.$$

Also:

$$\underline{\underline{s(t)}} = -\frac{b}{2\delta\omega} \exp(-\delta t) \sin(\omega t) + \frac{b}{2\delta k} \sin(kt)$$

$$= \underline{\underline{\frac{b}{2\delta} \left(\frac{1}{k} \sin(kt) - \frac{1}{\omega} \exp(-\delta t) \sin(\omega t) \right), \quad \omega = \sqrt{k^2 - \delta^2}}}$$

Aufgabe 88.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' + y' + \frac{1}{4} y = \frac{1}{x^2} \exp(-\tfrac{1}{2}x) = f(x) \qquad (x \neq 0)$$

Lösung:

1. Schritt: Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0.$

Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \tfrac{1}{2})^2$$

und hat die doppelte Nullstelle $\lambda = -\frac{1}{2}$. Also:

$$y_h = C_1 \underbrace{\exp(-\tfrac{1}{2}x)}_{= f_1(x)} + C_2 \underbrace{x \exp(-\tfrac{1}{2}x)}_{= f_2(x)} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2. Schritt: Bestimmung einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten

$$y_s = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$$
$$= C_1(x) \exp(-\tfrac{1}{2}x) + C_2(x)\, x \exp(-\tfrac{1}{2}x) \quad \text{mit}$$

$$C_1'(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & f_2(x) \\ f(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}}{W(x)} \quad ; \quad C_2'(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} f_1(x) & 0 \\ f_1'(x) & f(x) \end{pmatrix}}{W(x)}$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}.$$

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \exp(-\frac{1}{2}x) \ , & x \exp(-\frac{1}{2}x) \\ -\frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}x) \ , & (1 - \frac{1}{2}x) \exp(-\frac{1}{2}x) \end{pmatrix}$$

$$= (1 - \tfrac{1}{2}x) \exp(-\tfrac{1}{2}x) \exp(-\tfrac{1}{2}x) + \tfrac{1}{2} x \exp(-\tfrac{1}{2}x) \exp(-\tfrac{1}{2}x)$$

$$= \exp(-\tfrac{1}{2}x) \exp(-\tfrac{1}{2}x) = \exp(-x)$$

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x\exp(-\frac{1}{2}x) \\ \frac{1}{x^2}(\exp(-\frac{1}{2}x)) & (1-\frac{1}{2}x)\exp(-\frac{1}{2}x) \end{pmatrix}}{\exp(-x)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot x\ \exp(-\frac{1}{2}x)\cdot\exp(-\frac{1}{2}x)}{\exp(-x)} = -\frac{1}{x}.$$

Setze $c_1(x) = -\ln|x|$.

$$c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} \exp(-\frac{1}{2}x) & 0 \\ -\frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}x) & \frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{2}x) \end{pmatrix}}{\exp(-x)}$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{2}x)\ \exp(-\frac{1}{2}x)}{\exp(-x)} = \frac{1}{x^2}.$$

Setze $c_2(x) = -\frac{1}{x}$.

Also:

$$\underline{y_s = -\ln|x|\exp(-\tfrac{1}{2}x) - \exp(-\tfrac{1}{2}x)}$$

<u>3. Schritt</u>: Allgemeine Lösung

$$\underline{\underline{y}} = y_h + y_s = C_1\exp(-\tfrac{1}{2}x) + C_2 x\exp(-\tfrac{1}{2}x) - \ln|x|\exp(-\tfrac{1}{2}x) - \exp(-\tfrac{1}{2}x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$\hat{C}_1 = C_1 - 1$

$$\hookrightarrow = \underline{\underline{\hat{C}_1\exp(-\tfrac{1}{2}x) + C_2 x\exp(-\tfrac{1}{2}x) - \ln|x|\exp(-\tfrac{1}{2}x)}}$$

$$\underline{\underline{(\hat{C}_1, C_2 \in \mathbb{R})}}$$

Aufgabe 89.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a. $y''' - y = 0$

b. $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$

** c. $y''' - 3y'' - 6y' + 8y = x \cdot \exp(-3x) = f(x)$

Lösung:

a. Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$

und hat als Nullstellen die 3. Einheitswurzeln (die Lösungen von $z^3 = 1$ in $\mathbb{C}$!):

$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$

Also:

$$y = C_1 \exp(x) + C_2 \exp(-\tfrac{1}{2}x)\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x) + C_2 \exp(-\tfrac{1}{2}x)\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x)$$

$(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

b. Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 36.$

Nullstellenbestimmung: Sei $\mu = \lambda^2$

$\mu^2 - 5\mu - 36 = 0 \Rightarrow \mu_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{144}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2} \Rightarrow \mu_1 = 9, \quad \mu_2 = -4$

Also: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = -2i$

Daher:

$$y = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x) + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

$(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$

c. <u>1. Schritt:</u> Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$y''' - 3y'' - 6y' + 8y = 0.$

Das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$ und hat $\lambda_1 = 1$ als Nullstelle.

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = q(\lambda) \\ \underline{-(\lambda^3 - \lambda^2)} \\ \quad -2\lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ \quad \underline{-(-2\lambda^2 + 2\lambda)} \\ \qquad -8\lambda + 8 \\ \qquad \underline{-(-8\lambda + 8)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Weitere Nullstellen von p sind die von q, also

$\lambda_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3$, d.h. $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$. Also:

$$y_h = \underbrace{C_1 \exp(x)}_{f_1(x)} + \underbrace{C_2 \exp(4x)}_{f_2(x)} + \underbrace{C_3 \exp(-2x)}_{f_3(x)} \qquad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$$

<u>2. Schritt:</u> Bestimmen einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen DGL

$y_s = C_1(x) \exp(x) + C_2(x) \exp(4x) + C_3(x) \exp(-2x)$, wobei

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Berechnung der Wronski-Determinante $W(x)$:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \exp(x), & \exp(4x), & \exp(-2x) \\ \exp(x), & 4\exp(4x), & -2\exp(-2x) \\ \exp(x), & 16\exp(4x), & 4\exp(-2x) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(x)\exp(4x)\exp(-2x) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z2-Z1,\,Z3-Z1}{=} \exp(3x) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 15 & 3 \end{pmatrix} = 54\exp(3x)$$

Berechnung von $W_1(x)$:

$$W_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & f_2(x) & f_3(x) \\ 0 & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 \;, & \exp(4x) \;, & \exp(-2x) \\ 0 \;, & 4\exp(4x) \;, & -2\exp(-2x) \\ x\exp(-3x) \;, & 16\exp(4x) \;, & 4\exp(-2x) \end{pmatrix}$$

$$= x\exp(-3x)\exp(4x)\exp(-2x) \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= x\exp(-x)\cdot(-6) = -6x\exp(-x)$$

Berechnung von $W_2(x)$:

$$W_2(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & 0 & f_3(x) \\ f_1'(x) & 0 & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f(x) & f_3''(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \exp(x) \;, & 0 \;, & \exp(-2x) \\ \exp(x) \;, & 0 \;, & -2\exp(-2x) \\ \exp(x) \;, & x\exp(-3x) \;, & 4\exp(-2x) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(x)\cdot x\cdot\exp(-3x)\exp(-2x) \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= x\exp(-4x)\cdot 3 = 3x\exp(-4x)$$

Berechnung von $W_3(x)$:

$$W_3(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & 0 \\ f_1'(x) & f_2'(x) & 0 \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f(x) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \exp(x), & \exp(4x), & 0 \\ \exp(x), & 4\exp(4x), & 0 \\ \exp(x), & 16\exp(4x), & x\exp(-3x) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(x)\exp(4x)\, x\exp(-3x) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3x\exp(2x)$$

Also:

$$c_1'(x) = -\frac{6x\exp(-x)}{54\exp(3x)} = -\frac{1}{9}x\exp(-4x)$$

$$c_2'(x) = \frac{3x\exp(-4x)}{54\exp(3x)} = \frac{1}{18}x\exp(-7x)$$

$$c_3'(x) = \frac{3x\exp(2x)}{54\exp(3x)} = \frac{1}{18}x\exp(-x)$$

Nebenrechnung: $\int x\exp(-kx)\,dx = ?$ $\qquad k \in \mathbb{N}$

$u(x) = x, \quad u'(x) = 1$

$v(x) = -\frac{1}{k}\exp(-kx), \quad v'(x) = \exp(-kx)$

$\int x\exp(-kx)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) -$
$\int u'(x)v(x)\,dx = -\frac{1}{k}x\exp(-kx) + \frac{1}{k}\int\exp(-kx)\,dx$
$= -\frac{1}{k}x\exp(-kx) - \frac{1}{k^2}\exp(-kx) + \text{const.}$

Setze also

$$c_1(x) = -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}x\exp(-4x) - \frac{1}{16}\exp(-4x)\right)$$
$$= \frac{1}{36}x\exp(-4x) + \frac{1}{144}\exp(-4x);$$

$$c_2(x) = \frac{1}{18}\left(-\frac{1}{7}x\exp(-7x) - \frac{1}{49}\exp(-7x)\right)$$
$$= -\frac{1}{126}x\exp(-7x) - \frac{1}{882}\exp(-7x) \quad ;$$

$$c_3(x) = \frac{1}{18}\left(-x\exp(-x) - \exp(-x)\right)$$
$$= -\frac{1}{18}x\exp(-x) - \frac{1}{18}\exp(-x)$$

Damit gilt:

$$\underline{\underline{y_s}} = \frac{1}{36}x\exp(-4x)\exp(x) + \frac{1}{144}\exp(-4x)\exp(x)$$
$$-\frac{1}{126}x\exp(-7x)\exp(4x) - \frac{1}{882}\exp(-7x)\exp(4x)$$
$$-\frac{1}{18}x\exp(-x)\exp(-2x) - \frac{1}{18}\exp(-x)\exp(-2x)$$
$$= \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{126} - \frac{1}{18}\right)x\exp(-3x) + \left(\frac{1}{144} - \frac{1}{882} - \frac{1}{18}\right)\exp(-3x)$$
$$= \underline{\underline{-\frac{1}{28}x\exp(-3x) - \frac{39}{784}\exp(-3x)}}$$

– 3. Schritt: Allgemeine Lösung

$$\underline{\underline{y}} = y_h + y_s$$
$$= \underline{\underline{C_1\exp(x) + C_2\exp(4x) + C_3\exp(-2x) - \frac{1}{28}x\exp(-3x) - \frac{39}{784}\exp(-3x)}}$$

$$\underline{\underline{(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})}}$$

Aufgabe 90

Berechnen Sie die folgenden Bereichsintegrale über achsenparallelen Rechtecken:

a. $\int_0^3 \int_0^2 x \, dx \, dy$, d.h. $\iint_B f(x,y) \, dF$ mit $B = [0,2] \times [0,3]$,
$f: B \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x$.

b. $\int_{-1}^1 \int_0^2 (x^2 + \exp(y)) \, dy \, dx$, d.h. $\iint_B f(x,y) \, dF$ mit $B = [-1,1] \times [0,2]$,
$f: B \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + \exp(y)$

c. $\int_0^1 \int_0^{\pi/4} x \cos(2y) \, dy \, dx$, d.h. $\iint_B f(x,y) \, dF$ mit $B = [1,0] \times [0, \frac{\pi}{4}]$,
$f: B \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x \cos(2y)$

Lösung:

a. $\iint_B f(x,y) \, dF = \int_0^3 \left(\int_0^2 x \, dx \right) dy = \int_0^3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^2 dy =$

$\int_0^3 2 \, dy = [2y]_0^3 = \underline{\underline{6}}$

b. $\iint_B f(x,y) \, dF = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x^2 + \exp(y)) \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \exp(y) \right]_{y=0}^2 dx =$

$\int_{-1}^1 (2x^2 + e^2 - 1) \, dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + e^2 x - x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + e^2 - 1 + \frac{2}{3} + e^2 - 1 =$

$\underline{\underline{2e^2 - \frac{2}{3}}}$

c. $\iint_B f(x,y) \, dF = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} x \cos(2y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x \sin(2y) \right]_{y=0}^{\pi/4} dx =$

$\int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$

Aufgabe 91

Berechnen Sie die folgenden Bereichsintegrale über Normalbereichen im $\mathbb{R}^2$:

a. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1-xy)\, dy\, dx$, d.h. $\iint_B f(x,y)\, dF$ mit $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$

$f(x,y) = 1 - xy$

b. $\int_0^{3/2} \int_1^{5x} x \exp(y)\, dy\, dx$, d.h. $\iint_B f(x,y)\, dF$ mit $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{3}{2}, 1 \le y \le 5x\}$

$f(x,y) = x \exp(y)$

Lösung:

a. $\iint_B f(x,y)\, dF = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (1-xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y - \frac{1}{2} x y^2 \right]_{y=x^2}^{x} dx =$

$\int_0^1 (x - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x^5)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^6 \right]_0^1 =$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{12 - 3 - 8 + 2}{24} = \frac{3}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

b. $\iint_B f(x,y)\, dF = \int_0^{3/2} \left(\int_1^{5x} x \exp(y)\, dy \right) dx = \int_0^{3/2} \left[x \exp(y) \right]_{y=1}^{5x} dx =$

$\int_0^{3/2} (x \exp(5x) - ex)\, dx = ⊛$

NR: $\int x \exp(5x)\, dx = ?$

Partielle Integration: $g(x) = x$, $g'(x) = 1$, $h(x) = \frac{1}{5}\exp(5x)$, $h'(x) = \exp(5$

$\int x \exp(5x)\, dx = \int g(x) h'(x)\, dx = g(x) h(x) - \int g'(x) h(x)\, dx =$

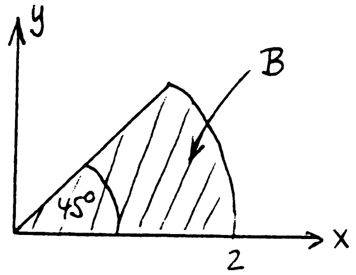
$\frac{1}{5} x \exp(5x) - \frac{1}{5} \int \exp(5x)\, dx = \frac{1}{5} x \exp(5x) - \frac{1}{25}\exp(5x) + C$

$⊛ = \left[\frac{1}{5} x \exp(5x) - \frac{1}{25}\exp(5x) - \frac{1}{2} e x^2 \right]_0^{3/2} = \frac{3}{10}\exp(\frac{15}{2}) -$

$\frac{1}{25}\exp(\frac{15}{2}) - \frac{1}{2} e \frac{9}{4} + \frac{1}{25} = \underline{\underline{\frac{13}{50} e^7 \sqrt{e} - \frac{9}{8} e + \frac{1}{25}}}$

$(\approx 467{,}0729607)$

Aufgabe 92.



Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten $\iint\limits_B f(x,y)\,dF$, wobei B der nebenan skizzierte Bereich ist und $f(x,y) = xy$ gilt.

Lösung:

Es ist $B = \{ (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le 2 \}$,

$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)$. Also:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dF = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, r^3\,dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4}\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, r^4 \right]_{r=0}^{2} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/4} 4\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi = \circledast$$

NR.: $\int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi = ?$

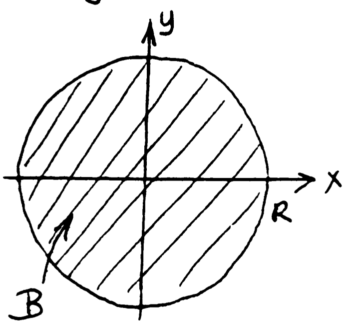
Substitution: $u = \sin(\varphi) \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = \cos(\varphi) \Rightarrow d\varphi = \frac{1}{\cos(\varphi)}\,du$

$\int \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,d\varphi = \int \cos(\varphi)\, u\, \frac{1}{\cos(\varphi)}\,du = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C =$

$\frac{1}{2}\sin^2(\varphi) + C$

$$\circledast = \left[2\sin^2(\varphi) \right]_0^{\pi/4} = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{1.}}$$

Aufgabe 93.



Eine kreisförmige Leiterschleife vom Radius R wird senkrecht von einem Magnetfeld durchflutet, dessen magnetische Flußdichte nach der Gleichung $f(x,y) = B_0 \cdot \exp(-(x^2+y^2))$ in radialer Richtung nach außen abnimmt.
Der magnetische Fluß ϕ durch die Leiterschleife ist definitionsgemäß $\phi = \iint_B f(x,y)\,dF$, wobei B der oben skizzierte Bereich ist. Berechnen Sie ϕ.

Lösung:

In Polarkoordinaten gilt $B = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le R\}$;

$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = B_0 \cdot \exp(-(r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi))) = B_0 \exp(-r^2)$.

Also:

$$\phi = \iint_B f(x,y)\,dF = B_0 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \exp(-r^2) \cdot r\,dr \right) d\varphi = (*)$$

NR: $\int \exp(-r^2)\, r\, dr = ?$

Substitution: $u = -r^2 \Rightarrow \frac{du}{dr} = -2r \Rightarrow dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r}\, du$

$$\int \exp(-r^2)\, r\, dr = \int \exp(u)\, r \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r}\, du\right) = -\frac{1}{2} \int \exp(u)\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \exp(u) + C = -\frac{1}{2} \exp(-r^2) + C$$

$$(*) = B_0 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_{r=0}^{R} d\varphi = B_0 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \exp(-R^2) + \frac{1}{2}\right) d\varphi =$$

$$B_0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-R^2)\right) d\varphi = B_0 \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2} \exp(-R^2)\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$\underline{\underline{B_0 \pi (1 - \exp(-R^2))}}.$$

Aufgabe 94.

