b. Rezept: Sei $\gamma \in]0,1[$.
Wähle $z \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(z) = \frac{\gamma+1}{2}$ (Tabelle S. 65b).
Dann ist

$$[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z, \ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z]$$

ein Konfidenzintervall für μ zur Konfidenzwahrscheinlichkeit γ.

3. t- Verteilungen

- benötigt man u.a. zur Bestimmung von Konfidenzintervallen für den Erwartungswert bei unbekannter Streuung
- sind wie folgt definiert: X heißt t-verteilt (oder Student-verteilt) mit n Freiheitsgraden, wenn X die Dichtefunktion $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(t) = c_n \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

hat. Dabei ist c_n so zu wählen, daß $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = 1$ gilt.
- liegen tabelliert vor (Tabelle S. 68a).

4. Konfidenzintervall für den Erwartungswert bei unbekannter Streuung.

X sei normalverteilt mit (unbekanntem) Erwartungswert μ und (unbekannter) Streuung σ. Gegeben sind Stichprobenwerte $x_1, .., x_n$, $n \geq 2$, von X mit Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s.

a. Sind $X_1, .., X_n$ unabhängig mit derselben Verteilungsfunktion wie X, so ist

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{t-verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Auswertung dieses theoretischen Hintergrundes ergibt:

b. <u>Rezept:</u> Sei $\gamma \in]0,1[$.
Wähle $z \in \mathbb{R}$ mit $\Phi_{n-1}(z) = \gamma$ (Tabelle S. 68a).
Dann ist

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} z,\ \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} z\right]$$

ein Konfidenzintervall für μ zur Konfidenzwahrscheinlichkeit γ.

5. χ^2- Verteilungen

- benötigt man u.a. zur Bestimmung von Konfidenzintervallen für die Streuung
- sind wie folgt definiert: X heißt <u>χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden</u>, wenn X die Dichtefunktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g_n(t) = \begin{cases} k_n \cdot t^{\frac{n-1}{2}} \cdot \exp(-\frac{t}{2}) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

hat.

Dabei ist k_n so zu wählen, daß $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\,dt = 1$ gilt

- liegen tabelliert vor (Tabelle S. 68b)

6. Konfidenzintervall für die Streuung

Unter den Voraussetzungen aus 4. gilt:

a. Sind $X_1, .., X_n$ unabhängig mit derselben Verteilungsfunktion wie X, so ist

$$(n-1) \cdot \frac{S^2}{\sigma^2} \quad \chi^2\text{-verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden.}$$

Auswertung dieses theoretischen Hintergrundes ergibt:

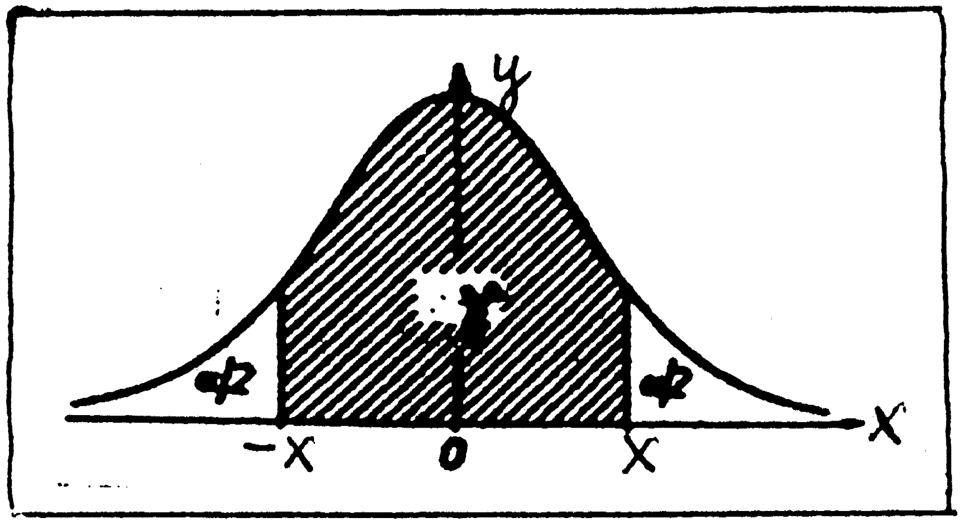
b. <u>Rezept:</u> Sei $\gamma \in]0,1[$.
Wähle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $F_{n-1}(c_1) = \frac{1}{2}(1-\gamma)$ und $F_{n-1}(c_2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)$. (Tabelle S. 68b)
Dann ist

$$\left[s \cdot \sqrt{\frac{n-1}{c_2}},\ s\sqrt{\frac{n-1}{c_1}}\right]$$

ein Konfidenzintervall für σ zur Konfidenzwahrscheinlichkeit γ.

Tabelle zu 11.6.3.: t-Verteilungen

$$\Phi_n(x) = \int_{-x}^{x} c_n \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$

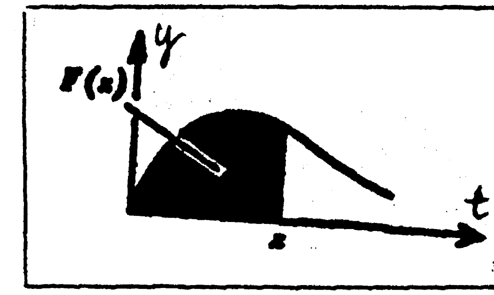


Tabelliert sind die Werte, für die $\Phi_n(x) = \gamma$ gilt.

n	γ									
	0.500	0.750	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.998	0.999
1	1.000	2.414	3.078	6.314	12.71	25.45	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.604	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	1.423	1.638	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	1.344	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	1.301	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	1.273	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	1.254	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	1.240	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	1.230	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	1.221	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	1.214	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	1.209	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	1.204	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	1.200	1.345	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	1.197	1.341	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	1.194	1.337	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	1.191	1.333	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	1.189	1.330	1.734	2.101	2.445	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	1.187	1.328	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	1.185	1.325	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	1.183	1.323	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	1.182	1.321	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	1.180	1.319	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	1.179	1.318	1.711	2.064	2.391	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	1.178	1.316	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	1.177	1.315	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	1.176	1.314	1.703	2.052	2.373	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	1.175	1.313	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	1.174	1.311	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	1.173	1.310	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	1.167	1.303	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	1.164	1.299	1.676	2.009	2.311	2.678	2.937	3.261	3.496
100	0.677	1.157	1.290	1.660	1.984	2.276	2.626	2.871	3.174	3.390
150	0.676	1.155	1.287	1.655	1.976	2.264	2.609	2.850	3.146	3.357
∞	0.674	1.150	1.282	1.645	1.960	2.241	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabelle zu 11.6.5.: χ^2- Verteilungen

$$F(x) = F_n(x) = \int_0^x k_n \cdot t^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt$$



$F(x)$	Anzahl der Freiheitsgrade									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,001	0,00	0,00	0,02	0,09	0,21	0,38	0,60	0,86	1,15	1,48
0,005	0,00	0,01	0,07	0,21	0,41	0,68	0,99	1,34	1,73	2,16
0,01	0,00	0,02	0,11	0,30	0,55	0,87	1,24	1,65	2,09	2,56
0,025	0,00	0,05	0,22	0,48	0,83	1,24	1,69	2,18	2,70	3,25
0,05	0,00	0,10	0,35	0,71	1,15	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94
0,1	0,02	0,21	0,58	1,06	1,61	2,20	2,83	3,49	4,17	4,87
0,25	0,10	0,58	1,21	1,92	2,67	3,45	4,25	5,07	5,90	6,74
0,5	0,45	1,39	2,37	3,36	4,35	5,35	6,35	7,34	8,34	9,34
0,75	1,32	2,77	4,11	5,39	6,63	7,84	9,04	10,22	11,39	12,55
0,9	2,71	4,61	6,25	7,78	9,24	10,64	12,02	13,36	14,68	15,99
0,95	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31
0,975	5,02	7,38	9,35	11,14	12,83	14,45	16,01	17,53	19,02	20,48
0,99	6,63	9,21	11,34	13,28	15,09	16,81	18,48	20,09	21,67	23,21
0,995	7,88	10,60	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28	21,96	23,59	25,19
0,999	10,83	13,82	16,27	18,47	20,52	22,46	24,32	26,13	27,88	29,59