Berechnen Sie $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ für

$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 4;\ 0 \le z \le \pi\}$; $f(x,y,z) = x^2 y \cos(yz)$

Lösung:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \left(\int_{-1}^4 \left(\int_0^\pi x^2 y \cos(yz)\,dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-1}^4 \left[x^2 \sin(yz) \right]_{z=0}^{\pi} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-1}^4 x^2 \sin(\pi y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[-x^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cos(\pi y) \right]_{y=-1}^{4} dx$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2 \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} + x^2 \cdot \frac{1}{\pi} \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} x^2 \right) dx$$

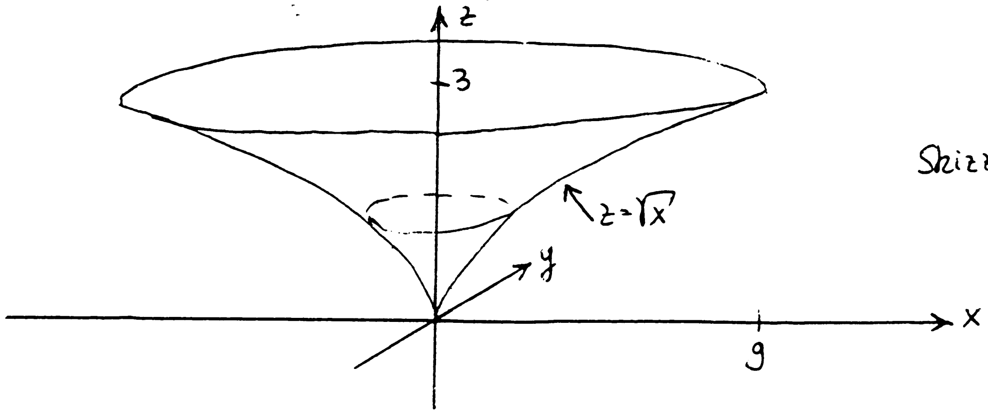
$$= \left[-\frac{2}{3\pi} x^3 \right]_0^1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3\pi}}}$$

Aufgabe 95.

Berechnen Sie Volumen und Schwerpunkt des "Trichters"

$B = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 9,\ \sqrt{r} \le z \le 3\}$



Skizze!

Lösung:

Für das Volumen R gilt:

$$\underline{\underline{R}} = \iiint_B dV = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^9\left(\int_{\sqrt{r}}^3 r\,dz\right)dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^9 [rz]_{z=\sqrt{r}}^3\,dr\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^9 (3r - r\sqrt{r})\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{2}{5}r^2\sqrt{r}\right]_{r=0}^9 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{243}{2} - \frac{486}{5}\right)d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{243}{10}\,d\varphi = \left[\frac{243}{10}\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{486}{10}\pi = \underline{\underline{\frac{243}{5}\pi = 48{,}6\,\pi}}$$

Für den Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) gilt:

$\underline{\underline{x_s = y_s = 0}}$ aus Symmetriegründen;

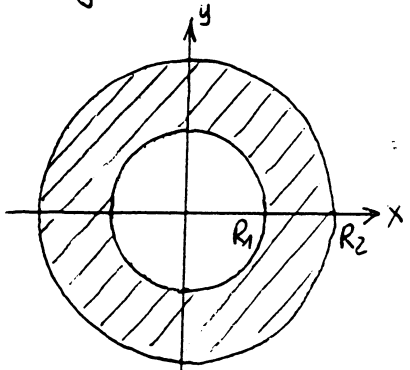
$$\underline{\underline{z_s}} = \frac{1}{R}\iiint_B z\,dV = \frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^9\left(\int_{\sqrt{r}}^3 rz\,dz\right)dr\right)d\varphi = \frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^9\left[\frac{1}{2}rz^2\right]_{z=\sqrt{r}}^3 dr\right)d\varphi =$$

$$\frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^9\left(\frac{9}{2}r - \frac{1}{2}r^2\right)dr\right)d\varphi = \frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{4}r^2 - \frac{1}{6}r^3\right]_{r=0}^9 d\varphi =$$

$$\frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{729}{4} - \frac{729}{6}\right)d\varphi = \frac{5}{243\pi}\int_0^{2\pi}\frac{729}{12}\,d\varphi = \frac{5}{243\pi}\left[\frac{729}{12}\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{5}{243\pi}\cdot\frac{729}{6}\pi = \underline{\underline{\frac{5}{2} = 2{,}5.}}$$

__Aufgabe 96.__



Gegeben ist ein homogenes Rad der (konstanten) Dichte ρ, das die Höhe h hat und den nebenstehenden Querschnitt. Das Massenträgheitsmoment J bezüglich der z-Achse als Drehachse ist dann

$$J = \rho \iiint_B (x^2+y^2)\, dV,$$

wobei $B = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le z \le h\}$.

Berechnen Sie J.

__Lösung:__

Es wird mit Zylinderkoordinaten gearbeitet.

$f(x,y,z) = x^2+y^2 \Rightarrow f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) = r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) = r^2.$

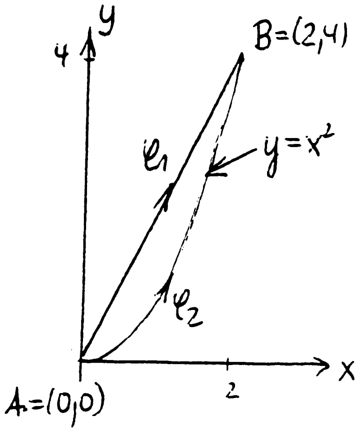
Also:

$$\underline{\underline{J}} = \rho \iiint_B (x^2+y^2)\,dV = \rho \int_0^{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2}\left(\int_0^h r^3\,dz\right)dr\right)d\varphi = \rho\int_0^{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2}\left[r^3 z\right]_{z=0}^{h} dr\right)d\varphi =$$

$$\rho\int_0^{2\pi}\left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 h\,dr\right)d\varphi = \rho\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{4}r^4 h\right]_{r=R_1}^{R_2} d\varphi = \rho\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{4}h(R_2^4-R_1^4)\right)d\varphi =$$

$$\rho\left[\tfrac{1}{4}h(R_2^4-R_1^4)\varphi\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\rho h\pi(R_2^4-R_1^4)}}$$

Aufgabe 97



$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $F(x,y) = (y, x^2 + xy)$.

Berechnen Sie

a. $\int\limits_{\mathscr{C}_1} \langle F, dr \rangle$ b. $\int\limits_{\mathscr{C}_2} \langle F, dr \rangle$,

wobei $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ die nebenan skizzierten Verbindungswege von $A=(0,0)$ nach $B=(2,4)$ sind.

Lösung:

a. Parameterdarstellung von $\mathscr{C}_1$ ist $f_1 . [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(t) = (t, 2t)$.

$\Rightarrow f_1'(t) = (1,2)$

$$\underline{\underline{\int\limits_{\mathscr{C}_1} \langle F, dr \rangle}} = \int_0^2 \langle F(f_1(t)), f_1'(t) \rangle \, dt = \int_0^2 \langle F(t, 2t), (1,2) \rangle \, dt =$$

$$\int_0^2 \langle (2t, t^2 + 2t^2), (1,2) \rangle \, dt = \int_0^2 \langle (2t, 3t^2), (1,2) \rangle \, dt = \int_0^2 (2t + 6t^2) \, dt =$$

$$[t^2 + 2t^3]_0^2 = 4 + 16 = \underline{\underline{20}}$$

b. Parameterdarstellung von $\mathscr{C}_2$ ist $f_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(t) = (t, t^2)$

$\Rightarrow f_2'(t) = (1, 2t)$

$$\underline{\underline{\int\limits_{\mathscr{C}_2} \langle F, dr \rangle}} = \int_0^2 \langle F(f_2(t)), f_2'(t) \rangle dt = \int_0^2 \langle F(t, t^2), (1, 2t) \rangle \, dt =$$

$$\int_0^2 \langle (t^2, t^2 + t^3), (1, 2t) \rangle \, dt = \int_0^2 (t^2 + 2t^3 + 2t^4) \, dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{2}{5}t^5\right]_0^2 .$$

$$\frac{8}{3} + 8 + \frac{64}{5} = \frac{40 + 120 + 192}{15} = \underline{\underline{\frac{352}{15}}} \quad \left(= 23\tfrac{7}{15} \right)$$

Aufgabe 98.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektorfelder konservativ sind und bestimmen Sie gegebenenfalls auf 2 Arten ein Potential:

a. $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (9x^2y^2, 6x^3y)$

b. $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x,y,z) = (2xy^3, 6xz^3, 3x^2yz^2)$

Lösung:

a. $F_1(x,y) = 9x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 18x^2y$

$F_2(x,y) = 6x^3y \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 18x^2y$

$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow$

F ist konservativ.

Potentialbestimmung:

Zu finden ist $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} G = F$.

1. Möglichkeit:

Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\mathcal{C}(x,y)$ mit Parameterdarstellung $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (xt, yt)$ $(\Rightarrow f'(t) = (x,y))$ verbindet $(0,0)$ geradlinig mit (x,y).

$$\underline{\underline{G(x,y)}} = \int_{\mathcal{C}(x,y)} \langle F, dx \rangle = \int_0^1 \langle F(f(t)), f'(t) \rangle \, dt =$$

$$\int_0^1 \langle F(xt, yt), (x,y) \rangle \, dt = \int_0^1 \langle (9x^2y^2t^4, 6x^3yt^4), (x,y) \rangle \, dt =$$

$$\int_0^1 (9x^3y^2t^4 + 6x^3y^2t^4) \, dt = \int_0^1 15x^3y^2t^4 \, dt =$$

$$[3x^3y^2t^5]_0^1 = \underline{\underline{3x^3y^2}}$$

2. Möglichkeit:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) = 9x^2y^2 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) = 6x^3y \qquad (II)$$

$$(I) \Rightarrow G(x,y) = 3x^3y^2 + C(y) \qquad (III)$$

$$(\text{III.}) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 6x^3y + \frac{\partial}{\partial y}C(y) \quad (\text{IV.})$$

$$(\text{II}) = (\text{IV}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}C(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = K \quad \overset{(\text{III})}{\Rightarrow}$$

$$\underline{\underline{G(x,y) = 3x^3y^2 \, (+K)}}$$

b. $$F_1(x,y,z) = 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 6 \cdot xy^2$$

$$F_2(x,y,z) = 6xz^3 \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = 6z^3$$

Also: $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow$ <u>F ist nicht konservativ</u>

Aufgabe 99.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = x$ für $0 \leq x < 2\pi$.

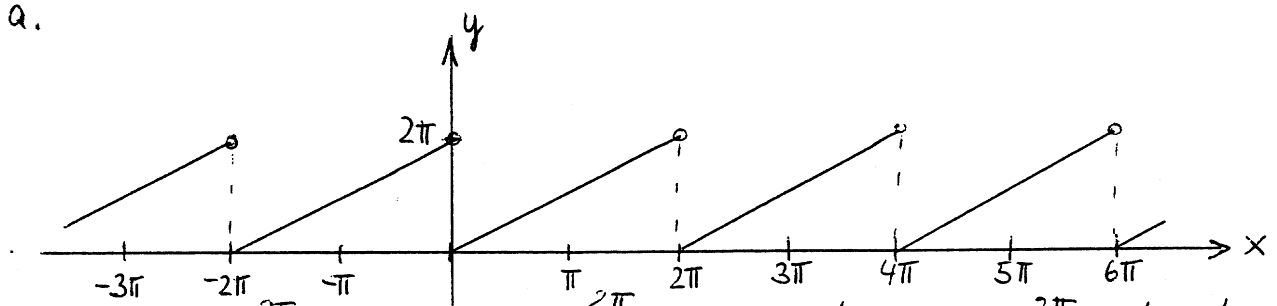
a. Skizzieren Sie den Graphen von f. ("Sägezahnimpuls")

b. Berechnen Sie die Fourierreihe $s(x)$ von f.

c. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $s(x) = f(x)$? Was geschieht sonst?

Lösung:

a.



b. $$\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi^2$$

$$= \underline{\underline{\pi}};\quad \text{für } k \geq 1 \text{ gilt:}$$

$$\underline{\underline{a_k}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_0^{2\pi}$$

vgl. Aufg. 1 zu 6.1.

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}\cos(2k\pi) - \frac{1}{k^2}\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\underline{\underline{b_k}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}2\pi\cos(2k\pi)\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{k}}}$$

vgl. Aufg. 1 zu 6.1.

Also: $$\underline{\underline{s(x)}} = \pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{k}\right)\sin(kx) = \underline{\underline{\pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(kx)}}$$

c. f ist stetig in $\underline{\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}}$, dort gilt $\underline{\underline{s(x) = f(x)}}$.

Für $\underline{x_0 \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}$ gilt $\underline{f(x_0) = 0}$;

$$\underline{\underline{s(x_0)}} = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right) = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \underline{\underline{\pi}}.$$

Aufgabe 100.

Bearbeiten Sie mit Hilfe der folgenden Formelsammlung die nachstehende Aufgabe:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{für } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

a. Skizzieren Sie den Graphen von f. ("Sinusimpuls-Einweggleichrichtung")

b. Berechnen Sie die Fourierreihe $s(x)$ von f.

c. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $s(x) = f(x)$?

Formelsammlung:

$$\int \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} + \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + C & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4n}\sin(2nx) + C & \text{für } n = m \end{cases}$$

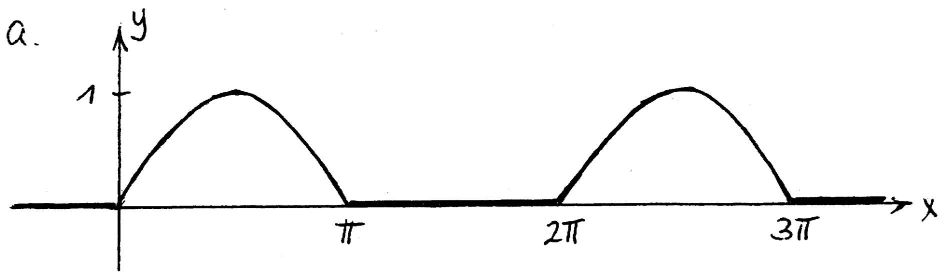
$$\int \sin(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} -\frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} + C & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2n}\sin^2(nx) + C & \text{für } n = m \end{cases}$$

$$\int \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + C & \text{für } n \neq m \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n}\sin(2nx) + C & \text{für } n = m \end{cases}$$

$(n, m \in \mathbb{N})$

Lösung:

a.



b. $\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-(-1)+1\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}}$; für $k \geq 1$ gilt

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(kx)\,dx$.

Für $\underline{k \neq 1}$ folgt nach der Formelsammlung:

$\underline{\underline{a_k}} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((1-k)x)}{2(1-k)} - \frac{\cos((1+k)x)}{2(1+k)}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi}\left(-(-1)^{1-k}\cdot\frac{1}{2(1-k)} - (-1)^{1+k}\cdot\frac{1}{2(1+k)} + \frac{1}{2(1-k)} + \frac{1}{2(1+k)}\right)$

$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{1-k}}{2(1-k)} + \frac{1-(-1)^{1+k}}{2(1+k)}\right)$

$= \begin{cases} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\text{für ungerades } k}} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-k}+\frac{1}{1+k}\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{(k^2-1)\cdot\pi}}} & \underline{\underline{\text{für gerades } k}} \end{cases}$

Ferner gilt nach der Formelsammlung:

$\underline{\underline{a_1}} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{0.}}$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\sin(kx)\,dx$.

Für $\underline{k \neq 1}$ folgt nach der Formelsammlung:

$\underline{\underline{b_k}} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((1-k)x)}{2(1-k)} - \frac{\sin((1+k)x)}{2(1+k)}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{0.}}$

Ferner gilt nach der Formelsammlung:

$\underline{\underline{b_1}} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \underline{\underline{\frac{1}{2}.}}$

Also: $\underline{\underline{s(x)}} = \frac{1}{\pi} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty}\left(-\frac{2}{(k^2-1)\cdot\pi}\right)\cos(kx) + \frac{1}{2}\sin(x)$

$\underline{\underline{= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx) + \frac{1}{2}\sin(x).}}$

c. Da f stetig ist, gilt $\underline{\underline{f(x) = s(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.}}$

Aufgabe 10.1.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} x & \text{für } 0 \le x \le \pi; \\ 2 - \frac{1}{\pi} x & \text{für } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

a. Skizzieren Sie den Graphen von f. ("Dreiecksimpuls")

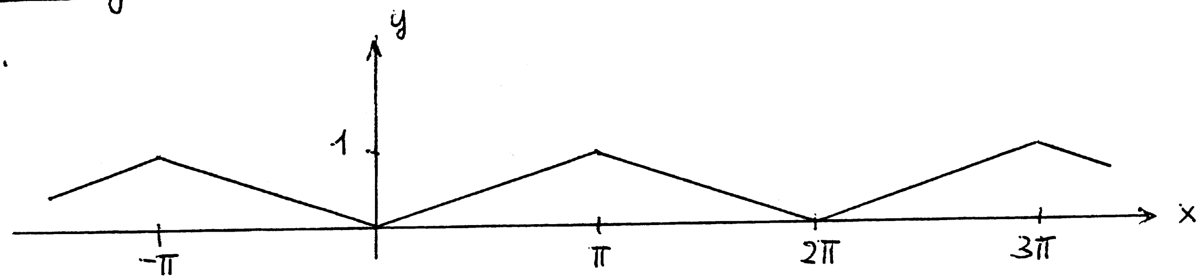
b. Berechnen Sie die Fourierreihe $s(x)$ von f.

c. Veranschaulichen Sie das Spektrum $(a_k)_{k \ge 0}$.

d. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = s(x)$? Was geschieht gegebenenfalls sonst?