$F(x)$	Anzahl der Freiheitsgrade									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,001	1,83	2,21	2,62	3,04	3,48	3,94	4,42	4,90	5,41	5,92
0,005	2,60	3,07	3,57	4,07	4,60	5,14	5,70	6,26	6,84	7,43
0,01	3,05	3,57	4,11	4,66	5,23	5,81	6,41	7,01	7,63	8,26
0,025	3,82	4,40	5,01	5,63	6,26	6,91	7,56	8,23	8,91	9,59
0,05	4,57	5,23	5,89	6,57	7,26	7,96	8,67	9,39	10,12	10,85
0,1	5,58	6,30	7,04	7,79	8,55	9,31	10,09	10,86	11,65	12,44
0,25	7,58	8,44	9,30	10,17	11,04	11,91	12,79	13,68	14,56	15,45
0,5	10,34	11,34	12,34	13,34	14,34	15,34	16,34	17,34	18,34	19,34
0,75	13,70	14,85	15,98	17,12	18,25	19,37	20,49	21,60	22,72	23,83
0,9	17,28	18,55	19,81	21,06	22,31	23,54	24,77	25,99	27,20	28,41
0,95	19,68	21,03	22,36	23,68	25,00	26,30	27,59	28,87	30,14	31,41
0,975	21,92	23,34	24,74	26,12	27,49	28,85	30,19	31,53	32,85	34,17
0,99	24,73	26,22	27,69	29,14	30,58	32,00	33,41	34,81	36,19	37,57
0,995	26,76	28,30	29,82	31,32	32,80	34,27	35,72	37,16	38,58	40,00
0,999	31,26	32,91	34,53	36,12	37,70	39,25	40,79	42,31	43,82	45,32

$F(x)$	Anzahl der Freiheitsgrade									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0,001	6,4	7,0	7,5	8,1	8,7	9,2	9,8	10,4	11,0	11,6
0,005	8,0	8,6	9,3	9,9	10,5	11,2	11,8	12,5	13,1	13,8
0,01	8,9	9,5	10,2	10,9	11,5	12,2	12,9	13,6	14,3	15,0
0,025	10,3	11,0	11,7	12,4	13,1	13,8	14,6	15,3	16,0	16,8
0,05	11,6	12,3	13,1	13,8	14,6	15,4	16,2	16,9	17,7	18,5
0,1	13,2	14,0	14,8	15,7	16,5	17,3	18,1	18,9	19,8	20,6
0,25	16,3	17,2	18,1	19,0	19,9	20,8	21,7	22,7	23,6	24,5
0,5	20,3	21,3	22,3	23,3	24,3	25,3	26,3	27,3	28,3	29,3
0,75	24,9	26,0	27,1	28,2	29,3	30,4	31,5	32,6	33,7	34,8
0,9	29,6	30,8	32,0	33,2	34,4	35,6	36,7	37,9	39,1	40,3
0,95	32,7	33,9	35,2	36,4	37,7	38,9	40,1	41,3	42,6	43,8
0,975	35,5	36,8	38,1	39,4	40,6	41,9	43,2	44,5	45,7	47,0
0,99	38,9	40,3	41,6	43,0	44,3	45,6	47,0	48,3	49,6	50,9
0,995	41,4	42,8	44,2	45,6	46,9	48,3	49,6	51,0	52,3	53,7
0,999	46,8	48,3	49,7	51,2	52,6	54,1	55,5	56,9	58,3	59,7