Lösung:

a.



b. f gerade $\Rightarrow$ $\underline{\underline{b_k = 0 \text{ für alle } k \ge 1}}$

f gerade $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a_0}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} x\,dx =$

$\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x\,dx = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

f gerade $\Rightarrow$ für $k \ge 1$ gilt $\underline{\underline{a_k}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx)\,dx =$

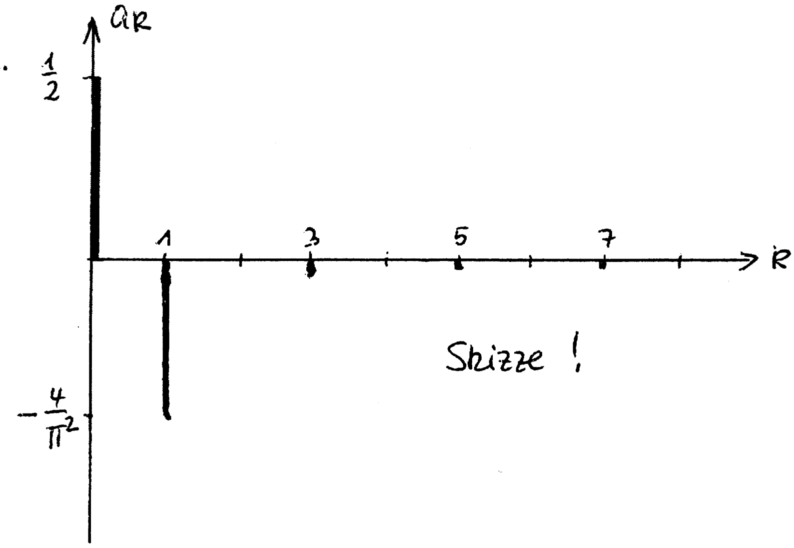
$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} x \cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi x \cos(kx)\,dx \overset{\text{vgl. A1 zu 6.1.}}{=}$

$\frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{k} x \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx)\right]_0^\pi =$

$\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{1}{k^2} \cos(k\pi) - \frac{1}{k^2} \cos(0)\right) = \frac{2}{\pi^2 k^2} \left((-1)^k - 1\right) =$

$$\underline{\underline{\begin{cases} 0 & \text{für gerades } k \\ -\frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{für ungerades } k \end{cases}}}$$

Also: $s(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi^2 k^2}\right) \cos(kx) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$

c. 

d. Da f stetig ist, gilt $f(x) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 102.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = |\sin(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

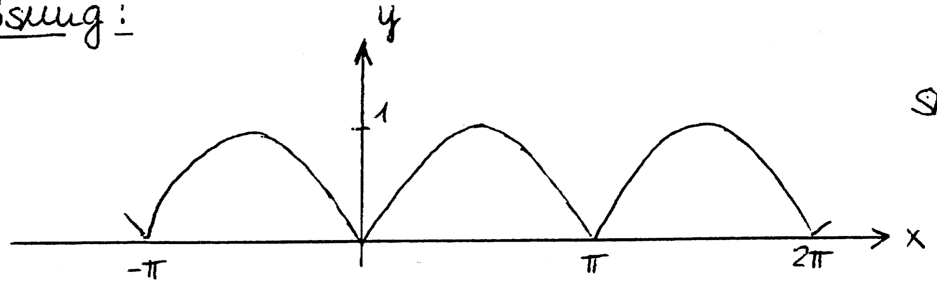
a. Skizzieren Sie den Graphen von f. ("Sinusimpuls-Zweiweggleichrichter")

b. Berechnen Sie die Fourierreihe $s(x)$ von f.

Tip: Denken Sie auch an die Formelsammlung zu Aufgabe 100!

Lösung:

a.



Skizze!

b. f gerade $\Rightarrow$ $b_k = 0$ für alle $k \geq 1$.

f gerade $\Rightarrow$ $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx =$

$\frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^\pi = \frac{1}{\pi}(-(-1)+1) = \frac{2}{\pi}$

f gerade $\Rightarrow$ für $k \geq 1$ gilt $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\,dx =$

$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(kx)\,dx$

Die Formelsammlung zu Aufgabe 100 ergibt für $k \neq 1$:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos((1-k)x)}{2(1-k)} - \frac{\cos((1+k)x)}{2(1+k)}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2(1-k)}(-1)^{1-k} - \frac{1}{2(1+k)}(-1)^{1+k} + \frac{1}{2(1-k)} + \frac{1}{2(1+k)}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{1-k}}{2(1-k)} + \frac{1-(-1)^{1+k}}{2(1+k)}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für ungrades } k \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-k} + \frac{2}{1+k}\right) = -\frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{für grades } k \end{cases}$$

Ferner liefert die Formelsammlung zu Aufgabe 100:

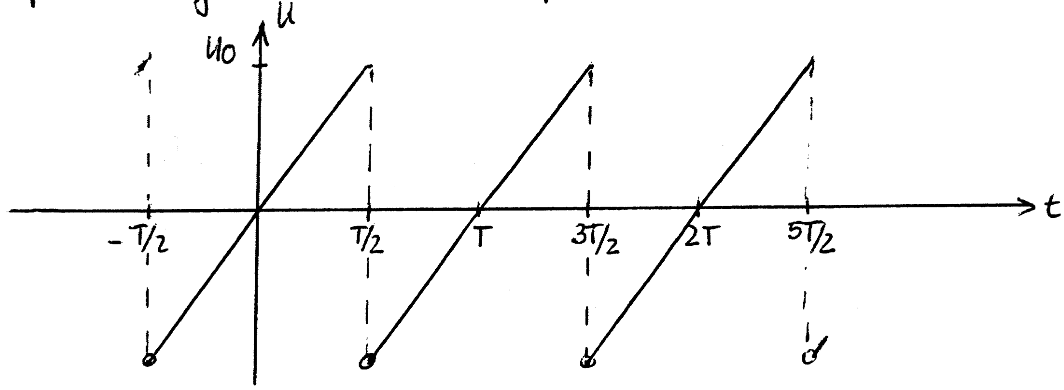
$$\underline{\underline{a_1}} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^2(x) \right]_0^\pi = \underline{\underline{0.}}$$

Also: $$\underline{\underline{s(x)}} = \frac{2}{\pi} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi(k^2-1)} \right) \cos(kx)$$

$$\underline{\underline{= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx)}}$$

Aufgabe 103.

Bestimmen Sie die Fourierreihe $s(t)$ für die folgende Kipp-spannung $u(t)$, die T-periodisch ist:



Lösung:

u ist T-periodisch mit

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2u_0}{T}t & \text{für } 0 \le t \le T/2 \,; \\ \frac{2u_0}{T}t - 2u_0 & \text{für } T/2 < t < T\,. \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen gilt $\underline{a_k = 0}$ für alle $k \geq 0$.

Ferner gilt: $\underline{\underline{b_k}} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\frac{2u_0}{T}t\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt$

$$= \frac{8u_0}{T^2}\int_0^{T/2} t\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = (*)$$

NR: $\int t\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt = -\frac{T}{2\pi k}t\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \frac{T}{2\pi k}\int\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt =$

$-\frac{T}{2\pi k}t\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \frac{T^2}{4\pi^2k^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + C$

$$(*) = \frac{8u_0}{T^2}\left[-\frac{T}{2\pi k}t\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \frac{T^2}{4\pi^2k^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{8u_0}{T^2}\left(-\frac{T}{2\pi k}\cdot\frac{T}{2}\cdot\cos(k\pi)\right) = -\frac{2u_0}{\pi k}(-1)^k = \underline{\underline{\frac{2u_0}{\pi k}(-1)^{k+1}}}$$

Also:

$$\underline{\underline{s(t) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)}}$$

Aufgabe 104.

Die 2π-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi; \\ 0 & \text{für } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

(vgl. Aufgabe 100) hat in reeller Darstellung die Fourierreihe

$$s(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx) + \frac{1}{2}\sin(x).$$

Wie lautet die Fourierreihe in komplexer Darstellung?

Lösung:

Die Fourierreihe in reeller Darstellung kann man auch wie folgt notieren:

$$s(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{2}{(1-k^2)\pi} \cos(kx) + \frac{1}{2}\sin(1 \cdot x),$$

d.h. die Fourierkoeffizienten lauten

$$a_0 = \frac{1}{\pi};$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{(1-k^2)\pi} & \text{für gerades } k; \\ 0 & \text{für ungerades } k; \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k=1; \\ 0 & \text{für } k \neq 1. \end{cases}$$

Es folgt:

$$\underline{\underline{\alpha_0}} = a_0 = \underline{\underline{\frac{1}{\pi}}},$$

$$\underline{\underline{\alpha_1}} = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{-i \cdot \frac{1}{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}i}};$$

für $\underline{\underline{k \geq 2}}$:

$$\underline{\underline{\alpha_k}} = \frac{a_k - ib_k}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{\frac{1}{(1-k^2)\pi} \quad \text{für gerades } k;}} \\ \underline{\underline{0 \quad \text{für ungerades } k;}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\alpha_{-1}}} = \frac{a_1 + i b_1}{2} = \frac{i \cdot \frac{1}{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} i}} \; ;$$

für $\underline{\underline{k \geq 2}}$:

$$\underline{\underline{\alpha_{-k}}} = \frac{a_k + i b_k}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{\dfrac{1}{(1-k^2)\pi}}} & \text{für gerades } k \, ; \\ \underline{\underline{0}} & \text{für ungerades } k . \end{cases}$$

Also:

$$\underline{\underline{s(x)}} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{1}{(1-k^2)\pi} \exp(ikx) - \frac{1}{4} i \exp(ix) + \frac{1}{4} i \exp(-ix)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \exp(i2kx) + \frac{1}{4} i \left(-\exp(ix) + \exp(-ix) \right)}}$$

Aufgabe 105.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = x$ für $0 \le x < 2\pi$.
Berechnen Sie die Fourierreihe $s(x)$ von f in komplexer Darstellung

a. direkt;

b. mit Hilfe des Resultats von Aufgabe 99.

Lösung:

a. Es gilt
$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \exp(-ikx)\,dx \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Für $k = 0$ folgt
$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi^2 = \pi;$$

für $k \neq 0$ erhält man:

NR:
$$\int x \exp(-ikx)\,dx = -\frac{1}{ik} x \exp(-ikx) + \frac{1}{ik} \int \exp(-ikx)\,dx$$
$$= -\frac{1}{ik} x \exp(-ikx) - \frac{1}{i^2k^2} \exp(-ikx) + C$$
$$= i\frac{1}{k} x \exp(-ikx) + \frac{1}{k^2} \exp(-ikx) + C$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \left[i\frac{1}{k} x \exp(-ikx) + \frac{1}{k^2} \exp(-ikx) \right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(i\frac{1}{k} \cdot 2\pi + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right) = i\frac{1}{k}$$

Also:
$$s(x) = \pi + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} i\frac{1}{k} \exp(ikx) = \pi + i \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k} \exp(ikx)$$

b. Aufgabe 99 liefert

$a_0 = \pi$; $a_k = 0$ für $k \ge 1$; $b_k = -\frac{2}{k}$ für $k \ge 1$.

Es folgt : $\underline{\underline{\alpha_0}} = a_0 = \underline{\underline{\pi}}$;

für $k \geq 1$ gilt $\underline{\underline{\alpha_k}} = \dfrac{a_k - i b_k}{2} = \dfrac{-i \cdot (-\frac{2}{k})}{2} = \dfrac{i}{k} = \underline{\underline{i \cdot \frac{1}{k}}}$,

für $k \leq -1$ gilt $\underline{\underline{\alpha_k}} = \dfrac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} = \dfrac{i \cdot (-\frac{2}{-k})}{2} = \dfrac{i}{k} = \underline{\underline{i \cdot \frac{1}{k}}}$

Wie bei a. folgt $\underline{\underline{s(x) = \pi + i \cdot \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k} \exp(ikx)}}$

Aufgabe 106.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = \exp(-x)$ für $0 \le x < 2\pi$

a. Skizzieren Sie den Graphen von f.

b. Berechnen Sie mit Hilfe von 9.2.2. die Fourierreihe von f in komplexer Form.

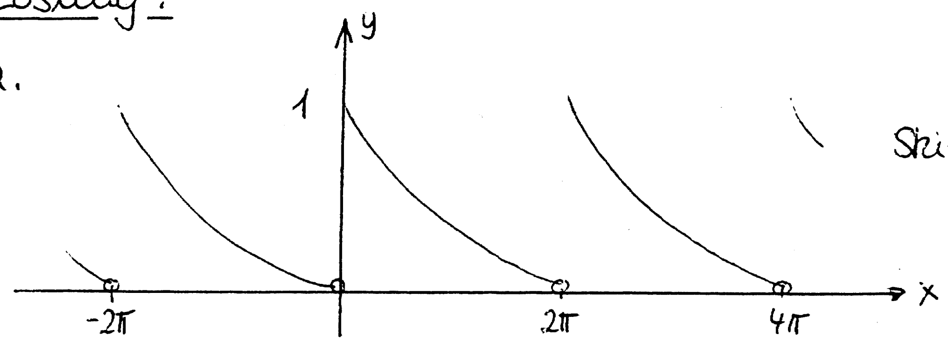
c. Berechnen Sie die Fourierreihe von f in reeller Form

i. mit Hilfe von b. und 9.2.3.,

ii. mit Hilfe von 9.1.2.

Lösung:

a.



Skizze!

b.
$$\underline{\underline{\alpha_k}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-x)\exp(-ikx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-(1+ik)x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{1+ik} \exp(-(1+ik)x) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{1+ik} \exp(-(1+ik)2\pi) + \frac{1}{1+ik} \exp(0) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{1+ik} \left(\exp(-2\pi) \cdot \underbrace{\exp(-ik2\pi)}_{=1} \right) + \frac{1}{1+ik} \underbrace{\exp(0)}_{=1} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1+ik)}}}$$

Also: $$\underline{\underline{s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1+ik)} \exp(ikx)}}$$

c. i. $\underline{\underline{a_0}} = \alpha_0 = \underline{\underline{\dfrac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}}}$; für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\underline{\underline{a_k}} = \alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1+ik)} + \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1-ik)}$$

$$= \frac{(1-\exp(-2\pi))[(1-ik)+(1+ik)]}{2\pi(1+k^2)}$$

$$= \frac{(1-\exp(-2\pi))\cdot 2}{2\pi(1+k^2)} = \underline{\underline{\frac{1-\exp(-2\pi)}{\pi(1+k^2)}}}$$

$$\underline{\underline{b_k}} = i(\alpha_k - \alpha_{-k}) = i\left(\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1+ik)} - \frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi(1+ik)}\right)$$

$$= i\,\frac{(1-\exp(-2\pi))[(1-ik)-(1+ik)]}{2\pi(1+k^2)}$$

$$= i\cdot\frac{(1-\exp(-2\pi))(-2ik)}{2\pi(1+k^2)} = \underline{\underline{\frac{(1-\exp(-2\pi))\cdot k}{\pi(1+k^2)}}}$$

Also:

$$\underline{\underline{s(x) = \frac{1-\exp(-2\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+k^2}(\cos(kx) + k\cdot\sin(kx))\right)\right)}}$$

ii. $\underline{\underline{a_0}} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\big[-\exp(-x)\big]_0^{2\pi}$

$$= \frac{1}{2\pi}\big(-\exp(-2\pi) + \underbrace{\exp(0)}_{=1}\big) = \underline{\underline{\frac{1-\exp(-2\pi)}{2\pi}}}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underline{\underline{a_k}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-x)\cos(kx)\,dx = \circledast$$

NR: $\displaystyle\int \exp(-x)\cos(kx)\,dx = +\frac{1}{k}\exp(-x)\sin(kx) +$

$\displaystyle\frac{1}{k}\int\exp(-x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{k}\exp(-x)\sin(kx) -$

$\displaystyle\frac{1}{k^2}\exp(-x)\cos(kx) - \frac{1}{k^2}\int\exp(-x)\cos(kx)\,dx \quad \Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\int \exp(-x)\cos(kx)dx = \frac{1}{k}\exp(-x)\sin(kx) - \frac{1}{k^2}\exp(-x)\cos(kx) + \tilde{C} \Rightarrow$$

$$\int \exp(-x)\cos(kx)\,dx = \frac{k}{1+k^2}\exp(-x)\sin(kx) - \frac{1}{1+k^2}\exp(-x)\cdot\cos(kx) + C \, .$$

$$(*) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{1+k^2}\exp(-x)\sin(kx) - \frac{1}{1+k^2}\exp(-x)\cos(kx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1+k^2}\exp(-2\pi) + \frac{1}{1+k^2}\right) = \underline{\underline{\frac{1-\exp(-2\pi)}{\pi(1+k^2)}}}$$

Mit $\int \exp(-x)\sin(kx)\,dx = -\frac{k}{1+k^2}\exp(-x)\cos(kx) - \frac{1}{1+k^2}\exp(-x)\sin(kx) + C$ (NR ähnlich wie oben)

erhält man:

$$\underline{\underline{b_k}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-x)\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{k}{1+k^2}\exp(-x)\cos(kx) - \frac{1}{1+k^2}\exp(-x)\sin(kx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{k}{1+k^2}\exp(-2\pi) + \frac{k}{1+k^2}\right) = \underline{\underline{\frac{(1-\exp(-2\pi))\,k}{\pi(1+k^2)}}}$$

Also:

$$\underline{\underline{s(x) = \frac{1-\exp(-2\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+k^2}\left(\cos(kx) + k\cdot\sin(kx)\right)\right)\right)}} \, .$$

Aufgabe 107.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -1 \le x \le 1; \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

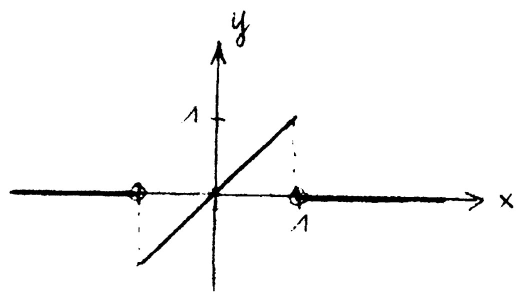
a. Skizzieren Sie den Graphen von f.
Zeigen Sie, daß f die Voraussetzungen aus 9.3.2 erfüllt.

b. Berechnen Sie das Fourierintegral $I(x)$ von f.

c. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $I(x) = f(x)$? Was ist $I(1)$?

Lösung:

a.



- f ist nur in $x = \pm 1$ nicht stetig differenzierbar
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$
$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \; (< \infty)$

b. Da f ungerade ist, gilt $\underline{\underline{a(\omega) = 0}}$ für alle $\omega \ge 0$.

Da f ungerade ist, gilt ferner

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(y)\sin(\omega y)\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^1 y \sin(\omega y)\,dy.$$

Für $\underline{\underline{\omega = 0}}$ ist $\underline{\underline{b(\omega) = 0.}}$

Sei nun $\omega > 0$.

NR: $\int y \sin(\omega y)\,dy = -\frac{1}{\omega} y \cos(\omega y) + \frac{1}{\omega}\int \cos(\omega y)\,dy$

$= -\frac{1}{\omega} y \cos(\omega y) + \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega y) + C$

$$\underline{\underline{b(\omega)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 y\sin(\omega y)\,dy = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\omega}y\cos(\omega y) + \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega y)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega) + \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega)\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)-\omega\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}}}$$

also:

$$\underline{\underline{I(x)}} = \int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega = \underline{\underline{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)-\omega\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}\sin(\omega x)\,d\omega.}}$$

c. $\underline{I(x) = f(x) \text{ gilt für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}}$.

Es ist $\underline{\underline{I(1)}} = \frac{1}{2}\left(f(1^-) + f(1^+)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Aufgabe 108.

Berechnen Sie für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 101 das Fourierintegral von f in der komplexen Form.

Lösung:

Für $\omega > 0$ gilt

$$\alpha(\omega) = \frac{a(\omega) - i\cdot b(\omega)}{2} = -\frac{2}{\pi}\cdot i\, \frac{\sin(\omega) - \omega\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega) - \omega\cos(\omega)}{\omega^2}\cdot i\,,$$

es ist

$$\alpha(0) = \frac{a(0) - i\, b(0)}{2} = 0\,;$$

für $\omega < 0$ gilt

$$\alpha(\omega) = \frac{a(-\omega) + i\cdot b(-\omega)}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot i\, \frac{\sin(-\omega) + \omega\cdot\cos(-\omega)}{\omega^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega) - \omega\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}\cdot i\,.$$

Also

$$\underline{\underline{I(x)}} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega) - \omega\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}\exp(i\omega x)\,d\omega$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\cdot i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega\cdot\cos(\omega) - \sin(\omega)}{\omega^2}\exp(i\omega x)\,d\omega}}$$

(Beachten Sie $\alpha(0) = \lim\limits_{\omega\to 0}\alpha(\omega)$!)

Aufgabe 109

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \exp(-|x|)$.

a. Berechnen Sie das Fourierintegral von f in der komplexen Form.

b. Wie lautet das Fourierintegral von f in der reellen Form?

c. Zeigen Sie mit Hilfe von b für alle $x \geq 0$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2} \cos(\omega x)\, d\omega = \frac{\pi}{2} \exp(-x)$$

Lösung:

a. Es ist $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) \exp(i\omega x)\, d\omega$ mit

$$\underline{\underline{\alpha(\omega)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-i\omega y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \exp(y) \exp(-i\omega y)\, dy \quad +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \exp(-y) \exp(-i\omega y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \exp((1-i\omega)y)\, dy \quad +$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{b \to \infty} \int_0^b \exp(-(1+i\omega)y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{1-i\omega} \exp((1-i\omega) \cdot y)\right]_a^0 \quad +$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{1+i\omega} \exp(-(1-i\omega)y)\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1-i\omega} \exp((1-i\omega)a)\right) \quad +$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{1+i\omega} \exp(-(1+i\omega)b) + \frac{1}{1+i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}}}$$

Also: $I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\exp(i\omega x)\,d\omega$

b. Da f gerade ist, gilt $b(\omega) = 0$ für alle $\omega \geq 0$.

Für $\omega \geq 0$ ist

$a(\omega) = \alpha(\omega) + \alpha(-\omega) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\omega^2} + \frac{1}{1+\omega^2}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}$.

Also gilt

$$I(x) = \int_0^\infty \left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right)d\omega$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega$$

c. Da f stetig ist, gilt $I(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es folgt für $x \geq 0$:

$I(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega = \exp(-x)$

$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)\,d\omega = \frac{\pi}{2}\cdot\exp(-x)$

Aufgabe 110.

Berechnen Sie mit Hilfe der Definition 3.4.2 für die folgenden Funktionen f die Laplacetransformierte $\mathcal{L}(f)$:

a. $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x \le 4; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$;

b. $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Lösung:

a. $$\underline{\underline{\mathcal{L}(f)(s)}} = \int_0^\infty f(x)\exp(-sx)\,dx = \int_0^4 \exp(-sx)\,dx$$

$$= \begin{cases} \left[-\frac{1}{s}\exp(-sx)\right]_0^4 = -\frac{1}{s}\exp(-s4) + \frac{1}{s} = \underline{\underline{\frac{1}{s}(1-\exp(-4s))}} & \text{für } \underline{s \neq 0}; \\ [x]_0^4 = \underline{\underline{4}} \quad \left(= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(1-\exp(-4s))\right) & \text{für } \underline{\underline{s=0}}. \end{cases}$$

b. $$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(x)\exp(-sx)\,dx = \int_0^\infty x^2\exp(-sx)\,dx$$

NR: Für $s \neq 0$ gilt (partielle Integration!)

$$\int x^2\exp(-sx)\,dx = -\frac{1}{s}x^2\exp(-sx) + \frac{2}{s}\int x\exp(-sx)\,dx =$$

$$-\frac{1}{s}x^2\exp(-sx) - \frac{2}{s^2}x\exp(-sx) + \frac{2}{s^2}\int\exp(-sx)\,dx =$$

$$-\frac{1}{s}x^2\exp(-sx) - \frac{2}{s^2}x\exp(-sx) - \frac{2}{s^3}\exp(-sx) + C;$$

für $s = 0$ gilt $\int x^2\exp(-sx)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Also: $\underline{\underline{\mathcal{L}(f)(s)}} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^2\exp(-sx)\,dx = \lim_{a\to\infty}\Big[-\frac{1}{s}x^2\exp(-sx) -$
$\frac{2}{s^2}x\exp(-sx) - \frac{2}{s^3}\exp(-sx)\Big]_0^a = \lim_{a\to\infty}\Big(-\frac{1}{s}a^2\exp(-sa) - \frac{2}{s^2}a\exp(-sa)$
$-\frac{2}{s^3}\exp(-sa) + \frac{2}{s^3}\Big) = \underline{\underline{\frac{2}{s^3}}}$ für $s > 0$, für $s \le 0$ liegt Divergenz vor.

Aufgabe 111.

Berechnen Sie mit Hilfe von bereits bestimmten Laplacetransformationen und mit Hilfe des Linearitätssatzes die Laplacetransformierte von

$h: [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sinh(ax), \quad a \in \mathbb{R}.$

Lösung:

Es gilt

$$h(x) = \sinh(ax) = \frac{1}{2}(\exp(ax) - \exp(-ax))$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}}_{=c_1} \underbrace{\exp(ax)}_{=f(x)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{=c_2} \cdot \underbrace{\exp(-ax)}_{=g(x)} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(h)(s) = c_1 \cdot \mathcal{L}(f)(s) + c_2 \cdot \mathcal{L}(g)(s)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

Aufgabe 1.12.

Berechnen Sie mit Hilfe von bereits berechneten Laplace transformationen und mit Hilfe des Verschiebungssatzes die Laplacetransformierte von

$g : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \exp(a\,x)\cdot x^2.$

Lösung

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \exp(a\cdot x)\cdot x^2 = \exp(a\cdot x)\cdot f(x) \\ f(x) &= x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufgabe 1.10}}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}(f)(s) = \frac{2}{s^3} = F(s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = F(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3}$$

Aufgabe 113.

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen H die inverse Laplacetransformierte $h = \mathcal{L}^{-1}(H)$ auf zwei Arten mit Hilfe der Tabelle 9.4.3.

i. und mit Hilfe von 9.4.7.;

ii. und mit Hilfe von Partialbruchzerlegung.

a. $H(s) = \frac{2}{s^3+16s}$ b. $H(s) = \frac{4}{s^4-16s^2}$

Lösung:

a. $H(s) = \frac{2}{s(s^2+16)}$

i. $\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2+16} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$, wobei $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$

mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(4x)$ nach Tabelle $\overset{9.4.7.a.}{\Rightarrow}$

$$\underline{\underline{h(x)}} = \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \sin(4t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4t)\right]_0^x =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)}}$$

ii. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{s(s^2+16)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+16} \iff$$

$$\frac{2}{s(s^2+16)} = \frac{A(s^2+16)+(Bs+C)\cdot s}{s(s^2+16)} \iff$$

$$2 = A(s^2+16)+(Bs+C)\cdot s \iff$$

$$2 = As^2+16A+Bs^2+Cs \iff$$

$$0\cdot s^2+0s+2 = (A+B)s^2+Cs+16A \iff$$

$A+B=0$ und $C=0$ und $16A=2$ $\iff$

$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = 0$

Also: $H(s) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{8} \frac{s}{s^2+16}$ $\Rightarrow$ (Tabelle)

$$\underline{\underline{h(s) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \cos(4x)}}$$

b. $H(s) = \frac{4}{s^2(s^2-16)}$

i. $\mathcal{L}(h)(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{4}{s^2-16} = G(s) \cdot F(s)$, wobei

$G(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ mit $g(x) = x$;

$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ mit $f(x) = \sinh(4x)$ nach Tabelle.

9.4.7.b. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{h(x)}} = (g * f)(x) = \int_0^x g(x-t) f(t)\,dt =$

$\int_0^x (x-t) \sinh(4t)\,dt = ⊛$

NR. $\int (x-t) \sinh(4t)\,dt = ?$

Partielle Integration: $u(t) = x-t$, $\dot{u}(t) = -1$

$v(t) = \frac{1}{4}\cosh(4t)$, $\dot{v}(t) = \sinh(4t)$

$\int (x-t)\sinh(4t)\,dt = \int u(t)\,\dot{v}(t)\,dt = u(t)\cdot v(t) -$

$\int \dot{u}(t)\,v(t)\,dt = \frac{1}{4}(x-t)\cosh(4t) + \frac{1}{4}\int \cosh(4t)\,dt =$

$\frac{1}{4}(x-t)\cosh(4t) + \frac{1}{16}\sinh(4t) + C$

$⊛ = \left[\frac{1}{4}(x-t)\cosh(4t) + \frac{1}{16}\sinh(4t)\right]_{t=0}^{x}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{16}\sinh(4x) - \frac{1}{4}x}}$

ii. Partialbruchzerlegung:

$\frac{4}{s^2(s^2-16)} = \frac{4}{s^2(s+4)(s-4)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s-4}$ $\Leftrightarrow$

$4 = A_1 s(s^2-16) + A_2(s^2-16) + Bs^2(s-4) + Cs^2(s+4)$ $\Leftrightarrow$

$4 = A_1 s^3 - 16A_1 s + A_2 s^2 - 16A_2 + Bs^3 - 4Bs^2 + Cs^3 + 4Cs^2$ $\Leftrightarrow$

$4 = (A_1 + B + C)s^3 + (A_2 - 4B + 4C)s^2 - 16A_1 s - 16A_2$ $\Leftrightarrow$

$A_1 + B + C = 0$ und $A_2 - 4B + 4C = 0$ und $-16A_1 = 0$ und $-16A_2 - 4C =$

$A_2 = -\frac{1}{4}$ und $A_1 = 0$ und $B + C = 0$ und $-4B + 4C = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$

$A_2 = -\frac{1}{4}$ und $A_1 = 0$ und $-B = C$ und $8C = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$

$A_1 = 0$ und $A_2 = -\frac{1}{4}$ und $B = -\frac{1}{32}$ und $C = \frac{1}{32}$

Also: $H(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{s+4} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{s-4}$ $\overset{\text{(Tabelle)}}{\Rightarrow}$

$\underline{\underline{h(s)}} = -\frac{1}{4} x - \frac{1}{32} \exp(-4x) + \frac{1}{32} \exp(4x)$

$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} (\exp(4x) - \exp(-4x)) - \frac{1}{4} x$

$= \underline{\underline{\frac{1}{16} \sinh(4x) - \frac{1}{4} x.}}$

Aufgabe 1.14.

Lösen Sie mit Hilfe von Laplacetransformationen die folgenden Anfangswertprobleme:

a. $y' = 3y, \quad y(0) = 1$

b. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

c. $y'' + y = 2, \quad y(0) = y'(0) = 0$

d. $y'' - 9y = -8\exp(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 10$

Lösung:

a. I. $y' = 3y \quad (\Leftrightarrow y' - 3y = 0), \quad y(0) = 1$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y' - 3y)(s) = 0 \overset{9.4.4.}{\Rightarrow}$$

$$\mathcal{L}(y')(s) - 3Y(s) = 0 \overset{9.4.6.}{\Rightarrow}$$

$$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = 0 \overset{y(0)=1}{\Rightarrow}$$

$$(s-3)Y(s) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

III. Tabelle 9.4.3. liefert: $\underline{\underline{y = \exp(3x)}}$

b. I. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y'' + 4y)(s) = 0 \overset{9.4.4.}{\Rightarrow}$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) + 4Y(s) = 0 \overset{9.4.6.}{\Rightarrow}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 0 \overset{y(0)=1,\ y'(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$(s^2+4)Y(s) - s = 0 \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

III. Tabelle 9.4.3. liefert: $\underline{\underline{y = \cos(2x)}}$

c. I. $y'' + y = 2$, $y(0) = y'(0) = 0$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(y''+y)(s) = \frac{2}{s}$ (nach Tabelle 9.4.3./9.4.4.) $\overset{9.4.4.}{\Rightarrow}$

$\mathcal{L}(y'')(s) + Y(s) = \frac{2}{s}$ $\overset{9.4.6.}{\Rightarrow}$

$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s}$ $\overset{y(0)=y'(0)=0}{\Rightarrow}$

$(s^2+1)\,Y(s) = \frac{2}{s}$ $\Rightarrow$

$Y(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}$

Partialbruchzerlegung:

$\frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$ $\Leftrightarrow$

$\frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)\cdot s}{s(s^2+1)}$ $\Leftrightarrow$

$2 = As^2 + A + Bs^2 + Cs$ $\Leftrightarrow$

$2 = (A+B)s^2 + Cs + A$ $\Leftarrow$

$A+B = 0$ und $C=0$ und $A=2$ $\Leftrightarrow$

$A=2,\ B=-2,\ C=0$

Also: $Y(s) = \frac{2}{s} - 2\cdot\frac{s}{s^2+1}$

III. Nach Tabelle 9.4.3. folgt

$$\underline{\underline{y = 2 - 2\cos(x)}}$$

d. I. $y'' - 9y = -8\exp(x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(y'' - 9y)(s) = -8\cdot\frac{1}{s-1}$ (nach Tabelle 9.4.3/9.4.4) $\overset{9.4.4}{\Rightarrow}$

$\mathcal{L}(y'')(s) - 9\,Y(s) = -8\cdot\frac{1}{s-1}$ $\overset{9.4.6.}{\Rightarrow}$

$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 9\,Y(s) = -8\cdot\frac{1}{s-1}$ $\overset{y(0)=0,\ y'(0)=10}{\Rightarrow}$

$$(s^2-9)Y(s)-10 = -8\cdot\frac{1}{s-1} \Rightarrow$$

$$(s^2-9)Y(s) = \frac{10(s-1)-8}{s-1} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{10s-18}{(s-1)(s-3)(s+3)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{10s-18}{(s-1)(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+3} \Leftrightarrow$$

$$10s-18 = A(s^2-9) + B(s-1)(s+3) + C(s-1)(s-3) \Leftrightarrow$$

$$10s-18 = As^2-9A + Bs^2+2Bs-3B + Cs^2-4Cs+3C \Leftrightarrow$$

$$10s-18 = (A+B+C)s^2 + (2B-4C)s + (-9A-3B+3C) \Leftrightarrow$$

$$A+B+C=0,\quad 2B-4C=10,\quad -9A-3B+3C=-18 \quad (*)$$

NR: Lösung des linearen Gleichungssystems

I. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \\ -9 & -3 & 3 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3+9\,Z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \\ 0 & 6 & 12 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3-3\cdot Z2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 24 & -48 \end{array}\right)$$

II. $C=-2$, $2B-4C=10$ und $C=-2 \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow B=1$,

$A+B+C=0$, $C=-2$, $B=1 \Rightarrow A=1$.

$(*) \Leftrightarrow \quad A=B=1, \quad C=-2.$

Also: $$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3} - 2\cdot\frac{1}{s+3}.$$

III. Nach Tabelle 9.4.3. folgt

$$\underline{\underline{y = \exp(x) + \exp(3x) - 2\exp(-3x)}}$$

** Aufgabe 1.15.

Lösen Sie das folgende Schwingungsproblem ("Resonanzfall") mit Hilfe von Laplacetransformationen:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k^2y(t) = C_0 \cdot \sin(kt), \quad y(0) = \frac{d}{dt}y(0) = 0.$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$

Lösung:

I. $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k^2y(t) = C_0 \cdot \sin(kt), \quad y(0) = \frac{d}{dt}y(0) = 0.$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(\ddot{y} + k^2y)(s) = C_0 \frac{k}{s^2+k^2}$ (nach Tabelle 9.4.3.) $\overset{9.4.4.}{\Rightarrow}$

$\mathcal{L}(\ddot{y})(s) + k^2Y(s) = C_0 \frac{k}{s^2+k^2}$ $\overset{9.4.6}{\Rightarrow}$

$s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) + k^2 \cdot Y(s) = C_0 \frac{k}{s^2+k^2}$ $\overset{y(0) = \dot{y}(0) = 0}{\Rightarrow}$

$(s^2+k^2)\,Y(s) = C_0 \cdot \frac{k}{s^2+k^2}$ $\Rightarrow$

$$Y(s) = C_0 \cdot \frac{k}{(s^2+k^2)^2} = \frac{C_0}{k} \cdot \frac{k}{s^2+k^2} \cdot \frac{k}{s^2+k^2}$$

III. Ist $g(t) = \sin(kt)$, so gilt $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$ nach Tabelle 9.4.3.

Damit gilt nach 9.4.7.b.

$$\underline{\underline{y(t)}} = \frac{C_0}{k} \cdot (g * g)(t) = \frac{C_0}{k} \int_0^t g(t-x)\, g(x)\, dx$$

$$= \frac{C_0}{k} \int_0^t \sin(k(t-x))\, \sin(kx)\, dx$$

$$\overset{\text{Additions-theoreme}}{=} \frac{C_0}{k} \left(\sin(kt) \int_0^t \cos(kx)\sin(kx)\, dx - \cos(kt) \int_0^t \sin^2(kx)\, dx \right)$$

$$\overset{\text{Formelsammlung Aufgabe 100}}{=} \frac{C_0}{k} \left(\sin(kt) \left[\frac{1}{2k} \sin^2(kx) \right]_0^t - \cos(kt) \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4k} \sin(2kx) \right]_0^t \right.$$

$$= \frac{c_0}{k}\left(\sin(kt)\cdot\frac{1}{2k}\cdot\sin^2(kt) - \cos(kt)\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4k}\sin(2kt)\right)\right)$$

Additions-theoreme

$$= \frac{c_0}{k}\left(\frac{1}{2k}\sin^3(kt) - \cos(kt)\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2k}\sin(kt)\cos(kt)\right)\right)$$

$$= \frac{c_0}{k}\left(\frac{1}{2k}\sin(kt)\left[\underbrace{\sin^2(kt)+\cos^2(kt)}_{=1}\right] - \frac{1}{2}t\cos(kt)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{c_0}{2k^2}\left(\sin(kt) - k\cdot t\cdot\cos(kt)\right)}}$$

Aufgabe 1.16.