$F(x)$	Anzahl der Freiheitsgrade						
	40	50	60	70	80	90	100
0,001	17,9	24,7	31,7	39,0	46,5	54,2	61,9
0,005	20,7	28,0	35,5	43,3	51,2	59,2	67,3
0,01	22,2	29,7	37,5	45,4	53,5	61,8	70,1
0,025	24,4	32,4	40,5	48,8	57,2	65,6	74,2
0,05	26,5	34,8	43,2	51,7	60,4	69,1	77,9
0,1	29,1	37,7	46,5	55,3	64,3	73,3	82,4
0,25	33,7	42,9	52,3	61,7	71,1	80,6	90,1
0,5	39,3	49,3	59,3	69,3	79,3	89,3	99,3
0,75	45,6	56,3	67,0	77,6	88,1	98,6	109,1
0,9	51,8	63,2	74,4	85,5	96,6	107,6	118,5
0,95	55,8	67,5	79,1	90,5	101,9	113,1	124,3
0,975	59,3	71,4	83,3	95,0	106,6	118,1	129,6
0,99	63,7	76,2	88,4	100,4	112,3	124,1	135,8
0,995	66,8	79,5	92,0	104,2	116,3	128,3	140,2
0,999	73,4	86,7	99,6	112,3	124,8	137,2	149,4

11.7. Testen von Hypothesen: Übersicht.

1. Komponenten eines Hypothesentests

- zum Abwägen einer Hypothese H_0 gegenüber einer Alternative sind stets
  - Auswertung einer Stichprobe
  - Wahl einer "kleinen" Irrtumswahrscheinlichkeit α: bei Gültigkeit von H_0 entscheidet man sich in $\alpha \cdot 100\%$ aller denkbaren Fälle für die Alternative
  - Bestimmung einer kritischen Zahl bzw. von zwei kritischen Zahlen
  - Vergleich der Stichprobenauswertung mit der (den) kritischen Zahl(en) zur Entscheidung, ob H_0 anzunehmen oder zu verwerfen ist.

2. Test für den Erwartungswert bei bekannter Streuung

X sei normalverteilt mit (unbekanntem) Erwartungswert μ und (bekannter) Streuung σ.
Zu testen ist die Hypothese

$H_0: \mu = \mu_0$

gegen

$H_1: \mu > \mu_0$ [bzw. $H_2: \mu \neq \mu_0$].

1. Sind $x_1, .., x_n$ Stichprobenwerte von X, so bilde
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$ (Stichprobe auswerten)
2. Wähle Irrtumswahrscheinlichkeit α.
3. Bestimme kritische Zahl c [kritische Zahlen c_1 und c_2] aus $\Phi(c) = 1-\alpha$ [$\Phi(c_2) = 1-\frac{\alpha}{2}$, $c_1 = -c_2$] (Tabelle S. 65b)
4. Ist $z \leq c$ [$c_1 \leq z \leq c_2$], so wird H_0 angenommen, ansonsten verworfen zugunsten von H_1 [H_2].

3. Test für den Erwartungswert bei unbekannter Streuung

X sei normalverteilt mit (unbekanntem) Erwartungswert μ und (unbekannter) Streuung σ.
Zu testen ist die Hypothese

$H_0: \mu = \mu_0$

gegen

$H_1: \mu > \mu_0$ [bzw. $H_2: \mu \neq \mu_0$].

1. Sind $x_1, .., x_n$, $n \geq 2$, Stichprobenwerte von X, so bilde
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$ (Stichprobe auswerten)
2. Wähle Irrtumswahrscheinlichkeit α.
3. Bestimme kritische Zahl c [kritische Zahlen c_1 und c_2] aus $\Phi_{n-1}(c) = 1-2\alpha$ [$\Phi_{n-1}(c_2) = 1-\alpha$, $c_1 = -c_2$]. (Tabelle S. 68a)
4. Ist $z \leq c$ [$c_1 \leq z \leq c_2$], so wird H_0 angenommen, ansonsten verworfen zugunsten von H_1 [H_2].