Lösen Sie mit Hilfe von Laplacetransformationen das folgende Anfangswertproblem:

$$y''+y = f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x < 4; \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$y(0) = y'(0) = 0.$

Tip: Denken Sie auch an Aufgabe 1.14 c.

Lösung:

I. $y''+y = f(x)$ mit $f(x) = 2 - 2 \cdot u_4(x)$,

$y(0) = y'(0) = 0.$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y''+y)(s) = \frac{2}{s} - \frac{2 \cdot \exp(-4s)}{s} \quad (\text{nach } 9.4.3./9.4.4.) \overset{9.4.4.}{\Longrightarrow}$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) + Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2 \cdot \exp(-4s)}{s} \overset{9.4.6.}{\Longrightarrow}$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2 \cdot \exp(-4s)}{s} \overset{y(0)=y'(0)=0}{\Longrightarrow}$$

$$(s^2+1)\, Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2 \cdot \exp(-4s)}{s} \Longrightarrow$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s(s^2+1)}}_{=Y_1(s)} - \underbrace{\frac{2 \exp(-4s)}{s(s^2+1)}}_{=Y_2(s)}$$

III. Nach Aufgabe 1.14 c. gilt für $y_1 = \mathcal{L}^{-1}(Y_1)$:

$y_1 = 2 - 2\cos(x).$

Nach 9.4.5. b. gilt für $y_2 = \mathcal{L}^{-1}(Y_2)$:

$y_2 = y_1(x-4) \cdot u_4(x) = (2 - 2\cos(x-4))\, u_4(x).$

Also folgt:

$$\underline{\underline{y = 2 - 2\cos(x) - u_4(x) \cdot (2 - 2\cos(x-4))}}$$

Aufgabe 1.17.

Berechnen Sie mit Hilfe der Definition die $\mathcal{Z}$-Transformierte der nachstehenden Folgen:

a. (f_n) mit $f_n = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$;

b. (g_n) mit $g_n = \exp(an)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung:

a. $$\underline{\underline{\mathcal{Z}(f_n)(z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-a}}} \quad \text{für } \underline{\underline{\left|\frac{a}{z}\right| < 1}}, \text{ d.h. } \underline{\underline{\text{für } |z| > |a|}}.$$

$\uparrow$ geom. Reihe, $\left|\underline{\text{vgl. 3.2.2}}\right|$: konvergent f. $|x| < 1$ mit $\frac{1}{1-x}$,

b. $$\underline{\underline{\mathcal{Z}(g_n)(z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(an) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(a)^n \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\exp(a)}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\exp(a)}{z}} = \underline{\underline{\frac{z}{z-\exp(a)}}}$$

$\uparrow$ geom. Reihe

für $\left|\frac{\exp(a)}{z}\right| < 1$, d.h. für $\underline{\underline{|z| > \exp(a)}}$.

Aufgabe 118.

Lösen Sie mit Hilfe von Z-Transformationen die Differenzengleichung $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$ bei vorgegebenem u_0 unter der Randbedingung, daß (u_n) konvergiert.

Lösung:

I. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$, u_0 gegeben, (u_n) konvergent.

II. $F^* = \mathcal{Z}(u_n)$

$$\mathcal{Z}(u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)(z) = \mathcal{Z}(0)(z) \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}(u_{n+2})(z) - 3\,\mathcal{Z}(u_{n+1})(z) + 2F^*(z) = 0 \Rightarrow$$

$$z^2F^*(z) - z^2u_0 - zu_1 - 3zF^*(z) + 3zu_0 + 2F^*(z) = 0 \Rightarrow$$

$$(z^2 - 3z + 2)\,F^*(z) = z^2u_0 + z(u_1 - 3u_0) \Rightarrow$$

$$F^*(z) = z\,\frac{u_0z + (u_1 - 3u_0)}{z^2 - 3z + 2}$$

Partialbruchzerlegung:

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow z_1 = 2,\ z_2 = 1$$

$$\frac{u_0z + (u_1 - 3u_0)}{z^2 - 3z + 2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{u_0z + (u_1 - 3u_0)}{z^2 - 3z + 2} = \frac{A(z-2) + B(z-1)}{(z-1)(z-2)} \Leftrightarrow$$

$$u_0z + (u_1 - 3u_0) = (A+B)z + (-2A - B) \Leftrightarrow$$

$$u_0 = A + B \quad \text{und} \quad u_1 - 3u_0 = -2A - B \Leftrightarrow$$

$$A = u_0 - B \quad \text{und} \quad u_1 - 3u_0 = 2B - 2u_0 - B \Leftrightarrow$$

$$B = u_1 - u_0 \quad \text{und} \quad A = 2u_0 - u_1$$

Also $F^*(z) = (2u_0 - u_1)\cdot\frac{z}{z-1} + (u_1 - u_0)\frac{z}{z-2}$

III. Die Tabelle liefert:

$$u_n = (2u_0 - u_1)\cdot 1 + (u_1 - u_0)\cdot 2^n$$

(u_n) ist – wegen der Divergenz von (2^n) – nur für $u_1 - u_0 = 0$ konvergent. Also: $u_1 = u_0 \Rightarrow 2u_0 - u_1 = u_0$.

Endergebnis: $\underline{\underline{u_n = u_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.}}$

Aufgabe 1.19 ("Die Fibonacci - Kaninchen")

Man verehrt Ihnen zu Beginn von Monat 1 ein neugeborenes Kaninchenpaar mit Geschenkurkunde. "Dies ist ein besonderes Kaninchenpaar! Denn:

1. Diese Kaninchen sind unsterblich, falls sie nicht in den Kochtopf wandern.
2. Das Weibchen eines jeden Kaninchenpaares bringt vom vollendeten zweiten Lebensmonat an allmonatlich ein weiteres Kaninchenpaar gleicher Güte zur Welt."

f_n sei die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n (ohne Kochtopfeinsatz), gesucht ist eine Formel zur Berechnung von f_n.

a. Begründen Sie: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$.

b. Begründen Sie: $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

c. Berechnen Sie f_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe von $\mathcal{Z}$-Transformationen.

d. Wieviele Kaninchenpaare haben Sie im Monat 100 - ohne Kochtopfeinsatz?

Lösung:

a. $\underline{\underline{f_0 = 0}}$ (Sie haben noch kein solches Paar);

$\underline{\underline{f_1 = 1}}$ (Nur Paar Nr. 1 vorhanden);

$\underline{\underline{f_2 = 1}}$ (" " " ");

$\underline{\underline{f_3 = 2}}$ (Paar Nr. 1 vorhanden und dessen 1. Kinderpaar: Paar Nr. 2);

$\underline{\underline{f_4 = 3}}$ (Paare Nr. 1 und Nr. 2 vorhanden und das 2. Kinderpaar von Paar Nr. 1: Paar Nr. 3)

b. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, da die Kaninchenpaare des Vormonats weiterleben und die Kaninchenpaare des Vorvormonats je ein Kindpaar bekommen.

c. I. $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1.$

II. $F^* = \mathcal{Z}(f_n)$

$$\mathcal{Z}(f_{n+2} - f_{n+1} - f_n)(z) = \mathcal{Z}(0)(z) \Rightarrow$$
$$\mathcal{Z}(f_{n+2})(z) - \mathcal{Z}(f_{n+1})(z) - F^*(z) = 0 \Rightarrow$$
$$z^2 F^*(z) - z^2 f_0 - z f_1 - z F^*(z) + z f_0 - F^*(z) = 0 \Rightarrow$$
$$(z^2 - z - 1) F^*(z) = z \Rightarrow$$
$$F^*(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = z \cdot \frac{1}{z^2 - z - 1}$$

Partialbruchzerlegung:

$$z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Es gilt $z_1 + z_2 = 1, \quad z_1 - z_2 = \sqrt{5}.$

$$\frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{A(z - z_2) + B(z - z_1)}{z^2 - z - 1} \Leftrightarrow$$
$$1 = (A + B) z + (-A z_2 - B z_1) \Leftrightarrow$$
$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad -A z_2 - B z_1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$A = -B \quad \text{und} \quad B\underbrace{(z_2 - z_1)}_{= -\sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow$$
$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Also: $$F^*(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z-z_1} - \frac{z}{z-z_2}\right)$$

mit $z_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $z_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

III. Die Tabelle liefert

$$\underline{\underline{f_n}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(z_1^n - z_2^n\right)$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^n\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0}}$$

d. Es sind $\underline{\underline{f_{100} \approx 3{,}542248537 \cdot 10^{20} \text{ Paare}}}$ (Aber: wohin damit? Es sollte frühzeitig Kaninchen zu Mittag geben!)

Aufgabe 120.

Sei $x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$; $\tilde{x} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \frac{1}{k!}$

a. Mit Hilfe von welcher speziellen Funktion läßt sich x genau beschreiben? Wie? (Tip: 3.3.5.)

b. Berechnen Sie $\tilde{x}$

c. Geben Sie einen absoluten Höchstfehler von $\tilde{x}$ an. (Tip: 3.2.7.)

Lösung:

a. $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k = \exp(-1) = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}.$

b. $\underline{\underline{\tilde{x}}} = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} (-1)^k = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{12 - 4 + 1}{24} = \frac{9}{24}$

$= \frac{3}{8} = \underline{\underline{0{,}375}}.$

c. Da die vorliegende Reihe eine alternierende Reihe ist, gilt $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{-3}$.

Damit ist $\underline{\underline{\alpha_x = 8{,}\overline{3} \cdot 10^{-3}}}$ ein absoluter Höchstfehler von $\tilde{x}$.

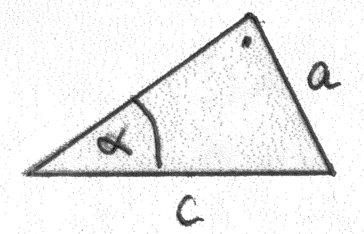
Aufgabe 121.

In einem rechtwinkligen Dreieck werden für den Winkel α (im Bogenmaß) und die zugehörige Gegenkathete a die folgenden Werte gemessen

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{1800}\ ; \quad a = 21{,}6\ \text{cm} \pm 0{,}1\ \text{cm}.$$

Berechnen Sie die Hypothenuse c und schätzen Sie den absoluten Fehler ab. Rundungsfehler des Taschenrechners mögen unberücksichtigt bleiben.

Lösung:



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = c(a,\alpha) = \frac{a}{\sin(\alpha)}$$

$$\underline{\underline{c}} = \frac{21{,}6\ \text{cm}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{43{,}2\ \text{cm}}}$$

$$\frac{\partial c}{\partial a}(a,\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}\ ; \quad \frac{\partial c}{\partial \alpha}(a,\alpha) = \frac{-a\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\ ;$$

$$|\Delta\alpha| \leq \frac{\pi}{1800}\ ; \quad |\Delta a| \leq 0{,}1\ \text{cm}.$$

$$\underline{\underline{|\Delta c(a,\alpha)| \lesssim}} \left|\frac{\partial c}{\partial a}(a,\alpha)\right| \cdot |\Delta a| + \left|\frac{\partial c}{\partial \alpha}(a,\alpha)\right| \cdot |\Delta\alpha|$$

$$= \left|\frac{1}{\sin(\alpha)}\right| \cdot |\Delta a| + \left|\frac{-a\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}\right| \cdot |\Delta\alpha|$$

$$\leq \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}1\ \text{cm} + \frac{21{,}6\ \text{cm} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\pi}{1800}$$

$$= \left(0{,}2 + \frac{43{,}2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{1800}\right)\ \text{cm} \cong \underline{\underline{0{,}3305935542\ \text{cm}}}$$

Also: $\underline{\underline{c = 43{,}2\ \text{cm} \pm 0{,}3305935542\ \text{cm}}}$

b. Berechnung der Kontraktionszahl λ

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{6}\left|\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right| = 0{,}5\,; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 2}}^{6}\left|\frac{a_{2j}}{a_{22}}\right| = 0{,}75\,; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 3}}^{6}\left|\frac{a_{3j}}{a_{33}}\right| = 0{,}5\,;$$

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq 4}}^{6}\left|\frac{a_{4j}}{a_{44}}\right| = 0{,}5\,; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 5}}^{6}\left|\frac{a_{5j}}{a_{55}}\right| = 0{,}75\,; \quad \sum_{\substack{j=1\\j\neq 6}}^{6}\left|\frac{a_{6j}}{a_{66}}\right| = 0{,}5$$

$$\underline{\underline{\lambda}} = \max\{0{,}5;\ 0{,}75\} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

$\lambda < 1 \Rightarrow$ <u>das Gesamtschrittverfahren konvergiert</u> für jeden Startvektor

c. $$\underline{\underline{\max_{i=1,..,6}|x_i^{(3)} - x_i|}} \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\max_{i=1,..,6}|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = \frac{0{,}75}{0{,}25}\cdot 0{,}171875$$

$$= \underline{\underline{0{,}515625}}$$

d. $$\underline{\underline{\max_{i=1,..,6}|x_i^{(10)} - x_i|}} \leq \frac{\lambda^{10}}{1-\lambda}\max_{i=1,..,6}|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = \frac{0{,}75^{10}}{0{,}25}\cdot 0{,}5$$

$$\cong \underline{\underline{0{,}1126270294}}$$

Aufgabe 126.

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sei wie in Aufgabe 125.

a. Sei $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Berechnen Sie die Näherungslösung $\vec{x}^{(3)}$ des Systems, die man nach 3 Schritten des Einzelschrittverfahrens erhält.

b. Führen Sie eine Aposteroni-Fehlerabschätzung für $\vec{x}^{(3)}$ durch.

c. Führen Sie eine Apriori-Fehlerabschätzung für $\vec{x}^{(10)}$ durch.

Lösung:

a. Rechenvorschriften (ni Abhandlung der Vorschriften der vorigen Aufgabe):

$$x_1^{(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_2^{(z-1)} + \frac{1}{4} x_4^{(z-1)}$$

$$x_2^{(z)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_1^{(z)} + \frac{1}{4} x_3^{(z-1)} + \frac{1}{4} x_5^{(z-1)}$$

$$x_3^{(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_2^{(3)} + \frac{1}{4} x_6^{(z-1)}$$

$$x_4^{(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_1^{(z)} + \frac{1}{4} x_5^{(z-1)}$$

$$x_5^{(z)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_2^{(z)} + \frac{1}{4} x_4^{(z)} + \frac{1}{6} x_6^{(z-1)}$$

$$x_6^{(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x_3^{(z)} + \frac{1}{4} x_5^{(z)}$$

z	$x_1^{(z)}$	$x_2^{(z)}$	$x_3^{(z)}$	$x_4^{(z)}$	$x_5^{(z)}$	$x_6^{(z)}$
1	0,5	0,375	0,59375	0,625	0,5	0,7734375
2	0,75	0,71 09375	0,87109375	0,8125	0,82421875	0,923828125
3	0,880859375	0,8940429688	0,9544677735	0,9262695313	0,9360351563	0,9726257325

$\vec{x} \cong \vec{x}^{(3)} \cong (0{,}880859375;\ 0{,}8940429688;\ 0{,}9544677735;\ 0{,}9262695313;\ 0{,}9360351563;\ 0{,}9726257325)$

b. Berechnung der Kontraktionszahl μ:

$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0{,}25,\ \alpha_3 = 0{,}25,\ \alpha_4 = 0{,}25,\ \alpha_5 = 0{,}5,\ \alpha_6 = 0{,}5$

$\beta_1 = 0{,}5,\ \beta_2 = 0{,}5,\ \beta_3 = 0{,}25,\ \beta_4 = 0{,}25,\ \beta_5 = 0{,}25,\ \beta_6 = 0$

$$\mu = \max_{i=1,..6} \frac{\beta_i}{1-\alpha_i} = \max\{0{,}5;\ 0{,}\overline{6};\ 0{,}\overline{3};\ 0{,}5;\ 0\} = \underline{\underline{0{,}\overline{6}}}$$

$$\max_{i=1,\dots,6} |x_i^{(3)} - x_i| \le \frac{\mu}{1-\mu} \max_{i=1,\dots,6} |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| \cong \frac{0{,}\overline{6}}{0{,}\overline{3}} \cdot 0{,}18310546 88$$

$$\cong 0{,}3662109376$$

c. $$\max_{i=1,\dots,6} |x_i^{(10)} - x_i| \le \frac{\mu^{10}}{1-\mu} \max_{i=1,\dots,6} |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| = \frac{0{,}\overline{6}^{10}}{0{,}\overline{3}} \cdot 0{,}7734375$$

$$\cong 0{,}04023776864$$

Aufgabe 128.

Von einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f sind folgende Daten bekannt: $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f(\pi) = 0$; $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a. Bestimmen Sie ein Polynom p vom Grad ≤ 3 mit $p(k\cdot\frac{\pi}{2}) = f(k\cdot\frac{\pi}{2})$ für $k = -1; 0; 1; 2$.

b. Berechnen Sie $p(\frac{\pi}{4})$ und schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(\frac{\pi}{4}) - p(\frac{\pi}{4})|$ ab.