4. Vergleich von Erwartungswerten bei bekannter Streuung

X sei normalverteilt mit Streuung σ_1, Y sei normalverteilt mit Streuung σ_2.
Zu testen ist die Hypothese

$H_0: E(X) = E(Y)$

gegen

$H_1: E(X) > E(Y)$ [$H_2: E(X) \neq E(Y)$].

1. Sind $x_1, .., x_n$ bzw. $y_1, .., y_m$ Stichprobenwerte von X bzw. Y, so bilde
$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$ (Stichprobe auswerten)
2. Wähle Irrtumswahrscheinlichkeit α.

3. Bestimme <u>kritische Zahl</u> c [<u>kritische Zahl</u> c_1 und c_2] aus $\Phi(c) = 1-\alpha$ [$\Phi(c_2) = 1-\frac{\alpha}{2}$, $c_1 = -c_2$]. (Tabelle S. 65b)
4. Ist $z \le c$ [$c_1 \le z \le c_2$], so wird H_0 angenommen, ansonsten verworfen zugunsten von H_1 [H_2].

5. Vergleich von Erwartungswerten bei unbekannter Streuung.

X sei normalverteilt mit (unbekannter) Streuung σ; Y sei normalverteilt mit (unbekannter) Streuung σ.
Zu testen ist die Hypothese

$$H_0: E(X) = E(Y)$$

gegen

$$H_1: E(X) > E(Y) \qquad [H_2: E(X) \neq E(Y)].$$

1. Sind $x_1, \dots, x_n$, $n \ge 2$, bzw. $y_1, \dots, y_m$, $m \ge 2$, Stichprobenwerte von X bzw. Y mit Standardabweichung s_x bzw. s_y, so bilde
$$z = \sqrt{\frac{n \cdot m \cdot (n+m-2)}{n+m}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}}$$
(<u>Stichprobe auswerten</u>)
2. Wähle <u>Irrtumswahrscheinlichkeit</u> α.
3. Bestimme <u>kritische Zahl</u> c [<u>kritische Zahlen</u> c_1 und c_2] aus $\Phi_{n+m-2}(c) = 1-2\alpha$ [$\Phi_{n+m-2}(c_2) = 1-\alpha$, $c_1 = -c_2$] (Tabelle S. 68a)
4. Ist $z \le c$ [$c_1 \le z \le c_2$], so wird H_0 beibehalten, ansonsten verworfen zugunsten von H_1 [H_2].

6. Der Chi-Quadrat-Test.

X sei eine Zufallsvariable mit (unbekannter) Verteilungsfunktion F. F_0 sei eine Verteilungsfunktion.
Zu testen ist die Hypothese

$$H_0: F = F_0$$

gegen

$$H_2: F \neq F_0.$$

1. Gegeben sind Stichprobenwerte $x_1, \dots, x_n$ von X.
   a. Man unterteile die x-Achse in k Intervalle $I_1, \dots, I_k$, und zwar so, daß jedes Intervall mindestens 5 Stichprobenwerte enthält.
   b. Bestimme für jedes $j = 1, \dots, k$ die Anzahl b_j der Stichprobenwerte, die in I_j liegen. (Ein Wert, der auf eine Intervallgrenze fällt, wird je zur Hälfte in den beiden angrenzenden Intervallen gezählt.)
   c. Berechne für $j = 1, \dots, k$ mit Hilfe der angenommenen Verteilungsfunktion F_0 die Wahrscheinlichkeiten $p_j = p(X \in I_j)$. Setze $e_j = n \cdot p_j$ (Anzahl der theoretisch in I_j zu erwartenden Stichprobenwerte)
   d. Berechne $\chi_0^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(b_j - e_j)^2}{e_j}$ (<u>Stichprobe auswerten</u>)
2. Wähle <u>Irrtumswahrscheinlichkeit</u> α.
3. Bestimme <u>kritische Zahl</u> c aus $F_{k-1}(c) = 1-\alpha$. (Tabelle S. 68b.)
   (Falls r Parameter von F_0 zu schätzen sind, ist c aus $F_{k-1-r}(c) = 1-\alpha$ zu bestimmen.)
4. Ist $\chi_0^2 \le c$, so wird die Hypothese H_0 angenommen, ansonsten verworfen zugunsten von H_2.