Lösung:

a. 1. Schritt: Es genügt, die Lagrangeschen Grundpolynome L_0 und L_2 zu berechnen.

$$\underline{L_0(x)} = \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)}{(-\frac{\pi}{2}-0)(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})(-\frac{\pi}{2}-\pi)} = \frac{x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{2}x}{-\frac{3\pi^3}{4}} = \underline{-\frac{4}{3\pi^3}x^3 + \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x}$$

$$\underline{L_2(x)} = \frac{(x+\frac{\pi}{2})(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} = \frac{x^3 - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{\pi^2}{2}x}{-\frac{\pi^3}{4}} = \underline{-\frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{2}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi}x}$$

2. Schritt: $\underline{p(x)} = (-1)L_0(x) + 1\cdot L_2(x) = \frac{4}{3\pi^3}x^3 - \frac{2}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{3\pi}x$
$- \frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{2}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi}x = \underline{\underline{-\frac{8}{3\pi^3}x^3 + \frac{8}{3\pi}x}}$

b. $$\underline{\underline{p(\tfrac{\pi}{4})}} = -\frac{8}{3\pi^3}\,\frac{\pi^3}{64} + \frac{8}{3\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{24} + \frac{2}{3} = \frac{15}{24} = \underline{\underline{0{,}625}}$$

Es gibt $\tilde{x} \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ mit

$$\underline{\underline{|f(\tfrac{\pi}{4}) - p(\tfrac{\pi}{4})|}} = \left|\frac{1}{4!}(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{2})\cdot\tfrac{\pi}{4}(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{2})(\tfrac{\pi}{4}-\pi)\, f^{(4)}(\tilde{x})\right|$$
$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{4}\,\underbrace{|f^{(4)}(\tilde{x})|}_{\leq 1}$$
$$\underline{\underline{\leq \frac{3\pi^4}{2\cdot 4^5} \approx 0{,}1426890982}}$$

Aufgabe 129

gegeben sind die folgenden Meßwerte:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	2	3	5	7
$f(x_i)$	2	0	0	1	4

Bestimmen Sie ein approximierendes Polynom vom Grad ≤ 2 nach der "Fehlerquadratmethode von Gauß."

Lösung:

Das gesuchte Polynom ist $p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$, wobei

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{4} 1 & \sum_{k=0}^{4} x_k & \sum_{k=0}^{4} x_k^2 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k & \sum_{k=0}^{4} x_k^2 & \sum_{k=0}^{4} x_k^3 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k^2 & \sum_{k=0}^{4} x_k^3 & \sum_{k=0}^{4} x_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{4} f(x_k) \\ \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\,x_k \\ \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\,x_k^2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 17 & 87 \\ 17 & 87 & 503 \\ 87 & 503 & 3123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 33 \\ 221 \end{pmatrix}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 17 & 87 & 7 \\ 17 & 87 & 503 & 33 \\ 87 & 503 & 3123 & 221 \end{array}\right) \xrightarrow[z3 - \frac{87}{5} z1]{z2 - \frac{17}{5} z1} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 17 & 87 & 7 \\ 0 & 29{,}2 & 207{,}2 & 9{,}2 \\ 0 & 207{,}2 & 1609{,}2 & 99{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{z3 - \frac{207{,}2}{29{,}2} z2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 17 & 87 & 7 \\ 0 & 29{,}2 & 207{,}2 & 9{,}2 \\ 0 & 0 & 138{,}9315069 & 33{,}91780822 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $c_2 \cong 0{,}244133307$

$\Rightarrow$ $c_1 = \frac{1}{29{,}2}(9{,}2 - 207{,}2\,c_2) \cong -1{,}417274699$

$\Rightarrow$ $c_0 = \frac{1}{5}(7 - 17c_1 - 87c_2) \cong 1{,}970814435$. Also:

$$p(x) \cong 1{,}970814435 - 1{,}417274699\,x + 0{,}244133307\,x^2$$

Aufgabe 130

Bei einem Dieselmotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl x [in $\frac{1}{min}$] und der Leistung y [in PS] ermittelt. Man erhielt folgende Meßwerte:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i [in $\frac{1}{min}$]	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
y_i [in PS]	5	8	12	17	24	31	36

a. Bestimmen Sie die Leistung näherungsweise durch Berechnung der Regressionsgeraden p. Schätzen Sie die Motorleistung bei einer Drehzahl von 2150 $\frac{1}{min}$.

b. Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.

Lösung:

a. $N = 6 \Rightarrow N+1 = 7$

$$\bar{x} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} x_k = 2000\ \frac{1}{min}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} y_k = 19\ PS$$

$$\sum_{k=0}^{N} x_k^2 = 35\,000\,000\ \frac{1}{min^2}$$

$$\sum_{k=0}^{N} x_k y_k = 341\,500\ \frac{PS}{min}$$

$$c_1 = \frac{\left(\sum_{k=0}^{N} x_k y_k\right) - (N+1)\bar{x}\bar{y}}{\left(\sum_{k=0}^{N} x_k\right)^2 - (N+1)\bar{x}^2} = \frac{341\,500 - 7\cdot 2000\cdot 19}{35\,000\,000 - 7\cdot 2000^2}\ \frac{PS\cdot min^2}{min\cdot 1}$$

$$\cong 0{,}010785714 29\ PS\cdot min$$

$$\underline{p(x)} = c_1(x-\bar{x}) + \bar{y} \ \underline{\underline{\cong 0{,}01078571429\ PS\cdot min\,(x - 2000\cdot\tfrac{1}{min}) + 19\ PS}}$$

$\underline{\underline{p(2150\ \frac{1}{min}) \cong 20{,}61785714\ PS}}$ ist ein Schätzwert für die Motorleistung bei 2150 $\frac{1}{min}$.

b. $$\sum_{k=0}^{N} y_k^2 = 3355\ PS^2$$

$$\underline{\underline{r}} = \frac{341\,500 - 7\cdot 2000\cdot 19}{\sqrt{(35\,000\,000 - 7\cdot 2000^2)(3355 - 7\cdot 19^2)}}\ \frac{PS}{min}\cdot\frac{min}{PS}$$

$$\cong \underline{\underline{0{,}9917055945}}$$

Aufgabe 131

Es sei $I = \int_0^1 x \cdot \exp(x)\,dx$.

a. Berechnen Sie I genau.

b. Berechnen Sie I näherungsweise mit Hilfe der Trapezregel für $n=2$ und $n=4$; schätzen Sie für den Fall $n=4$ den absoluten Fehler ab.

c. Berechnen Sie I näherungsweise mit Hilfe der Simpsonregel für $n=2$ und $n=4$; schätzen Sie für den Fall $n=4$ den absoluten Fehler ab.

Lösung:

Es sei stets $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x \cdot \exp(x)$.

a. $\underline{\underline{I}} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x \exp(x)\,dx = [x \exp(x)]_0^1 - \int_0^1 \exp(x)\,dx$
$= [x\exp(x) - \exp(x)]_0^1 = e - e + 1 = \underline{\underline{1}}$

b. $\underline{\underline{T(2)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} f(0) + f(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2} f(1)\right) \cong \frac{1}{2}(0 + 0{,}8243606354 +$
$\frac{1}{2} \cdot 2{,}718281828) \cong \underline{\underline{1{,}091750775}}$

$\underline{\underline{T(4)}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} f(0) + f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{4}) + \frac{1}{2} f(1)\right) \cong \frac{1}{4}(0 +$
$0{,}3210063542 + 0{,}8243606354 + 1{,}587750012 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}718281828)$
$\underline{\underline{\cong 1{,}023064479}}$

$f(x) = x\exp(x) \Rightarrow f'(x) = (1+x)\exp(x) \Rightarrow f''(x) = (2+x)\exp(x)$
$\Rightarrow \max\limits_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 3e$, Es gibt $\tilde{x} \in [0,1]$ mit

$\underline{\underline{|I - T(4)|}} = \left|\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4^2} f''(\tilde{x})\right| = \frac{1}{12 \cdot 16} |f''(\tilde{x})| \underline{\underline{\leq}}$
$\frac{1}{12 \cdot 16} \cdot \max\limits_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \frac{3e}{12 \cdot 16} = \frac{e}{64} \underline{\underline{\cong 0{,}04247315357}}$

c. $\underline{\underline{S(2)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\left(f(0) + 4 \cdot f(\tfrac{1}{4}) + 2 \cdot f(\tfrac{1}{2}) + 4 \cdot f(\tfrac{3}{4}) + f(1)\right) \cong$
$\frac{1}{12}(0 + 4 \cdot 0{,}3210063542 + 2 \cdot 0{,}8243606354 + 4 \cdot 1{,}587750012$
$+ 2{,}718281828) \cong \underline{\underline{1{,}000169047}}$

$\underline{\underline{S(4)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \left(f(0) + 4 \cdot f(\tfrac{1}{8}) + 2 \cdot f(\tfrac{1}{4}) + 4 \cdot f(\tfrac{3}{8}) + 2 \cdot f(\tfrac{1}{2}) + 4 \cdot f(\tfrac{5}{8}) + \right.$
$\left. 2 \cdot f(\tfrac{3}{4}) + 4 \cdot f(\tfrac{7}{8}) + f(1) \right) \cong \frac{1}{24} (0 + 4 \cdot 0{,}1416435566 + 2 \cdot 0{,}3210063354 +$
$4 \cdot 0{,}5456217805 + 2 \cdot 0{,}8243606354 + 4 \cdot 1{,}167653723 + 2 \cdot 1{,}587750012$
$+ 4 \cdot 2{,}099015882 + 2{,}718281828) \cong \underline{\underline{1{,}00001065}}$

$f''(x) = (2+x)\exp(x) \Rightarrow f'''(x) = (3+x)\exp(x) \Rightarrow f^{(4)}(x) = (4+x)\exp(x)$
$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = 5e$. Es gibt $\tilde{x} \in [0,1]$ mit
$\underline{\underline{|I - S(4)|}} = \left| \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{8^4} f^{(4)}(\tilde{x}) \right| = \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{8^4} |f^{(4)}(\tilde{x})| \underline{\underline{\leq}}$
$\frac{1}{180} \cdot \frac{1}{8^4} \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = \frac{5e}{180 \cdot 8^4} = \frac{e}{36 \cdot 8^4} \cong \underline{\underline{1{,}843452846 \cdot 10^{-5}}}$

Aufgabe 132.

- a, b, n einlesen
- Schrittweite gleich $\frac{b-a}{n}$ setzen
- Trapez gleich $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ setzen
- Für i = 1 bis n − 1
  - a durch a + Schrittweite ersetzen
  - Trapez durch Trapez + f(a) ersetzen
- Trapez durch Trapez · Schrittweite ersetzen und ausgeben.

Oben sehen Sie einen Algorithmus für die Trapezregel in Struktogrammform. Entwerfen Sie ähnlich einen Algorithmus für die Simpsonregel in Struktogrammform.

Lösung:

- a, b, n einlesen
- Schrittweite gleich $\frac{b-a}{2n}$ setzen
- Simpson gleich f(a) + f(b) setzen
- Faktor gleich 4 setzen
- Für i = 1 bis 2n − 1
  - a durch a + Schrittweite ersetzen
  - Simpson durch Simpson + Faktor · f(a) ersetzen
  - Faktor durch 6 − Faktor ersetzen
- Simpson durch $\frac{1}{3}$ · Schrittweite · Simpson ersetzen und ausgeben

Aufgabe 133.

Die Schwingungsdauer D eines Fadenpendels der Länge l mit maximalem Auslenkwinkel $\varphi_0 = 60°$ berechnet sich nach der Formel

$$D = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}25 \cdot \sin^2(x)}}\, dx .$$

a. Berechnen Sie D näherungsweise mit Hilfe der Simpsonregel für $n = 2$ und $n = 4$.

b. Führen Sie eine Fehlerbetrachtung für den Fall $n = 4$ mit der asymptotischen Fehlerformel durch.

Lösung:

a. Sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}25 \cdot \sin^2(x)}}$. Es werden zunächst Näherungswerte für $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ bestimmt; diese werden mit $S(n)$ bezeichnet. Die Näherungen für D werden mit $D(n)$ bezeichnet.

$$S(2) = \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4 \cdot f(\tfrac{\pi}{8}) + 2 \cdot f(\tfrac{\pi}{4}) + 4 \cdot f(\tfrac{3\pi}{8}) + f(\tfrac{\pi}{2}) \right)$$

$$\approx \frac{\pi}{24}\left(1 + 4 \cdot 1{,}018824325 + 2 \cdot 1{,}069044968 + 4 \cdot 1{,}127508468 + 1{,}154700538\right)$$

$$\approx 1{,}685742182 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(2) \approx \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 6{,}742968728.}}$$

$$S(4) = \frac{\pi}{48}\left(f(0) + 4 \cdot f(\tfrac{\pi}{16}) + 2 \cdot f(\tfrac{\pi}{8}) + 4 \cdot f(\tfrac{3\pi}{16}) + 2 \cdot f(\tfrac{\pi}{4}) + 4 \cdot f(\tfrac{5\pi}{16}) + 2 \cdot f(\tfrac{3\pi}{8}) + 4 \cdot f(\tfrac{7\pi}{16}) + f(\tfrac{\pi}{2}) \right)$$

$$\approx \frac{\pi}{48}\left(1 + 4 \cdot 1{,}004791752 + 2 \cdot 1{,}018824325 + 4 \cdot 1{,}040969177 + 2 \cdot 1{,}069044968 + 4 \cdot 1{,}099522289 + 2 \cdot 1{,}127508468 + 4 \cdot 1{,}127508468 + 1{,}154700538\right)$$

$$\approx 1{,}68570355 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(4) \approx \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 6{,}74300142}}$$

b. $$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx - S(4) \approx \frac{1}{15}\left(S(4) - S(2)\right) \approx 5{,}448\overline{6} \cdot 10^{-7} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{D - D(4) \approx \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 2{,}1794\overline{6} \cdot 10^{-6}}}$$

Aufgabe 134.

Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = y + x$, $y(0) = 0$.
Bestimmen Sie $y(1)$

a. genau;

b. näherungsweise mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren für $n = 5$;

c. näherungsweise mit dem Verfahren von Runge und Kutta für $n = 5$.

Lösung:

a. I. $y' - y = x, \quad y(0) = 0$

II. $Y = \mathcal{L}(y)$

$$\mathcal{L}(y'-y)(s) = \mathcal{L}(x)(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(y')(s) - \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$s\,Y(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$(s-1)\,Y(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s-1} \Leftrightarrow$$

$$1 = A_1 s(s-1) + A_2(s-1) + Bs^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = (A_1+B)s^2 + (-A_1+A_2)s - A_2 \Leftrightarrow$$

$A_1 + B = 0$ und $-A_1 + A_2 = 0$ und $A_2 = -1$ $\Leftrightarrow$

$A_1 = A_2 = -1$ und $B = 1$

Also: $Y(s) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$

III. $y(x) = -1 - x + \exp(x)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(1) = e - 2 \quad (\approx 0{,}718281828)}}$

b. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0{,}2$, $f(x,y) = y + x$

$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0{,}2$

$y_{i+1} = h \cdot f(x_i, y_i) + y_i = 0{,}2(y_i + x_i) + y_i = 1{,}2 y_i + 0{,}2 x_i$

$y(1) \cong y_5$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	0	0	0,04	0,128	0,2736	0,48832

$y(1) \cong y(5) = 0{,}48832$ (diese Näherung ist sehr schlecht!)

c. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $h = 0{,}2$, $f(x,y) = x + y$

$x_{i+1} = x_i + h = x_i + 0{,}2$

$A_i = h \cdot f(x_i, y_i) = 0{,}2(x_i + y_i) = 0{,}2 x_i + 0{,}2 y_i$

$B_i = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{A_i}{2}) = 0{,}2(x_i + 0{,}1 + y_i + 0{,}1 x_i + 0{,}1 y_i)$
$= 0{,}22 x_i + 0{,}22 y_i + 0{,}02$

$C_i = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{B_i}{2}) = 0{,}2(x_i + 0{,}1 + y_i + 0{,}11 x_i + 0{,}11 y_i$
$+ 0{,}01) = 0{,}222 x_i + 0{,}222 y_i + 0{,}022$

$D_i = h \cdot f(x_i + h, y_i + C_i) = 0{,}2(x_i + 0{,}2 + y_i + 0{,}222 x_i + 0{,}222 y_i$
$+ 0{,}022) = 0{,}2444 x_i + 0{,}2444 y_i + 0{,}0444$

$y_{i+1} = \frac{1}{6}(A_i + 2B_i + 2C_i + D_i) + y_i = \frac{1}{6}(0{,}2 x_i + 0{,}2 y_i +$
$0{,}44 x_i + 0{,}44 y_i + 0{,}04 + 0{,}444 x_i + 0{,}444 y_i + 0{,}044 + 0{,}2444 x_i$
$+ 0{,}2444 y_i + 0{,}0444) + y_i = \frac{1}{6}(1{,}3284 x_i + 1{,}3284 y_i + 0{,}1284) + y_i$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_i	0	0,0214	0,09181796	0,2221064564	0,4255208259	0,7182511367

$y(1) \cong y_5 \cong 0{,}7182511367$. (viel besser als bei b.)

Aufgabe 135.

a. Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten:

i. $\binom{6}{3}$ ii. $\binom{10}{5}$ iii. $\binom{n}{1}$ $(n \in \mathbb{N})$

b. Zeigen Sie:

i. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$.

* ii. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$; $k < n$.

Lösung:

a. i. $\binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = \dfrac{\cancel{3!}\,4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}\,\cancel{6}} = \underline{\underline{20}}$

ii. $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5!\,5!} = \dfrac{\cancel{5!}\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\cdot 9\cdot \overset{2}{\cancel{10}}}{\cancel{5!}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}} = 4\cdot 7\cdot 9 = \underline{\underline{252}}$

iii. $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = \dfrac{\cancel{(n-1)!}\,n}{1\cdot\cancel{(n-1)!}} = \underline{\underline{n}}$

b. i. $\underline{\underline{\binom{n}{k}}} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(\underbrace{n-(n-k)}_{=k})!} = \underline{\underline{\binom{n}{n-k}}}$

ii. $\underline{\underline{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}$

$= \dfrac{n!}{k!\,(n-(k+1))!\,(n-k)} + \dfrac{n!}{k!\,(k+1)\,(n-(k+1))!}$

$= \dfrac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{k!\,(k+1)\,(n-(k+1))!\,(n-k)}$

$= \dfrac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,\underbrace{(n-k)}_{(n+1)-(k+1)}!}$

$= \dfrac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}$

$= \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}$

$= \underline{\underline{\binom{n+1}{k+1}}}$

Aufgabe 136

In einer Urne befinden sich je eine blaue, gelbe, rote, schwarze und weiße Kugel. Es werden zwei Kugeln gezogen nach

Verfahren 1: Ohne Zurücklegen, die Reihenfolge ist unwichtig
Verfahren 2: Mit " ; " " " wichtig
Verfahren 3: Ohne " ; " " " "
Verfahren 4: Mit " ; " " " unwichtig.

a. Bestimmen Sie für jedes Verfahren die Anzahl der Möglichkeiten.

b. geben Sie bei Verfahren 1 und Verfahren 4 alle Möglichkeiten in einer Menge an.

Lösung:

a. Es werden jeweils Stichproben vom Umfang $k=2$ aus einer Menge mit $n=5$ Elementen entnommen.

Verfahren 1: ungeordnet; ohne Zurücklegen

Anzahl: $C(n,k) = C(5,2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = \underline{\underline{10}}$

Verfahren 2: geordnet; mit Zurücklegen

Anzahl: $V_W(n,k) = V_W(5,2) = 5^2 = \underline{\underline{25}}$

Verfahren 3: geordnet; ohne Zurücklegen.

Anzahl: $V(n,k) = V(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = \underline{\underline{20}}$

Verfahren 4: ungeordnet; mit Zurücklegen

Anzahl: $C_W(n,k) = C_W(5,2) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = \underline{\underline{15}}$

b. Abkürzung: Anfangsbuchstaben der Farben

Verfahren 1: $\Omega = \{(b,g), (b,r), (b,s), (b,w), (g,r), (g,s), (g,w), (r,s), (r,w), (s,w)\}$

Verfahren 4: $\Omega = \{(b,b), (b,g), (b,r), (b,s), (b,w), (g,g), (g,r), (g,s), (g,w), (r,r), (r,s), (r,w), (s,s), (s,w), (w,w)\}$

Aufgabe 137

Wieviele verschiedene "formale Wörter" mit drei Buchstaben lassen sich aus den sechs Buchstaben a, b, c, d, e, f bilden, wenn jeder

a. nur einmal,

b. mehrmals verwendet werden darf?

Lösung:

Es handelt sich jeweils um geordnete Stichproben einer Menge mit $n=6$ Elementen vom Umfang $k=3$.

a. Hier betrachtet man Stichproben ohne Zurücklegen.

Die gesuchte Anzahl ist

$$V(n,k) = V(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6 = \underline{\underline{120}}$$

b. Hier betrachtet man Stichproben mit Zurücklegen.

Die gesuchte Anzahl ist

$$V_W(n,k) = V_W(6,3) = 6^3 = \underline{\underline{216}}.$$

Aufgabe 138.

Geben Sie in den folgenden Situationen den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,p) an:

a. Dreimaliger Wurf mit einer fairen Münze.

b. Aus einem Korb mit drei alten und zwei frischen Brötchen wird so lange ein Brötchen entnommen, bis das Brötchen frisch ist.

c. Man würfelt mit einem fairen Würfel so lange, bis eine gerade Zahl fällt. Zeigen Sie hier: $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.

Lösung:

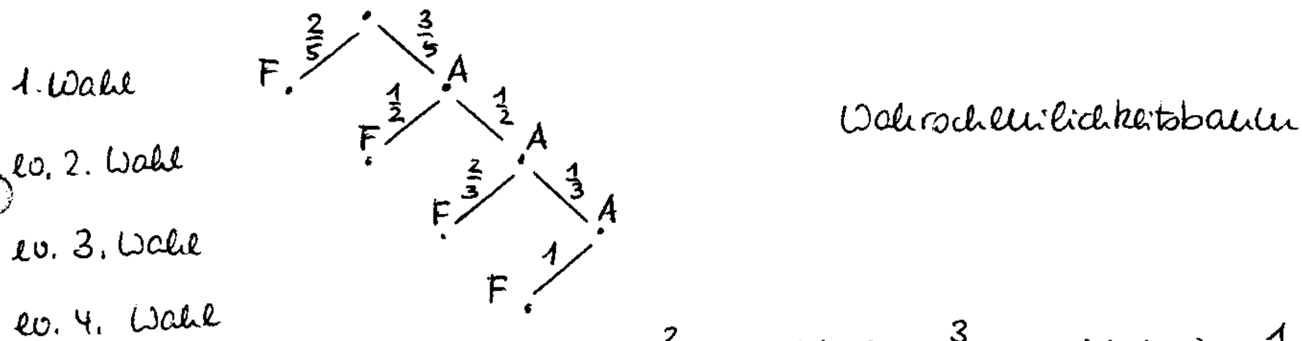
a. Abkürzungen: W Wappen, Z Zahl

$\Omega = \{(y_1,y_2,y_3) \mid y_i \in \{W,Z\} \text{ für } i=1,2,3\}$

$p: \Omega \to [0,1], \quad p(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{8}$ für alle $(y_1,y_2,y_3) \in \Omega$

b. Abkürzungen: F frisches, A altes Brötchen

$\Omega = \{F, (A,F), (A,A,F), (A,A,A,F)\}$



$p: \Omega \to [0,1], \quad p(F) = \frac{2}{5}, \quad p(A,F) = \frac{3}{10}, \quad p(A,A,F) = \frac{1}{5},$

$p(A,A,A,F) = \frac{1}{10}$

c. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i, \quad \Omega_1 = \{2;4;6\}$

$\Omega_i = \{(x_1,\dots,x_i) \mid x_1,\dots,x_{i-1} \in \{1;3;5\}, \; x_i \in \{2;4;6\}\}$

für $i \geq 2$

$p: \Omega \to [0;1], \quad p(\omega) = \left(\frac{1}{6}\right)^i$ für $\omega \in \Omega_i$.

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\Omega_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^i \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Ω_i hat 3^i Elemente

geom. Reihe

Aufgabe 139

Vorgelegt sei die Situation aus Aufgabe 136. Bestimmen Sie für jedes der dort beschriebenen Verfahren die Wahrscheinlichkeit, daß eine blaue und eine gelbe Kugel gezogen werden – und zwar in dieser Reihenfolge, falls die Reihenfolge wichtig ist.

Lösung:

Verfahren 1:

Alle Ergebnisse aus Ω (vgl. Aufgabe 136 b) haben dieselbe Wahrscheinlichkeit und $\# \Omega = 10 \Rightarrow \underline{\underline{p(b,g) = \frac{1}{10}}}$

Verfahren 2:

Hier ist $\Omega = M^2$ mit $M = \{b, g, r, s, w\}$, d.h. insbesondere $\# \Omega = 25$.
Alle Ergebnisse aus Ω haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $\Rightarrow \underline{\underline{p(b,g) = \frac{1}{25}}}$

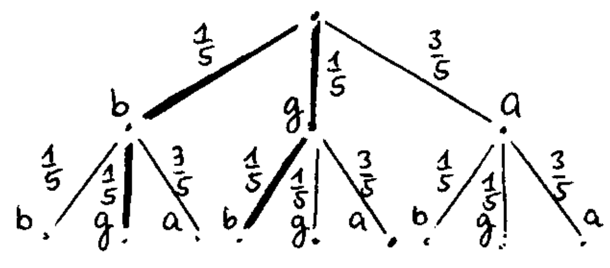
Verfahren 3:

Hier ist $\Omega = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \neq m_2,\ m_1, m_2 \in M\}$ mit M wie bei Verfahren 2; insbesondere gilt $\# \Omega = 20$. Alle Ergebnisse aus Ω haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. $\Rightarrow \underline{\underline{p(b,g) = \frac{1}{20}}}$.

Verfahren 4:

Hier sind die Ergebnisse aus Ω (vgl. Aufgabe 136 b) nicht gleich wahrscheinlich! Wir betrachten daher einen Wahrscheinlichkeitsbaum (Abkürzung: a für rot, schwarz oder weiß)

1. Zug



2. Zug

Dann ist $\underline{\underline{p(b,g)}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{25}}}$.

Aufgabe 140

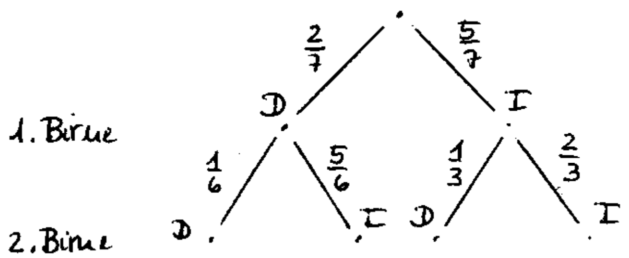
In einer Schachtel befinden sich zwei defekte und 5 intakte Glühbirnen. Es werden 2 Glühbirnen entnommen.
Geben Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) an, und bestimmen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeit, daß genau eine der entnommenen Glühbirnen defekt ist.

Lösung:

Symbole: D "defekt", I "intakt"

$\Omega = \{ (D,D), (D,I), (I,D), (I,I) \}$

Wahrscheinlichkeitsbaum:



$p: \Omega \to [0,1]$, $p(D,D) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$, $p(D,I) = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{21}$,
$p(I,D) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$, $p(I,I) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{21}$

Die Wahrscheinlichkeit, daß genau eine der entnommenen Glühbirnen defekt ist, ist $p(\{(D,I),(I,D)\}) = \frac{5}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$

Aufgabe 141

Mit einem fairen Würfel wird so lange gewürfelt, bis eine 5 oder eine 6 fällt.

a. Beschreiben Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p).

b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

i. 5 oder 6 fällt spätestens im 3. Wurf.

ii. 5 oder 6 fällt frühestens im 4. Wurf.

Lösung:

a. $\underline{\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i}$ mit $\underline{\Omega_1 = \{5, 6\}}$,

$\underline{\underline{\Omega_i = \{(x_1, .., x_{i-1}, x_i) \mid x_1, .., x_{i-1} \in \{1, .., 4\},\ x_i \in \{5, 6\}\}}}$ für $i \geq 2$.

$\# \Omega_1 = 2$, $\# \Omega_2 = 4 \cdot 2$, $\# \Omega_3 = 16 \cdot 2$, .. $\# \Omega_i = 4^{i-1} \cdot 2$.

$\underline{\underline{p: \Omega \to [0,1],\quad p(\omega) = \left(\frac{1}{6}\right)^i \text{ für } \omega \in \Omega_i.}}$

b. i. Gesucht ist $p(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)$

$\underline{p(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)} = \sum_{i=1}^{3} p(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{3} 4^{i-1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i =$

$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \underline{\underline{\frac{19}{27}}}$

ii. Gesucht ist $p\left(\bigcup_{i=4}^{\infty} \Omega_i\right)$.

$\underline{\underline{p\left(\bigcup_{i=4}^{\infty} \Omega_i\right)}} = p\left(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3)\right) = 1 - p(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) \overset{i.}{=}$

$1 - \frac{19}{27} = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}.$

Aufgabe 142

2/3 der TeilnehmerInnen eines (offenbar anderen!) Studienganges sind Damen. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Dame in einer Matheklausur eine 1 schreibt, ist $\frac{1}{3}$; bei einem Herrn beträgt sie $\frac{1}{6}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Matheklausur mit 1 von einer Dame stammt?

Lösung:

Bezeichnungen: Ω : TeilnehmerInnen des Studienganges

E_1 : Damen dort

E_2 : Herren dort

$\Big\} \Rightarrow E_1 \cup E_2 = \Omega, \; E_1 \cap E_2 = \emptyset$

E : StudentInnen mit Eins in der Matheklausur

Bekannt sind: $p(E_1) = 2/3, \quad p(E_2) = 1/3,$

$p(E/E_1) = 1/3, \quad p(E/E_2) = 1/6.$

gesucht ist: $p(E_1/E)$.

Nach der Formel von Bayes gilt:

$$\underline{\underline{p(E_1/E)}} = \frac{p(E/E_1)\cdot p(E_1)}{p(E/E_1)\cdot p(E_1) + p(E/E_2)\cdot p(E_2)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9} + \frac{1}{18}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{18}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}.$$

Aufgabe 143.

Eine faire Münze wird dreimal geworfen (vgl. Aufgabe 138 a). Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Wappenwürfe.

a. Beschreiben Sie X.

b. Geben Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion f an und veranschaulichen Sie diese durch ein Stabdiagramm

c. Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F an und veranschaulichen Sie diese durch den Graphen.

Lösung:

a. Nach Aufgabe 138 a ist

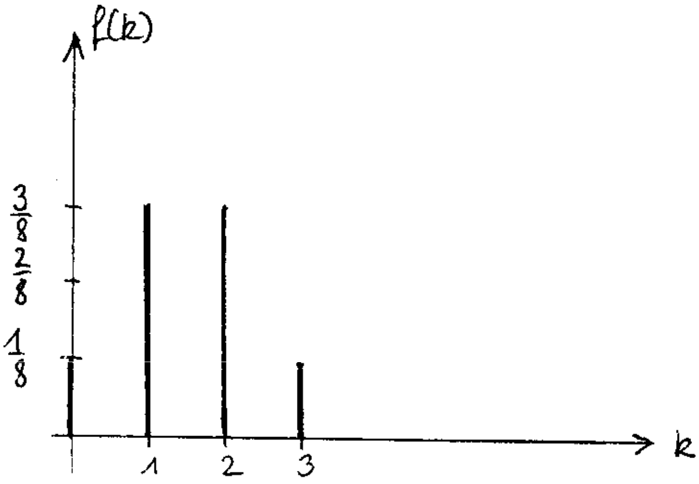
$\Omega = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{W, Z\} \text{ für } i = 1,2,3\}$,

$p: \Omega \to [0,1]$, $\quad p(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{8}$ für alle $(y_1, y_2, y_3) \in \Omega$.

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $X(y_1, y_2, y_3) = \# \{i \mid y_i = W\}$.

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

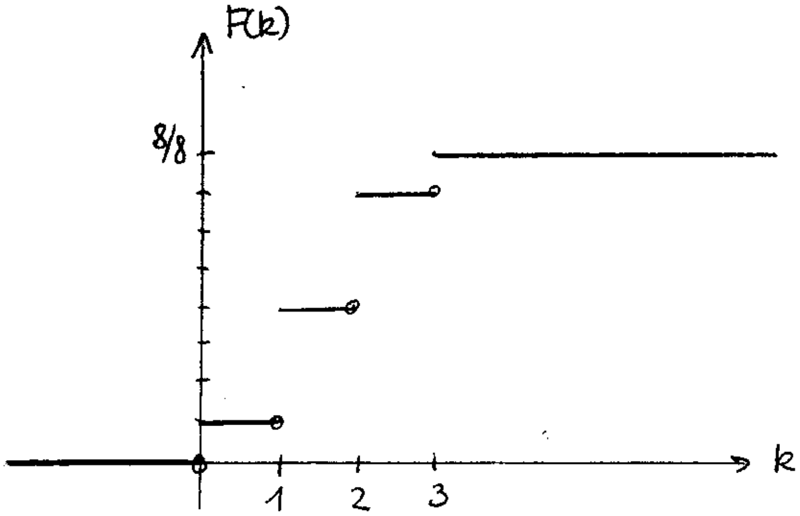
$$f(k) = p(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{für } k = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{für } k = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{für } k = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{für } k = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Stabdiagramm

c. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$F(k) = p(X \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{für } 0 \leq k < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 1 \leq k < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{für } 2 \leq k < 3 \\ 1 & \text{für } k > 3 \end{cases}$$



Graph von F

Aufgabe 144

Elektrische Weihnachtsbaumkerzen werden üblicherweise in Reihe geschaltet. Das hat zur Folge, daß eine Kerzenkette nur brennt, wenn alle Kerzen intakt sind. Aus einer Sendung von 100 Kerzen, in der 5% defekt sind, werden 10 Kerzen entnommen und zu einer Kette zusammengestellt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kerzenkette brennt.

Lösung:

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der intakten Kerzen. Dann ist X hypergeometrisch verteilt mit Parametern $n=10$, $r=100$, $r_1=95$.

Gesucht ist $p(X=10)$.

$$\underline{\underline{p(X=10)}} = \frac{\binom{r_1}{10}\binom{r-r_1}{n-10}}{\binom{r}{n}} = \frac{\binom{95}{10}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{100}{10}} = \frac{95!\,\cancel{10!}\,90!}{\cancel{10!}\,85!\,100!}$$

$$= \frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96} \cong \underline{\underline{0{,}583752367.}}$$

Aufgabe 145

Für $\lambda \in]0,\infty[$ sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$

a. Zeigen Sie, daß f Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ist. Eine solche Zufallsvariable nennt man exponentialverteilt mit Parameter λ.

b. X beschreibt die Zeit zwischen der Emission von 2 α-Teilchen, falls durchschnittlich λ α-Teilchen pro Sekunde emittiert werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß zwischen der Emission von 2 α-Teilchen höchstens 2 Sekunden vergehen, falls $\lambda = \frac{1}{2}$ ist.

Lösung:

a. i. f ist nur im Nullpunkt nicht stetig.

ii. $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt wegen $\lambda > 0$ und $\exp(-\lambda t) > 0$.

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} \lambda \cdot \exp(-\lambda t)\,dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \lambda \cdot \exp(-\lambda t)\,dt =$

$\lim_{a\to\infty} [-\exp(-\lambda t)]_0^a = \lim_{a\to\infty} (-\exp(-\lambda a)+1) = 1$

Aus i.–iii. folgt: f ist Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X.

b. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p(X \leq 2)$. Also:

$p(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(t)\,dt = \int_0^2 \frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2}t)\,dt = [-\exp(-\frac{1}{2}t)]_0^2$

$= -\exp(-1) + 1 = 1 - \frac{1}{e}$ $(\approx 0{,}6321205588)$

Aufgabe 146.

Berechnen Sie die Erwartungswerte von folgenden Zufallsvariablen X:

a. X wie in Aufgabe 143;

b. X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ;

c. X wie in Aufgabe 145.