12. Automatentheorie.

12.1. Einführung in die Automatentheorie: Übersicht.

1. Ein endlicher Automat

- läßt sich mathematisch wie folgt definieren:
  Er ist ein Quintupel
  $$(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{A}, f_{\mathcal{Z}}, f_{\mathcal{A}}),$$
  wobei $\mathcal{E}$, $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{A}$ endliche, nicht leere Mengen sind und $f_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z} \times \mathcal{E} \to \mathcal{Z}$, $f_{\mathcal{A}}: \mathcal{Z} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ Funktionen.

- Die zugehörigen "Vokabeln" sind die folgenden:
  - $\mathcal{E}$ Menge der Eingabesymbole, Eingabealphabet
  - $\mathcal{Z}$ Menge der Zustände
  - $\mathcal{A}$ Menge der Ausgabesymbole, Ausgabealphabet
  - $f_{\mathcal{Z}}$ Zustandsübergangsfunktion
  - $f_{\mathcal{A}}$ Ausgabefunktion
- Die Zustandstafel ist eine Zusammenfassung der Daten $f_{\mathcal{Z}}(z,e)$ und $f_{\mathcal{A}}(z,e)$ für alle $z \in \mathcal{Z}$, $e \in \mathcal{E}$ in Tabellenform.

2. Rezept zur Erstellung eines Zustandsdiagramms (graphen) eines endlichen Automaten

- für jedes $z \in \mathcal{Z}$ zeichnet man einen mit z beschrifteten "Knoten": z
- sind $z \in \mathcal{Z}$ und $z' \in \mathcal{Z}$ und ist $e \in \mathcal{E}$, so zeichnet man einen mit e beschrifteten "Pfeil" von z nach z', falls $f_{\mathcal{Z}}(z,e) = z'$ gilt. Dieser Pfeil wird zusätzlich mit $a \in \mathcal{A}$ beschriftet, falls $f_{\mathcal{A}}(z,e) = a$ gilt.

$$z \xrightarrow{e,a} z'$$

12.2. Deterministische und nichtdeterministische endliche Automaten: Übersicht

1. Ein deterministischer endlicher Automat (DEA)

- ist ein Quintupel
  $$(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, f_{\mathcal{Z}}, anf, End),$$
  wobei $\mathcal{E}$ und $\mathcal{Z}$ endliche, nicht-leere Mengen sind, $f_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z} \times \mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ eine Funktion, $anf \in \mathcal{Z}$, $\emptyset \neq End \subseteq \mathcal{Z}$.
  - "Neue Vokabeln":
    - anf Anfangszustand
    - End Menge der Endzustände

2. Rezept zur Erstellung eines Zustandsdiagramms (graphen) eines DEA.

- für jedes $z \in \mathcal{Z}$ zeichnet man einen mit z beschrifteten "Knoten": z
- sind $z \in \mathcal{Z}$ und $z' \in \mathcal{Z}$ und ist $e \in \mathcal{E}$, so zeichnet man einen mit e beschrifteten "Pfeil" von z nach z', falls $f_{\mathcal{Z}}(z,e) = z'$ gilt.
  $$z \xrightarrow{e} z'$$
- der Anfangszustand wird durch einen kleinen, auf ihn zeigenden Pfeil markiert $\to anf$
- die Endzustände werden durch einen doppelten Ring markiert: z, falls $z \in End$.

3. Zulässigkeitsuntersuchungen von Wörtern mit einem DEA

- spielen im Compilerbau eine Rolle
- funktionieren wie folgt: Ein DEA akzeptiert ein Wort mit Buchstaben aus dem Eingabealphabet, wenn ausgehend vom Anfangszustand nach buchstabenweisem Lesen dieses Wortes der Automat in einem Endzustand ist.

4. Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)

- ist ein Quintupel
  $$(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, f_{\mathcal{Z}}, Anf, End),$$
  wobei $\mathcal{E}$ und $\mathcal{Z}$ endliche, nicht-leere Mengen sind, $f_{\mathcal{Z}}: \mathcal{Z} \times \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\mathcal{Z})$ eine Funktion, $\emptyset \neq Anf \subseteq \mathcal{Z}$, $\emptyset \neq End \subseteq \mathcal{Z}$.
  Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(\mathcal{Z})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathcal{Z}$, die sogenannte Potenzmenge von $\mathcal{Z}$.
  - "Neue Vokabel":
    - Anf Menge der Anfangszustände

5. Rezept zur Erstellung eines Zustandsdiagramms (graphen) eines NEA

- für jedes $z \in Z$ zeichnet man einen mit z beschrifteten "Knoten": z
- sind $z \in Z$ und $z' \in Z$ und ist $e \in \mathcal{E}$, so zeichnet man einen mit e beschrifteten "Pfeil" von z nach z', falls $z' \in f_Z(z,e)$ gilt.

$$z \xrightarrow{e} z'$$

- jeder Anfangszustand $z \in Anf$ wird durch einen kleinen, auf ihn zeigenden Pfeil markiert: $\rightarrow z$, falls $z \in Anf$.
- die Endzustände werden durch einen doppelten Ring markiert: z, falls $z \in End$.

6. Zulässigkeitsuntersuchungen von Wörtern mit einem NEA

- spielen im Compilerbau eine Rolle
- funktionieren wie folgt: Ein NEA akzeptiert ein Wort mit Buchstaben aus dem Eingabealphabet, wenn ausgehend von <u>einem</u> Anfangszustand nach buchstabenweisem Lesen des Wortes ein Endzustand erreicht werden <u>kann</u>.
- Vorteil gegenüber 3: oft einfacher zu entwerfen
- Nachteil gegenüber 3: braucht beim Implementieren auf dem Rechner eventuell eine kompliziertere Datenstruktur

7. Rezept, das aus einem NEA einen DEA liefert, der dieselben Wörter des Eingabealphabets akzeptiert.

$(\mathcal{E}, Z, f_Z, Anf, End)$ sei ein NEA.

Dann erhält man wie folgt einen DEA $(\mathcal{E}', Z', f_Z', anf, End')$, der dieselben Wörter wie der NEA akzeptiert:

- $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$
- $Z' = \mathcal{P}(Z)$
- $f_Z' : Z' \times \mathcal{E} \to Z'$ mit

$$f_Z'(Z,e) = \begin{cases} \bigcup_{z \in Z} f_Z(z,e) & , \text{falls } Z \neq \emptyset; \\ \emptyset & , \text{falls } Z = \emptyset. \end{cases}$$

- $anf = Anf$
- $End' = \{ Z \mid \text{es gibt } z \in End \text{ mit } z \in Z \}$

8. Ein Vereinfachungsrezept

- liefert aus dem mit 7. konstruierten DEA oft einen einfacheren, der dieselben Wörter akzeptiert.
- lautet wie folgt:
  Zum Zustandsgraphen eines DEA betrachte man den Teilgraphen, der aus allen Knoten besteht, die vom Anfangszustand aus erreichbar sind.
  Der zu diesem Teilgraph gehörige DEA akzeptiert dann dieselben Wörter des Eingabealphabets wie der ursprüngliche.

APPROXIMATIONSAUFGABEN

Aufgabe 1 zu Abschnitt 10.5.

Gegeben sind die folgenden Meßwerte

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow N=4$

Bestimmen Sie ein approximierendes Polynom p vom Grad ≤ 2 nach der "Methode der kleinsten Quadrate"

$\rightsquigarrow n=2$

$\rightsquigarrow p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Lösung:

Es ist $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$, wobei (c_0, c_1, c_2) die eindeutige Lösung von

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{4} 1 & \sum_{k=0}^{4} x_k & \sum_{k=0}^{4} x_k^2 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k & \sum_{k=0}^{4} x_k^2 & \sum_{k=0}^{4} x_k^3 \\ \sum_{k=0}^{4} x_k^2 & \sum_{k=0}^{4} x_k^3 & \sum_{k=0}^{4} x_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{4} f(x_k) \\ \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\cdot x_k \\ \sum_{k=0}^{4} f(x_k)\cdot x_k^2 \end{pmatrix}$$

$c_{0,0}$, $c_{0,1}$, $c_{0,2}$

$b_i := \sum_{k=0}^{N} x_k^i \, f(x_k)$

$a_{ij} = \sum_{k=0}^{N} x_k^{i+j}$

Einsetzen der Werte ergibt

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 2{,}125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2{,}5\, c_1 = 0 \qquad c_1 = 0$$

Man sieht sofort: $c_1 = 0$ und

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}125 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

$$c_0 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3{,}6 & 2{,}5 \\ 1{,}4 & 2{,}125 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Die Cramersche Regel (vgl. 1.5.7) liefert

$$c_0 = \frac{3{,}6\cdot 2{,}125 - 1{,}4\cdot 2{,}5}{5\cdot 2{,}125 - 2{,}5\cdot 2{,}5} = \frac{4{,}15}{4{,}375} \cong 0{,}9485714286$$

$$c_2 = \text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_} \cong -0{,}4571428571 43$$

Also: $p(x) = c_0 + c_2 x^2$ mit $c_0 \cong 0{,}9486$, $c_2 \cong -0{,}4571$ (auf 4 Nachkommastellen gerundet)

AUFGABE ZUR KOMBINATORIK

Aufgabe 2 zu Abschnitt 11.1.

In einer Lostrommel befinden sich $n=3$ Lose mit den Losnummern 1, 2, 3; die betrachtete Grundmenge ist also $M=\{1,2,3\}$. Es werden nun auf verschiedene Arten $k=2$ Lose gezogen.

Fassen Sie jeweils alle Möglichkeiten in einer Menge Ω zusammen, bestimmen Sie die Anzahl $\#\Omega$ ihrer Elemente und bestätigen Sie die Richtigkeit der in der Tabelle zu 11.1.1. angegebenen Anzahlformeln für diesen Spezialfall:

a. Nach dem Ziehen wird das Los in die Lostrommel zurückgelegt; es kommt auf die Reihenfolge des Ziehens an.

b. Nach dem Ziehen wird das Los <u>nicht</u> in die Lostrommel zurückgelegt; es kommt auf die Reihenfolge des Ziehens an.

c. Nach dem Ziehen wird das Los in die Lostrommel zurückgelegt; es kommt <u>nicht</u> auf die Reihenfolge des Ziehens an.

d. Nach dem Ziehen wird das Los <u>nicht</u> in die Lostrommel zurückgelegt; es kommt <u>nicht</u> auf die Reihenfolge des Ziehens an.

Zahl auf dem Los

zu a. $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1); (3,2); (3,3)\}$

Losnummer

$\#\Omega = 9$ ← Anzahl

Formelüberprüfung: $V_W(n,k) = V_W(3,2) = 3^2 = 9$

zu b. $\Omega = \{(1,2); (1,3); (2,1); (2,3); (3,1); (3,2)$

$\#\Omega = 6$

Formelüberprüfung: $V(n,k) = V(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$

zu c. $\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); (2,2); (2,3); (3,3)\}$

$\#\Omega = 6 \mid C_W(n,k) = \binom{n+k+1}{k} = \binom{3+2+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$!

Formelüberprüfung:

zu d. $\Omega = \{(1,2); (1,3); (2,3\}$

$\#\Omega = \cancel{C(n,k)} = (^n \; 3$

Formelüberprüfung: $C(n,k) = \binom{n}{k} = 3$