Lösung:

a. Wahrscheinlichkeitsfunktion von X ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{für } k=0,\ k=3; \\ \frac{3}{8} & \text{für } k=1,\ k=2; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(vgl. Aufgabe 143)

Also gilt:

$$\underline{\underline{E(X)}} = \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{3} k \cdot f(k) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3+6+3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1{,}5}}$$

b. Wahrscheinlichkeitsfunktion von X ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) & \text{für } k \in \mathbb{N}_0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt:

$$\underline{\underline{E(X)}} = \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) =$$

$$\lambda \cdot \exp(-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k =$$

$$\lambda \cdot \exp(-\lambda) \exp(\lambda) = \underline{\underline{\lambda.}}$$

c. X hat als Dichtefunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0; \\ \lambda \cdot \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

Also gilt:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \lambda t \exp(-\lambda t)\,dt = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} \lambda t \exp(-\lambda t)\,dt$$

NR: $\int \lambda t \exp(-\lambda t)\,dt = ?$

$g(t) = t,\ \dot g(t) = 1,\ h(t) = -\exp(-\lambda t),\ \dot h(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$

$\int \lambda t \exp(-\lambda t)\,dt = \int g(t)\,\dot h(t)\,dt = g(t)\,h(t) - \int \dot g(t)\,h(t)\,dt =$

$-t\exp(-\lambda t) + \int \exp(-\lambda t)\,dt = -t\exp(-\lambda t) - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda t) + C$

Also:

$$\underline{\underline{E(X)}} = \lim_{a\to\infty}\left[-t\exp(-\lambda t) - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda t)\right]_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-a\exp(-\lambda a) - \frac{1}{\lambda}\exp(-\lambda a) + \frac{1}{\lambda}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Aufgabe 147.

Gegeben sind drei Dosen mit Kaffee, Tee und Pfefferminztee. Die zugehörigen Etiketten sind zufällig auf die Dosen geklebt.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Dosen ($k = 0, 1, 2, 3$) richtig beschriftet sind?

b. Wieviele richtig beschriftete Dosen sind zu erwarten?

a. Symbole: K Kaffee, T Tee, Pf Pfefferminztee

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{K, T, Pf\}$ für $i = 1,2,3$, $x_i \neq x_j$ für $i \neq j\}$;

$\# \Omega = 3! = 6$; $p: \Omega \to [0, 1]$, $p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

Sei $(y_1, y_2, y_3) = (K, T, Pf)$ die richtige Beschriftung. Dann ist zu betrachten: $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(x_1, x_2, x_3) = \# \{i \mid x_i = y_i\}$.

Zu bestimmen ist $p(X=k)$ für $k = 0, 1, 2, 3$.

$\underline{\underline{p(X=0)}} = p(\{(Pf, K, T), (T, Pf, K)\}) = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

$\underline{\underline{p(X=1)}} = p(\{(K, Pf, T), (Pf, T, K), (T, K, Pf)\}) = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{p(X=2)}} = p(\emptyset) = \underline{\underline{0}}$

$\underline{\underline{p(X=3)}} = p(K, T, Pf) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

b. Gesucht ist $E(X)$.

$\underline{\underline{E(X)}} = \sum_{k=1}^{3} k \cdot p(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = \underline{\underline{1}}$

Es ist also eine richtig beschriftete Dose zu erwarten.

TI

Aufgabe 148.

Berechnen Sie für die Zufallsvariablen aus Aufgabe 146 die Varianzen.

Lösung:

a. $\underline{\underline{V(X)}} = E(X^2) - E(X)^2 \underset{\uparrow \atop E(X)=\frac{3}{2}}{=} E(X^2) - \frac{9}{4} = \sum_{k \in \mathbb{R}} k^2 f(k) - \frac{9}{4}$

$= \sum_{k=1}^{3} k^2 f(k) - \frac{9}{4} = 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = \frac{3+12+9-18}{8}$

$= \frac{6}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

b. $\underline{\underline{V(X)}} = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \underset{\uparrow \atop E(X)=\lambda}{=} E(X(X-1)) + \lambda - \lambda^2$

$= \sum_{k \in \mathbb{R}} k \cdot (k-1) f(k) + \lambda - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) +$

$\lambda - \lambda^2 = \lambda^2 \exp(-\lambda) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \lambda^{k-2} + \lambda - \lambda^2 =$

$\lambda^2 \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 \exp(-\lambda) \exp(\lambda) + \lambda - \lambda^2 =$

$\lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda.}}$

c. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \underset{\uparrow \atop E(X)=\frac{1}{\lambda}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} \lambda t^2 \exp(-\lambda t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2}$

$= \lim_{a \to \infty} \int_0^a \lambda t^2 \exp(-\lambda t)\,dt - \frac{1}{\lambda^2}$

NR: $\int \lambda t^2 \exp(-\lambda t)\,dt = ?$

$g(t) = t^2,\ \dot{g}(t) = 2t,\ h(t) = -\exp(-\lambda t),\ \dot{h}(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$

$\int \lambda t^2 \exp(-\lambda t)\,dt = \int g(t)\dot{h}(t)\,dt = g(t)h(t) - \int \dot{g}(t) h(t)\,dt = -t^2 \exp(-\lambda t)$

$+ 2\int t \exp(-\lambda t)\,dt \underset{\uparrow \atop \text{NR Aufgabe 146}}{=} -t^2 \exp(-\lambda t) - \frac{2}{\lambda} t \exp(-\lambda t) - \frac{2}{\lambda^2} \exp(-\lambda t) + C$

Also: $\underline{\underline{V(X)}} = \lim_{a\to\infty} \left[-t^2\exp(-\lambda t) - \frac{2}{\lambda} t \exp(-\lambda t) - \frac{2}{\lambda^2} \exp(-\lambda t) \right]_0^a - \frac{1}{\lambda^2}$

$= \lim_{a\to\infty} \left(-a^2\exp(-\lambda a) - \frac{2}{\lambda} a \exp(-\lambda a) - \frac{2}{\lambda^2} \exp(-\lambda a) + \frac{2}{\lambda^2} \right) - \frac{1}{\lambda^2}$

$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}.$

Aufgabe 149

Für die normalverteilte Zufallsvariable X liegen die folgenden Stichproben vor:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5,12	5,19	1,77	4,89	4,27	6,69	5,29	4,19	2,95	3,88

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	6,22	8,86	2,52	4,59	6,70	5,72	3,42	5,30	5,80	10,88

Schätzen Sie den Erwartungswert und die Streuung von X.

Lösung:

Schätzwert für den Erwartungswert ist:

$$\underline{\underline{\bar{x}}} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20}(5{,}12 + 5{,}19 + 1{,}77 + 4{,}89 + 4{,}27 + 6{,}69 + 5{,}29 + 4{,}19 + 2{,}95 + 3{,}88 + 6{,}22 + 8{,}86 + 2{,}52 + 4{,}59 + 6{,}70 + 5{,}72 + 3{,}42 + 5{,}30 + 5{,}80 + 10{,}88) = \underline{\underline{5{,}2125}}$$

Schätzwert für die Varianz ist:

$$s^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{19}(0{,}0925^2 + 0{,}0225^2 + 3{,}4425^2 + 0{,}3225^2 + 0{,}9425^2 + 1{,}4775^2 + 0{,}0775^2 + 1{,}0225^2 + 2{,}2625^2 + 1{,}3325^2 + 1{,}0075^2 + 3{,}6475^2 + 2{,}6925^2 + 0{,}6225^2 + 1{,}4875^2 + 0{,}5075^2 + 1{,}7925^2 + 0{,}0875^2 + 0{,}5875^2 + 5{,}6675^2) = \frac{83{,}094175}{19}$$

$$\approx 4{,}373377632$$

Schätzwert für die Streuung ist damit:

$$\underline{\underline{s \approx 2{,}09126221}}$$

Aufgabe 150

X sei normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und Streuung $\sigma = 2$. Als Stichprobenwerte liegen die Daten aus Aufgabe 149 vor.

Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Lösung:

Folgende Daten sind bekannt:

$\bar{x} = 5{,}2125$ (vgl. Aufgabe 149) ;

$\sigma = 2$;

$n = 20$;

$\gamma = 0{,}95 \Rightarrow \frac{\gamma+1}{2} = 0{,}975 \Rightarrow$ (Tabelle zu 11.3.6.)

$\Phi(z) = 0{,}975$ gilt für $z \triangleq 1{,}96$.

Damit ist

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z, \ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\right] \triangleq \underline{[4{,}335961353 \, ; \, 6{,}089038647]}$$

ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Aufgabe 151

X sei normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Streuung σ. Als Stichprobenwerte liegen die Daten aus Aufgabe 149 vor.
Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Lösung:

$n = 20, \quad \bar{x} = 5{,}2125, \quad s \cong 2{,}09126221$

ist nach Aufgabe 149 bekannt.
Setze $\gamma = 0{,}95$. Wahl von z mit $\Phi_{19}(z) = \gamma = 0{,}95$ ergibt nach der Tabelle für die t-Verteilung: $z \cong 2{,}093$.
Damit ist

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} z, \ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} z\right] \cong [4{,}208344624; \ 6{,}216655376]$$

ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Aufgabe 152

Bestimmen Sie in der Situation der vorangegangenen Aufgabe ein 95% - Konfidenzintervall für σ.

Lösung:

Wieder gilt $n = 20$, $s \cong 2{,}09126221$.

Setze $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow \frac{1}{2}(1-\gamma) = 0{,}025$; $\frac{1}{2}(1+\gamma) = 0{,}975$.

Wahl von c_1 mit $F_{19}(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma) = 0{,}025$ und Wahl von c_2 mit $F_{19}(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma) = 0{,}975$ ergeben nach der Tabelle für die χ^2-Verteilung: $c_1 \cong 8{,}91$ und $c_2 \cong 32{,}85$.

Damit ist

$$\left[s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{c_2}} , s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{c_1}} \right] \cong \underline{\underline{[1{,}590441148; 3{,}053841117]}}$$

ein 95% - Konfidenzintervall für σ.

Aufgabe 153

Der Wert der von Firma Elektromax hergestellten Ohmschen Widerstände sei normalverteilt mit Standardabweichung $\sigma = 3\Omega$. Elektromax gibt einen Sollwert von $\mu_0 = 100\Omega$ an. 10 Widerstandsmessungen ergeben jedoch einen Mittelwert von $\bar{x} = 102\Omega$.

Testen Sie die Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$

gegen die Alternative $H_1: \mu \neq \mu_0$.

Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}01$ ($\hat{=}$ 1%).

Lösung:

Folgende Daten liegen vor: $n = 10$, $\bar{x} = 102\Omega$, $\sigma = 3\Omega$.

Zu testen ist $H_0: \mu = 100\Omega = \mu_0$

gegen $H_1: \mu \neq 100\Omega = \mu_0$

1. $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{102\Omega - 100\Omega}{\frac{3\Omega}{\sqrt{10}}} = \frac{2}{3}\sqrt{10} \cong 2{,}108185107$$

2. $\alpha = 0{,}01$

3. $\Phi(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$, $c_1 = -c_2 \Rightarrow c_2 \cong 2{,}58$, $c_1 = -2{,}58$

4. $c_1 \leq z \leq c_2 \Rightarrow$ H_0 wird angenommen.

Aufgabe 154

$n=16$ Messungen einer physikalischen Größe, die normalverteilt ist, ergeben einen Mittelwert $\bar{x}=4518$ und eine Standardabweichung $s=115$.

Testen Sie die Hypothese $H_0 : \mu=4500$

gegen die Alternative $H_1 : \mu>4500$.

Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha=0{,}05$ ($\triangleq 5\%$).

Lösung:

Folgende Daten liegen vor: $n=16$, $\bar{x}=4518$, $s=115$.

Zu testen ist $H_0 : \mu=4500=\mu_0$

gegen $H_1 : \mu \neq 4500=\mu_0$.

1. $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\dfrac{4518-4500}{\frac{115}{\sqrt{16}}}=\dfrac{4\cdot 18}{115}\cong 0{,}6260869565$

2. $\alpha=0{,}05$

3. $\Phi_{15}(c)=1-2\alpha=0{,}90 \Rightarrow c\cong 1{,}753$

4. $z\leq c \Rightarrow$ $\underline{\underline{H_0 \text{ wird angenommen.}}}$

Aufgabe 155

Für die normalverteilten Zufallsvariablen X und Y mit gleicher, aber unbekannter Varianz liegen die folgenden Stichprobenwerte vor:

i	1	2	3	4	5
x_i	5,98	6,02	6,10	5,82	6,04
y_i	6,06	6,08	6,12	6,00	5,94

Testen Sie die Hypothese

$H_0: \; E(X) = E(Y)$ gegen

$H_1: \; E(X) \neq E(Y)$.

Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}01$ ($\triangleq 1\%$)

Lösung:

Es gilt $\bar{x} = 5{,}992$, $s_x \cong 0{,}1054514106$, $n = 5$;

$\bar{y} = 6{,}04$, $s_y \cong 0{,}0707106781 2$, $m = 5$.

1. $$z = \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}} \cdot \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}} \cong -0{,}8453639443$$
2. $\alpha = 0{,}01$.
3. $\Phi_8(c_2) = 1-\alpha = 0{,}99$, $c_1 = -c_2 \Rightarrow$ (Tabelle t-Verteilung)

   $c_2 \cong 3{,}355$, $c_1 \cong -3{,}355$
4. $c_1 \leq z \leq c_2 \Rightarrow$ <u>Hypothese H_0 wird beibehalten.</u>

Aufgabe 156

Mit einem Würfel wird 300-mal gewürfelt; dabei treten folgende Augenzahlen auf:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	35	39	70	62	56	38

Testen Sie mit einem Chi-Quadrat-Test, ob der Würfel fair ist. Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}01$.

Lösung:

Falls die Hypothese "Der Würfel ist fair" zutrifft, liegt folgende Situation vor: $\Omega = \{1, .., 6\}$, $p: \Omega \to [0,1]$ mit $p(\omega) = \frac{1}{6}$;
$X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$, hat Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } k = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. a. $I_1 =]-\infty; 1{,}5]$, $I_2 = [1{,}5; 2{,}5]$, $I_3 = [2{,}5; 3{,}5]$, $I_4 = [3{,}5; 4{,}5]$, $I_5 = [4{,}5; 5{,}5]$, $I_6 = [5{,}5; \infty[$

   b. $b_1 = 35$, $b_2 = 39$, $b_3 = 70$, $b_4 = 62$, $b_5 = 56$, $b_6 = 38$

   c. $p_j = \frac{1}{6}$ für $j = 1, .. 6$; $e_j = \frac{300}{6} = 50$ für $j = 1, .. 6$

   d. $\chi_0^2 = \frac{1}{50}(15^2 + 11^2 + 20^2 + 12^2 + 6^2 + 12^2) = 21{,}4$

2. $\alpha = 0{,}01$

3. $F_5(c) = 0{,}99 \Rightarrow$ (Tabelle χ^2-Verteilung) $c = 15{,}09$

4. $\chi_0^2 > c \Rightarrow$ die Hypothese ist abzulehnen; der Würfel ist nicht fair.

** Aufgabe 157

Für eine Zufallsvariable X liegen folgende Stichprobenwerte vor:

Wert	48,5	49,5	50,5	51,5	52,5	53,5
Anzahl	5	11	35	29	13	7

Testen Sie mit einem Chi-Quadrat-Test, ob X normalverteilt ist. Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 0{,}01$ ($\triangleq 1\%$).

Lösung:

1. a. $I_1 =]-\infty, 49]$, $I_2 = [49, 50]$, $I_3 = [50, 51]$,
$I_4 = [51, 52]$, $I_5 = [52, 53]$, $I_6 = [53, \infty[$.

b. $b_1 = 5$, $b_2 = 11$, $b_3 = 35$, $b_4 = 29$, $b_5 = 13$, $b_6 = 7$

c. Die Parameter μ und σ sind durch $\overline{x}$ und s zu schätzen: $\overline{x} = 51{,}05$; $s \triangleq 1{,}209182043$

Bei Gültigkeit der Hypothese ist $\frac{X-\overline{x}}{s} \cong \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt.

$p_1 = p\left(X_{St} \le \frac{49-\overline{x}}{s} \right) \cong \Phi(-1{,}695360936) \triangleq \Phi(-1{,}70)$
$= 1 - \Phi(1{,}70) \triangleq 1 - 0{,}9554 \triangleq 0{,}0446$

$p_2 = p\left(\frac{49-\overline{x}}{s} \le X_{St} \le \frac{50-\overline{x}}{s} \right) \cong \Phi(-0{,}868835560 13) -$
$\Phi(-1{,}695360936) \triangleq \Phi(-0{,}87) - \Phi(-1{,}70) = 1 - \Phi(0{,}87)$
$- 1 + \Phi(1{,}70) \triangleq -0{,}8078 + 0{,}9554 = 0{,}1476$

$p_3 = p\left(\frac{50-\overline{x}}{s} \le X_{St} \le \frac{51-\overline{x}}{s} \right) \triangleq \Phi(-0{,}04135026673) -$
$\Phi(-0{,}86883556013) \triangleq \Phi(-0{,}04) - \Phi(-0{,}87) = 1 - \Phi(0{,}04)$
$-1 + \Phi(0{,}87) \triangleq -0{,}5160 + 0{,}8078 = 0{,}2918$

$p_4 = p\left(\frac{51-\overline{x}}{s} \le X_{St} \le \frac{52-\overline{x}}{s} \right) \triangleq \Phi(0{,}7856550678) -$
$\Phi(-0{,}04135026673) \triangleq \Phi(0{,}79) - \Phi(0{,}04) = \Phi(0{,}79)$
$-1 + \Phi(0{,}04) \triangleq 0{,}7853 - 1 + 0{,}5160 = 0{,}3013$

$p_5 = p\left(\frac{52-\overline{x}}{s} \le X_{St} \le \frac{53-\overline{x}}{s} \right) \cong \Phi(1{,}612660402) - \Phi(0{,}7856550678$
$\triangleq \Phi(1{,}61) - \Phi(0{,}79) \triangleq 0{,}9463 - 0{,}7853 = 0{,}161$

$p_6 = p\left(\frac{53-\bar{x}}{s} \leq X_{st}\right) \cong 1-\phi(1{,}612660402) \cong 1-\Phi(1{,}61)$

$\cong 1-0{,}9463 = 0{,}0537$

$e_1 \cong 4{,}46$; $e_2 \cong 14{,}76$; $e_3 \cong 29{,}18$; $e_4 \cong 30{,}13$;

$e_5 \cong 16{,}1$; $e_6 \cong 5{,}37$

d. $\chi_0^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(b_k - e_k)^2}{e_k} \cong 3{,}31806324$

2. $\alpha = 0{,}01$

3. $F_3(c) = 1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow$ (Tabelle χ^2-Verteilung) $c \cong 11{,}34$

4. $\chi_0^2 \leq c \Rightarrow$ die Hypothese, daß X normalverteilt ist, ist annehmen